BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES EMSALEM

Projectivité des schémas en courbes sur un anneau de valuation discrète

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 255-263
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__255_0>

Bull. Soc. math. France,
101, 1973, p. 255-263.

PROJECTIVITÉ DES SCHÉMAS EN COURBES SUR UN ANNEAU DE VALUATION DISCRÈTE

PAR

JACQUES EMSALEM

RÉSUMÉ. — J. E. GOODMAN a montré que, dans un schéma de type fini, réduit, irréductible, de dimension 2 sur un corps algébriquement clos, le complémentaire d'un ouvert affine, contenant toutes les singularités, est le support d'un diviseur ample. L'objet du présent article est d'aboutir à la même conclusion pour un schéma propre, plat et de dimension relative 1 sur le spectre d'un anneau de valuation discrète, et un ouvert affine, dense, contenant toutes les singularités. Cette propriété se globalise facilement au-dessus d'un schéma régulier de dimension 1, et on retrouve le résultat de GOODMAN en fibrant, après des éclatements convenables, une surface régulière sur un corps quelconque au-dessus de la droite projective. Il est à noter que, sans caractériser les diviseurs amples, S. LICHTENBAUM a montré qu'un schéma régulier, propre, plat et de dimension relative 1 au-dessus d'un anneau de Dedekind, est projectif.

NOTA. — *Dans ce qui suit, diviseur signifiera diviseur de Cartier positif.*

Soit $X \to S$ un schéma, de dimension relative 1, propre et plat au-dessus du spectre S d'un anneau de valuation discrète.

On suppose que les points singuliers de X sont en nombre fini, et sont tous contenus dans un ouvert affine de X.

Soit Ω un tel ouvert affine auquel on impose, en outre, de rencontrer toutes les composantes connexes de X. On se propose de démontrer que $X - \Omega$ est le support d'un diviseur ample; plus précisément, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit D un diviseur de support $X - \Omega$. Soient H sa partie horizontale, V sa partie verticale, et $(V_i)_{1 \leq i \leq p}$ les composantes irréductibles de V.*

Il existe alors des entiers strictement positifs n, $(n_i)_{1 \leq i \leq p}$, tels que $n H + \sum_{1 \leq i \leq p} n_i V_i$ soit un diviseur S-ample. En particulier, X est S-projectif.

Remarque. — Ω étant donné, on vérifie facilement que $X - \Omega$ est purement de codimension 1 (*voir* [3], exposé V, exemple 3.4), et d'autre part, par définition de Ω, $X - \Omega$ se trouve dans la partie régulière de X. $X - \Omega$ est donc toujours le support d'un diviseur positif.

Soit $\mathcal{L}$ le faisceau inversible sur X, associé à un diviseur

$$n H + n_1 V_1 + \ldots + n_p V_p.$$

Pour que $\mathcal{L}$ soit S-ample, il faut et il suffit que sa restriction à la fibre spéciale X_s de X soit ample. En effet, comme le seul ouvert de S contenant le point fermé est S lui-même, ceci résulte de la proposition suivante ([2], IV, 3e partie, corollaire 9.6.4) :

Soient $f : X \to S$ un morphisme propre de présentation finie, et $\mathcal{L}$ un O_X-module inversible. Alors l'ensemble E des $s \in S$ tels que $\mathcal{L}_s$ soit ample (relativement à f_s) est ouvert dans S, et $\mathcal{L}/f^{-1}(E)$ est ample relativement à la restriction $f^{-1}(E) \to E$ de f.

Or soit C une courbe. Pour qu'un diviseur sur C soit ample, il faut et il suffit que sa restriction à chacune des composantes irréductibles de C ait un degré strictement positif (*voir* par exemple [2], IV, 4e partie, corollaire 21.9.7, et remarque suivant ce corollaire).

Finalement, avec ces remarques, la démonstration du théorème se réduit à la démonstration de la proposition ci-après.

PROPOSITION 1. — *Sous les hypothèses du théorème, il existe des entiers* $n, n_1, \ldots, n_p > 0$, *tels que* $n H + n_1 V_1 + \ldots + n_p V_p$ *intersecte chacune des composantes irréductibles de la fibre spéciale* X_s *de* X *de façon strictement positive.*

A son tour la proposition 1 équivaut à la proposition 2 :

PROPOSITION 2. — *Il existe des entiers* $n, n_1, \ldots, n_p > 0$, *tels que*

$$(n H + n_1 V_1 + \ldots + n_p V_p, V_i) > 0, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, p.$$

[*Si* D *et* E *sont deux diviseurs de* X, (D, E) *désigne leur nombre d'intersection.*]

Remarque. — Nous n'utilisons de théorie du nombre d'intersection de deux diviseurs positifs que dans la partie régulière de X. Pour une telle théorie, *voir* [7], p. 83.

En effet, supposons vérifiée la conclusion de la proposition 2. Soit W une composante irréductible de la fibre spéciale distincte des V_i. Alors W propre sur S, et de dimension 1, ne peut être contenue dans Ω qui est affine. Il en résulte facilement qu'elle rencontre de façon strictement positive l'une des V_i, ou H et *a fortiori* $n H + n_1 V_1 + \ldots + n_p V_p$.

Pour démontrer la proposition 2, il suffit de montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — *Soient* $(K_i)_{1\leq i\leq s}$ *les composantes connexes de* V, *et pour* $i\leq i\leq s$, $V^i_1, \ldots, V^i_{k_i}$ *les composantes irréductibles de* K_i. *Alors il existe des entiers strictement positifs* n^i, $n^i_1, \ldots, n^i_{k_i}$, *tels que*

$$(1\leq l\leq k_i) \Rightarrow \big(n^i H + n^i_1 V^i_1 + \ldots + n^i_{k_i} V^i_{k'_i} V^i_1 > 0\big).$$

On aboutira, en effet, à la conclusion de la proposition 2 en prenant le diviseur

$$\Sigma_{1\leq i\leq s} (n^i H + n^i_1 V^i_1 + \ldots + n^i_{k_i} V^i_{k_i}).$$

Montrons donc la proposition 3.

A cet effet, énonçons la propriété suivante des composantes connexes de V, qui va nous servir :

LEMME 1. — *Soit* K *une composante connexe de* V. *Alors* K *rencontre* H.

Pour la démonstration de ce lemme, nous introduisons les développements suivants (proposition A jusqu'au lemme C inclus) :

PROPOSITION A. — *Soit* $X\to S$ *comme dans le théorème, et tel qu'en outre* S *soit hensélien. Soient* s *le point fermé de* S, g *son point ouvert,* X_s *la fibre spéciale de* X, *et* X_g *sa fibre générique. Soient* $(D_i)_{1\leq i\leq p}$ *les composantes irréductibles de* X_g, $\overline{D}_i$ *l'adhérence schématique de* D_i *dans* X, *et* $\overline{D}_{is} = X_s \times_X \overline{D}_i$.

Soit C *une composante irréductible de* X_s *dont le support soit distinct de celui de* $\overline{D}_{is}$ *pour* $1\leq i\leq p$. *Alors* C *peut être contractée en un point.*

D'où aussi : *soit* K *une réunion connexe de composantes irréductibles de* X_s *dont le support soit distinct de celui de* $\overline{D}_{is}$ *pour* $1\leq i\leq p$. *Alors* K *est peut être contractée en un point.*

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de la proposition* A, *et si* X *est intègre, toute réunion connexe de composantes irréductibles de* X_s, *distincte de* X_s *peut être contractée en un point.*

Démonstration de la proposition A. — Cette proposition résulte des lemmes A et B ci-après :

LEMME A. — *Soit* $X\to S$ *un schéma propre, plat, de dimension relative* 1 *au-dessus du spectre d'un anneau de valuation discrète, et soit* D *un diviseur relatif sur* X, *strictement positif, au-dessus de* S. *On suppose que* D *rencontre toutes les composantes irréductibles de la fibre générique de* X. *Soient* $C_1, \ldots, C_n$ *les composantes irréductibles de la fibre spéciale non rencontrées par* D.

Il existe alors une contraction

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr] & X' \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd} \quad \textit{de } C_1, \ldots, C_n,$$

c'est-à-dire un S-morphisme λ, surjectif, qui, en dehors des C_i, $1 \leq i \leq n$, est un isomorphisme, et qui envoie chacun des C_i sur un point x_i. De plus, X' est propre, et plat sur S, et le diviseur D est l'image réciproque par λ d'un diviseur D' sur X', S-ample.

C'est une démonstration de RAYNAUD (Cours 1970-1971) qui est reproduite ici.

Soit $\mathcal{L} = O_X(D)$ le faisceau inversible associé à D.

(i) Nous allons montrer que, pour n assez grand, $\mathcal{L}^{\otimes n}$ est engendré par ses sections. Soit H le sous-schéma fermé associé à D. En dehors de H, il est clair que $\mathcal{L}^{\otimes n}$ est engendré par ses sections. Montrons que c'est vrai aussi sur H.

Considérons la suite exacte

$$0 \to O_H(-D) \to O_X \to O_X \to 0.$$

Tensorisant par $O_X((n+1)D)$, on en déduit la suite exacte

$$0 \to O_H(nD) \to O_X((n+1)D) \to O_X((n+1)D) \to 0,$$

d'où la suite exacte de cohomologie

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(O_X(nD)) \to H^0(O_X((n+1)D)) \to H^0(O_H((n+1)D)) \\ &\to H^1(O_X(nD)) \to H^1(O_X((n+1)D)) \to 0, \end{aligned}$$

car $H^1(O_H((n+1)D)) = 0$; en effet, H est un schéma fini sur S [quasi-fini et propre ([2], III, 4.4.2)] qui est affine, donc H est affine ([2], II, 6.1.4), d'où la conclusion par [2] (II, 5.2).

Par ailleurs, $H^1(O_X(nD))$ est un S-module artinien pour n assez grand, car il est nul sur la fibre générique : en effet, nD, restreint à cette courbe, est ample, et on en conclut par [2] (III, 2.6.1).

De la surjectivité de $H^1(O_X(nD)) \to K^1(O_X((n+1)D))$, on déduit que la longueur de $H^1(O_X(nD))$ ne peut que décroître. Pour n assez grand, elle est donc stationnaire; la flèche

$$H^1(O_X(nD)) \to H^1(O_X((n+1)D))$$

étant alors un isomorphisme, on a la suite exacte

$$0 \to H^0(O_H(nD)) \to H^0(O_X((n+1)D) \to H^0(O_X((n+1)D)) \to 0,$$

donc $\mathcal{L}^{\otimes n}$ est aussi engendré par ses sections aux points de Supp (H).

(ii) Par [2] (II, 4.2.2), on obtient alors un morphisme partout défini (en appelant $\mathcal{L}'$ le faisceau $\mathcal{L}^{\otimes n}$ pour n suffisamment grand) :

$$v : \quad X \to \operatorname{Proj}\,(\operatorname{Sym}\Gamma\,(X, \mathcal{L}')),$$

où Sym ($\Gamma\,(X, \mathcal{L}')$) désigne l'algèbre symétrique de $\Gamma\,(X, \mathcal{L}')$ considéré comme S-module.

(A) v envoie chacune des composantes irréductibles de X_s, qui ne rencontrent pas D, en un point. En effet, la restriction de $\mathcal{L}'$ à l'une de ces composantes est le faisceau trivial.

(B) Restreint à la fibre générique, ce morphisme est un isomorphisme sur son image et un isomorphisme local (la fibre générique est une courbe, et si on a pris n assez grand, $\mathcal{L}'$ restreint à cette courbe est très ample. D'autre part, cette courbe et son image sont ouvertes, étant les images réciproques du point ouvert de S puisque v est un S-morphisme).

(C) Restreint à la réunion des composantes irréductibles de la fibre spéciale qui sont rencontrées par D, v est quasi-fini. v est donc quasi-fini en dehors des $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$, et il envoie chacune des C_i sur un point.

(iii) Considérons alors ([2], III, 4.3.1) la factorisation de Stein du morphisme v,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "u"'] & & \operatorname{Proj}\operatorname{Sym}\Gamma\,(X, \mathcal{L}'), \\ & Y \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

σ est fini ([2], III, 4.3.1), donc Y est S-projectif comme fini au-dessus d'un S-projectif ([2], II, 6.1.11).

D'autre part, u est un isomorphisme de l'ouvert des points où v est quasi-fini (c'est-à-dire le complémentaire de $\bigcup_{1 \leq i \leq n} C_1$ sur son image dans Y qui est ouverte ([2], III, 4.4.1).

Enfin, chacune des C_i est envoyée par u sur un point de Y, car son image est irréductible et, par ailleurs, est contenue dans l'image réciproque d'un point par σ. u est donc la contraction cherchée.

D'autre part, $\mathcal{L}$ étant l'image réciproque d'un faisceau $\mathcal{L}_1$ inversible ample sur Proj Symp $\Gamma\,(X, \mathcal{L}')$, et $\sigma^* \mathcal{L}_1$ étant ample puisque σ est fini, $\mathcal{L}$ est bien l'image réciproque par u d'un faisceau ample sur Y.

LEMME B. — *Soit $X \to S$ un schéma propre, plat, de dimension relative* 1 *au-dessus du spectre d'un anneau local hensélien. Soient $C_1, \ldots, C_n$ des composantes irréductibles de la fibre spéciale de* X.

On suppose que, quelle que soit la composante irréductible Γ *de la fibre générique, l'adhérence* $\overline{\Gamma}$ *de* Γ *n'a pas sa fibre spéciale contenue dans la réunion des C_i.*

Alors il existe un diviseur relatif D positif sur X, qui est ample sur la fibre générique, et dont le support rencontre toutes les composantes irréductibles de la fibre spéciale, sauf les C_i.

Démontrons d'abord le lemme classique suivant :

LEMME C. — *Soit $X \to S$ vérifiant les hypothèses du lemme* B. *Soit D_s un diviseur > 0 sur la fibre spéciale X_s. Alors D_s se relève en un diviseur D relatif > 0 sur X.*

Par addition de diviseurs relatifs > 0, il suffit évidemment de démontrer le lemme lorsque le support de D_s est réduit à un point x. Soit alors un ouvert affine U contenant x tel que, dans $U \cap X_s$, D_s soit principal; il est donc défini dans $U \cap X_s$ par $\bar{f} \in \Gamma(U \cap X_s, O_{X_s})$ non diviseur de zéro. Soit $f \in \Gamma(U, O_X)$ prolongeant $\bar{f}$. Comme X est plat sur S, quitte à diminuer l'ouvert U, on peut supposer que f est non diviseur de zéro, puisque $\bar{f}$ l'est. Soit $Z = V(f)$ dans U. Alors $Z \to S$ est plat. D'autre part, comme $Z \to S$ est quasi-fini en x et que S est hensélien, il existe une décomposition de Z en somme de deux schémas $Z = Z_1 \cup Z_2$, où $x \in Z_1$, $Z_1 \cap X_s = Z \cap X_s = D_s$ et Z_1 est fini sur S. Mais alors Z_1 est fermé dans X, et comme par construction, il est localement défini par l'annulation d'un non-diviseur de zéro, c'est un diviseur. Comme il induit D_0 sur X_s, c'est un diviseur cherché.

Reprenons la démonstration du lemme B.

(a) Il existe un diviseur E relatif, > 0 sur X, qui rencontre toutes les composantes irréductibles de la fibre spéciale sauf les $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$.

En effet, sur X_s, il existe un diviseur > 0 dont le support rencontre toutes les composantes irréductibles de X_s, sauf les $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$, et il suffit alors d'appliquer le lemme C.

(b) Il est clair alors que le diviseur construit en (a) rencontre toutes les composantes irréductibles de la fibre générique à cause des conditions qui leur sont imposées, par hypothèse, relativement aux C_i.

Le diviseur construit en (a) répond aux conclusions du lemme B.

Suite de la démonstration du lemme 1. — Supposons que K ne rencontre pas H. K ne rencontre pas non plus les autres composantes connexes de V. Considérons le changement de base

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

où $S' \to S$ est une hensélisation de S. Appelons K', H', V', Ω' les images réciproques de K, H, V, Ω par ce changement de base. Alors K' ne rencontre ni H', ni les autres composantes connexes de V'. K' est isomorphe à K et donc connexe. Quelle que soit la composante irréductible D'_i de X'_g, le support de K' est distinct de celui de $\overline{D}'_{is}$ [en effet, s'il en était autrement, $\overline{D}_{is} \cap H'$ serait vide par hypothèse, et $\overline{D}'_i \cap H'$ serait donc vide aussi, car $\overline{D}'_i \cap H' \to S$ est propre. Donc H ne rencontrerait pas D'_i, qui, contenu dans Ω', serait affine. Or ceci est absurde, car D'_i est de dimension 1, et $D'_i \to \operatorname{Spec} k(g)$ est propre (en appelant g le point générique de S)].

D'après la proposition A, on peut donc contracter K' en un point.

Mais alors, dans le schéma contracté de X', l'image de Ω' sera un ouvert affine (isomorphe à Ω') dont le complémentaire aura au moins une composante irréductible de codimension 2, à savoir l'image de K'. Or c'est absurde par [3] (II, exposé V, exemple 3.4).

C. Q. F. D.

Moyennant le lemme 1, la proposition 3 se déduit de la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — *Soient* $V_1, \ldots, V_k$ *une famille de composantes irréductibles de* V, *de réunion connexe, et qui rencontre* H (*les hypothèses étant celles du théorème*). *Alors il existe* $n, n_1, \ldots, n_k > 0$, *tels que*

$$\forall\, i, \quad 1 \leq i \leq k, \qquad (n\, H + n_1\, V_1 + \ldots + n_k\, V_k,\, V_i) > 0.$$

Nous allons montrer cette proposition par réccurence sur k. A cet effet, nous aurons besoin du lemme suivant [dans ce qui suit, on appelle graphe un ensemble muni d'une relation R réflexive et symétrique. On dit qu'un graphe est un alignement fini entre a et b, s'il existe un ordre total sur l'ensemble supposé fini tel que

$$(x\, R\, y) \iff (x = y) \quad \text{ou} \quad (x < y \text{ et } z > x) \Rightarrow (z \geq y)$$

ou

$$(y < x \text{ et } z < x) \Rightarrow (z \leq y)$$

pour lequel l'ensemble $\{ab\}$ est l'ensemble des extrêma].

LEMME 2. — *Soit* G *un graphe connexe, fini, de cardinal* $n \geq 2$. *Il existe au moins deux points distincts* x *et* y *tels que* $G - \{x\}$ *et* $G - \{y\}$ *soient connexes.*

S'il n'en existe que deux, x *et* y, G *est un alignement fini entre* x *et* y.

Démontrons cette proposition par récurrence sur $n \geq 2$. Soit G un graphe connexe de cardinal $(n+1)$. Supposons qu'il y ait au plus un point $u \in G$ tel que $G - \{u\}$ soit connexe.

Soit x un point quelconque de G différent de u.

Alors $G - \{x\}$ n'est pas connexe, donc différent de chacune de ses composantes connexes.

Interrompons cette démonstration pour prouver le lemme suivant :

LEMME 3. — *Soit* G *un graphe connexe. Soit* $x \in G$. *Soit* D *une composante connexe de* $G - \{x\}$. *Alors* $D \cup \{x\}$ *est connexe.*

En effet, il existe $y \in D$, $y\, R\, x$, sans quoi D serait une composante connexe de G distinct de G, car connexe, et sans relation avec aucun point de son complémentaire (le seul avec qui elle peut en avoir étant x).

Suite de la démonstration du lemme 2. — Soit D l'une des composantes connexes de $G - \{x\}$, $D \cup \{x\}$ est connexe et de cardinal $< n+1$, car D est de cardinal $< n =$ cardinal de $(G - \{x\})$. D'après l'hypothèse inductive, il existe $y \in D \cup \{x\}$, $y \neq x$ tel que $(D - \{y\}) \cup \{x\}$ soit connexe. Alors $G - \{y\}$ est connexe, étant la réunion de $(D - \{y\}) \cup \{x\}$, $\{x\}$ et des composantes connexes de $G - \{x\}$ différentes de D, qui, d'après le lemme 3, sont en relation avec x.

Donc, d'après l'hypothèse du raisonnement, $y = u$. Par suite, $D \cup \{x\}$, qui n'a que deux points que l'on peut ôter (x et u) sans rompre la connexité, est un alignement entre x et u.

Mais si D' est une autre composante de $G - \{x\}$, qui ne contient pas u, $\forall\, y \in D'$, $(D' - \{y\}) \cup \{x\}$ n'est pas connexe, contrairement à l'hypothèse inductive. Donc D serait la seule composante connexe de $G - \{x\}$, ce qui est absurde, puisque $G - \{x\}$ n'est pas connexe. Il existe donc au moins deux points u et v tels que $G - \{u\}$ et $G - \{v\}$ restent connexes.

Supposons qu'ils soient les seuls points à posséder cette propriété. Montrons que G est un alignement fini entre u et v.

Si Card $G = 2$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc Card $G \geq 3$. Soit $x \in G$, $x \notin \{u, v\}$. En reprenant le raisonnement précédent, on voit que $G - \{x\}$ a exactement deux composantes connexes D_u et D_v, telles que $D_u \cup \{x\}$ soit un alignement entre u et x, et $D_v \cup \{x\}$ un alignement entre v et x. Mais alors G est un alignement entre u et v.

C. Q. F. D.

Démonstration de la proposition 4.

(*a*) La proposition est facile pour $k = 1$.

(*b*) Supposons $k > 1$, et la proposition vraie pour $k - 1$, montrons qu'elle est vraie pour k.

(A) Les V_j formant un graphe connexe pour la relation d'intersection, il en existe deux, d'après le lemme 2, soit V_1 et V_2 à une permutation près des indices, tels que $\bigcup_{i \neq 1} V_i$ et $\bigcup_{i \neq 2} V_i$ restent connexes. D'autre part, l'une au moins de ces deux réunions rencontre H, puisque la réunion des deux rencontre H. On peut donc supposer, à une nouvelle permutation des indices que la famille $(V_i)_{1 \leq i \leq k-1}$ est de réunion connexe, et rencontre H.

(B) D'après l'hypothèse inductive

$$\exists\, n, n_1, \ldots, n_{k-1} > 0, \qquad n\,H + n_1\,V_1 + \ldots + n_{k-1}\,V_{k-1}$$

rencontre de façon strictement positive chacune des V_i pour $1 \leq i \leq k-1$.

Mais comme $\bigcup_{1 \leq i \leq k} V_i$ est connexe, V_k rencontre l'une des V_i pour $1 \leq i \leq k-1$, et, par suite, rencontre aussi de façon strictement positive : $n\,H + n_1\,V_1 + \ldots + n_{k-1}\,V_{k-1}$ puisque tous les coefficients des V_i sont strictement positifs.

Par suite, $\forall\, i,\ 1 \leq i \leq k$,

$$(n\,H + n_1\,V_1 + \ldots + n_{k-1}\,V_{k-1},\ V_i) > 0.$$

Alors pour un entier m assez grand :

$m\,(n\,H + n_1\,V_1 + \ldots + n_{k-1}\,V_{k-1}) + V_k$ est un diviseur cherché.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GOODMAN (J. E.). — Affine open subsets of algebraic varieties and ample divisors, *Annals of Math.*, t. 89, 1969, p. 160-183.

[2] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). — *Éléments de géométrie algébrique.* — Paris, Presses universitaires de France (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*).

[3] GROTHENDIECK (A.). — *Séminaire de géométrie algébrique* (SGA 2) : *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorème de Lefschetz locaux et globaux.* — Amsterdam, North-Holland publishing Company; Paris, Masson, 1968 (*Avanced Studies in pure Mathematics*, 2).

[4] HARTSHORNE (Robin). — *Ample subvarieties of algebraic varieties.* — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lectures Notes in Mathematics*, 156).

[5] LICHTENBAUM (S.). — Curves over discrete valuation rings, *Amer. J. of Math.*, t. 90, 1968, p. 380-405.

[6] MARTIN (Mireille). — Étude des ouverts affines d'un schéma Proj *R*, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 275, série A, 1972, p. 197-199.

[7] ŠAFAREVIČ (I. R.). — *Lectures on minimal models and birational transformations of two dimensional schemes.* — Bombay, Tata Institute, 1966 (*Tata Institute of fundamental Research. Lectures on Mathematics*, 37).

(Texte définitif reçu le 2 juillet 1973.)

Jacques EMSALEM,
82, boulevard Soult,
75012 Paris.