BULLETIN DE LA S. M. F.

ALAIN LASCOUX

Puissances extérieures, déterminants et cycles de Schubert

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 161-179
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__161_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
102, 1974, p. 161-179.

PUISSANCES EXTÉRIEURES, DÉTERMINANTS ET CYCLES DE SCHUBERT

PAR

ALAIN LASCOUX
Université Paris VII

RÉSUMÉ. — Cet article se propose de montrer qu'étant donné un drapeau de modules localement libres $\mathbf{A}_1 \subset \ldots \subset \mathbf{A}_p$ et un module localement libre $\mathbf{E}$ sur une base lisse S quasi projective, on peut leur associer des cycles possédant les mêmes propriétés que dans le cas classique ou les $\mathbf{A}_i$ sont des modules triviaux, S une grassmannienne sur un corps algébriquement clos, et $\mathbf{E}$ le fibré « tautologique » sur la grassmannienne.

Les cycles de Schubert sont à la base de maints développements en géométrie. Nous donnerons en exemple les classes de Chern telles qu'elles ont été introduites par TODD et EGER. Une autre voie de recherche est l'étude des singularités de morphismes de fibrés et le calcul des polynômes dits de Thom-Boardman, les cycles de Schubert étant les singularités « d'ordre 1 » (*cf.* RONGA [9] ou LASCOUX [7]).

Étant donnée l'importance des cycles de Schubert, il convient donc de revenir sur les longs calculs de HODGE et PEDOË [3] qui servent de référence; ils définissent des cycles pour un drapeau trivial et le fibré tautologique sur une grassmannienne; en fait, on n'a besoin comme hypothèse que de conditions de transversalité qui se trouveront vérifiées dans le « cas général » pour définir des cycles associés à un drapeau et à un fibré sur une base lisse. Ce travail a été fait par PORTEOUS dans le cas des drapeaux de longueur 1. Signalons que l'on peut raffiner les conditions de transversalité, et les remplacer par des conditions de codimension. C'est ce que font KEMPF et LAKSOV [4] dans le cas où l'on se donne un morphisme entre deux fibrés E et F et un drapeau de sous-fibrés de E.

Pour notre part, nous nous intéressons plutôt à montrer que, mis à part une formule simple de projection d'une grassmannienne sur sa base, les propriétés des cycles de Schubert découlent de calculs « formels » de déter-

minants isobares, et nous donnons différentes expressions de ces cycles qui nous seront utiles dans [7]. Le choix de $K(S)$ permet de simplifier les calculs par rapport à l'anneau de Chow, par exemple, ce qui conduit à prendre le gradué associé (à la λ-filtration ou à la filtration par la codimension des supports) comme anneau de cohomologie. Malheureusement, il n'y a pas de morphisme de ce gradué dans l'anneau de Chow, mais simplement un isomorphisme entre ces anneaux tensorisés par $\mathbf{Q}$, ce qui nous obligera à prendre, au paragraphe 5, l'anneau de Chow tensorisé par $\mathbf{Q}$ (*cf.* [11], SGA VI, exposé XIV, pour les problèmes qui se posent en géométrie algébrique, dans le choix des anneaux de cohomologie). Remarquons cependant que nous définissons des sous-variétés de Schubert, sans nous préoccuper dans un premier temps du choix de l'anneau dans lequel nous voulons calculer leurs classes.

1. Puissances extérieures

1.1. Soit S un schéma quasi projectif, lisse, sur un corps algébriquement clos. On considère l'anneau de Grothendieck $K(S)$ des modules cohérents sur S. On note par la même lettre un module, sa classe dans $K(S)$, et son image réciproque par un morphisme $\pi : S' \to S$.

Les lettres grasses $\mathbf{A}, \ldots, \mathbf{E}$ désignent des modules localement libres de rang $a, \ldots, e$. $\mathbf{L}$ est de rang 1.

On dit que $x \in K(S)$ est d'augmentation n si $x = \mathbf{A} - \mathbf{E}$ avec $n = a - e$.

Sur $K(S)$ sont définies des puissances extérieures $\lambda^i : x \to \lambda^i x$, pour tout entier i, qui satisfont aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda^i x &= 0 \quad \text{pour} \quad i < 0, \\ \lambda^0 x &= 1, \\ \lambda^1 x &= x, \\ \lambda^i (x+y) &= \sum \lambda^j x \lambda^{i-j} y. \end{aligned}$$

On pose

$$(-1)^i \lambda^i (-x) = \circ^i x,$$

x-ième puissance symétrique, et la relation

$$0 = \lambda^i (x - x) = \sum (-1)^j \lambda^{i-j} x \,.\, \circ^j x$$

permet de retrouver la définition des puissances symétriques pour un module localement libre.

Enfin, dans $K(S)[[t]]$, on pose

$$\lambda_t(x) = \sum \lambda^i x t^i, \qquad i \in \mathbf{Z},$$

et l'on a alors

$$\lambda_t x \lambda_t y = \lambda_t(x+y).$$

1.2. Nous aurons besoin de déterminants en les puissances extérieures. Soient p éléments $x_1, \ldots, x_p$ de $K(S)$, et p entiers $n_1, \ldots, n_p$. On pose

$$\Delta(x_1, \ldots, x_p; n_1, \ldots, n_p) = \det(\lambda^{n_j+j-i}(x_j)), \qquad 1 \leqq i, j \leqq p$$

et

$$\Delta(x; n_1, \ldots, n_p) = \Delta(x, \ldots, x; n_1, \ldots, n_p).$$

REMARQUE 1. — S'il existe deux indices j, k, tels que $n_j+j = n_k+k$, alors $\Delta(x; n_1, \ldots, n_p) = 0$, deux colonnes étant égales.

REMARQUE 2. — S'il existe deux indices j, k, tels que

$$x_j = x_{j+1} = \ldots = x_k \qquad \text{et} \qquad n_j = \ldots = n_k,$$

alors, pour tout module $\mathbf{A}$ de rang $a \leqq k-j+1$,

$$\begin{aligned}&\Delta(x_1, \ldots, x_p; n_1, \ldots, n_p)\\ &\quad = \Delta(x_1, \ldots, x_{j+a-1}, x_{j+a}+\mathbf{A}, \ldots, x_k+\mathbf{A}, x_{k+1}, \ldots; n_1, \ldots),\end{aligned}$$

$\mathbf{A}$ s'élimine en effet quand on développe le déterminant suivant les colonnes.

LEMME. — *Soit $\Lambda(x, m)$ la matrice d'ordre m de terme (i, j), $\lambda^{j-i} x$; Alors les matrices $\Lambda(x, m)$ et $\Lambda(-x, m)$ sont inverses.*

Plus généralement, $\Lambda(x, m)\Lambda(y, m) = \Lambda(x+y, m)$ d'après 1.1.

PROPOSITION. — *Soient $x \in K(S)$, et $0 \leqq n_1 \leqq \ldots \leqq n_p$ une suite croissante d'entiers avec $n = n_1 + \ldots + n_p$. Alors*

$$\Delta(x; n_1, \ldots, n_p) = (-1)^n \Delta(-x; \underbrace{1, \ldots, 1}_{n_p - n_{p-1}}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n_{p-1} - n_{p-2}}, \ldots, \underbrace{p, \ldots, p}_{n_1}).$$

En effet, soient I la suite $(n_1+1, \ldots, n_p+p)$, J la suite complémentaire dans $\{1, \ldots, n_p+p\}$. Les déterminants ci-dessus sont les mineurs d'indice $(1, \ldots, p; I)$ et $(J; p+1, \ldots, n_p+p)$ respectivement, des matrices inverses $\Lambda(x, n_p+p)$ et $\Lambda(-x, n_p+p)$, et donc égaux au signe près de la permutation (I, J).

Exemple. — Si les n_i sont égaux à m, alors

$$\Delta(x;\, m, \ldots, m) = (-1)^{pm}\Delta(-x;\, p, \ldots, p).$$

1.3. Déterminants associés a un drapeau

Lemme. — *Soit une suite de* $x_j \in K(S)$, $1 \leqq j \leqq m$, *telle que* $\forall j$, $2 \leqq j \leqq m$, $x_j - x_{j-1}$ *est la classe soit de* 0, *soit d'un module localement libre de rang* 1. *Soit la matrice d'ordre m de terme* (i,j), $\lambda^{j-i}(x_j)$. *Alors son inverse est la matrice de terme* (i,j), $\lambda^{j-i}(-x_{i+1})$.

En effet, le produit des deux matrices est la matrice de terme (i,j), $\lambda^{j-i}(x_j - x_{i+1})$, qui est la matrice identité, l'augmentation de $x_j - x_{i+1}$ étant inférieure à $j-i$ strictement.

Théorème. — *Soit un drapeau* $0 = \mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A}_1 \subset \ldots \subset \mathbf{A}_p$, *et une suite d'entiers* $0 = n_0 \leqq n_1 \leqq \ldots \leqq n_p$ *tels que* $a_k - a_{k-1} \leqq n_k - n_{k-1} + 1$, $\forall\, k \leqq p$. *Soit* $n = \sum n_k$; *soit* $\mathbf{B}_k = \mathbf{A}_k - \mathbf{A}_{k-1}$. *Alors* $(-1)^n \Delta(x+\mathbf{A}_1, \ldots, x+\mathbf{A}_p;\, n_1, \ldots, n_p)$ *est égal au déterminant d'ordre* n_p *dont le terme* (i,j) *est*

$$\lambda^{j-i+1+p-\alpha(j)}(-x-\mathbf{A}_{\alpha(j)})$$

$$\text{avec} \quad \alpha(j) = \begin{cases} P & si \quad 0 < j \leqq n_p - n_{p-1}, \\ P^{-1} & si \quad n_p - n_{p-1} < j \leqq n_p - n_{p-2}, \\ \vdots & \\ 1 & si \quad n_p - n_1 < j \leqq n_p. \end{cases}$$

Démonstration. — En se plaçant sur une variété drapeau au-dessus de S (*cf.* § 3), on peut supposer que l'on a une suite x_j, $1 \leqq j \leqq n_p + p$, telle que, en notant par $\delta(x_j)$ l'augmentation de $x_j - x_{j-1}$:

$$\begin{aligned} \delta(x_{n_{k-1}+k-1}) &= 1, \\ \delta(x_{n_{k-1}+k}) &= 0, \\ &\vdots \\ \delta(x_{n_k+k-b_k}) &= 0, \\ \delta(x_{n_k+k-b_k+1}) &= 1, \\ &\vdots \\ \delta(x_{n_k+k}) &= 1 \end{aligned}$$

et

$$x_{n_k+k} = x + \mathbf{A}_k.$$

Les hypothèses du lemme sont alors vérifiées, et le mineur

$$\Delta(x+\mathbf{A}_1, \ldots, x+\mathbf{A}_p;\, n_1, \ldots, n_p)$$

est égal à $(-1)^n \det_{j\neq 1,\ldots,p;\ i\neq n_1+1,\ldots,n_p+p} \left|\lambda^{j-i}(-x_{i+1})\right|$; d'après la remarque 2 de 1.2, ce dernier est égal à

$$\det\left|\lambda^{j-i}(-x'_{i+1})\right| \qquad \text{avec} \quad x'_{n_{k-1}+k} = \ldots = x'_{n_k+k} = x_{n_k+k}.$$

On termine la démonstration grâce à une symétrie par rapport à l'antidiagonale et à une renumérotation des indices de 1 à n_p.

1.4. Cas particulier. — Soient un drapeau $\mathbf{A}_1 \subset \ldots \subset \mathbf{A}_p$, $\mathbf{F}$ un module localement libre, et une suite d'entiers $(q_1, \ldots, q_p)$ avec $f \geqq q_1 \geqq \ldots \geqq q_p$. On pose

$$\begin{aligned} &D(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p; \mathbf{F}; q_1, \ldots, q_p) \\ &= \Delta(\underbrace{\mathbf{A}_1-\mathbf{F}, \ldots, \mathbf{A}_1-\mathbf{F}}_{q_1-q_2}, \ldots, \underbrace{\mathbf{A}_p-\mathbf{F}}_{q_p}; \underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{q_1-q_2}, \ldots, \underbrace{a_p}_{q_p}). \end{aligned}$$

C'est un déterminant d'ordre q_1.

1.5. Lemme. — *Soient* $\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_i$, $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_j$. *Alors*

$$D(\mathbf{B}; \mathbf{F}; f) = \Pi\, D(\mathbf{B}_i; \mathbf{F}_j; f_j).$$

On peut supposer que les $\mathbf{B}_i$ et $\mathbf{F}_j$ se décomposent en modules de rang 1 en se plaçant sur une variété drapeau adéquate; en faisant en outre usage de $D(\mathbf{B}; \mathbf{F}; f) = (-1)^{bf} D(\mathbf{F}; \mathbf{B}; b)$, on est ramené au cas suivant :

Lemme. — *Si* $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, *avec* $\mathbf{F}_2$ *de rang* 1, *alors*

$$D(\mathbf{B}; \mathbf{F}; f) = D(\mathbf{B}; \mathbf{F}_1; f-1)\, D(\mathbf{B}; \mathbf{F}_2; 1).$$

En effet, la remarque 2 de 1.2 nous permet d'éliminer $\mathbf{F}_2$ des $f-1$ premières lignes et de la dernière colonne; le déterminant $D(\mathbf{B}; \mathbf{F}; f)$ se scinde alors en deux facteurs qui sont ceux indiqués.

1.6. Lemme. — *Supposons* $q_1 = f$. *Alors*

$$\begin{aligned} &D(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p; \mathbf{F}; f, q_2, \ldots, q_p) \\ &= D(\mathbf{A}_1; \mathbf{F}; f)\, D(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p-\mathbf{A}_1; \mathbf{F}; q_2, \ldots, q_p). \end{aligned}$$

Le théorème 1.3 nous permet de réécrire le déterminant et, comme pour le lemme précédent, on élimine $\mathbf{A}_1$ des $a_p - a_1$ premières lignes; le déterminant se scinde alors en deux facteurs dont l'un est $D(\mathbf{F}; \mathbf{A}_1; a_1)$.

2. Projectifs

Soient $\mathbf{E}$ un module localement libre, $P(\mathbf{E})$ le fibré projectif associé à $\mathbf{E}$ (« ensemble des quotients localement libres de rang 1 de $\mathbf{E}$ »), π la projection de $P(\mathbf{E})$ sur S, et

$$0 \to \mathbf{R} \to \mathbf{E} \to \xi \to 0$$

la suite canonique sur $P(\mathbf{E})$, avec $\xi = \mathcal{O}_P(1)$.

Le rang de $\mathbf{R}$ étant $e-1$,

$$0 = \lambda^e \mathbf{R} = \lambda^e(\mathbf{E}-\xi) = \sum(-\xi)^i \lambda^{e-i}\mathbf{E},$$

et il est bien connu que

$$K(P(\mathbf{E})) = \frac{K(S)[\xi]}{\sum(-\xi)^i\lambda^{e-i}\mathbf{E}}$$

(*voir* par exemple l'exposé 6 de SGA VI [11]).

On peut prendre comme base du $K(S)$ module libre $K(P)$ les $\lambda^i\mathbf{R}$ pour $0 \leqq i \leqq e-1$.

Les trois lemmes suivants sont équivalents.

2.1. Lemme. — $\pi_!(\lambda^i\mathbf{R}) = 0, \forall\, i \geqq 1$.

2.2. Lemme. — $\pi_!(\xi^i) = \circ^i\mathbf{E}, \forall\, i \geqq 0$.

2.3. Lemme. — $\pi_!(\xi^i) = 0,\ \forall\, i,\ 0 > i > -e$.

En effet, 2.1 s'écrit $\pi_!\lambda_t\mathbf{R} = 1$, et 2.2 $\pi_!\lambda_t(-\xi) = \lambda_t(-\mathbf{E})$, ce qui est la même chose, étant donné que $\lambda_t\mathbf{R} = \lambda_t\mathbf{E}\lambda_t(-\xi)$ et que $\lambda_t(-\mathbf{E}) = 1/\lambda_t(\mathbf{E})$.

L'équivalence de 2.1 et 2.3 provient des $e-1$ relations

$$0 = (-\xi)^{-i}\lambda^e(\mathbf{E}-\xi) = \lambda^{e-i}(\mathbf{E}-\xi)+\textstyle\sum_{k=1}^{i}(-\xi)^{-k}\lambda^{e-i+k}(\mathbf{E}),$$

pour $0 < i < e$.

C'est 2.3 que l'on démontre d'habitude, en notant que c'est une propriété locale et qu'il suffit donc de la vérifier dans le cas où $\mathbf{E}$ est trivial.

Remarque 2.4. — $\forall\, p \geqq 0$, $\pi_!(\xi^{-e-p}) = (-1)^{e+1}\lambda^e\mathbf{E}^* \circ^p \mathbf{E}^*$, où l'on signale par $\mathbf{E}^*$ le dual de $\mathbf{E}$.

En effet, $\pi_!(\xi^{-e-p}\lambda^e(\mathbf{E}-\xi)) = 0$, i. e.

$$\lambda^e\mathbf{E}\pi_!(\xi^{-e-p})-\lambda^{e-1}\mathbf{E}\pi_!(\xi^{-e-p+1})+\ldots+(-1)^e\pi_!(\xi^{-p}) = 0.$$

Or $\lambda^i \mathbf{E} = \lambda^{e-i} \mathbf{E}^* \lambda^e \mathbf{E}$ et la relation précédente n'est autre que $\sum (-1)^i \lambda^i \mathrm{E}^* \circ^{p-i} \mathrm{E}^* = 0$ au facteur $(-1)^{e+1} \lambda^e \mathrm{E}$ près.

2.5. Proposition. — *Soient q entiers $\geqq 0, n_1, \ldots, n_q$. Il existe des entiers $N(m_1, \ldots, m_{q-1})$ indexés par tous les ensembles de $q-1$ entiers $m_1, \ldots, m_{q-1}$ satisfaisant $\sum m_j = \sum n_i$, tels que*

$$\pi_!(\lambda^{n_1} \mathbf{R} \ldots \lambda^{n_q} \mathbf{R}) = \sum N(m_1, \ldots, m_{q-1}) \lambda^{m_1} \mathbf{E} \ldots \lambda^{m_{q-1}} \mathbf{E}.$$

On démontre la proposition par applications successives du lemme suivant :

2.6. Lemme. — *Soient deux entiers $i, j \geqq 0$. Alors il existe des entiers $M(l, k) \in \mathbf{Z}$, (l, k) parcourant l'ensemble des couples tels que $l+k = i+j$ et $k \neq 0$, avec*

$$\lambda^i \mathbf{R} \lambda^j \mathbf{R} = -\lambda^{i+j} \mathbf{E} + \sum M(l, k) \lambda^l \mathbf{E} \lambda^k \mathbf{R}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}(\lambda^i \lambda^j - \lambda^{i+1} \lambda^{j-1})(\mathbf{R}) &= \lambda^i \mathbf{R}(\lambda^j \mathbf{E} - \xi \lambda^{j-1} \mathbf{R}) - (\lambda^{i+1} \mathbf{E} - \xi \lambda^i \mathbf{R}) \lambda^{j-1} \mathbf{R} \\ &= \lambda^i \mathbf{R} \lambda^j \mathbf{E} - \lambda^{i+1} \mathbf{E} \lambda^{j-1} \mathbf{R}.\end{aligned}$$

3. Grassmanniennes

3.1. Variété drapeau. — Soient $\mathbf{E}$ un module localement libre sur S $q_1, \ldots, q_p, p$ entiers vérifiant $e > q_1 > \ldots > q_p > 0$. La variété drapeau $\mathrm{G}_{q_1 \ldots q_p}(\mathbf{E})$ est « l'ensemble des drapeaux quotients » de $\mathbf{E}$, de rangs respectifs $q_1, \ldots, q_p$ (*voir* EGA I [12]). Sa projection sur S est notée π. Sur $\mathrm{G}_{q_1 \ldots q_p}(\mathbf{E})$, on a deux drapeaux canoniques :

un drapeau de sous-modules $0 \subset \mathbf{R}_1 \subset \ldots \subset \mathbf{R}_p$, et

un drapeau de quotients $\mathbf{E} \to \mathbf{Q}_1 \ldots \to \mathbf{Q}_p \to 0$ avec les suites exactes $0 \to \mathbf{R}_i \to \mathbf{E} \to \mathbf{Q}_i \to 0$, $1 \leqq i \leqq p$.

Quand $p = 1$, la variété drapeau est dite grassmannienne; l'étude que nous ferons de $\pi_!$ se ramènera au cas d'une grassmannienne grâce au résultat suivant :

Lemme. — *Soient deux entiers q_1, q_2, $e > q_1 > q_2 > 0$.*

Sur $G_{q_1, q_2}(\mathbf{E})$, *on a un diagramme canonique et un carré cartésien :*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathbf{R}_1 \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d] & \mathbf{R}_1 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{R}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Q}_2 \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Q}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Q}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Q}_2 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & G_{q_1, q_2} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
G_{q_1} \arrow[dr, "\pi_1"'] & & G_{q_2} \arrow[dl, "\pi_2"] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

et p_1, p_2 *sont deux fibrations en grassmanniennes, i. e.*

$$(G_{q_1, q_2}(\mathbf{E}), p_1) \simeq G_{q_2}(\pi_1^*(\mathbf{Q}_1))$$

et

$$(G_{q_1, q_2}(\mathbf{E}), p_2) \simeq G_{q_1 - q_2}(\pi_2^*(\mathbf{R}_2)).$$

3.2. La variété drapeau $\mathrm{G}_{e-1, e-2, \ldots, 1}(\mathbf{E})$ se décompose en une suite de fibrations projectives, et de son étude, on peut déduire un nouveau lemme :

LEMME (*cf.* [11] SGA VI, exposé 6). — *L'anneau* $K(G_q(\mathbf{E}))$ *est un* $K(S)$ *module libre, quotient de* $K(S)[\lambda^i \mathbf{Q}]$, $0 < i \leqq q$, *par l'idéal engendré par les relations* $\lambda^j(\mathbf{E}-\mathbf{Q}) = 0$ pour $e-q+1 \leqq j \leqq e$.

En particulier, $\pi^! : K(S) \to K(G)$ est injectif.

3.3. PROPOSITION. — *Soient une grassmannienne* $\mathrm{G}_q(\mathbf{E})$, *et* q *entiers* $n_1, \ldots, n_q$ *dont l'un est* $\geqq 1$. *Alors*

$$\pi_!(\lambda^{n_1}\mathbf{R} \ldots \lambda^{n_q}\mathbf{R}) = 0.$$

On applique le lemme 3.1 au cas où $q_1 = q$, $q_2 = q-1$,

$$(G_{q, q-1}, p_2) \simeq G_1(\pi_2^* \mathbf{R}_2),$$

p_2 est une fibration projective,

$$\pi_!(\lambda^{n_1}\mathbf{R} \ldots \lambda^{n_q}\mathbf{R}) = \pi_{2!}\, p_{2!}\, p_1^!(\lambda^{n_1}\mathbf{R} \ldots \lambda^{n_q}\mathbf{R})$$

et la proposition 2.5 s'écrit :

$$p_{2!}(\lambda^{n_1} p_1^! \mathbf{R} \ldots \lambda^{n_q} p_1^! \mathbf{R}) = \sum N(m_1, \ldots, m_{q-1}) \lambda^{m_1}\mathbf{R}_2 \ldots \lambda^{m_{q-1}}\mathbf{R}_2,$$

ce qui nous permet une récurrence sur q.

Dans le cas d'un projectif ($q = 1$), la proposition est le lemme 2.1.

3.4. COROLLAIRE. — *Soient une grassmannienne* $G_q(\mathbf{E})$, $x_1, \ldots, x_q \in K(S)$, *et* $n_1, \ldots, n_q, q$ *entiers. Alors*

$$\pi_!(\lambda^{n_1}(x_1-\mathbf{Q})\ldots\lambda^{n_q}(x_q-\mathbf{Q})) = \lambda^{n_1}(x_1-\mathbf{E})\ldots\lambda^{n_q}(x_q-\mathbf{E}).$$

On remplace $\mathbf{Q}$ par $\mathbf{E}-\mathbf{R}$ dans le premier membre, et on développe. Le second membre est le seul terme qui ne comporte pas de $\lambda^n\,\mathbf{R}$, $n > 0$, lesquels s'annulent par projection.

4. Cycles de Schubert

Etant donnés deux modules localement libres, on leur associe des cycles σ et des classes $\mathcal{O}_\sigma$ dans $K(S)$, les « classes de Chern » d'un module étant un cas particulier.

4.1. MORPHISMES TRANSVERSAUX. — Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{E}$ deux modules localement libres, et un morphisme α de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{E}$. α est dit transversal si la section associée de $\mathrm{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{E})$ est transverse aux sous-variétés Σ_p de $\mathrm{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{E})$, considéré comme une variété affine : β section locale de $\mathrm{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{E})$ est une section locale de Σ_p si coker β est de rang p.

4.2. LEMME. — *Soient* α *un morphisme transversal, et* σ, *la sous-variété* $\sigma = \{ s \in S;\ \alpha$ *est nul en* $s \}$. *Alors* $\mathcal{O}_\sigma = \lambda_{-1}(\mathbf{AE}^*)$ *dans* $K(S)$.

σ est une sous-variété de S, d'après l'hypothèse de transversalité sur α. Posons $\mathbf{B} = \mathbf{AE}^*$. A α, on associe $\beta : \mathbf{B} \to \mathcal{O}_S$ et $\sigma = \{ s \in S;\ \beta$ est nul en $s \}$.

Dans le cas où $\mathbf{B}$ est de rang 1, on reconnaît la suite définissant un diviseur

$$0 \to \mathcal{O}_S(-\sigma) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_\sigma \to 0,$$

et donc $\mathcal{O}_\sigma = 1-\mathcal{O}_S(-\sigma) = \lambda_{-1}(\mathbf{B})$.

Une récurrence sur le rang de $\mathbf{B}$ va nous donner le lemme : Soient

$$S' = P(\mathbf{B}), \qquad \pi : \ S' \to S, \qquad \sigma' = \pi^{-1}(\sigma),$$

et

$$0 \to \mathbf{R} \to \mathbf{B} \to \xi \to 0$$

la suite canonique sur S'. $\pi^! : K(S) \to K(S')$ est injectif, et $\mathcal{O}_{\sigma'} = \pi^! \mathcal{O}_\sigma$. Soient γ le morphisme obtenu par composition : $\mathbf{R} \to \mathcal{O}_{S'}$, et σ'' la sous-variété de $S' = \{ s \in S';\ \gamma$ est nul en $s \}$; $i : \sigma'' \subsetneq S'$. On suppose donc, par récurrence, que $\mathcal{O}_{\sigma''} = \lambda_{-1}(\mathbf{R})$ dans $K(S')$. Sur σ'', on a un morphisme

transversal $\xi \to \mathcal{O}_{\sigma''}$ et $\mathcal{O}_{\sigma'} = \lambda_{-1}(\xi)$ dans $K(\sigma'')$; dans $K(S')$,

$$i_!(\mathcal{O}_{\sigma'}) = \lambda_{-1}(\xi)\,\mathcal{O}_{\sigma''} = \lambda_{-1}(\mathbf{R})\,\lambda_{-1}(\xi) = \lambda_{-1}(\mathbf{B}).$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Soient* $\mathbf{A} = \sum \mathbf{A}_i$ et $\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_j$ *deux décompositions en modules de rang* 1. *Alors*

$$(\lambda^e \mathbf{E})^a\,\mathcal{O}_\sigma = \Pi(\mathbf{E}_j - \mathbf{A}_i) = D(\mathbf{E};\,\mathbf{A};\,a) = (-1)^{ae}\,D(\mathbf{A};\,\mathbf{E};\,e).$$

4.3. CYCLES DE SCHUBERT. — Considérons un drapeau

$$0 = \mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A}_1 \subset \ldots \subset \mathbf{A}_p$$

sur S, strictement croissant et supposé scindé pour simplifier la démonstration : $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{i-1} \oplus \mathbf{B}_i$. Soient des morphismes transversaux β_i de $\mathbf{B}_i$ dans $\mathbf{E}$ et $\alpha_i = \beta_i + \beta_{i-1} + \ldots : \mathbf{A}_i \to \mathbf{E}$. Soit enfin une suite d'entiers

$$q_0 = e \geqq q_1 > \ldots > q_p \qquad \text{avec} \quad r_i = q_i - e + a_i,$$

vérifiant $0 \leqq r_1 \leqq \ldots \leqq r_p$ et $r_i \leqq a_i$. On pose

$$n = \sum b_i q_i.$$

On définit les sous-variétés de Schubert (dépendant des α_i, contrairement à leurs classes dans des anneaux adéquats) :

$$\Omega = \Omega(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p;\,\mathbf{E};\,q_1, \ldots, q_p) = \{s \in S;\ \forall\, i,\ \dim \operatorname{coker} \alpha_i \geqq q_i\}.$$

Soit Ω' le fermé réunion des $\Omega(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p;\,\mathbf{E};\,q'_1, \ldots, q'_p)$ pour toutes les suites $(q'_1, \ldots, q'_p) : \forall\, i,\ q'_i \geqq q_i$ et $\exists\, j,\ q'_j > q_j$. Ω' est un fermé de Ω partout de codimension $\geqq 1$.

Soient la variété drapeau $G = G_{q_1 \ldots q_p}(\mathbf{E})$, avec les quotients canoniques $\mathbf{Q}_i$ et les morphisme $\gamma_i : \mathbf{B}_i \to \mathbf{Q}_i$ que l'on déduit des β_i par composition. Soit Ω_G la sous-variété sans singularité de $G = \{\, g \in G;\ \forall\, i,\ \gamma_i$ est nul en $g\,\}$. D'après la définition de G, $\Omega_G \cap (G - \pi^{-1}(\Omega'))$ est isomorphe par π à $\Omega - \Omega'$.

Le corollaire 4.2 nous donne un module inversible $\mathbf{L}$ sur G [et même sur S, $\mathbf{L} = (\lambda^{b_1}\mathbf{B}_1)^{q_1} \ldots (\lambda^{b_p}\mathbf{B}_p)^{q_p}$] tel que

$$\mathbf{L}\,\mathcal{O}_{\Omega_G} = (-1)^n\,D(\mathbf{B}_1;\,\mathbf{Q}_1;\,q_1) \ldots D(\mathbf{B}_p;\,\mathbf{Q}_p;\,q_p).$$

4.4. THÉORÈME. — *Avec les hypothèses et les notations précédentes,*

$$\pi_!\,\mathbf{L}\,\mathcal{O}_{\Omega_G} = (-1)^n\,D(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p;\,\mathbf{E};\,q_1, \ldots, q_p).$$

$\pi : G_{q_1 \ldots q_p}(\mathbf{E}) \to S$ est une suite de fibrations en grassmanniennes et la démonstration du théorème se décompose en deux temps :

(i) Soient

$$S' = G_{q_1 \ldots q_{i-1}}(\mathbf{E}), \qquad \text{et} \qquad G' = G_{q_1 \ldots q_i}(\mathbf{E}) \simeq G_{q_i}(\mathbf{Q}_{i-1\,|\,S'}),$$
$$\pi_i : \quad G' \to S', \ \mathbf{A}'_j = \mathbf{B}_i + \ldots + \mathbf{B}_j, \qquad j \geqq i.$$

Alors

$$\pi_{i!}\, D(\mathbf{A}'_i, \ldots, \mathbf{A}'_p; \mathbf{Q}_i; q_i, \ldots, q_p) = D(\mathbf{A}'_i, \ldots, \mathbf{A}'_p; \mathbf{Q}_{i-1}; q_i, \ldots, q_p).$$

Ceci est une conséquence directe du corollaire 3.4, le déterminant étant d'ordre q_i.

(ii) Sur S' :

$$D(\mathbf{B}_{i-1}; \mathbf{Q}_{i-1}; q_{i-1})\, D(\mathbf{A}'_i, \ldots, \mathbf{A}'_p; \mathbf{Q}_{i-1}; q_i, \ldots, q_p)$$
$$= D(\mathbf{B}_{i-1}, \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_{i-1}, \ldots, \mathbf{A}'_p + \mathbf{B}_{i-1}; \mathbf{Q}_{i-1}; q_{i-1}, \ldots, q_p)$$

d'après le lemme 1.6.

4.5. Corollaire. — $\mathbf{L}\,\mathcal{O}_\Omega = D(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p; \mathbf{E}; q_1, \ldots, q_p)$ *dans l'anneau* $K(S-\Omega')$, *et* a fortiori *dans* $\mathrm{Gr}\, K(S)$.

Dans le cas particulier d'un drapeau de longueur 1, avec $q = 1$, on a par hypothèse un morphisme transversal $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{E}$ avec $a \geqq e$; Ω est le support du coker de α. Le corollaire s'écrit alors

$$\mathcal{O}_\Omega = (-1)^a \lambda^a(\mathbf{A} - \mathbf{E}) \quad \text{dans } \mathrm{Gr}\, K(S).$$

4.6. Classes de Chern dans Gr $(K(S))$. — $K(S)$ est filtré par la codimension des supports; on prend le gradué associé.

Soit $x \in K(S)$ d'augmentation $\varepsilon(x)$. La n-ième classe de Chern de x est, par définition, la classe dans le gradué de $\lambda^n(x - \varepsilon(x) + n - 1)$ (*cf.* [11], SGA VI, exposé 0, § 5, pour vérifier que cette définition donne bien une théorie de classes de Chern).

Si x est la classe d'un module $\mathbf{E}$ de rang n, et s'il existe un morphisme α transversal de $\mathbf{E}$ dans $\mathcal{O}_S$, nous reconnaissons une classe précédemment définie : le support de coker α étant Ω, alors

$$\mathcal{O}_\Omega = (-1)^n \lambda^n(\mathbf{E} - 1) \quad \text{d'apres } 4.5.$$

5. Expression des résultats précédents dans l'anneau de Chow

L'anneau de Chow est d'un emploi plus fréquent que $K(S)$. Malheureusement, il n'y a pas de morphisme de $K(S)$ dans cet anneau $\mathscr{A}(S)$,

même en caractéristique zéro, mais simplement un isomorphisme entre $K(S) \otimes \mathbf{Q}$ et $\mathscr{A}(S) \otimes \mathbf{Q}$ (*cf.* [11], SGA VI, exposé 14). Nous négligerons la torsion pour traduire les résultats précédents; il faudrait dans $\mathscr{A}(S)$ une démonstration directe calquée sur les paragraphes précédents.

On définit donc les classes de Chern rationnelles de $x \in K(S)$ dans l'anneau de Chow tensorisé par $\mathbf{Q}$:

$$c(x) = 1 + c_1(x) + \ldots + c_n(x) + \ldots, \; c_n(x) \in \mathscr{A}^n(S).$$

Il nous suffit ici de connaître c dans le cas suivant :

5.1. Lemme (*cf.* [11], SGA VI, exposé 0). — *Si σ est une sous-variété réduite de codimension n, et si $x = \mathcal{O}_\sigma$, $[\sigma]$ étant la classe de σ dans $\mathscr{A}(S)$, alors $c_i(x) = 0$ pour $1 \leqq i \leqq n-1$, et*

$$c_n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,[\sigma].$$

5.2. Lemme. — *Soient $x \in K(S)$ d'augmentation nulle, et deux entiers m, n avec $m \geqq n$. Alors*

$$c_i(\lambda^m(x+n-1)) = 0 \qquad \textit{pour} \quad 0 < i < n,$$
$$c_n(\lambda^m(x+n-1) = (-1)^{m-1}(n-1)!\,c_n(x).$$

Les $c_i(\lambda^m(x+n-1))$ cherchés sont des polynômes homogènes en les $c_j(x)$, $j \leqq n$. Pour déterminer les coefficients de ces polynômes, il suffit de considérer le cas où $x = \mathbf{E} - n$, avec $\mathbf{E}$ localement libre de rang n. Alors

$$\begin{aligned}\lambda^m(\mathbf{E}-1) &= \textstyle\sum_{i=0}^m (-1)^{m-i}\lambda^i \mathbf{E} = \sum_{i=0}^n (-1)^{m-n}(-1)^{n-i}\lambda^i \mathbf{E} \\ &= (-1)^{m-n}\lambda^n(\mathbf{E}-1) = (-1)^m \lambda_{-1}(\mathbf{E}),\end{aligned}$$

et le cas $m = n$ est traité dans l'exposé [11] cité.

5.3. Lemme. — *Soient $x, y \in K(S)$ d'augmentation nulle, avec*

$$c_i(x) = 0 \quad \textit{pour } 0 < i < m, \qquad \textit{et} \qquad c_j(y) = 0 \quad \textit{pour } 0 < j < n;$$

alors

$$c_j(xy) = 0 \qquad \textit{pour} \quad 0 < j < m+n,$$

et

$$c_{m+n}(xy) = -\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,(n-1)!}\, c_m(x)\, c_n(y).$$

COROLLAIRE. — *Soient* $x_1, \ldots, x_p \in K(S)$ *d'augmentation nulle, et des entiers* m_j, n_j *avec* $m_j \geqq n_j$, $1 \leqq j \leqq p$. *Soient*

$$n = \sum n_j \qquad et \qquad m = \sum m_j,$$
$$y = \lambda^{m_1}(x_1+n_1-1) \ldots \lambda^{m_p}(x_p+n_p-1);$$

alors

$$c_i(y) = 0 \qquad pour \quad 0 < i < n$$

et

$$c_n(y) = (-1)^{m-1}(n-1)!\, c_{n_1}(x_1) \ldots c_{n_p}(x_p).$$

Nous renvoyons une fois de plus à [11] pour la démonstration du lemme.

5.4. Les déterminants en les classes de Chern que nous allons considérer sont les $\Delta'(x_1, \ldots, x_p; n_1, \ldots, n_p)$ dont le terme (i, j) est $c_{n_j+j-i}(x_j)$.

Avec les hypothèses de 4.3, on notera par $\mathrm{D}'(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p; \mathbf{E}; q_1, \ldots, q_p)$ le déterminant d'ordre q_1 :

$$\Delta'(\underbrace{\mathbf{A}_1-\mathbf{E}, \ldots}_{q_1-q_2}, \underbrace{\mathbf{A}_p-\mathbf{E}}_{q_p}; \underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{q_1-q_2}, \ldots, \underbrace{r_p, \ldots, r_p}_{q_p}).$$

5.5. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses de* 4.3, *avec de plus* $m = \sum r_i(q_i - q_{i+1})$, *la classe du cycle de Schubert :*

$$\Omega(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p; \mathbf{E}; q_1, \ldots, q_p) \quad dans\ \mathscr{A}(S) \otimes \mathbf{Q}$$
$$est\ (-1)^m D'(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p; \mathbf{E}; q_1 \ldots),$$

Ω est une variété réduite irréductible de codimension m, Ω_G étant une sous-variété sans singularité de codimension n de la variété drapeau $G_{q_1, \ldots, q_p}(\mathbf{E})$ [G est de dimension $\sum q_i(q_{i-1}-q_i)$ sur S].

Démonstration de la proposition. — $\mathscr{A}^n(S) \simeq \mathscr{A}^n(S-\Omega')$, Ω' étant de codimension $\geqq n+1$.
4.5 et 5.1 nous donnent

$$(-1)^{m-1}(m-1)!\,[\Omega] = (-1)^n c_m(D(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p; \mathbf{E}; q_1, \ldots, q_p))$$
$$\text{dans } \mathscr{A}(S) \otimes \mathbf{Q}.$$

La classe du déterminant D apparaît aisément après une transformation de celui-ci : en introduisant de nouvelles notations, si $D = \det(\lambda^{n_j+j-i}(x_j))$, alors en additionnant lignes et colonnes,

$$D = \det(\lambda^{n_j+j-i}(x_j+j-i+q_k-1))$$
$$\text{avec } k \text{ tel que } x_j = \mathbf{A}_k - \mathbf{E}.$$

La diagonale principale du déterminant est alors

$$\underbrace{\lambda^{a_1}(\mathbf{A}_1-\mathbf{E}+q_1-1), \ldots, \lambda^{a_1}(\mathbf{A}_1-\mathbf{E}+q_1-1)}_{q_1-q_2}, \ldots, \underbrace{\lambda^{a_p}(\mathbf{A}_p-\mathbf{E}+q_p-1)}_{q_p}.$$

Nous avons fait apparaître les augmentations qui convenaient pour appliquer le corollaire 5.3,

$$\begin{aligned} &c_m(D(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p; \mathbf{E}; q_1, \ldots, q_p)) \\ &\quad = (-1)^{n-1}(m-1)!\, D'(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p; \mathbf{E}; q_1, \ldots, q_p), \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

Les paragraphes suivants sont des applications de la proposition 5.5.

5.6. Déterminants isobares en les classes de Chern. — Comme le nom l'indique, ce sont les déterminants $|c_{m_i+n_j+j-i}(x)|$, $1 \leqq i, j \leqq p$. En considérant les mineurs associés des matrices inverses $[c_{j-i}(x)]$ et $[c_{j-i}(-x)]$, on obtient un théorème de dualité (*cf.* Aitken [1]) de tels déterminants. Nous n'aurons besoin de ce théorème que dans les cas suivants :

Lemme 1. — *Soit* $(n_1, \ldots, n_p)$ *une suite croissante d'entiers. Alors*

$$\det |c_{n_j+j-i}(x)| = (-1)^n \det |c_{m_i+j-i}(-x)|, \qquad 1 \leqq i, j \leqq p,$$

avec

$$\begin{aligned} m_i &= p \qquad \textit{pour} \quad 1 \leqq i \leqq n_1, \\ m_i &= p-1 \qquad \textit{pour} \quad n_1 < i \leqq n_2, \ldots, \end{aligned}$$

et

$$n = \sum n_i.$$

La démonstration est la même que pour la proposition 1.2.

Lemme 2. — *Soit* $x \in K(S)$ *tel que* $c_{p+i}(-x) = 0$, $\forall\, i > 0$; *alors*

$$\det |c_{m_i+j-i}(x)| \det |c_{n_j+j-i}(x)| = \det |c_{m_i+n_j+j-i}(x)|, \qquad 1 \leqq i, j \leqq p.$$

Ce lemme est dû à Porteous [8] qui n'en donne pas la démonstration : moyennant une permutation éventuelle de lignes et de colonnes, on peut supposer que les suites m_{p-i} et n_i sont croissantes; on applique le lemme précédent à chacun des déterminants

$$|c_{m_i+j-i}(x)| \quad \text{et} \quad |c_{n_j+j-i}(x)|$$

et l'on constate que le produit des deux nouveaux déterminants est le mineur d'indice

$$(1, \ldots, \widehat{m_1+n_1+1}, \ldots, \widehat{m_1+n_p+p};$$
$$\hat{1}, \ldots, \widehat{m_1-m_2+1}, \ldots, \widehat{m_1-m_3+2}, \ldots, m_1+n_p+p)$$

de la matrice $[c_{j-i}(-x)]$ d'ordre m_1+n_p+p, où le signe $\hat{}$ désigne les indices manquants; revenant à $[c_{j-i}(x)]$, on conclut.

LEMME 3. — *Soient n_i une suite croissante* $(1 \leqq i \leqq p)$, *et h un entier positif; alors* $\det | c_{m_i+n_j+j-i}(x) |$, *pour* $m_1 = h$, $m_i = 0$, $i \neq 1$, *est égal à* $\sum \det | c_{r_j+j-i}(x) |$, *la somme s'effectuant sur toutes les suites croissantes r_j telles que*

$$n_j \leqq r_j \leqq n_{j+1} \qquad \textit{et} \qquad \sum r_j = \sum n_j + h.$$

Soit en effet un déterminant d'ordre p $| c_{n(i,j)}(x) |$; alors

$$\sum \det | c_{n(i,j)+\alpha(i)}(x) | = \sum \det | c_{n(i,j)+\beta(j)} |,$$

la sommation s'étendant aux suites d'entiers positifs tels que

$$\sum \alpha(i) = h, \qquad \sum \beta(j) = h.$$

Dans le cas où $n(i,j) = n_j$ et où n_j est une suite croissante, les déterminants des deux sommes qui ne sont pas nuls ou qui ne s'éliminent pas deux à deux sont obtenus pour la suite $\alpha = (h, 0, \ldots, 0)$ et les suites β telles que $n_j + \beta(j) \leqq n_{j+1}$, ce qui est bien le lemme indiqué.

De manière plus générale, un déterminant isobare $\det | c_{m_i+n_j+j-i} |$ s'exprime comme une somme à coefficients rationnels de déterminants de la forme $\det | c_{r_j+j-i} |$ avec $\sum r_j = \sum m_i + n_i$.

5.7. CYCLES DE SCHUBERT SUR UNE GRASSMANNIENNE. — C'est le cas classique auquel nous faisions référence dans l'introduction; nous renvoyons à HODGE et PEDOË [3], ou pour un exposé plus « moderne » à LAKSOV [6].

Soient une grassmannienne $S = G_q(k^{p+q})$ sur un corps algébriquement clos, $\mathbf{Q}$ le fibré taugologique sur la grassmannienne, $\mathbf{A}_1 \subset \ldots \subset \mathbf{A}_p$ un drapeau strictement croissant de modules triviaux sur S.

On prend $r_i = i$, et l'on pose

$$n = \sum q_i(r_i - r_{i-1}) = \sum q_i,$$

et $\Omega(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_p; \mathbf{Q}; q_1, \ldots, q_p)$ est noté dans ce cas $\Omega(a_1, \ldots, a_p)$.

La proposition 5.5 s'écrit

$$[\Omega(a_1, \ldots, a_p)] = (-1)^n \det |c_{m_j+j-i}(-\mathbf{Q})|,$$

avec $m_j = l$ si $q_1 - q_l < j \leqq q_1 - q_{l+1}$, $1 \leqq l \leqq p$. Autrement dit, par dualité, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME (HODGE et PEDOË) :

$$[\Omega(a_1, \ldots, a_p)] = \det |c_{q_i+j-i}(\mathbf{Q})|, \qquad 1 \leqq i, j \leqq p.$$

Ce théorème était démontré à l'aide de la formule de Pieri suivante :

PROPOSITION. — *$c_h \Omega(a_1, \ldots, a_p) = \sum \Omega(a'_1, \ldots, a'_p)$ la somme s'étendant à toutes les suites a'_i telles que $\sum a'_i = \sum a_i - h$ et $a_{i-1} < a'_i \leqq a_i$.*

Cette formule résulte des lemmes 2 et 3 de 5.6 et de l'expression de Ω comme déterminant isobare

$$c_h[\Omega] = \det |c_{q_i+j-i+m_j}(\mathbf{Q})| \qquad \text{avec} \quad m_1 = \ldots = m_{p-1} = 0, \quad m_p = h;$$

ce dernier déterminant est égal à $\sum \det |c_{q'_i+j-i}|$ pour toutes les suites $(q'_1, \ldots, q'_p)$ telles que $\sum q'_i = \sum q_i + h$ et $q_i \leqq q'_i \leqq q_{i-1}$, ce qui est bien la somme indiquée lorsque l'on exprime les q_i en fonction des a_i.

Remarque. — Le lemme 2 de 5.6 nous permet d'exprimer l'intersection de deux cycles de Schubert comme déterminant d'ordre p :

$$[\Omega(a_1, \ldots, a_p)\Omega(a'_1, \ldots, a'_p)] = \det |c_{q_i+q'_{p-j+1}+j-i}(\mathbf{Q})|.$$

5.8. SINGULARITÉS D'ORDRE 1 DE MORPHISMES DE FIBRÉS. — C'est le cas des drapeaux de longueurs 1, qui a été traité par PORTEOUS [8]. :

Soient deux modules localement libres $\mathbf{A}$ et $\mathbf{E}$, α un morphisme transversal $\mathbf{A} \to \mathbf{E}$. $\Omega(\mathbf{A}; \mathbf{E}; q)$ est la sous-variété où le coker de α est de rang $\geqq q$, et 5.5 se traduit par

$$\begin{aligned} [\Omega] &= (-1)^{rq} \det |c_{r+j-i}(\mathbf{A}-\mathbf{E})|, \qquad 1 \leqq i, j \leqq q, \\ &= \qquad \det |c_{q+j-i}(\mathbf{E}-\mathbf{A})|, \qquad 1 \leqq i, j \leqq r \quad \text{dans } \mathscr{A}(S) \otimes \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Signalons encore que ces cycles sont appelés « cycles spéciaux de Schubert » par KLEIMAN [5].

5.9. CLASSES DE CHERN D'UN MODULE LOCALEMENT LIBRE. — Quand on restreint les hypothèses de 5.8 au cas où $\mathbf{A}$ est trivial et $r = 1$, on obtient

les classes de Chern rationnelles de $\mathbf{E}$: $[\Omega] = c_{e-a+1}(\mathbf{E})$. On a ici une définition par « obstruction » des classes de Chern : $\mathbf{E}$ admet un sous-module trivial de rang a sur $S-\Omega$. Les classes de Chern ont été définies primitivement de cette manière, pour le fibré tangent d'une variété (et dites classes de Chern de la variété).

5.10. Classes de Chern d'une variété suivant Eger [2].

Proposition. — *Soit S une variété algébrique de dimension n sur laquelle on a $h+1$ intégrales de Picard ayant un lieu jacobien simple J (i. e. de dépendance linéaire) de dimension h. Alors*

$$c_{n-h}(S) = (-1)^{n-h}[J].$$

En d'autres termes, on a un morphisme transversal sur S en dimension $\geqq h$ de $(h+1)\mathcal{O}_S$ dans le module des 1-formes différentielles $\Omega^1(S)$; d'après 5.9,

$$[J] = c_{n-h}(\Omega^1(S)) \quad \text{dans } \mathscr{A}(S) \otimes \mathbf{Q}.$$

Cela permettait à Eger de définir J comme classe caractéristique de la variété, après avoir remarqué qu'elle ne dépendait pas du système d'intégrales simples. Malheureusement, l'hypothèse de la proposition sur l'existence des intégrales de Picard restreint le choix de la variété.

5.11. Classes de Chern d'une variété projective sur $\mathbf{C}$ suivant Todd (*cf.* Porteous [8]). — Soit S une sous-variété projective de dimension n, sans singularité, de $P(\mathbf{C}^N)$. Todd introduit les variétés polaires M_k de S : pour tout k, $0 \leqq k \leqq n-1$, on se donne un plan de dimension $N-k-2$, $P(N-k-2)$, en « position générale » par rapport à S; on pose alors

$$M_k = \{s \in S;\ \text{l'intersection du plan tangent en } s \text{ avec } P(N-k-2) \text{ est de dimension} > n-k-2\}.$$

En d'autres termes, soit le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & T(S) & \longrightarrow & T(P)|_S & \longrightarrow & \mathcal{N}_{S/P} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \wr\!\wr & & \\
0 & \longrightarrow & T' & \longrightarrow & (N+1)\mathcal{O}_S(1) & \to & \mathcal{N}_{S/P} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathcal{O}_S & \simeq & \mathcal{O}_S & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

où $\mathcal{N}_{S/P}$ est le module normal du plongement de S dans $P(\mathbf{C}^N)$, $\mathbf{T}(S)$ le module des vecteurs tangents à S, et soit $\mathbf{T}'$ le module qui complète le diagramme.

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où ce plongement est suffisamment ample pour que le morphisme de S dans $G_{n+1}(\mathbf{C}^{N+1})$ associé à l'injection de $T'\mathcal{O}_S(-1)$ dans $(N+1)\mathcal{O}_S$ soit un plongement $u : S \hookrightarrow G$ [$T'\mathcal{O}_S(-1)$ est l'image réciproque par u du dual de $\mathbf{Q}$, quotient canonique sur G]. Les M_k sont les intersections de variétés de Schubert dans G avec S : à $P(N-k-2)$ est associé un module $\mathbf{A}_{k+2}$ quotient trivial de rang $k+2$ de $(N+1)\mathcal{O}_P$. On se place dans l'hypothèse où le morphisme composé de $T'\mathcal{O}_S(-1)$ dans $\mathbf{A}_{k+2}$ est transversal.

Avec ces notations,

$$M_k = \Omega(T'\mathcal{O}_S(-1);\ \mathbf{A}_{k+2};\ 1) = u^{-1}(\Omega(\mathbf{Q}^*;\ (k+2)\mathcal{O}_G;\ 1))$$

et

$$[M_k] = (-1)^{n-k} c_{n-k}(T'\mathcal{O}_S(-1)).$$

Si X est la classe d'une section hyperplane dans $\mathcal{A}(S)$, alors

$$(1) \qquad (-1)^{n-k}[M_k] = \sum c_{n-k-i}(T(S))\binom{k+1+i}{i}(-X)^i,$$

et inversement,

$$c(T(S)) = c(T') = c((T'\mathcal{O}_S(-1) \otimes \mathcal{O}_S(1))$$

c'est-à-dire :

$$(2) \qquad (-1)^p c_p(T) = \sum_{k=n-p}^{k=n} \binom{k+1}{p+k-n}[M_k](-X)^{p+k-n}.$$

Les deux formules équivalentes (1) et (2) servaient à Todd à définir les classes de Chern de la variété, une fois qu'il avait remarqué qu'elles ne dépendaient pas du plongement projectif choisi.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aitken (A. C.). — On determinants of symmetric functions, *Proc. Edinburg math. Soc.*, Series 2, t. 1, 1927-1929, p. 55-61; et Note on dual symmetric functions, t. 2, 1930-1931, p. 164-167.

[2] Eger (Max). — Sur les systèmes canoniques d'une variété algébrique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 204, 1937, p. 92-94 et 217-219.

[3] Hodge (W. V. D.) et Pedoë (D.). — *Methods of algebraic geometry*, 3 vol. — Cambridge, The University Press, 1947-1954.

[4] KEMPF et LAKSOV. — The determinental formula of Schubert calculus, *Acta Mathematica* (à paraître).

[5] KLEIMAN (S. L.). — Geometry on Grassmannians and Applications... « *Volume dédié au Professeur Oscar Zariski* », p. 281-298. — Paris, Presses Universitaires de France, 1969 (*Institut des Hautes Etudes scientifiques. Publications mathématiques*, 36).

[6] LAKSOV (D.). — Algebraic cycles on Grassmann varieties, *Advances in Math*, t. 9, 1972, p. 267-295.

[7] LASCOUX (A.). — *Les cycles critiques de morphismes de fibrés* (à paraître).

[8] PORTEOUS (I. R.). — Simple singularities of maps, « *Proceedings of Liverpool singularities symposium*, I, p. 286-307. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in mathematics*, 192); et Todd's canonical classes, « *Proceedings of Liverpool singularities symposium*, I, p. 308-312. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 192).

[9] RONGA (F.). — *Les classes duales aux singularités de Boardman* (à paraître).

[10] TODD. — The geometric invariants of algebraic loci, *Proc. London math. Soc.*, Series 2, t. 43, 1937, p. 127-138 et 190-225.

[11] Séminaire de Géométrie algébrique, 1966/67 [SGA VI] : *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lectures Notes in Mathematics*, 225).

[12] GROTHENDIECK (A.). — *Eléments de géométrie algébrique*, I. *Le langage des schémas*. — Paris, Presses universitaires de France, 1960 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publication mathématiques, 4).

(Texte reçu le 24 janvier 1974.)

Alain LASCOUX
U.E.R. de mathématiques,
Université de Paris-VII
Tour 55,
2, place Jussieu
75221 Paris-Cedex 05