

BULLETIN DE LA S. M. F.

GUY RENAULT

Anneaux réguliers auto-injectifs à droite

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 237-254

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__237_0

© Bulletin de la S. M. F., 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNEAUX RÉGULIERS AUTO-INJECTIFS À DROITE

PAR

GUY RENAULT

[Université de Poitiers]

RÉSUMÉ. — Les propriétés des anneaux réguliers auto-injectifs à droite sont très voisines de celles des algèbres de von Neumann.

Introduction

On dit qu'un anneau unitaire A est un *anneau de Baer*, si l'annulateur à gauche (ou à droite, c'est équivalent) d'un sous-ensemble non vide de A est engendré par un idempotent. Comme exemples de tels anneaux, citons les algèbres de von Neumann, les anneaux réguliers (absolument plats) auto-injectifs à droite (ou à gauche), les anneaux de matrices $M_n(A)$ sur un anneau de Prüfer. Le but essentiel de cet article est d'adapter les méthodes utilisées par I. KAPLANSKY, pour algébriser la théorie des algèbres de von Neumann, à l'étude des anneaux réguliers auto-injectifs à droite. Pour la commodité du lecteur, nous allons rappeler diverses notions introduites dans [6].

Si S est un sous-ensemble d'un anneau A , on note $r(S)$ [resp. $l(S)$] l'annulateur à droite (resp. à gauche) de S dans A . Soit A un anneau de Baer semi-premier; pour $x \in A$, on a $r(xA) = (1 - c(x))A$, où $c(x)$ est un idempotent central appelé *couverture centrale* de x . Un idempotent e de A est dit *abélien*, si les idempotents de eAe sont centraux, *fidèle* si $c(e) = 1$. L'idempotent e est dit *fini*, si dans l'anneau eAe la relation $xy = e$ implique $yx = e$. Un anneau de Baer A est de type I s'il existe un idempotent abélien et fidèle, de type II s'il existe un idempotent fini et fidèle et si A ne contient pas d'idempotents abéliens $\neq 0$, de type III s'il ne contient pas d'idempotents finis $\neq 0$. Tout anneau de Baer admet une décomposition unique en produit d'anneaux de Baer de types I, II, III. Un anneau A est dit *fini* si la relation $xy = 1$ implique $yx = 1$, *proprement infini* s'il n'admet pas de facteurs directs bilatères finis. Tout anneau de Baer A se décompose de façon unique

en produit de deux anneaux A_1 et A_2 , où A_1 est fini et A_2 proprement infini [6]. Sauf mention express du contraire, les modules considérés sont des modules à droite sur un anneau unitaire. Pour la théorie des modules injectifs, on pourra se reporter à [3].

Rappelons simplement qu'un anneau A est dit *auto-injectif à droite* si, considéré comme A -module à droite, il est injectif, *auto-injectif* s'il est auto-injectif à droite et à gauche.

Une partie des résultats obtenus a fait l'objet d'un exposé au colloque d'algèbre d'Orsay, en juin 1972.

1. Le théorème de comparabilité

Dans ce paragraphe, A désigne un anneau régulier auto-injectif à droite.

Si x, y sont des éléments d'un A -module M , la notation $x A \lesssim y A$, signifie que $x A$ est isomorphe à un sous-module de $y A$. Le théorème qui suit joue un rôle essentiel dans toute l'étude.

THÉORÈME 1.1. — *Soient e, f deux idempotents d'un anneau A . Il existe un idempotent central u tel que l'on ait :*

$$(a) \quad eu A \lesssim fu A.$$

$$(b) \quad f(1 - u) A \lesssim e(1 - u) A.$$

La famille des couples (X, Y) , X sous-module de $e A$, Y sous-module de $f A$, tels que X soit isomorphe à Y , admet un élément maximal (X_0, Y_0) . Comme A est auto-injectif à droite, X_0 est facteur direct de $e A$ et Y_0 est facteur direct de $f A$.

On pose alors

$$\begin{aligned} X_0 &= g A, & e &= g + k, & gk &= kg = 0, \\ Y_0 &= h A, & f &= h + m, & hm &= mh = 0, \end{aligned}$$

où g, h, k, m sont des idempotents de A .

La maximalité du couple (X_0, Y_0) implique $m A k = 0$, et si u désigne la couverture centrale de m , on a donc $ku = 0$. On en déduit les relations

$$eu = gu, \quad fu = hu + m.$$

Comme $g A$ et $h A$ sont isomorphes, les modules $eu A$ et $hu A$ sont isomorphes, d'où (a).

L'assertion (b) résulte des relations

$$e(1 - u) = g(1 - u) + h(1 - u), \quad f(1 - u) = h(1 - u).$$

COROLLAIRE 1.2. — *Soient e, f deux idempotents abéliens et fidèles d'un anneau A . Alors les idéaux $e A$ et $f A$ sont isomorphes.*

Supposons que les idempotents e et f soient abéliens et fidèles. La relation $gA \cap kA = 0$ implique alors $gA \cap k = 0 = kA \cap [1]$, donc $fA \cap k = 0$ et par suite $k = 0$. Pour des raisons analogues $m = 0$ et eA est isomorphe à fA .

A. PAGE et J. M. GOURSAUD ont participé à l'élaboration du résultat suivant :

PROPOSITION 1.3. — Soient e, f deux idempotents d'un anneau A . Il existe un idempotent central u tel que l'on ait :

$$\begin{aligned} euA &\lesssim fuA, \\ (1-e)(1-u)A &\lesssim (1-f)(1-u)A. \end{aligned}$$

L'idéal à droite $eA + fA$ est un facteur direct de A , on peut donc trouver des idempotents orthogonaux e', f', g tels que

$$(1) \quad \begin{cases} eA = e'A \oplus gA = e_1A, \\ fA = f'A \oplus gA = f_1A, \end{cases}$$

où $e_1 = e' + g$, $f_1 = f' + g$. D'après le théorème de comparabilité, il existe un idempotent central u vérifiant les relations

$$(2) \quad \begin{cases} e'uA \leq f'uA, \\ f'(1-u)A \leq e'(1-u)A. \end{cases}$$

Les relations (1) et (2) impliquent $euA \lesssim fuA$. On a d'autre part

$$(3) \quad \begin{cases} (1-e_1)A = f'A \oplus kA, \\ (1-f_1)A = e'A \oplus kA, \end{cases}$$

où $k = 1 - e' - g - f'$. Les relations (2) et (3) impliquent

$$(1-e_1)(1-u)A \lesssim (1-f_1)(1-u)A.$$

D'après (1), les idéaux $(1-e)A$ et $(1-e_1)A$ d'une part, $(1-f)A$ et $(1-f_1)A$ d'autre part, sont isomorphes, il en résulte alors que l'on a

$$(1-e)(1-u)A \lesssim (1-f)(1-u)A,$$

d'où l'assertion.

2. Idéaux bilatères et idempotents centraux

LEMME 2.1. — Soient e, f deux idempotents d'un anneau A qui engendrent des idéaux à droite isomorphes. Si e appartient à un idéal bilatère I , alors $f \in I$.

Soit φ un isomorphisme de eA sur fA ; il existe $a \in A$ tel que

$$\varphi(ea) = f = \varphi(e)ea.$$

Comme $ea \in I$, f est un élément de I .

On dira que deux idéaux à droite xA et yA d'un anneau A sont comparables si l'on a

$$xA \lesssim yA \quad \text{ou} \quad yA \lesssim xA.$$

COROLLAIRE 2.2. — Soit A un anneau régulier tel que deux idéaux à droite monogènes soient toujours comparables. Alors :

(a) Les idéaux bilatères de A sont totalement ordonnés.

(b) Tout idéal bilatère est premier.

La propriété (a) est une conséquence immédiate du lemme 2.1; (b) résulte du fait que tout idéal de A est semi-premier.

Dans toute la suite de ce paragraphe, A désigne un anneau régulier auto-injectif à droite.

PROPOSITION 2.3. — Soient M un idéal bilatère maximal d'un anneau A , I un idéal bilatère qui n'est pas inclus dans M . Alors I contient un idempotent central e qui n'appartient pas à M .

Il existe un élément x de M tel que $1 - x \in I$, et si h désigne un idempotent de M tel que $xA = hA$, alors $1 - h \in I$. Le théorème 1.1, appliqué aux idempotents h , $1 - h$, assure l'existence d'un idempotent central e tel que l'on ait :

- (1) $heA \lesssim (1 - h)eA$,
- (2) $(1 - h)(1 - e)A \lesssim h(1 - e)A$.

Comme $1 - h \in I$, la relation (1) et le lemme 2.1 impliquent l'appartenance de he à I , et par suite $e \in I$. Pour des raisons analogues, $(1 - h)(1 - e) \in M$, donc $e \notin M$.

DÉFINITION 2.4. — On dit qu'un anneau A est un *facteur*, si 0, 1 sont les seuls idempotents centraux de A .

Le centre d'un anneau régulier étant un anneau régulier, A est facteur si, et seulement si, son centre est un corps,

Exemples :

— L'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel est un facteur de type I.

— L'enveloppe injective d'un anneau intègre, n'admettant pas de corps de quotients à droite, est un facteur de type III.

— Soient k un corps, A l'anneau produit $\prod_{n=1}^{\infty} M_n(k)$. Si P est un idéal bilatère maximal qui contient le socle de A , alors A/P est un facteur de type II (cf. proposition 3.14).

COROLLAIRE 2.5. — Un facteur A possède un seul idéal bilatère maximal.

En effet, d'après la proposition 2.3, les idempotents centraux séparent les idéaux bilatères maximaux.

Désignons par $M(A)$ l'ensemble des idéaux bilatères maximaux d'un anneau A muni de la topologie de Jacobson. Le centre $Z(A)$ est un anneau régulier, donc tout idéal premier de $Z(A)$ est maximal. $M \rightarrow M \cap Z(A)$ définit une application de $M(A)$ dans $\text{spec } Z(A)$.

COROLLAIRE 2.6. — *L'application $M \rightarrow M \cap Z(A)$ définit un homéomorphisme de $M(A)$ sur $\text{spec } Z(A)$. Il en résulte que $M(A)$ est un espace compact totalement discontinu.*

On déduit immédiatement de la proposition 2.3 que cette application est une bijection. Le fait qu'elle soit un homéomorphisme résultera facilement des considérations suivantes. Soient I un idéal bilatère de A , P un idéal maximal de $Z(A)$ contenant $I \cap Z(A)$, M l'unique idéal maximal de A tel que $M \cap Z(A) = P$ (proposition 2.3). Nous allons prouver que M contient I . Sinon, d'après la proposition 2.3, il existe un idempotent central e appartenant à $I \cap Z(A)$, $e \notin M$, ce qui contredit le choix de M . Il est d'autre part bien connu que le spectre d'un anneau commutatif régulier est un espace compact totalement discontinu. En fait, $M(A)$ est un *espace stonien*, car $Z(A)$ est injectif.

On dit qu'un anneau A est *fini*, si la relation $xy = 1$ implique $yx = 1$. On voit facilement que cela est équivalent au fait que A ne contient pas de somme directe infinie d'idéaux à droite $\neq 0$ et tous isomorphes.

PROPOSITION 2.7. — *Dans un anneau A fini, tout idéal bilatère $I \neq 0$ contient un idempotent central non nul.*

Soient $e_1 \neq 0$ un idempotent de I , $fA = \bigoplus_{i=0}^n e_i A$ une somme directe maximale d'idéaux à droite $e_i A$, isomorphes à $e_1 A$, $f \in I$ d'après le lemme 2.1. Le théorème 1.1, appliqué aux idempotents e_1 et $1 - f$, montre l'existence d'un idempotent central u tel que l'on ait :

$$(1 - f)uA \lesssim e_1 uA.$$

$$e_1(1 - u)A \lesssim (1 - f)(1 - u)A.$$

La maximalité de la famille des idéaux $e_i A$ implique $u \neq 0$ et, d'après le lemme 2.1, $(1 - f)u \in I$, $fu \in I$, donc $u \in I$.

COROLLAIRE 2.8. — *Dans un anneau A fini, l'intersection des idéaux bilatères maximaux est nulle.*

Si cette intersection n'est pas nulle, d'après la proposition 2.7, elle contient un idempotent central $u \neq 0$. $1 - u$, qui est différent de 1, n'appartient à aucun idéal bilatère maximal, ce qui est absurde.

Remarques :

1° Si $0, A$ sont les seuls idéaux bilatères d'un anneau A , on dit que A est *quasi-simple*. D'après la proposition 2.7, un facteur fini est un anneau quasi-simple.

2° Il résulte du théorème de comparabilité que deux idéaux à droite monogènes d'un facteur A sont comparables. Tout idéal bilatère de A est donc premier (corollaire 2.2).

Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal du centre $Z(A)$ de A ; on pose $S = Z(A) - \mathfrak{M}$. On vérifie facilement que l'on a

$$A \mathfrak{M} = \{ x \in A \mid \exists s \in S \text{ avec } sx = 0 \}.$$

L'anneau quotient $B = A/A \mathfrak{M}$ s'identifie donc à l'anneau localisé $S^{-1} A$.

PROPOSITION 2.9 :

(a) Si A est un anneau fini, B est un anneau fini.

(b) Les idéaux bilatères de B sont totalement ordonnés, et ce sont des idéaux premiers.

(c) Si A est un anneau de type I, B est un anneau primitif dont le socle est $\neq 0$.

Nous allons prouver les propriétés (b) et (c). Soient e, f deux idempotents de $A - A \mathfrak{M}$. D'après le théorème de comparabilité, il existe un idempotent central h tel que l'on ait :

$$\begin{aligned} ehA &\lesssim fhA, \\ (1-h)fA &\lesssim (1-h)eA. \end{aligned}$$

Supposons par exemple que $h \in S$. On a alors $eS^{-1}A \lesssim f^{-1}S^{-1}A$. Il en résulte que deux idéaux à droite monogènes de $S^{-1}A$ sont comparables, et (b) résulte du corollaire 2.2. Soient e un idempotent abélien et fidèle de A , $\bar{e}$ son image canonique dans B ; $\bar{e}$ est un idempotent abélien $\neq 0$ de l'anneau premier B , donc $\bar{e}B$ est simple, ce qui entraîne la propriété (b). Sous certaines hypothèses, le socle est de dimension infinie (cf. proposition 3.16).

3. Anneaux réguliers auto-injectifs à droite de type I

A désigne un anneau régulier auto-injectif à droite.

Si x est un élément d'un anneau A , on rappelle que $c(x)$ désigne la couverture centrale de x .

LEMME 3.1 [6]. — Soient e un idempotent abélien d'un anneau A , k un idempotent de eA . Alors :

$$(a) \quad kA = keA.$$

$$(b) \quad ke = ec(k).$$

(a) résulte des relations : $keA \subset kA$, $k = kek$. ke est un idempotent central de eA qui vérifie $keA(e - ke) = 0$. Il existe donc $a \in A$ tel que $e - ke = (1 - c(ke))a$, et par suite $ke = ec(ke)$; d'après la propriété (a), $c(k) = c(ke)$, d'où l'assertion.

THÉORÈME 3.2. — Soit $e \neq 0$ un idempotent abélien d'un anneau A . Il existe alors un idempotent central $u \neq 0$ tel que uA soit l'enveloppe injective d'une somme directe de modules tous isomorphes à euA .

Soit $S = \bigoplus_{i \in I} e_i A$ une somme directe maximale d'idéaux à droite isomorphes à eA , $e \in (e_i)_{i \in I}$, et soit fA l'enveloppe injective de S . Si $fA = A$, le théorème est évident; on supposera donc $fA \neq A$. Le théorème 1.1, appliqué aux idempotents e , $1 - f$, assure l'existence d'un idempotent central u_1 tel que l'on ait :

$$\begin{aligned} (1 - f)u_1 A &\leq eu_1 A, \\ e(1 - u_1)A &\leq (1 - f)(1 - u_1)A. \end{aligned}$$

La maximalité de la somme directe S implique $u_1 \neq 0$, et en considérant l'anneau $u_1 A$, on peut supposer que l'on a $(1 - f)A \leq eA$. $(1 - f)A$ est isomorphe au sous-module kA , $k = k^2$, de eA , et, d'après le lemme 3.1, $ke = eu$, où u est la couverture centrale de k et de $1 - f$. On en déduit alors que $(1 - u)A$ est l'annulateur à droite du module

$$T = (1 - f)A \oplus (\bigoplus_{i \in I} e_i uA).$$

Soit $ua \neq 0$; il existe un idéal à droite essentiel J tel que l'on ait

$$aJ \subset (1 - f)A \oplus (\bigoplus_{i \in I} e_i A)$$

et par suite auJ est un sous-module différent de zéro de T ; on en déduit sans peine que uA est l'enveloppe injective de T .

Nous allons utiliser la caractérisation suivante des anneaux A de type I : A est de type I si, et seulement si, quel que soit $x \neq 0$, $x \in A$, il existe un idempotent abélien $e \neq 0$, appartenant à xA .

PROPOSITION 3.3. — Un anneau A de type I est isomorphe à un produit d'anneaux A_j , $j \in J$, où A_j est l'enveloppe injective d'une somme directe d'idéaux à droite, tous isomorphes, engendrés par des idempotents abéliens.

Soit $(u_j)_{j \in J}$ une famille maximale d'idempotents centraux orthogonaux vérifiant la conclusion du théorème 3.2. Comme A est de type I, l'application $f: x \rightarrow (u_j x)_{j \in J}$ est injective (théorème 3.2); l'auto-injectivité à droite de A implique que f est un isomorphisme de A sur l'anneau produit $\prod_j u_j A$.

Supposons que A_j soit l'enveloppe injective de la somme directe $S_j = \bigoplus_{i \in J_j} e_i A_j$; d'après [2] (p. 562), A_j est l'enveloppe injective de l'anneau $B_j = \text{End}_{A_j} S_j$ qui est isomorphe à l'anneau des endomorphismes du D_j -module libre $D_j^{(J_j)}$, où $D_j = \text{End}_{A_j} e_i A_j$. Comme e_i est un idempotent abélien, D_j est un anneau régulier réduit auto-injectif [1].

COROLLAIRE 3.4 [4]. — *Un anneau A de type I est isomorphe à un produit d'anneaux A_j , $j \in J$, où A_j est l'anneau des endomorphismes de l'enveloppe injective d'un module libre $D_j^{(J_j)}$, où D_j est un anneau régulier, réduit et auto-injectif.*

COROLLAIRE 3.5 (ROOS). — *Pour un anneau A de type I, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) A est auto-injectif à gauche.
- (b) A est fini.
- (c) A est isomorphe à un produit d'anneaux de matrices $M_{n_j}(D_j)$, où D_j est un anneau régulier réduit et auto-injectif.

(a) $\Rightarrow$ (b) : C'est une conséquence du théorème 5.1 de [11].

(b) $\Rightarrow$ (c) : Reprenons les notations du corollaire 3.4. Il est facile de prouver que l'ensemble I_j est fini. A_j , qui est alors un anneau de matrices de la forme $M_{n_j}(D_j)$, est auto-injectif à gauche, donc l'anneau produit A est auto-injectif à gauche, et (c) $\Rightarrow$ (a).

Un anneau vérifiant les conditions équivalentes du corollaire 3.5 est dit de type I_{fin} .

PROPOSITION 3.6. — *Soit A un anneau de type I tel que $1 = e_1 + \dots + e_n$, où les e_i sont des idempotents abéliens orthogonaux qui engendrent des idéaux à droite isomorphes. Alors tout ensemble d'idéaux à droite isomorphes $(f_i A)$ engendrés par des idempotents orthogonaux $f_i \neq 0$, a au plus n éléments.*

Soient $f_1, \dots, f_{n+1}$ des idempotents orthogonaux $\neq 0$ qui engendrent des idéaux à droite isomorphes. Comme e_1 est un idempotent abélien fidèle, on a $e_1 A f_i \neq 0$, et il existe des idempotents abéliens orthogonaux h_i de $f_i A$, $h_i \neq 0$, qui engendrent des idéaux à droite isomorphes, h_i étant tel que $h_i A$ soit isomorphe à un sous-module $g A$, $g = g^2$, de $e_1 A$.

D'après le lemme 3.1, on a $g A = g e_1 A$, $g e_1 = e_1 c(g)$. On en déduit les relations

$$c(g) A = \sum_{i=1}^n e_i c(g) A \supset \sum_{i=1}^{n+1} h_i A,$$

ce qui contredit le fait que l'anneau $c(g) A$ soit fini.

Soient A un anneau de type I_{fin} , h un idempotent central de A . On dit que $h A$ est un *composant homogène* de A , s'il existe des idéaux à droites isomorphes $(e_i A)$, engendrés par des idempotents abéliens orthogonaux e_i , $1 \leq i \leq n$, tels que $h = e_1 + \dots + e_n$. L'entier n , qui

est indépendant de la décomposition choisie (proposition 3.6), est appelé *l'ordre* du composant homogène, et hA est dit de type I_n . Nous sommes en mesure de préciser la structure des anneaux de type I_{fin} .

THÉORÈME 3.7. — Soit A un anneau de type I_{fin} : Alors

(a) A est isomorphe à un produit dénombrable d'anneaux de matrices $M_{n_j}(D_j)$, à coefficients dans un anneau réduit D_j , dont les ordres n_j , forment une suite strictement croissante. Les entiers n_j , les anneaux D_j sont entièrement déterminés par ces conditions.

(b) Si hA est un composant homogène $\neq 0$ de A , il existe un entier n_j tel que $h \in M_{n_j}(D_j)$ et hA est de type I_{n_j} .

Le corollaire 3.5 assure l'existence d'une telle décomposition, on identifie alors A et l'anneau produit $\prod_{j=1} M_{n_j}(D_j)$. Démontrons la propriété (b). On a $h = e_1 + \dots + e_n$, où les e_i sont des idempotents abéliens orthogonaux qui engendrent des idéaux à droite isomorphes. On désigne par e_{ij} (resp. h_j) les composantes de e_i (resp. h) dans l'anneau produit A , et soit j_0 le plus petit indice tel que l'on ait $e_{ij_0} \neq 0$; comme les idéaux $e_i A$ sont isomorphes, on a $e_{ij_0} \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$. Dans $M_{n_j}(D_j)$, on a la relation

$$(1) \quad h_j = \sum_{i=1}^n e_{ij},$$

et h_j est un idempotent central de $M_{n_j}(D_j)$, donc de D_j . D'autre part, il existe des idempotents abéliens orthogonaux f_k , $1 \leq k \leq n_j$, qui engendrent des idéaux à droite isomorphes et tels que

$$1_{n_j} = \sum_{k=1}^{n_j} f_k,$$

où 1_{n_j} désigne la matrice unité de $M_{n_j}(D_j)$. On a alors

$$(2) \quad h_j = \sum_{k=1}^{n_j} h_j f_k.$$

Supposons $h_j \neq 0$. La proposition 3.6 appliquée aux relations (1) et (2) implique l'égalité $n_j = n$; la suite (n_j) étant strictement croissante, on a nécessairement $h_j = 0$ pour $j \neq j_0$, et $h \in M_{j_0}(D_{j_0})$, d'où (b).

Soit $A = \prod_{j=1} M_{n'_j}(D'_j)$ une autre décomposition du type considéré. On déduit immédiatement de la propriété (b) les relations

$$n_j = n'_j, \quad M_{n_j}(D_j) = M_{n'_j}(D'_j).$$

Le fait que D_j et D'_j soient isomorphes résulte du corollaire 1.2.

Remarques :

1° Soit A un anneau régulier auto-injectif à droite qui vérifie une identité polynomiale dont les coefficients, qui appartiennent au centre de A , engendrent A . On peut prouver que A est un anneau de type I_{fin} tel que tout idéal à droite (ou à gauche) irréductible soit maximal.

2° Les facteurs de type I sont les anneaux d'endomorphismes d'espaces vectoriels à droite sur un corps K , les facteurs du type I_{nn} sont les anneaux simples. C'est une conséquence des corollaires 3.4 et 3.5. On a également la propriété suivante :

LEMME 3.8. — *Soit A un anneau régulier quasi-simple contenant un idempotent abélien $e \neq 0$. Alors A est un anneau simple.*

D'après la proposition 1-1 de [1], eA est un idéal à droite simple, et le socle de A est donc égal à A .

Nous allons préciser les propriétés des anneaux quotients A/M , où M décrit l'ensemble des idéaux bilatères maximaux de A . Nous aurons besoin du résultat suivant :

PROPOSITION 3.9. — *Soit M un idéal maximal d'un anneau A auto-injectif. Alors l'anneau quotient A/M est auto-injectif.*

C'est une conséquence immédiate de [7] (Hilfsatz 3.2, p. 167) et de [9] (p. 604).

PROPOSITION 3.10. — *Soit M un idéal maximal d'un anneau A tel que l'anneau quotient $B = A/M$ contienne un idempotent abélien $\neq 0$. Alors :*

(a) *B est isomorphe à un anneau de matrices $M_n(K)$, où K est un corps.*

(b) *Il existe n idéaux à droite isomorphes $(e_i A)$, engendrés par des idempotents abéliens orthogonaux e_i , $1 \leq i \leq n$, et $h = e_1 + \dots + e_n$ est un idempotent central qui n'appartient pas à M .*

L'assertion (a) résulte du lemme 3.8. Démontrons la propriété (b).

Si x est un élément de A , $\bar{x}$ désigne son image canonique dans l'anneau B .

LEMME 3.11. — *Soit f un idempotent d'un anneau A . Il existe des idempotents orthogonaux e_1, e_2, e_3 tels que :*

(a) $fA = e_1 A \oplus e_2 A \oplus e_3 A$.

(b) *Les idéaux $e_1 A$ et $e_2 A$ sont isomorphes, et e_3 est un idempotent abélien.*

C'est le lemme 4 de [9].

Soit f un idempotent de A tel que $\bar{f}B = uB$, où u est un idempotent abélien $\neq 0$ de B . Avec les notations du lemme 3.11, on a

$$fA = e_1 A \oplus e_2 A \oplus e_3 A.$$

Comme uB est un idéal à droite simple, les idéaux à droite isomorphes $e_1 A$ et $e_2 A$ sont contenus dans M , et A contient donc un idempotent abélien $e_3 \neq 0$. Il est facile de prouver l'existence de n idempotents abéliens orthogonaux g_i , $1 \leq i \leq n$, tels que l'on ait :

$$B = \bigoplus_{i=1}^n \bar{g}_i B.$$

Comme on a nécessairement $\text{Hom}_A(g_i A, g_j A) \neq 0$, il n'est guère difficile de se ramener à la situation suivante :

$$A = (\bigoplus_{i=1}^n g_i A) \oplus h A$$

les idempotents $g_1, \dots, g_n, h$ sont orthogonaux, les idempotents abéliens g_i engendrent des idéaux à droite tous isomorphes et $B = \bigoplus_{i=1}^n \bar{g}_i B$. On pose alors

$$\begin{aligned} g_1 A &= s_1 A \oplus e_1 A, & g_1 &= s_1 + e_1, & s_1 e &= e_1 s_1 = 0, \\ h A &= h_1 A \oplus h_2 A, & h &= h_1 + h_2, & h_1 h_2 &= h_2 h_1 = 0, \end{aligned}$$

où $(s_1 A, h_1 A)$ est un élément maximal de l'ensemble des couples (X, Y) , X sous-module de $g_1 A$, Y sous-module de $h A$, tels que X soit isomorphe à Y . On a alors $h_2 A e_1 = 0$, car le couple $(s_1 A, h_1 A)$ est maximal, $s_1 A e_1 = 0$, car g_1 est un idempotent abélien, il en résulte la relation $h A e_1 = 0$. Avec des notations évidentes, on en déduit une nouvelle décomposition de A :

$$A = (\bigoplus_{i=1}^n e_i A) \oplus (\bigoplus_{i=1}^n s_i A) \oplus h_1 A \oplus h_2 A,$$

où les idempotents intervenant dans cette décomposition sont tous orthogonaux. Les $(n+1)$ idéaux $s_1 A, \dots, s_n A, h_1 A$, qui sont isomorphes, sont contenus dans M , donc l'idéal à droite $S = \bigoplus_{i=1}^n e_i A$ n'appartient pas à M . D'après ce qui précède, il est clair que S annule l'idéal $(\bigoplus_{i=1}^n s_i A) \oplus h A$; c'est donc un idéal bilatère engendré par l'idempotent central $h = e_1 + \dots + e_n$, ce qui achève la démonstration.

Les propositions 3.9 et 3.10 impliquent les théorèmes suivants :

THÉORÈME 3.12. — *Soit A un anneau auto-injectif de type II. Alors pour tout idéal maximal M , l'anneau quotient A/M est un facteur auto-injectif de type II.*

THÉORÈME 3.13. — *Soient A un anneau de type I_{fin} , M un idéal maximal de A . Pour que l'anneau quotient A/M soit de type I_{fin} , il faut et il suffit qu'il existe un composant homogène de type I_n qui ne soit pas inclus dans M . A/M est alors isomorphe à $M_n(K)$, où K est un corps.*

Si l'idéal maximal M contient tous les composants homogènes de A , alors A/M est de type II. Nous allons préciser ce dernier point. Avec les notations du théorème 3.7 on a la proposition suivante.

PROPOSITION 3.14. — *Soit $A = \prod_{j \in \mathbb{N}} M_{n_j}(D_j)$ un anneau de type I_{fin} , tel que les entiers n_j forment une suite strictement croissante infinie. Pour un idéal bilatère maximal M de A , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *L'anneau quotient A/M est de type II.*
- (b) *M contient l'idéal $\bigoplus_{j \in \mathbb{N}} M_{n_j}(D_j)$.*

Il suffit de montrer que si A/M est de type I, alors il existe un entier n_j tel que le composant homogène $M_{n_j}(D_j)$ ne soit pas inclus dans M ; l'assertion résulte alors de la proposition 3.10 et du théorème 3.7.

COROLLAIRE 3.15. — *Pour un anneau A de type I_{fin} , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *Les composants homogènes de A sont d'ordre borné.*
- (b) *Quel que soit l'idéal maximal M , l'anneau quotient A/M est de type I.*

PROPOSITION 3.16. — *Soit M un idéal bilatère maximal d'un anneau de type I_{fin} tel que A/M soit de type II; on pose $\mathfrak{M} = M \cap Z(A)$. On a les propriétés suivantes :*

- (a) *L'anneau quotient $B = A/A \mathfrak{M}$ est un anneau primitif fini dont le socle est de dimension infinie.*
- (b) *L'enveloppe injective $\hat{B}$ de B est un anneau de type I qui n'est pas fini.*

Compte tenu de la proposition 2.9, il suffit de prouver que le socle est de dimension infinie. Sinon, B serait un anneau simple, et A/M serait de type I, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La démonstration de la propriété (b) est immédiate. On a ainsi un anneau régulier fini qui est extension essentielle d'une somme directe d'idéaux à droite simples, tous isomorphes.

4. Anneaux proprement infinis

Dans ce paragraphe, A désigne un anneau régulier auto-injectif à droite. On dit que A est *proprement infini*, s'il n'admet pas de facteurs directs bilatères finis.

LEMME 4.1. — *Soit $S = \bigoplus_{i \in I} e_i A$, $e_i = e_i^2$, une somme directe infinie maximale d'idéaux à droite non nuls et tous isomorphes. Il existe alors un idempotent central $u \neq 0$ tel que uA soit l'enveloppe injective d'une somme directe $T = \bigoplus_{i \in I} h_i A$, $h_i = h_i^2$, d'idéaux à droite isomorphes à $e_i uA$;*

Soient eA l'enveloppe injective de S , e_1 un idempotent de la famille $(e_i)_{i \in I}$. D'après le théorème de comparabilité, il existe un idempotent central u tel que l'on ait :

$$\begin{aligned} (1 - e)uA &\lesssim e_1 A, \\ e_1(1 - u)A &\lesssim (1 - e)(1 - u)A. \end{aligned}$$

Comme la somme directe est maximale, on a $u \neq 0$. On pose alors

$$e_i uA = f_i A \oplus g_i A, \quad \text{pour } i \in I,$$

où $f_i A$ est isomorphe à $(1 - e)uA$, les idéaux $g_i A$ étant tous isomorphes.

On a alors la somme directe

$$S' = (1 - e) u A \oplus (\oplus_{i \in I} f_i A) \oplus (\oplus_{i \in I} g_i A).$$

La relation $\text{Card}(I \cup \{1\}) = \text{Card } I$ implique que cet idéal est isomorphe à $\oplus_{i \in I} e_i u A$. L'assertion résulte alors du fait que

$$u A (1 - e) u A \oplus e u A$$

est l'enveloppe injective de S' .

Nous allons prouver que $u A$ est l'enveloppe injective d'une somme directe dénombrable $\oplus_n g_n A$, $g_n = g_n^2$, d'idéaux à droite isomorphes à $u A$. Il existe, en effet, une partition dénombrable $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de I , tel que $\text{Card } J_n = \text{Card } I$.

Il suffit de prendre comme idéal à droite $g_n A$, l'enveloppe injective du module $\oplus_i h_i A$, $i \in J_n$. Si nous supposons que A est proprement infini, alors en utilisant une méthode analogue à celle employée pour démontrer la proposition 3.3, on montre que A est isomorphe à l'anneau produit $\prod_{j \in I} u_j A$, où $u_j A$ est l'enveloppe injective d'une somme directe

$$S_j = \oplus_{n \in \mathbf{N}} g_n^j u_j A$$

d'idéaux à droite tous isomorphes à $u_j A$. A est alors l'enveloppe injective de la somme directe

$$S = \oplus_{n \in \mathbf{N}} e_n A, \quad e_n = (g_n^j)_{j \in J},$$

où $e_n A$ est isomorphe à A . D'autre part, comme $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ est un ensemble dénombrable, il existe un idempotent e tel que $e A$ et $(1 - e) A$ soient isomorphes à A . On a donc le résultat suivant :

PROPOSITION 4.2. — *Soit A un anneau proprement infini :*

(a) *A est l'enveloppe injective d'une somme directe dénombrable d'idéaux à droite isomorphes à A .*

(b) *Il existe un idempotent e tel que $e A$ et $(1 - e) A$ soient isomorphes à A .*

Soit A un anneau proprement infini de type II; en appliquant le lemme 4.1 aux sommes directes infinies maximales d'idéaux à droite isomorphes engendrés par des idempotents finis, et en utilisant une méthode analogue à celle employée pour démontrer le corollaire 3.4, on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 4.3. — *Soit A un anneau proprement infini de type II. Alors A est isomorphe à un produit d'anneaux A_j , $j \in J$, où A_j est l'anneau des endomorphismes de l'enveloppe injective d'un module libre $D_j^{(f)}$, sur un anneau D_j de type II_{fin} .*

Remarque. — Le corollaire 2.7 ne se généralise pas aux anneaux proprement infinis. En effet, d'après la proposition 3.10, l'intersection des idéaux bilatères maximaux d'un anneau proprement infini de type I contient l'idéal engendré par les idempotents abéliens.

5. Anneaux de matrices

Dans ce paragraphe, A (resp. B) désigne un anneau régulier auto-injectif à droite.

PROPOSITION 5.1. — Soient e et $1 - e$ deux idempotents finis d'un anneau A ; alors A est un anneau fini.

Soit g un idempotent d'un anneau proprement infini B , tel que gB et $(1 - g)B$ soient isomorphes à B (proposition 4.2), et soit e un idempotent de B . D'après la proposition 1.3, il existe un idempotent central u de B tel que l'on ait :

$$\begin{aligned} guB &\leq euB, \\ (1 - g)(1 - u)B &\leq (1 - e)(1 - u)B. \end{aligned}$$

Les idéaux $g(1 - u)B$ et $(1 - g)(1 - u)B$ étant isomorphes, l'un des deux idempotents e et $1 - e$ n'est pas fini. Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la composante proprement infinie de A pour démontrer l'assertion.

COROLLAIRE 5.2. — Soit $n \geq 1$ un entier; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) A est fini.
- (b) $M_n(A)$ est fini.

Le résultat qui suit a été prouvé par E. R. GENTILE [5] pour les anneaux auto-injectifs.

LEMME 5.3. — Soit A un anneau tel que $1 = e_1 + \dots + e_n = f_1 + \dots + f_n$, où les e_i (resp. les f_i) sont des idempotents finis orthogonaux qui engendrent des idéaux à droite isomorphes. Alors les idéaux $e_i A$ et $f_i A$ sont isomorphes.

En appliquant le théorème de comparabilité aux idempotents e_1 et f_1 , on se ramène au cas où $e_1 A \leq f_1 A$. Comme A est un anneau fini (corollaire 5.2), cela implique que $e_1 A$ est isomorphe à $f_1 A$.

THÉORÈME 5.4. — Pour les anneaux A et B , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1° A et B sont isomorphes.
- 2° Il existe un entier $n \geq 1$ tel que $M_n(A)$ soit isomorphe à $M_n(B)$.

Si A est un anneau fini, l'assertion résulte du corollaire 5.2 et du lemme 5.3 (cf. également [5]). Si A est proprement infini, alors $M_p(A)$

est isomorphe à A quel que soit $p \geq 1$ (proposition 4.2), et A est isomorphe à B . Le cas général résulte de ce qui précède.

On peut conjecturer que le résultat reste valable pour des anneaux auto-injectifs à droite qui ne sont pas nécessairement réguliers. On peut le démontrer lorsque les anneaux sont finis.

6. Enveloppes injectives de type I_{fin}

Dans ce paragraphe, A désigne un anneau de Zorn semi-primitif : c'est un anneau tel que tout idéal à droite I , $I \neq 0$, contient un idempotent e , $e \neq 0$. A est alors un anneau à idéal singulier à gauche et à droite nul [3].

Nous allons supposer que l'enveloppe injective $\hat{A}$ de A , qui est un anneau régulier auto-injectif à droite, est un anneau de type I_{fin} . On sait alors [1] que tout idéal à droite non nul de A contient un idempotent abélien différent de 0.

LEMME 6.1. — *Il existe un idempotent central u de A , $u \neq 0$, tel que $uA = \bigoplus_{i=1}^n f_i A$, où les f_i sont des idempotents abéliens orthogonaux qui engendrent des idéaux à droite isomorphes.*

D'après le théorème 3.2, il existe un idempotent central u_1 de $\hat{A}$, $u_1 \neq 0$, vérifiant $u_1 \hat{A} = \bigoplus_{i=1}^n e_i \hat{A}$, où les e_i sont des idempotents abéliens orthogonaux de $\hat{A}$ qui engendrent des idéaux à droite isomorphes. Soit $uA = \bigoplus_{i=1}^k f_i A$ une somme directe maximale d'idéaux à droite isomorphes contenus dans $u_1 \hat{A} \cap A$, où les f_i sont des idempotents abéliens orthogonaux. D'après la proposition 3.6, on a $k \leq n$; on choisit la somme directe de telle sorte que k soit le plus grand possible. On pose

$$K = u_1 \hat{A} \cap A = uA \oplus K', \quad \text{avec } K' = (1 - u)A \cap u_1 \hat{A}.$$

On en déduit la décomposition

$$\hat{A} = u\hat{A} \oplus g\hat{A} \oplus (1 - u_1)\hat{A},$$

où $g\hat{A}$, $g = g^2$, désigne l'enveloppe injective de K' . Nous allons prouver que u est un idempotent central en établissant la relation $g\hat{A}f_i = 0$.

Supposons donc $g\hat{A}f_i \neq 0$; il existe un plongement d'un sous-module $h\hat{A}$, $h = h^2$, $h \neq 0$ de $g\hat{A}$ dans $f_i \hat{A}$. On peut donc trouver un idempotent abélien e de $h\hat{A} \cap A$, $e \neq 0$ [1], tel que eA soit isomorphe à un sous-module X de $f_i A$. Soit s , $s \neq 0$, un idempotent de X ; il existe un idempotent abélien e' de eA tel que $e'A$ soit isomorphe à sA , et

l'on peut construire une somme directe du type considéré de longueur $> k$, d'où la contradiction. La relation $g \hat{A} f_i = 0$ implique $u \hat{A} g = 0$, et u est un idempotent central.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'idempotents centraux orthogonaux de A vérifiant les propriétés du lemme 6.1; en utilisant les démonstrations du lemme 6.1, de la proposition 3.3, et du corollaire 3.4, on prouve facilement que $\hat{A}$ est isomorphe à l'anneau produit $\prod_{i \in I} u_i \hat{A}$. Il est clair que $\hat{A}$ est extension essentielle du $\hat{A}$ -module à gauche $\bigoplus_{i \in I} \hat{A} u_i$, et si l'on prouve que $\hat{A} u_i$ est extension essentielle du A -module à gauche $A u_i$ pour $i \in I$, on aura alors montré que $\hat{A}$ est l'enveloppe injective du A -module à gauche A . Nous allons pour cela reprendre les notations du lemme 6.1. On pose $B = f_i A f_i$, $\hat{B} = f_i \hat{A} f_i$. D'après le lemme 1.4 de [1], f_i est un idempotent abélien de $\hat{A}$, et l'anneau réduit $\hat{B}$ est l'enveloppe injective de B ([1], proposition 0.2). Comme B est un anneau de Zorn réduit, il est facile de prouver qu'il vérifie les conditions du théorème 3.3 de [10], donc $\hat{B}$ est également l'enveloppe injective du B -module à gauche B . Les anneaux $u A$ et $u \hat{A}$ étant respectivement isomorphes à $M_n(B)$ et $M_n(\hat{B})$, $u \hat{A}$ est l'enveloppe injective du A -module à gauche $u A$. En résumé, on a la proposition ci-après.

PROPOSITION 6.2. — *Soit A un anneau de Zorn semi-primitif, dont l'enveloppe injective $\hat{A}$ est de type I_{fin} . Alors il existe une famille d'idempotents centraux orthogonaux $(u_i)_{i \in I}$ de A tels que :*

(a) $u_i A$ soit isomorphe à un anneau de matrices $M_n(B_i)$ où B_i est un anneau de Zorn réduit.

(b) $\hat{A}$ est isomorphe à l'anneau produit $\prod_{i \in I} u_i \hat{A}$. $\hat{A}$ est également l'enveloppe injective du A -module à gauche A .

COROLLAIRE 6.3. — *Soit A un anneau régulier de Baer de type I. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) $\hat{A}$ est de type I_{fin} .

(b) $A = A_1 \times A_2$, où A_2 est un anneau réduit, et où A_1 est un anneau auto-injectif de type I_{fin} .

(b) $\Rightarrow$ (a) c'est évident.

(a) $\Rightarrow$ (b). D'après la proposition 6.2 et le théorème 3.3 de [10], A est un anneau continu et l'assertion résulte du théorème 4.3 de [11].

Remarque. — D'après la proposition 3.16, il existe un anneau régulier, primitif et fini, dont l'enveloppe injective est un anneau de type I proprement infini.

7. Sur les V -anneaux

On dit qu'un anneau A est un V -anneau [3], si tout A -module à gauche ou à droite simple est injectif. Les V -anneaux commutatifs sont les anneaux réguliers (théorème de Kaplansky), l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension infinie n'est pas un V -anneau [3]. Compte tenu de la proposition 3.14, la proposition qui suit, fournit des exemples de V -anneaux de type I_{fin} et II_{fin} .

PROPOSITION 7.1. — Soient $(K_i)_{i \in I}$ une famille de corps, $(x_i)_{i \in I}$ des entiers ≥ 1 , et A l'anneau produit $\prod_{i \in I} M_{n_i}(K_i)$. On a les propriétés suivantes :

- (a) Tout idéal à droite (resp. à gauche) irréductible de A est maximal.
- (b) A est un V -anneau.

(a) $\Rightarrow$ (b). Cela résulte d'un théorème de Villamayor [3]. Nous allons prouver la propriété (a). On a $A = \prod_{i \in I} S_i$, où S_i est un A -module à droite simple. Soit $x = (x_i)_{i \in I}$ un élément de A , $x_i \in S_i$ pour $i \in I$. On pose

$$p(x) = \{ i \in I \mid x_i = 0 \}.$$

Il est facile de prouver que $p(x) = \emptyset \Leftrightarrow xA = A$. Pour tout idéal à droite J , $J \neq A$, $p(J)$ désignera l'ensemble des $p(x)$ pour $x \in J$. $p(J)$ est un filtre défini sur I , ou encore un idéal de l'anneau de Boole $\mathcal{X}(I)$. On vérifie que l'application $J \rightarrow p(J)$ est un isomorphisme de l'ensemble ordonné des idéaux J de A , $J \neq A$, sur l'ensemble ordonné des idéaux propres de $\mathcal{X}(I)$. L'assertion résulte alors des propriétés bien connues des idéaux de $\mathcal{X}(I)$.

COROLLAIRE 7.2. — Il existe un V -anneau régulier A , dont l'enveloppe injective $\hat{A}$ n'est pas un V -anneau.

Cela résulte des propositions 3.16 et 7.1, et du fait que l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension infinie n'est pas un V -anneau.

Parmi les nombreux problèmes qui ne sont pas encore résolus, citons les suivants :

PROBLÈME 1. — Un anneau régulier auto-injectif à droite de type II_{fin} , est-il auto-injectif à gauche ?

PROBLÈME 2. — Soit A un anneau de Zorn semi-primitif. Si A est un anneau de Baer de type I_{fin} , son enveloppe injective $\hat{A}$ est-elle un anneau de type I_{fin} ? (cf. proposition 6.2).

PROBLÈME 3. — *Les anneaux de type I_{fin} , sont-ils les anneaux de type I tels que tout module simple (à gauche et à droite) soit injectif ?* (cf. proposition 7.1).

La réponse affirmative aux problèmes 1 et 2, qui se trouvent dans [8], est une conjecture (communication orale de J. E. Roos, mai 1972).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CAILLEAU (A.) et RENAULT (G.). — Sur l'enveloppe injective des anneaux semi-premiers à idéal singulier nul, *J. of Algebra*, t. 15, 1970, p. 133-141.
- [2] CAILLEAU (A.) et RENAULT (G.). — Anneau associé à une somme directe infinie de modules quasi-injectifs, *Archiv. der. Math.*, t. 21, 1970, p. 561-565.
- [3] FAITH (C.). — *Lectures on injective modules and quotient rings*. — Berlin, Springer-Verlag, 1967 (*Lecture Notes in Mathematics*, n° 49).
- [4] GEMINTERN (V. I.). — Semi-simple self-injective endomorphism rings, *Sibirsk. mat. Z.*, t. 12, 1971, p. 315-331.
- [5] GENTILE (E. E.). — A uniqueness theorem on rings of matrices, *J. of Algebra*, t. 6, 1967, p. 131-134.
- [6] KAPLANSKY (I.). — *Rings of operators*. — New York, W. A. Benjamin, 1968 (*Mathematics Lecture Note Series*).
- [7] MAEDA (F.). — *Kontinuierliche Geometrien*. — Berlin, Springer-Verlag, 1958 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, t. 95).
- [8] ROOS (J. E.). — Sur l'anneau maximal de fractions des $A w^*$ -algèbres et des anneaux de Baer, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 266, série A, 1968, p. 120-123.
- [9] UTUMI (Y.). — On continuous regular rings and semi-simple self-injective rings, *Canad. J. Math.*, t. 12, 1960, p. 597-605.
- [10] UTUMI (Y.). — On rings of which any one-sided quotient rings are two-sided, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 14, 1963, p. 141-147.
- [11] UTUMI (Y.). — On continuous rings and self-injective rings, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 118, 1965, p. 158-173.

(Texte reçu le 27 novembre 1972.)

Guy RENAULT,
 Université de Poitiers,
 Mathématiques,
 40, avenue du Recteur-Pineau,
 86022 Poitiers.