BULLETIN DE LA S. M. F.

PHILIPPE ROBBA

Prolongement analytique pour les fonctions de plusieurs variables sur un corps value complet

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 193-217
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__193_0>

Bull. Soc. math. France,
101, 1973, p. 193-217.
(*Thèse,* 2e partie)

PROLONGEMENT ANALYTIQUE POUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES SUR UN CORPS VALUÉ COMPLET

PAR

PHILIPPE ROBBA (*)

RÉSUMÉ. — K désignant un corps valué ultramétrique, nous caractérisons une famille de sous-ensembles A de K^m tels que la famille des éléments analytiques sur A au sens de KRASNER (c'est-à-dire la limite uniforme sur A de fractions rationnelles sans singularité dans A) vérifie un principe d'unicité. Pour ce faire, nous établissons quelques propriétés sur la répartition des singularités d'une fraction rationnelle.

1. Introduction

1.1. Soit K un corps valué ultramétrique, complet et algébriquement clos.

On dira que la classe U de fonctions définies sur l'ouvert $A \subset K^m$ vérifie un *principe d'unicité* dans A si, pour toute fonction f de U, la nullité de f au voisinage d'un point x de A entraîne la nullité de f partout dans A.

On dira que f est *localement analytique,* si elle est localement développable en série de Taylor.

Lorsque la classe U est formée de fonctions localement analytiques, au lieu de principe d'unicité, on parlera de *principe du prolongement analytique.*

Si la différence de deux fonctions de U appartient à U, on voit qu'une fonction de U est entièrement définie dans A, lorsqu'on la connait au voisinage d'un point de A. On pourra donc parler du prolongement analytique dans A de la fonction définie au voisinage d'un point de A.

1.2. Les sommes de séries de Laurent à m variables sur K vérifient le principe du prolongement analytique dans leur domaine de convergence (cor. 2.15), mais, comme dans le cas des fonctions d'une

(*) *Thèse,* 2e partie.

variable, elles ne permettent pas de définir un prolongement analytique en dehors de leur domaine de convergence.

Suivant la démarche inaugurée par M. KRASNER [4] nous dirons que f est un *élément analytique* sur un ouvert $A \subset K^m$, si f est la limite uniforme sur A d'une suite de fractions rationnelles sans singularités dans A. Nous dirons que l'ouvert A est un *ensemble analytique*, si la classe des éléments analytiques sur A vérifie le principe du prolongement analytique. On trouvera dans [6] une caractérisation des ensembles analytiques dans le cas $m = 1$, et un exposé des motivations pour une telle définition.

Les éléments analytiques ne suffisant pas pour les besoins (la somme d'une série de Laurent peut ne pas être un élément analytique), on généralise de la façon suivante.

1.3. La famille $(A_i)_{i \in I}$ est dite *enchaînée* si, quels que soient les indices j et j' de I, il existe une famille finie d'indices $i_0 = j$, i_1, ..., $i_n = j'$ tels que $A_{i_k} \cap A_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ pour $0 \leqq k \leqq n-1$.

Soient A un ouvert de K, et f une fonction définie sur A; nous dirons que f est une *fonction analytique* sur A s'il existe une famille enchaînée $(A_i)_{i \in I}$ d'ensembles analytiques tels que $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ et que la restriction de f à chaque A_i soit un élément analytique.

1.4. On démontre sans peine (*cf.* [6], prop. 1) que:

Les fonctions analytiques sur un ouvert A vérifient le principe du prolongement analytique.

1.5. On en déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Si la famille $(A_i)_{i \in I}$ est enchaînée et si les A_i sont analytiques, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ est analytique.*

1.6. Nous ne caractériserons pas tous les ensembles analytiques, mais nous construirons une classe d'ensembles analytiques, à savoir la classe $\mathcal{K}$ des quasi-connexes qui coïncide, dans le cas d'une variable, avec celle introduite par M. KRASNER.

Ces ensembles sont définis par des propriétés de connexité et de finitude de leur projection dans $\mathbf{R}^m$ (projection par l'application qui au point x de K^m associe le point de $\mathbf{R}^m$ dont les coordonnées sont les valuations des coordonnées de x).

Les éléments analytiques sur A étant limites uniformes de fractions rationnelles sans singularités dans A, une étape essentielle pour démontrer que nos ensembles quasi-connexes sont analytiques, sera l'étude détaillée de la projection des singularités d'une fraction rationnelle : cette projection est l'intersection d'un réseau polyédral convexe de $\mathbf{R}^m$ avec la projection de K^m.

1.7. Dans le paragraphe 2, nous donnons la définition et les propriétés essentielles de la fonction de valuation d'un élément analytique qui est un outil bien adapté à l'étude des éléments analytiques. (Dans le cas d'une somme de série de Laurent, le polyèdre de valuation, graphe de la fonction de valuation, est le polyèdre dual du polyèdre de Newton de la série.) Les résultats de ce paragraphe sont une généralisation assez simple des résultats classiques dans le cas d'une variable.

Au paragraphe 3, nous introduisons une classe naturelle d'ensembles analytiques, mais les fonctions analytiques construites à partir de ces ensembles ne sont que les sommes de séries de Laurent.

Au paragraphe 4, nous raffinons la définition précédente pour obtenir la classe des ensembles quasi connexes à plusieurs dimensions.

Au paragraphe 5, nous utilisons ces notions pour étudier le prolongement analytique des éléments analytiques et nous donnons un exemple d'ouvert d'analyticité. (Plus précisément, nous construisons une fonction analytique sur cet ouvert qui ne se prolonge pas analytiquement en dehors de cet ouvert.)

Enfin au paragraphe 6, nous montrons sur un exemple que le problème de Cousin, sous sa forme la plus générale, n'admet pas de solution.

Pour ne pas rompre l'enchaînement des idées, on a reporté à la fin les parties techniques concernant l'établissement de la formule de Cauchy formelle (§ 7) et la localisation des singularités d'une fraction rationnelle (§ 8).

2. Notations. Séries de Laurent

2.1. $\overline{\mathbf{R}}$ désigne la droite numérique achevée : $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $\overline{\mathbf{R}}^m = (\overline{\mathbf{R}})^m$.

Si $|x|$ désigne la valeur absolue de $x \in K$, nous noterons $v(x) = -\log|x|$.

La fonction $v(x)$ possède les propriétés suivantes : pour tous x et y de K,

$v(x) > -\infty$;

$v(x) = +\infty$ si, et seulement si, $x = 0$;

$v(xy) = v(x) + v(y)$;

$v(x+y) \geqq \inf(v(x), v(y))$;

On suppose que $v(K)$ est dense dans $\overline{\mathbf{R}}$;

Pour $x = (x_1, \ldots, x_m) \in K^m$, on notera $v(x) = (v(x_1), \ldots, v(x_m)) \in \overline{\mathbf{R}}^m$;

Pour μ et $\nu \in \overline{\mathbf{R}}^m$, $\mu \leqq \nu$, équivaut à $\mu_i \leqq \nu_i$, pour $i = 1, \ldots, m$.

2.2. Si

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{Z}^m$$

est un multi-indice, et si $X = (X_1, \ldots, X_m)$ est une famille d'indéterminées, on posera $X^\alpha = X_1^{\alpha_1}, \ldots, X_m^{\alpha_m}$ et, si $y \in \mathbf{R}^m$, on posera $\alpha y = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i$.

On utilisera les notations $|\alpha| = \sum_{i=1}^m |\alpha_i|$ et, pour $0 \leqq \alpha \leqq \beta$,

$$\binom{\beta}{\alpha} = \binom{\beta_1}{\alpha_1} \cdots \binom{\beta^n}{\alpha^n}.$$

Soient $a_\alpha \in K$, définis pour tous les multi-indices α, et considérons la série de Laurent $f = \sum_\alpha a_\alpha X^\alpha$. Nous pouvons remplacer X par un élément x de K^m lorsque la série $f(x) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ converge.

Ceci a lieu si, et seulement si,

$$\lim_{|\alpha| \to \infty} [v(a_\alpha) + \alpha\, v(x)] = +\infty.$$

2.3. Il est donc naturel de définir l'ensemble $\operatorname{Conv}(f) \subset \overline{\mathbf{R}}^m$ de la façon suivante :

Si $\mu \in \mathbf{R}^m$, $\mu \in \operatorname{Conv}(f)$ équivaut à $\lim_{|\alpha| \to \infty} [v(a_\alpha) + \alpha\mu] = +\infty$.

Si pour $i \in I \subset [1, \ldots, m]$, $\mu_i = \varepsilon_i \infty$ ($\varepsilon_i = \pm 1$),
et pour

$$j \in J = [1, \ldots, m] \setminus I, \qquad \mu_j \in \mathbf{R},$$

$\mu \in \operatorname{Conv}(f)$ équivaut à $a_\alpha = 0$ pour $\varepsilon_i \alpha_i < 0$ et

$$\lim_{|\alpha| \to \infty, \alpha_i = 0, i \in I} [v(a_\alpha) + \sum_{j \in J} \alpha_j \mu_j] = +\infty.$$

Le domaine de convergence de la série f dans K^m est l'image réciproque $v^{-1}(\operatorname{Conv}(f))$ de $\operatorname{Conv}(f)$.

2.4. Nous définissons alors *la fonction de valuation* de f qui est une application de $\operatorname{Conv}(f)$ dans $\overline{\mathbf{R}}$:

Pour $\mu \in \operatorname{Conv}(f)$, on pose

$$v(f, \mu) = \inf_{a_\alpha \neq 0} (v(a_\alpha) + \alpha\mu).$$

(Lorsque $\alpha_i = 0$ et $\mu_i = \pm\infty$, on convient de poser $\alpha_i \mu_i = 0$.)

2.5. — Enfin lorsqu'il y aura un seul multi-indice β tel que $v(f, \mu) = v(a_\beta) + \beta\mu$, on posera $N(f, \mu) = \beta \in \mathbf{Z}^m$.

Nous noterons $\operatorname{Reg}(f)$ l'ensemble des points où $N(f, \mu)$ est définie, et $Z(f) = \operatorname{Conv}(f) \setminus \operatorname{Reg}(f)$.

Les ensembles $\operatorname{Conv}(f)$, $Z(f)$ et les fonctions $v(f, \mu)$ et $N(f, \mu)$, possèdent les propriétés suivantes.

2.6. *L'ensemble* $\operatorname{Conv}(f)$ *est convexe.*

Preuve. — Soient p et $q \geqq 0$, $p + q = 1$, λ et $\mu \in \operatorname{Conv}(f)$.

Si λ et $\mu \in \mathbf{R}^m$,

$$\lim_{|\alpha| \to \infty} [v(a_\alpha) + \alpha(p\lambda + q\mu)]$$
$$= p \lim_{|\alpha| \to \infty} [v(a_\alpha) + \alpha\lambda] + q \lim_{|\alpha| \to \infty} [v(a_\alpha) + \alpha\mu] = +\infty$$

et donc $p\lambda + q\mu \in \mathrm{Conv}(f)$.

Si $\lambda_i = -\infty$ (resp. $+\infty$), par $p\lambda_i + q\mu_i$ il faudra entendre n'importe quel nombre $\leq \mu_i$ (resp. $\geq \mu_i$). Avec cette convention, on vérifie encore sans peine que $p\lambda + q\mu \in \mathrm{Conv}(f)$.

2.7. *La fonction $v(f, \mu)$ est concave et continue.*

Preuve. — C'est l'enveloppe inférieure d'une famille de fonctions affines.

2.8. *Dans* $\mathrm{Conv}^o(f)$, *le graphe de la fonction $v(f, \mu)$ est un polyèdre* (ayant éventuellement une infinité de faces).

2.9. *L'ensemble $Z(f)$ est la projection des « arêtes » du polyèdre de valuation.* (Par arêtes, on entend les faces de dimension $m - 1$.)

$N(f, \mu) = \mathrm{grad}\, v(f, \mu)$ partout où $v(f, \mu)$ est différentiable. Ou encore, si $(\mu, v(f, \mu))$ appartient à une face du polyèdre, $(N(f, \mu), -1)$ est le vecteur normal à cette face.

2.10. $\mathrm{Reg}(f) \cap \mathrm{Conv}^o(f)$ est un ouvert; $N(f, \mu)$ y est localement constante. Les composantes, où $N(f, \mu)$ garde une valeur constante, sont les polytopes convexes qui sont les projections des faces du polyèdre de valuation de f.

Si N_1 et N_2 sont les valeurs prises par $N(f, \mu)$ de chaque côté d'une des faces d'un de ces polytopes, le vecteur N_1-N_2 est orthogonal à la face considérée.

Toutes ces affirmations sont faciles à vérifier.

Jusqu'à maintenant nous nous sommes intéressés à la série formelle f. Considérons à présent la fonction associée $f(x)$. Comme on l'a vu, si $\mu = v(x) \in \mathrm{Conv}(f)$, la série $f(x) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ converge.

2.11. Lemme. — *Soient $P(x) = \sum_{0 \leq \alpha \leq \alpha_0} a_\alpha x^\alpha$ un polynôme, et $\mu \in \mathbf{R}^m$. On a*

$$v(P, \mu) = \inf_{v(x) > \mu} v(P(x)).$$

Preuve. — Remarquons d'abord que, pour $v(x) = \lambda \in \mathrm{Reg}(\mathrm{P})$, on a $v(\mathrm{P}, \lambda) = v(\mathrm{P}(x))$, et que, pour $v(x) > \mu$, on a $v(\mathrm{P}(x)) \geq v(\mathrm{P}, \mu)$.

Notons D l'ensemble formé des $\lambda > \mu$. Comme $D \cap \mathrm{Reg}(P)$ est un ouvert dense dans D, et donc dans $\overline{D}$ [car $Z(P)$ est formé d'un nombre fini de segments de droites], et comme $v(K^m)$ est dense dans $\overline{\mathbf{R}}^m$, on peut trouver une suite de points x_n tels que $\lambda_n = v(x_n) \in D \cap \operatorname{Reg}(P)$ et que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \mu$. On a alors

$$v(P, \mu) = \lim_{n\to\infty} v(P, \lambda_n) = \lim_{n\to\infty} v(P(x_n)),$$

ce qui montre que

$$v(P, \mu) = \inf_{v(x)>\mu} v(P(x)).$$

2.12. Proposition. — *Soit* $\mu \in \operatorname{Conv}(f) \cap v(K^m) \cap \mathbf{R}^m$. *On a*

$$v(f, \mu) = \inf_{v(x)=\mu} v(f(x)) = \inf_{v(x-y)>\mu} v(f(x))$$

pour tout y *tel que* $v(y) = \mu$, *et si* $\mu \in \operatorname{Reg}(f)$, *on a plus précisément*

$$v(f(x)) = v(f, \mu) \qquad si \quad v(x) = \mu.$$

Preuve. — Soit x tel que $v(x) = \mu$. Il est évident que $v(f(x)) \geqq v(f, \mu)$.

Soit A l'ensemble des α tels $v(a_\alpha) + \alpha\mu = v(f, \mu)$.

A n'est pas vide et est fini puisque $\mu \in \operatorname{Conv}(f)$.

Posons $g(x) = \sum_{\alpha\in A} a_\alpha x^\alpha$ et $h(x) = \sum_{\alpha\notin A} a_\alpha x^\alpha$. Il est clair que $v(h(x)) \geqq v(h, \mu) > v(f, \mu)$.

Soit β tel que, pour tout $\alpha \in A$, on ait $\alpha + \beta \geqq 0$.

Considérons le polynôme

$$P(y) = (x+y)^\beta g(x+y) = \sum_{\alpha\in A} a_\alpha (x+y)^{\alpha+\beta} = \sum_{0\leqq\gamma\leqq\alpha+\beta,\, \alpha\in A} C_\gamma y^\gamma.$$

Il résulte de la formule du binôme que l'on a, pour $\gamma \leqq \alpha + \beta$,

$$v(C_\gamma) \geqq v(a_\alpha x^{\alpha+\beta-\gamma}) = v(a_\alpha) + (\alpha + \beta - \gamma)\mu$$

et donc $v(\mathrm{P}, \mu) \geqq \beta\mu + v(g, \mu) = \beta\mu + v(f, \mu)$.

D'autre part, si $\alpha \in A$ n'a pas de majorant dans A autre que lui-même, on a $C_{\alpha+\beta} = a_\alpha$ et donc

$$v(P, \mu) \leqq v(C_{\alpha+\beta}) + (\alpha + \beta)\mu = v(f, \mu) + \beta\mu.$$

Finalement $v(\mathrm{P}, \mu) = v(f, \mu) + \beta\mu$.

Il résulte du lemme 2.11 que

$$v(\mathrm{P}, \mu) = \inf_{v(y)>\mu} v(P(y)) = \beta\mu + \inf_{v(y)>\mu} v(g(x+y)).$$

Donc

$$v(f, \mu) = v(g, \mu) = \inf_{v(y)>\mu} v(g(x+y)) = \inf_{v(y)>\mu} v(f(x+y)).$$

Enfin, si $\mu \in \operatorname{Reg}(f)$, A est réduit à un seul élément, et l'on a

$$v(f(x)) = v(g(x)) = v(a_\alpha) + \alpha\mu = v(f, \mu) \qquad \text{pour} \quad v(x) = \mu.$$

2.13. Corollaire. — *Il y a unicité du développement en série de Laurent. Plus précisément, soient f et g deux séries de Laurent telles que*

$$\operatorname{Conv}(f) \cap \operatorname{Conv}(g) \cap v(K^m) \cap \mathbf{R}^m \neq \emptyset.$$

Soit $\mu \in \operatorname{Conv}(f) \cap \operatorname{Conv}(g) \cap v(K^m) \cap \mathbf{R}^m$; *si, pour tout x tel que* $v(x) = \mu$, *on a* $f(x) = g(x)$, *les deux séries coïncident.*

2.14. Corollaire. — *Soit A le domaine de convergence d'une série de Laurent f, et soit f (x) la somme de cette série. Si f s'annule au voisinage d'un point* x_0 *de A, f est identiquement nulle dans A.*

Preuve. — Soit x_0 tel que $v(x_0) = \mu_0 \in \operatorname{Conv}(f)$ et que $f(x)$ soit nulle dans un voisinage de x_0. Si on développe alors $f(x)$ en série de Taylor autour du point x_0, ce développement converge pour $v(x - x_0) > v(x_0)$. Les coefficients de cette série étant nuls, $f(y)$ s'annule donc pour $v(y - x_0) > v(x_0)$. Il résulte alors de la proposition 2.12 que $v(f, \mu_0) = +\infty$, ce qui montre que tous les coefficients de la série de Laurent f sont nuls.

2.15. Corollaire. — *Soit* $(A_i)_{i \in I}$ *une famille enchaînée d'ouverts* $\subset K^m$.

Soit f définie sur $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ *telle que sa restriction à chaque* A_i *y soit développable en série de Laurent. Alors f est développable en série de Laurent dans A.*

Preuve. — Pour éviter toute ambiguïté, signalons que nous ne considérons que des séries de Laurent relatives à l'origine. Il résulte des corollaires 2.13 et 2.14 que, si dans l'intersection non vide des deux ouverts A_i et A_j les sommes des séries de Laurent f_i et f_j définissant f coïncident, alors ces séries sont les mêmes. Le développement de f en série de Laurent est donc le même pour tous les A_i.

2.16. Si on a deux séries de Laurent à coefficients dans K,

$$f = \Sigma_\alpha a_\alpha X^\alpha \qquad \text{et} \qquad g = \Sigma_\alpha b_\alpha X^\alpha,$$

on définit leur somme $f + g$ par la formule

$$f + g = \Sigma_\alpha (a_\alpha + b_\alpha) X^\alpha.$$

Alors

$$\operatorname{Conv}(f + g) \supset \operatorname{Conv}(f) \cap \operatorname{Conv}(g)$$

et, pour $\mu \in \operatorname{Conv}(f) \cap \operatorname{Conv}(g)$,

$$v(f + g, \mu) \geqq \inf[v(f, \mu), v(g, \mu)],$$

l'égalité étant réalisée lorsque $v(f, \mu) \neq v(g, \mu)$ ou lorsque

$$\mu \in \operatorname{Reg}(f) \cap \operatorname{Reg}(g) \qquad \text{et} \qquad N(f, \mu) \neq N(g, \mu).$$

2.17. Pour définir le produit de deux séries f et g, il faut supposer que, pour tout $\alpha \in \mathbf{Z}^n$, la série $\sum_\beta a_\beta\, b_{\alpha-\beta}$ converge vers un élément c_α de K. On pose

$$fg = \sum_\alpha c_\alpha\, X^\alpha.$$

Si $\operatorname{Conv}(f) \cap \operatorname{Conv}(g) \neq \emptyset$, *le produit* fg *est défini, et l'on a*

$$\operatorname{Conv}(fg) \supset \operatorname{Conv}(f) \cap \operatorname{Conv}(g),$$

$$\operatorname{Reg}(fg) \cap \operatorname{Conv}(f) \cap \operatorname{Conv}(g) = \operatorname{Reg}(f) \cap \operatorname{Reg}(g),$$

pour $\mu \in \operatorname{Conv}(f) \cap \operatorname{Conv}(g)$,

$$v\ (fg, \mu) = v\ (f, \mu) + v\ (g, \mu),$$

pour $\mu \in \operatorname{Reg}(f) \cap \operatorname{Reg}(g)$,

$$N(fg, \mu) = N(f, \mu) + N(g, \mu).$$

On peut démontrer directement ces formules comme dans le cas de dimension 1 ([5], § 2, prop. 1). Notons cependant que dans le cas où $\mu \in \operatorname{Conv}(f) \cap \operatorname{Conv}(g) \cap v(K^m)$, ces propriétés résultent simplement de la proposition 2.12. Si $\mu \in \operatorname{Conv}(f) \cap \operatorname{Conv}(g)$, mais $\mu \notin v(K^m)$, on peut considérer une extension transcendante K' de K telle que $\mu \in v(K'^m)$, et on obtient encore la proposition en appliquant 2.12.

2.18. Soient p et $q \geq 0$, $p + q = m$. Posons $x = (x', x'')$, $x' \in K^p$, $x'' \in K^q$, $X = (X', X'')$, où X' et X'' représentent respectivement p et q variables indépendantes,

$$\alpha = (\alpha', \alpha''), \qquad \alpha' \in \mathbf{Z}^p, \quad \alpha'' \in \mathbf{Z}^q \qquad \text{et} \qquad \mu = (\mu', \mu'')\ \mu' \in \overline{\mathbf{R}}^p, \quad \mu'' \in \overline{\mathbf{R}}^q.$$

Soit alors $u' \in K^p$. Si pour tout $\alpha'' \in \mathbf{Z}^q$, la série $b_{\alpha''} = \sum_{\alpha'} a_{(\alpha', \alpha'')}\, u'^{\alpha'}$. converge, on associe à f la série de Laurent à q variables $f_{u'} = \sum_{\alpha''} b_{\alpha''}\, X''^{\alpha''}$

Proposition. — *Si le sous-espace* $\mu' = v(u')$ *a une intersection non vide avec* $\operatorname{conv}(f)$, *la série* $f_{u'}$ *est définie,* $\operatorname{Conv}(f_{u'})$ *est l'ensemble des* μ'' *tels que* $(v(u'), \mu'') \in \operatorname{Conv}(f)$. *Pour un tel* μ'', *on a*

$$v(f_{u'}, \mu'') \geq v(f, (v(u'), \mu'')).$$

Plus précisément, si $(v(u'), \mu'') \in \operatorname{Reg}(f)$, $\mu'' \in \operatorname{Reg}(f_{u'})$, *et l'on a*

$$v(f_{u'}, \mu'') = v(f, (v(u'), \mu'')).$$

Preuve. — Soit μ'' tel que $(v(u'), \mu'') \in \operatorname{Conv}(f)$. Considérons, pour simplifier, le cas où $(v(u'), \mu'') \in \mathbf{R}^m$. On a alors

$$v(a_\alpha) + \alpha'\, v(u') + \alpha''\, \mu'' \to +\infty \qquad \text{quand} \quad |\alpha'| + |\alpha''| \to +\infty.$$

Donc $v(a_\alpha) + \alpha' v(u') \to +\infty$ quand $|\alpha'| \to +\infty$, et la série $\sum_{\alpha'} a_\alpha u'^{\alpha'}$ converge.

D'autre part, $v(b_{\alpha''}) \geqq \inf_{\alpha'} (v(a_\alpha) + \alpha' v(u'))$, et donc

$$v(b_{\alpha''}) + \alpha'' \mu'' \to +\infty \qquad \text{quand} \quad |\alpha''| \to +\infty,$$

ce qui prouve que $\mu'' \in \operatorname{Conv}(f_{u'})$.

Enfin

$$v(f_{u'}, \mu'') = \inf_{\alpha''} (v(b_{\alpha''}) + \alpha'' \mu'') \geqq \inf_{\alpha''} [\inf_{\alpha'} (v(a_\alpha) + \alpha' v(u')) + \alpha'' \mu'']$$
$$= \inf_\alpha [v(a_\alpha) + \alpha' v(u') + \alpha'' \mu''] = v(f, (v(u'), \mu'')).$$

Si $(v(u'), \mu'') \in \operatorname{Reg}(f)$, c'est qu'il existe un multiplet $\beta = (\beta', \beta'')$, tel que $v(a_\beta) + \beta' v(u') + \beta'' \mu'' < v(a_\alpha) + \alpha' v(u') + \alpha'' \mu''$ pour $\alpha \neq \beta$.

Alors

$$v(b_{\beta''}) = v(a_\beta) + \beta' v(u')$$

et

$$v(b_{\beta''}) + \beta'' \mu'' = v(a_\beta) + \beta' v(u') + \beta'' \mu'' < v(b_{\alpha''}) + \alpha'' \mu''$$

pour $\alpha'' \neq \beta''$; ce qui achève la démonstration.

2.19. La proposition précédente exprime que le polyèdre de valuation de $f_{u'}$ se trouve en dessus de l'intersection du polyèdre de valuation de f avec le sous-espace $\mu' = v(u')$, et coïncide avec celle-ci dans les intersections du sous-espace avec les faces du polyèdre.

2.20. Comme dans le cas des fonctions d'une variable, les zéros des sommes de séries de Laurent correspondent aux arêtes du polyèdre de valuation.

Proposition. — *Soient f une série de Laurent, et*

$$\mu \in \operatorname{Conv}(f) \cap v(K^m) \cap \mathbf{R}^m.$$

Si $\mu \in \operatorname{Reg}(f)$, $f(x)$ ne s'annule pas dans le polycercle $\{x : v(x) = \mu\}$; *si $\mu \in Z(f)$, il existe x tel que $v(x) = \mu$ et $f(x) = 0$.*

Preuve. — Si $\mu \in \operatorname{Reg}(f)$, on a déjà vu que, pour $v(x) = \mu$, on a $v(f(x)) = v(f, \mu)$, et donc f ne peut pas s'annuler dans le polycercle $\{x : v(x) = \mu\}$.

Nous allons démontrer la deuxième partie de la proposition par récurrence sur m. Le résultat est bien connu pour $m = 1$ [5]. Supposons-le prouvé pour $m - 1$.

Soit $\mu \in Z(f)$, et soit A l'ensemble des multi-indices α tels que

$$v(a_\alpha) + \alpha\mu = v(f, \mu).$$

A contient plusieurs éléments. Il existe donc un indice i et deux multi-indices β et γ appartenant à A dont les coordonnées d'indice différent de i ne sont pas toutes égales. Pour simplifier, on peut supposer que $i = m$, et écrire $x = (x', x_m)$, $\mu = (\mu', \mu_m)$, $\alpha = (\alpha', \alpha_m)$. On a donc $\beta' \neq \gamma'$.

Considérons les fonctions

$$P(y) = \Sigma_{\alpha \in A, \alpha' = \beta'} a_\alpha y^{\alpha_m}$$

et

$$Q(y) = \Sigma_{\alpha \in A, \alpha' = \gamma'} a_\alpha y^{\alpha_m}, \qquad y \in K, \quad y \neq 0.$$

On sait que ces fonctions n'ont qu'un nombre fini de zéros sur le cercle $v(y) = \mu_n$, soient $y_1, \ldots, y_k$. K, étant algébriquement clos, possède un corps de restes infini; il existe donc $u_m \in K$ vérifiant $v(u_m) = \mu_m$, et $v(u_m - y_j) = \mu_m$. On a alors :

$$v(P(u_m)) = v(P, \mu_m) = v(f, \mu) - \beta' \mu'$$

et

$$v(Q(u_m)) = v(Q, \mu_m) = v(f, \mu) - \gamma' \mu'.$$

D'autre part,

$$f_{u_m} = \Sigma_{\alpha'} b_{\alpha'} x'^{\alpha'} \qquad \text{avec} \quad b_{\alpha'} = \Sigma_{n \in \mathbf{Z}} a_{(\alpha', n)} x_m^n,$$

et il résulte des formules précédentes que

$$v(b_{\beta'}) = v(f, \mu) - \beta' \mu' \qquad \text{et} \qquad v(b_{\gamma'}) = v(f, \mu) - \gamma' \mu'$$

et donc

$$v(f, \mu) = v(b_{\beta'}) + \beta' \mu' = v(b_{\gamma'}) + \gamma' \mu' \leq v(f_{u_m}, \mu') \leq v(f, \mu),$$

ce qui prouve que $\mu' \in Z(f_{u_m})$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc x' avec $v(x') = \mu'$ tel que $f_{u_m}(x') = 0$.

Mais $f_{u_m}(x') = f((x', u_m))$ et $v((x', x_m)) = \mu'$.

3. Ensembles saturés P-connexes

Les résultats que l'on établit sur la répartition des singularités d'une fraction rationnelle nous amènent à définir une classe d'ensembles que l'on montre être analytiques. Malheureusement, les fonctions analytiques que l'on construit à partir de ces ensembles ne sont autres que les sommes de séries de Laurent.

3.1. Soit $R(x) = P(x)/Q(x)$ une fraction rationnelle, où P et Q sont deux polynômes premiers entre eux. On prolonge par continuité, lorsque c'est possible, la fonction $R(x)$ aux points où P et Q ont des zéros communs.

Soit A l'ensemble des zéros de R, on note $Z(R)$ l'adhérence dans $\mathbf{R}^m$ de $v(A)$. Soit B l'ensemble des singularités de R, on note $W(R)$ l'adhérence dans $\mathbf{R}^m$ de $v(B)$. $Z(R)$ et $W(R)$ sont respectivement contenus dans $Z(P)$ et $Z(Q)$ d'après la proposition 2.20.

On pose $v(R, \mu) = v(P, \mu) - v(Q, \mu)$.

$v(R, \mu)$ est une fonction affine par morceaux, mais n'est plus concave. Son graphe est le polyèdre de valuation de R.

On note

$$\operatorname{Reg}(R) = \complement(Z(R) \cup W(R)).$$

Si $\mu \in \operatorname{Reg}(R) \cap v(K^m)$, alors $v(R(x)) = v(R, \mu)$ pour $v(x) = \mu$.

On note $N(R, \mu)$ le gradient de la fonction $v(R, \mu)$ pour $\mu \in \operatorname{Reg}(R)$. Si $\mu \notin Z(P) \cup Z(Q)$, on a $N(R, \mu) = N(P, \mu) - N(Q, \mu)$.

Ces propriétés résultent directement du paragraphe 2, sauf le fait que, si

$$\mu \in \operatorname{Reg}(R) \cap Z(P) \cap Z(Q) \cap v(K^m) \qquad \text{et} \qquad v(x) = \mu,$$

alors $v(R(x)) = v(R, \mu)$.

Pour démontrer cela, il suffit de fixer toutes les variables sauf une, la propriété résulte alors des propriétés des fonctions d'une variable.

Nous allons préciser la forme de $W(R)$.

3.2. Théorème. — *Les composantes connexes de* $\complement(W(R))$ *sont de polytopes convexes, et R est développable en série de Laurent dans les images réciproques de ces composantes connexes.*

La démonstration est reportée au paragraphe 8.2.

3.3. Par définition si $a \in K^m$ est une singularité de R, $v(a) \in W(R)$. Cette propriété a-t-elle une réciproque ?

Théorème. — *Si $\mu \in W(R) \cap v(K^m)$, la fraction rationnelle $R(x)$ a des singularités dans le polycercle $v(x) = \mu$.*

La démonstration est reportée au paragraphe 8.3.

3.4. *L'ouvert $A \subset K^m$ est dit saturé si $v^{-1}(v(A)) = A$; autrement dit, si $x \in A$ et $v(y) = v(x)$ impliquent $y \in A$.*

Le domaine de convergence d'une série de Laurent est saturé, c'est ce qui motive cette définition.

3.5. *L'ensemble saturé A est dit P-connexe, s'il existe Ω, ouvert connexe de $\mathbf{R}^m$, tel que $\Omega \cap V(K^m) \subset V(A) \subset \overline{\Omega} \cap V(K^m)$.*

(P indique qu'il s'agit d'une propriété de la projection de A.)

3.6. THÉORÈME. — *Un ensemble saturé P-connexe est un ensemble analytique.*

Ce théorème résulte du corollaire 2.14 et du résultat plus fort suivant.

3.7. THÉORÈME. — *Soit A un ensemble saturé P-connexe, et soit f un élément analytique sur A. Alors f est somme d'une série de Laurent convergeant sur A.*

Preuve. — Soit R une fraction rationnelle sans singularités dans A. Montrons que $W(R) \cap \Omega = \emptyset$.

$W(R)$ est formé de polyèdres de dimension $m-1$ contenus dans des hyperplans orthogonaux à des vecteurs à coordonnées entières. Par définition, il en résulte que $W(R) \cap v(K^m)$ est dense dans $W(R)$. Alors $W(R) \cap \Omega$, étant ouvert dans $W(R)$, $W(R) \cap \Omega \cap v(K^m)$ est dense dans $W(R) \cap \Omega$. Mais $W(R) \cap \Omega \cap v(K^m) \subset W(R) \cap v(A)$, et comme A est saturé et que R n'a pas de singularités dans A, $W(R) \cap v(A) = \emptyset$ (th. 3.3), d'où le résultat.

Ω, étant connexe, est donc contenu dans une des composantes connexes de $\complement W(R)$, soit π; et alors $v(A) \subset \pi$ puisque $v(A) \cap W(R) = \emptyset$.

Soit alors R_n une suite de fractions rationnelles sans singularités dans A convergeant uniformément vers f sur A. Soit π_n le polytope convexe associé à R_n contenant Ω. Dans $v^{-1}(\pi_n)$, R_n est développable en série de Laurent (th. 3.2), soit $F_n = \sum_\alpha a_{\alpha,n} X^\alpha$ cette série.

Soit $\mu \in v(A)$, alors $v(F_n - F_m, \mu) \to +\infty$ quand n et m tendent vers $+\infty$, ce qui montre que, pour α fixé, la suite $a_{\alpha,n}$ est une suite de Cauchy qui converge donc vers un élément a_α de K. Soit alors $F = \sum_\alpha a_\alpha X^\alpha$.

On voit que $\mu \in \operatorname{Conv}(F)$ et que, pour $v(x) = \mu$, on a

$$\textstyle\sum_\alpha a_\alpha x_\alpha = \lim_{n\to\infty} \sum_\alpha a_{\alpha,n} x^\alpha = \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x).$$

3.8. COROLLAIRE. — *Soit A un ouvert saturé P-connexe. Notons $\hat{A} = v^{-1}\big(\widehat{v(A)}\big)$. Alors $\hat{A}$ est analytique, et tout élément analytique sur A se prolonge en un élément analytique sur $\hat{A}$.*

On rappelle que $\widehat{v(A)}$ désigne l'enveloppe convexe de $v(A)$ dans $\mathbf{R}^m$.

Preuve. — Il est clair que $\hat{A}$ est aussi un ensemble saturé P-connexe, donc analytique. D'autre part, pour λ et $\mu \in v(A)$, p et $q > 0$, $p+q=1$, on a

$$\begin{aligned} v(F - F_n, p\lambda + q\mu) &\geqq \inf(v(F-F_n, \lambda), v(F-F_n, \mu)) \\ &\geqq \inf_{x\in A} v(f(x) - R_n(x)), \end{aligned}$$

ce qui montre que $R_n(x)$ converge uniformément sur $\hat{A}$ vers la somme de F.

3.9. Notons $\mathcal{C}$ la classe des ouverts saturés P-connexes (une origine et des axes ayant été choisis une fois pour toutes). Nous dirons que f est $\mathcal{C}$-analytique sur A, si $A = \bigcup A_i$, la famille (A_i) étant enchaînée, si f est un élément analytique sur chaque A_i et si les A_i appartiennent à $\mathcal{C}$.

PROPOSITION. — *Les fonctions $\mathcal{C}$-analytiques sont développables en série de Laurent sur leur domaine de définition.*

Cela résulte directement du théorème 3.7 et du corollaire 2.15.

On voit donc que la classe $\mathcal{C}$ ne permet pas d'obtenir une classe assez vaste de fonctions analytiques.

4. **Ensembles quasi connexes**

Pour obtenir une classe plus vaste d'ensembles analytiques, nous allons affaiblir les conditions données au paragraphe précédent. Mais ces conditions plus faibles devront ne pas faire intervenir un choix privilégié de l'origine dans K^m. Il faut donc commencer par relativiser toutes les notions introduites.

4.1. Si $y \in K^m$, on pose $v_y(x) = v(x - y)$; on introduit la fonction de valuation d'une fraction rationnelle R relativement à y :

$$v_y(R(x), \mu) = v(R(x + y), \mu).$$

On vérifie sans peine que, si $v(y - z) = \mu$, alors $v_y(R, \mu) = v_z(R, \mu)$. A est dit saturé relativement à y, si $v_y^{-1}(v_y(A)) = A$.

Si $A \subset K^m$, nous appellerons partie saturée de A relativement à y, et nous noterons A_y^s, le plus grand sous-ensemble de A saturé relativement à y. On voit que $x \in A_y^s$ équivaut à : pour tout $z \in K^m$, $v_y(z) = v_y(x)$ implique $z \in A$. A_y^s est la réunion de tous les polycercles centrés en y contenus dans A.

4.2. *L'ouvert $A \subset K^m$ est appelé quasi-connexe élémentaire si, et seulement si, quel que soit $y \in A$, il existe un ouvert Ω de $\mathbf{R}^m$ tel que :*

(*a*) $\Omega \cap v(K^m) \subset v_y(A_y^s)$;

(*b*) (Ω_k) *désignant la famille des composantes connexes de Ω, la famille $(\overline{\Omega}_k \cap \mathbf{R}^m)$ est enchaînée;*

(*c*) $v_y(A) \subset (\bigcup_k \overline{\Omega}_k)$.

A est dit quasi-connexe si c'est la réunion d'une famille enchaînée de quasi connexes élémentaires.

Si $m = 1$, un quasi-connexe élémentaire est un quasi connexe au sens de KRASNER [4]. En effet, soient y et z appartenant à A, nous allons montrer que si $x \in \complement A$ et $v_y(x) > v_y(z)$, alors $v_y(x)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, ce qui montrera que A est quasi-connexe au sens de KRASNER. Soit Ω_0 la composante connexe de Ω voisinage de $v_y(y) = +\infty$. D'après la condition (c), il existe k tel que $v_y(z) \in \overline{\Omega}_k$. On a $\Omega_0 =]a_0, +\infty]$ et $\Omega_j =]a_j, b_j[$. La condition (b) exprime qu'il existe $j_1, \ldots, j_m$ avec $j_1 = 0, j_m = k$, tels que $a_{j_n} = b_{j_{n+1}}$, $1 \leqq n \leqq m-1$.

Si $r \in v(K)$, $r > v_y(z)$ et $r \neq a_{j_n}$, $1 \leqq n \leqq m-1$, r appartient à l'un des Ω_{j_n}, et donc, d'après la condition (a), le cercle $v_y(x) = r$ est contenu dans A. Donc si $x \in \complement A$ et $v_y(x) > v_y(z)$, on a nécessairement $v_y(x) = a_{j_n}$ pour un n, $1 \leqq n \leqq m-1$, ce qui achève la démonstration.

4.3. Soient A un quasi-connexe élémentaire, f un élément analytique sur A, $y \in A$.

Si R_n est une suite de fractions rationnelles sans singularités sur A et convergeant uniformément sur A vers f, on vérifie sans peine que, pour $\mu \in \overline{v_y(A)}$, $v_y(R_n, \mu)$ converge vers une limite, et que cette limite ne dépend pas de la suite R_n considérée. On note donc cette limite $v_y(f, \mu)$.

Sur $v^{-1}(\overline{\Omega}_k) \cap A_y^s$, f est développable en une série de Laurent f_k (th. 3.7), et l'on a, pour $\mu \in \Omega_k$, $v_y(f, \mu) = v_y(f_k, \mu)$. Pour $\mu \in v_y(A_y^s)$, on a $v_y(f, \mu) = \inf_{v_y(x)=\mu} v(f(x))$.

Si y et $z \in A$, $v(y-z) = \mu$, alors $v_y(f, \mu) = v_z(f, \mu)$.

4.4. THÉORÈME. — *Un ensemble quasi connexe est analytique.*

Il résulte de la proposition 1.5 qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où A est un quasi connexe élémentaire.

4.5. LEMME. — *Soit Ω un ouvert connexe de $\overline{\mathbf{R}}^m$, et soit f un élément analytique sur $v_y^{-1}(\Omega)$. S'il existe $\mu \in \overline{\Omega} \cap \mathbf{R}^m$ tel que $v_y(f, \mu) = +\infty$, on a $v_y(f, \mu) = +\infty$ pour tout $\mu \in \overline{\Omega} \cap \mathbf{R}^m$.*

Preuve. — La fonction $v_y(f, \mu)$ se prolonge à $\overline{\widehat{\Omega}}$ d'après le théorème 3.7. $\widehat{\Omega}$ étant convexe et la fonction $v_y(f, \mu)$ étant concave, on voit que si, pour $\lambda \in \overline{\Omega} \cap \mathbf{R}^m$, $v_y(f, \lambda) = +\infty$, alors $v_y(f, \mu) = +\infty$ pour tout $\mu \in \widehat{\Omega}$, et le résultat reste vrai par continuité pour $\mu \in \overline{\widehat{\Omega}} \cap \mathbf{R}^m$.

4.6. *Démonstration du théorème* 4.4. — Soit f un élément analytique sur A, et supposons que f soit nulle au voisinage de y et ne soit pas nulle au voisinage de z.

Soient $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ les ouverts connexes de $\overline{\mathbf{R}}^m$ annoncés par la définition 4.2 tels que $v_y^{-1}(\Omega_k) \subset A$, $\overline{\Omega}_k \cap \overline{\Omega}_{k+1} \cap \mathbf{R}^m \neq \emptyset$ pour $1 \leqq k < n$, $v_y(y) \in \overline{\Omega}_1$ et $v_y(z) \in \overline{\Omega}_n$. Soit $\mu_k \in \overline{\Omega}_k \cap \overline{\Omega}_{k+1} \cap \mathbf{R}_n$. Par application répétée du lemme 4.5, on voit que, puisque $v(f, \mu) = +\infty$ au voisinage de $v_y(y) = (\infty)$, on a $v_y(f, \mu_k) = +\infty$, et donc $v_y(f, \lambda) = +\infty$ avec $\lambda = v(z-y)$.

Un raisonnement analogue relatif à z montre que $v_z(f, \lambda) \neq +\infty$. Or, d'après 4.3, on doit avoir $v_z(f, \lambda) = v_y(f, \lambda)$; il y a contradiction.

4.7. On notera $\mathcal{K}$ la classe des ensembles quasi-connexes. La classe $\mathcal{K}$ n'épuise pas la classe $\mathcal{A}$ des ensembles analytiques (on sait, en effet, que c'est le cas si $m = 1$ [6]), mais les fonctions $\mathcal{K}$-analytiques forment une famille permettant d'étudier le prolongement analytique dans des cas non triviaux. (On dira que f est une fonction $\mathcal{K}$-analytique si les ensembles A_i qui interviennent dans la définition 1.3 sont pris dans la classe $\mathcal{K}$.)

5. Ensembles d'analyticité

Dans le cas d'une variable, $m = 1$, étant donné le quasi-connexe A, il n'existe pas de quasi connexe B, contenant A strictement tel que toute fonction analytique sur A se prolonge sur B. (On peut même construire, si A est régulier, une fonction analytique sur A qui ne se prolonge pas en dehors de A [7].) Comme dans le cas des fonctions de variable complexe, il n'en est plus de même si $m > 1$. On introduit des ensembles liés à la propriété de prolongement pour tout élément analytique.

5.1. *Un ensemble quasi-connexe A est dit ensemble de $\mathcal{K}$-analyticité s'il n'existe pas deux ensembles quasi connexes A_1 et A_2 tels que*

(*a*) $\emptyset \neq A_1 \subset A_2 \cap A$, et *$A_2$ n'est pas contenu dans A;*

(*b*) *pour toute fonction $\mathcal{K}$-analytique f sur A, il existe une fonction $\mathcal{K}$-analytique g sur A_2 telle que $f = g$ sur A_1.*

5.2. Nous allons d'abord nous intéresser au cas où f et g sont des éléments analytiques.

Soit A un sous-ensemble de K^m, notons $\tilde{A}$ l'ensemble des x de K^m tels que, pour toute fraction rationnelle sans singularités dans A, on ait

$$v(R(x)) \geqq \inf_{z \in A} (v(R(z))).$$

Il est clair que tout élément analytique sur A se prolonge en un élément analytique sur $\tilde{A}$.

Il en résulte que si $\tilde{A}$ est analytique, A l'est aussi, mais nous ne savons pas si la réciproque est vraie.

Nous allons voir sur des exemples que $\tilde{A}$ peut être plus grand que A.

5.3. On dira que A est *P-convexe* relativement à y, si $v_y^{-1}\left(\widehat{v_y(A)}\right) = A$.

On dira que A est *fragmentairement convexe* si, pour tout $y \in K^m$, les sous-ensembles maximaux de A saturés P-connexes relativement à y sont P-convexes relativement à y et disjoints.

Il est clair que l'intersection d'une famille d'ensembles fragmentairement convexes est fragmentairement convexe.

Étant donné l'ensemble analytique A, il existe donc un plus petit ensemble fragmentairement convexe contenant A, on le note $\hat{A}$.

5.4. Lemme. — *Soient $y \in K^m$, B une partie maximale de $\hat{A}$ saturée P-connexe relativement à y. Alors $v_y(B) \subset \widehat{v_y(B \cap A)}$. Si $x \in \hat{A}$, $x \notin A$, i existe une partie B de $\hat{A}$ saturée P-connexe relativement à un y telle que $x \in B$.*

Preuve. — Posons $B' = v_y^{-1}\left(\widehat{v_y(B \cap A)}\right)$, et soit A' la réunion de A et des B' associés à tous les y et tous les B. Alors A' est fragmentairement convexe, et l'on a $A \subset A' \subset \hat{A}$, donc $A' = \hat{A}$, et par suite $B' = B$.

5.5. Lemme. — *Si A est analytique, $\hat{A}$ est analytique; si A est quasi-connexe, $\hat{A}$ est quasi-connexe.*

Preuve. — Pour tout $y \in K^m$, et toute partie B maximale de $\hat{A}$ saturée projectivement convexe relativement à y, B est quasi-connexe. Comme $\hat{A}$ est la réunion enchaînée de A et de ces ensembles B (lemme 5.4), $\hat{A}$ est analytique (corollaire 1.5), respectivement quasi-connexe (définition 4.2).

5.6. Proposition. — *Soit A un ensemble analytique. Alors $\hat{A} \subset \tilde{A}$, et donc tout élément analytique sur A se prolonge analytiquement en un élément analytique sur $\hat{A}$.*

Preuve. — Soit R une fraction rationnelle sans singularités dans A.

Soit $y \in K^m$ et soit B une partie saturée, P-connexe relativement à y, de A. Il résulte de la démonstration du théorème 3.7 que $v_y(B)$ est contenu dans un des polytopes convexes, composantes connexes de $\complement W_y(R)$, soit π ce polytope. Alors l'ensemble A', formé de la réunion de A et de tous ces ensembles $v_y^{-1}(\pi)$ associés à tous les y et tous les B, est fragmentairement convexe. Donc $\hat{A} \subset A'$.

Soit maintenant B une partie maximale de $\hat{A}$ saturée, P-connexe relativement à y. D'après ce qu'on vient de démontrer $v(B) \subset \pi$, π composante connexe de $\complement W_y(R)$. Comme $v_y(R, \mu)$ est concave dans π, que pour $v_y(x) = \mu \in \pi$, $v_y(R, \mu) = v(R(x))$ et que $v_y(B) = \widehat{v_y(A \cap B)}$ (lemme 5.4), on a, pour $z \in B$, $v_y(z) \geq \inf_{x \in B \cap A} v_y(x)$. B est donc contenu dans A. Comme $\hat{A}$ est la réunion de A et de tous ces B, la proposition est démontrée.

5.7. Proposition. — *Soit Ω un ouvert convexe de $\overline{\mathbf{R}}^m$, $A = v^{-1}(\Omega)$.*

Il existe une fonction analytique développable en série de Laurent dans A qui ne se prolonge pas en dehors de A. A est un ensemble de $\mathcal{K}$-analyticité.

Preuve. — Soit (Ω_n) une suite croissante de fermés convexes de $\mathbf{R}^m$ contenus dans Ω tels que $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ et que la frontière de Ω_n ne contienne aucun sous-espace affine non parallèle aux axes. Soit (u_n) une suite de points tels que $u_n \in v(K^m) \cap (\Omega \setminus \Omega_n)$ et que l'ensemble des points d'accumulation de la suite (u_n) soit la frontière de Ω.

Il existe alors un hyperplan affine π_n passant par u_n, orthogonal au vecteur α_n de coordonnées entières, à une distance (euclidienne) $d_n > 0$ de Ω_n. En remplaçant éventuellement α_n par $-\alpha_n$, on peut supposer que le vecteur $\alpha_n \in \mathbf{Z}^m$ est dirigé du côté de l'hyperplan π_n où se trouve Ω_n.

Soit k_n une suite d'entiers positifs tels que $k_n d_n \| \alpha_n \| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ (on pose $\| \alpha \| = \sqrt{\sum_i \alpha_i^2}$). Soit $a_n \in K$ tel que $v(a_n) = -k_n \alpha_n u_n$. Soit $x \in A_n = v^{-1}(\Omega_n)$. La distance (euclidienne) de $v(x)$ au plan π_n est

$$d(v(x), \pi_n) = \frac{\alpha_n (v(x) - u_n)}{\| \alpha_n \|} \geqq d_n.$$

On a donc

$$v(a_n x^{k_n \alpha_n}) = k_n \alpha_n (v(x) - u_n) \geqq k_n \| \alpha_n \| d_n.$$

Sur A_N le produit infini $\Pi_n (1 + a_n x^{k_n \alpha_n})$ converge donc uniformément vers un élément analytique développable en série de Laurent dans A_N. Il résulte de l'unicité du développement en série de Laurent que ce développement ne dépend pas de N.

$\Pi_n (1 + a_n x^{k_n \alpha_n})$ converge donc dans A vers une fonction analytique f développable en série de Laurent dans A.

Supposons que A ne soit pas un ensemble de $\mathcal{K}$-analyticité, il existe alors un quasi-connexe élémentaire A' et un élément analytique y sur A' tels que $A \cap A' \neq \emptyset$, $f = y$ dans $A \cap A'$ et $A' \not\subset A$. Alors il existe un ouvert $\theta \subset \Omega$, tel que $\overline{\theta}$ intersecte la frontière de Ω et que $v^{-1}(\theta) \subset A \cap A'$. D'autre part,

$$Z(f) = (\bigcup_n \pi_n) \cap \Omega,$$

car pour $\mu \in \pi_n$, $v(a_n) + k_n \alpha_n \mu = 0 = v(1)$. Il résulte de l'hypothèse faite sur les u_n qu'une infinité d'hyperplans π_n intersectent θ, or f doit être un élément analytique sur $v^{-1}(\theta)$, et donc $Z(f) \cap \theta$ ne doit contenir qu'un nombre fini de faces. Il y a donc contradiction. f ne se prolonge pas en dehors de A.

6. Problème du recollement des zéros

6.1. Le premier problème de Cousin s'énonce de la façon suivante :

Soit (A_i) une famille enchaînée d'ensembles analytiques, et soit (g_i) une famille de fonction analytique sur les A_i, telles que, si $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, g_i/g_j soit une fonction analytique dans $A_i \cap A_j$ ne s'y annulant pas. Existe-t-il *une fonction analytique f sur $A = \bigcup_i A_i$ telle que, dans A_i, f/g_i soit une fonction analytique ne s'annulant pas ?*

Nous allons montrer que, même dans des cas simples, le problème n'a pas de solution.

6.2. Plaçons-nous dans K^2. Soient

$$A_1 = \{ x \mid v(x_1) > 0 \} \quad \text{et} \quad A_2 = \{ x \mid v(x_2) > 0 \}.$$

Soient $g_1(x) = 1 + a x_2$ avec $v(a) > 0$ et $g_2(x) = 1 + x_1 x_2$.

Dans $A_1 \cap A_2 = \{ x \mid v(x_1) > 0,\ v(x_2) > 0 \}$, g_1 et g_2 ne s'annulent pas, la condition de compatibilité est donc vérifiée.

Soit alors f développable en série de Laurent dans A_1 et A_2 respectivement et dont les zéros dans A_1 et A_2 coïncident avec ceux de g_1 et g_2 respectivement. D'après le corollaire 2.15 et 2.6, f est développable en série de Laurent dans tout K^2.

Dans $\overline{v(A_1)} = \{ \mu \mid \mu_1 \geqq 0 \}$ et $\overline{v(A_2)} = \{ \mu \mid \mu_2 \geqq 0 \}$, $Z(f)$ doit coïncider avec $Z(g_1)$ et $Z(g_2)$ respectivement. Or on voit qu'il n'existe pas de réseau dans $\mathbf{R}^2$ formé de segments de droites, partageant le plan en domaines convexes tels que, pour $\mu_1 > 0$, ce réseau ne contienne que la droite $\mu_2 = -v(a)$ et, pour $\mu_2 > 0$, ce réseau ne contienne que la droite $\mu_1 = -\mu_2$.

7. Formule de Cauchy dans les polycouronnes. Fonctions séparément développables en série de Laurent

Dans ce paragraphe, nous établissons une formule de Cauchy formelle qui nous permet de montrer que, sous certaines conditions, une fonction séparément développable en série de Laurent est globalement développable en série de Laurent. Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que K est maximalement complet [5], on sait que le théorème de Hahn-Banach est vrai pour les espaces vectoriels normés sur K [3]. On obtient alors des résultats d'une portée plus générale (§ 3.6).

Néanmoins, cette restriction sur K n'est pas nécessaire pour l'utilisation que nous avons en vue, à savoir l'étude des singularités d'une fraction rationnelle.

7.1. Dans 7.1 et 7.2, nous considérons des fonctions d'une seule variable.

Considérons le cercle $C_\mu = \{ x \in K : v(x) = \mu \}$, $\mu \in v(K)$, et notons $H(C_\mu)$ l'espace vectoriel sur K des éléments analytiques sur C_μ, muni de la norme de la convergence uniforme.

LEMME. — *Il existe une forme linéaire φ_μ continue sur $H(C_\mu)$, telle que $\varphi_\mu(x^n) = 0$ pour $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq -1$, et $\varphi_\mu(1/x) = 1$.*

Preuve. — Cela résulte du fait que, dans $H(C_\mu)$, les fonctions x^n, $n \in \mathbf{Z}$, forment une famille totale topologiquement libre.

7.2. On notera $H(C_\mu) \oplus H(C_\nu)$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $C_\mu \cup C_\nu$ dont la restriction à C_μ [resp. C_ν] appartient à $H(C_\mu)$ [resp. $H(C_\nu)$].

LEMME. — *Soient μ et ν appartenant à $v(K)$, $\mu < \nu$, soit*

$$f(x) \in H(C_\mu) \oplus H(C_\nu).$$

Alors la fonction $g(z) = \varphi_\mu(f(x)/(x-z)) - \varphi_\nu(f(x)/(x-z))$ est développable en série de Laurent dans la couronne $\mu < v(z) < \nu$. Si f est développable en série de Laurent dans la couronne $\mu \leq v(x) \leq \nu$, on a

$$f(z) = \varphi_\mu(f(x)/(x-z)) - \varphi_\nu(f(x)/(x-z)) \qquad \text{pour} \quad \mu < v(z) < \nu.$$

Preuve. — Pour $\mu < v(z) < \nu$ et $x \in C_\mu$, on a

$$f(x)/(x-z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f(x)}{x^{n+1}} z^n,$$

la série convergeant uniformément sur C_μ; on a donc

$$\varphi_\mu(f(x)/(x-z)) = \sum_{n \geq 0} \varphi_\mu(f(x)/x^{n+1}) z^n.$$

De même, on a, pour $x \in C_\nu$,

$$f(x)/(x-z) = -\sum_{n \geq 0} f(x) \frac{x^n}{z^{n+1}} = -\sum_{n < 0} \frac{f(x)}{x^{n+1}} z^n,$$

la série convergeant uniformément sur C_ν; on a donc

$$\varphi_\nu(f(x)/(x-z)) = -\sum_{n<0} \varphi_\nu(f(x)/x^{n+1}) z^n.$$

Finalement,

$$g(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$$

avec $a_n = \varphi_\mu(f(x)/x^{n+1})$, $n \geq 0$, $a_n = \varphi_\nu(f(x)/x^{n+1})$, $n < 0$.

Si, de plus, $f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} b_n x^n$, il résulte des propriétés de φ_μ et φ_ν, que $a_n = b_n$ pour tout n.

7.3. Étant donné les cercles $C_1, \ldots, C_m$ de K, considérons l'espace $H(\prod_{j=1}^m C_j)$ des fonctions développables en série de Laurent sur $\prod_j C_j$. On a

$$H(\prod_j C_j) = \hat{\otimes}_{1 \leq j \leq m} H(C_j) = H(C_1) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} H(C_m).$$

Étant donné les formes linéaires φ_j sur $H(C_j)$, il leur correspond la forme sur $H(\prod_j C_j)$, notée $\varphi_j \otimes \ldots \otimes \varphi_m$, définie par

$$(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_m)(f(x_1, \ldots, x_m)) = \varphi_1(\varphi_2, \ldots, \varphi_m(f(x_1, \ldots, x_m)) \ldots),$$

où l'on effectue des « intégrations » successives relatives aux variables $x_m, \ldots, x_1$. L'ordre « d'intégration » n'intervient pas dans le résultat final.

Soit s un entier, $1 \leqq s \leqq m$. Pour $x \in K^m$ (resp. $\mu \in \mathbf{R}^m$), on posera $x = (x', x'')$ avec $x' = (x_1, \ldots, x_s)$, $x'' = (x_{s+1}, \ldots, x_m)$ [resp. $\mu = (\mu', \mu'')$, avec $\mu' = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$, $\mu'' = (\mu_{s+1}, \ldots, \mu_m)$]. Soient μ et ν appartenant à $V(K^m)$ avec $\mu' < \nu'$ et $\mu'' = \nu''$, notons D la polycouronne

$$D = \{ x : \mu' < v(x') < \nu', \mu'' = v(x'') \},$$

$\overline{D}$ la polycouronne

$$\overline{D} = \{ x : \mu' \leqq v(x') \leqq \nu', \mu'' = v(x'') \},$$

∂D la frontière distinguée de D,

$$\partial D = \Pi_{j=1}^{m} (C_{\mu_j} \cup C_{\nu_j}) = \Pi_{j=1}^{s} (C_{\mu_j} \cup C_{\nu_j}) \, \Pi_{j=s+1}^{m} C_{\mu_j}.$$

On pose

$$H(\partial D) = (H(C_{\mu_1}) \oplus H(C_{\nu_1})) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} (H(C_{\mu_s}) \oplus H(C_{\nu_s}))$$
$$\hat{\otimes} H(C_{\mu_{s+1}}) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} H(C_{\mu_m}),$$

$H(\partial D)$ est formé des fonctions définies sur ∂D dont la restriction à chacun des polycercles qui compose ∂D est développable en série de Laurent dans ce polycercle.

Soit $f(x', x'') \in H(\partial D)$, si on fixe les dernières variables $x'' = z''$, la fonction

$$h(x') = f(x', z'') \in \hat{\otimes}_{1 \leqq j \leqq s} (H(C_{\mu_j}) \oplus H(C_{\nu_j})).$$

On notera Φ_s la forme linéaire sur $\hat{\otimes}_{1 \leqq j \leqq s} (H(C_{\mu_j}) \oplus H(C_{\nu_j}))$ définie par

$$\Phi_s = (\varphi_{\mu_1} - \varphi_{\nu_1}) \otimes \ldots \otimes (\varphi_{\mu_s} - \varphi_{\nu_s}).$$

PROPOSITION. — *Si $f(x) \in H(\partial D)$, la fonction de $z = (z', z'')$,*

$$g(z) = \Phi_s [f(x', z'')/(x_1 - z_1) \ldots (x_s - z_s)],$$

est développable en série de Laurent dans D. Si f est la restriction à ∂D d'une fonction f définie dans $\overline{D}$, séparément développable en série de Laurent par rapport à chacune des variables $x_1, \ldots, x_s$, on a, dans D, $f(z) = g(z)$.

Preuve. — Soit C l'un des polycercles composant ∂D, $C = \Pi_{j=1}^{m} C_{\lambda_j}$, avec $\lambda_j = \mu_j$ ou ν_j. Pour $(x', z'') \in C$, on peut écrire :

$$f(x', z'') = \Sigma_{\alpha''} h_{\alpha''}(x') \, z''^{\alpha''},$$

avec $h_{\alpha''} \in \hat{\otimes}_{1 \leqq j \leqq s} H(C_{\lambda_j})$; la série considérée converge dans $\hat{\otimes}_{1 \leqq j \leqq s} H(C_{\lambda_j})$ pour z'' fixé, $v(z'') = \mu''$.

D'autre part, pour z' tel que $\mu' < z' < v'$, $1/(x_1 - z_1) \ldots (x_s - z_s)$ se développe en série de Laurent en x' et z' convergeant uniformément sur $\Pi_{j=1}^{s} C_{\lambda_j}$ pour z' fixé (le développement dépend du choix des λ_j).

Finalement, on aura

$$f(x', z'')/(x_1 - z_1) \ldots (x_m - z_m) = \Sigma_\alpha h_\alpha(x') z^\alpha,$$

la série convergeant dans $\hat{\otimes}_{1 \leq j \leq s} H(C_{\lambda_j})$ pour z fixé dans D. On aura donc, dans D,

$$(\varphi_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{\lambda_s})[f(x', z'')/(x_1 - z_1) \ldots (x_s - z_s)] = \Sigma_\alpha a_\alpha z^\alpha,$$

avec $a_\alpha = (\varphi_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{\lambda_s})[h_\alpha(x')]$; g étant une combinaison linéaire de telles fonctions est donc développable en série de Laurent dans D.

La deuxième partie de la proposition se démontre par récurrence sur s. Pour $s = 1$, cela résulte du lemme 7.2.

Puisque f est développable en série de Laurent par rapport à la variable x_s, on a, d'après le lemme 7.2,

$$\begin{aligned}(\varphi_{\mu_s} - \varphi_{\nu_s})&[f(x', z'')/(x_1 - z_1) \ldots (x_s - z_s)] \\ &= f(x_1, \ldots, x_{s-1}, z_s, z'')/(x_1 - z_1) \ldots (x_{s-1} - z_{s-1}).\end{aligned}$$

Il résulte alors de l'hypothèse de récurrence pour $s - 1$ que

$$\begin{aligned}\Phi_{s-1}&[f(x_1, \ldots, x_{s-1}, z_s, z'')/(x_1 - z_1) \ldots (x_{s-1} - z_{s-1})] \\ &= f(z_1, \ldots, z_{s-1}, z_s, z'') = f(z),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

7.4. On conserve les notations du paragraphe précédent.

Corollaire. — *Si dans la polycouronne $\overline{D}$, f est séparément développable en série de Laurent par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_s$, et si, dans les polycercles formant la frontière distinguée de $\overline{D}$, f est globalement développable en série de Laurent, alors f est développable en série de Laurent dans D tout entier.*

7.5. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et démontrer des résultats analogues dans le cas de développements en série de Taylor.

7.6. Si l'on suppose que le corps K est maximalement complet, le théorème de Hahn-Banach nous permet de prolonger la forme φ_μ du lemme 7.1 sur l'espace $B(C_\mu)$ formé des fonctions bornées sur C_μ, muni de la norme de la convergence uniforme.

Dans le lemme 7.2, on peut donc se contenter de supposer que $f \in B(C_\mu \cup C_\nu)$.

Sur $B(\prod_{j=1}^{m} C_j)$ on définit encore la forme $\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_m$ par « intégrations » successives :

$$(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_m)(f(x_1, \ldots, x_m)) = \varphi_1(\ldots \varphi_m(f(x_1, \ldots, x_m))\ldots).$$

Cette forme est une extension de la forme correspondante définie sur $H(\prod_j C_j)$.

Dans le cas $m = s$, on peut alors refaire la démonstration de la proposition 7.3 en supposant seulement que $f \in B(\partial D)$. On en déduit alors la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Si dans la polycouronne* $D = \{x : \mu < v(x) < \nu\}$, *la fonction* f *est bornée et séparément développable en série de Laurent,* f *est globalement développable en série de Laurent dans* D.

Il n'est pas nécessaire que μ et ν appartiennent à $v(K^m)$.

Preuve. — Pour tous les couples, (μ', ν') avec $\mu' \in v(K^m)$, $\nu' \in v(K^m)$ et $\mu < \mu' < \nu' < \nu$, il résulte de la proposition 7.3 généralisée que f est globalement développable en série de Laurent dans la polycouronne $\mu' < v(x) < \nu'$. On en déduit le résultat dans D puisqu'il y a unicité du développement en série de Laurent.

7.7. Certains auteurs, [1] et [2] par exemple, ont cherché à donner une expression explicite de la forme φ_μ, tout au moins sur certains sous-espaces de $B(C_\mu)$. Comme on l'a vu, il suffit, en fait, de connaître l'existence d'une telle forme pour obtenir les résultats qui nous intéressent.

8. Singularités d'une fraction rationnelle

Nous allons démontrer les théorèmes 3.2 et 3.3 sur la localisation des singularités d'une fraction rationnelle. Pour cela, on peut se ramener, grâce aux théorèmes du paragraphe précédent, au cas d'une variable. Notons que les résultats obtenus sur les singularités d'une fraction rationnelle correspondent à des résultats sur les zéros communs de deux polynômes.

Les notations employées sont celles de 3.1.

Remarquons que $\operatorname{Reg}(R) = \operatorname{Reg}(1/R)$ et que $Z(R) \subset W(1/R)$; des résultats sur les singularités d'une fraction rationnelle on pourra donc déduire des propriétés sur les zéros.

8.1. LEMME. — *Soit* π *une composante connexe de* $\operatorname{Reg} Q$. *Alors* $R = P/Q$ *est développable en série de Laurent dans* $v^{-1}(\pi)$.

Preuve. — Soit $Q(x) = \sum_{\text{finie}} a_\alpha x^\alpha$. D'après 2.10, il existe β tel que dans $v^{-1}(\pi)$, on ait

$$v(a_\alpha x^\alpha) > v(a_\beta x^\beta) \qquad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta.$$

Posons

$$Q'(x) = -\Sigma_{\alpha\neq\beta}\frac{a_\alpha}{a_\beta}x^{\alpha-\beta}.$$

On a alors

$$R(x) = \frac{P(x)}{a_\beta\, x^\beta}\Sigma_{n=0}^{\infty}[Q'(x)]^n,$$

la série convergeant dans $v^{-1}(\pi)$.

8.2. Théorème. — *Les composantes connexes de* $\complement(W(R))$ *sont des polytopes convexes, et* R *est développable en série de Laurent dans les images réciproques de ces composantes connexes.*

Preuve. — Soit π une composante connexe de $\complement W(R)$. π est ouvert puisque $W(R)$ est fermé. $v(K^m)\cap \operatorname{Reg}(Q)$ est dense dans $\complement W(R)$. Les cubes fermés contenus dans π, ayant leurs sommets dans $v(K^m)\cap\operatorname{Reg}(Q)$, forment une famille enchaînée engendrant π. Soit Σ un de ces cubes. Dans la polycouronne $v^{-1}(\Sigma)$, R est séparément développable en série de Laurent, puisque c'est le cas pour une fraction rationnelle (d'une variable) dans un intervalle où elle n'a pas de singularités. Si σ est un sommet de Σ, dans le polycercle $v^{-1}(\sigma)$, R est développable en série de Laurent d'après le lemme 8.1. Il résulte alors du corollaire 7.4 (avec $s = m$), que R est développable en série de Laurent dans la polycouronne $v^{-1}(\Sigma)$. Il résulte alors du corollaire 2.15 que R est développable en série de Laurent dans $v^{-1}(\pi)$. D'après 2.6, cette série converge dans $A = v^{-1}(\widehat{\pi})$, où $\widehat{\pi}$ désigne l'enveloppe convexe de π. Dans A, la somme de cette série coïncide avec $R(x)$ puisque c'est le cas lorsqu'on fixe toutes les variables sauf une. Dans A, $R(x)$ n'a donc pas de singularités, il en résulte que $\widehat{\pi}\cap W(R) = \emptyset$, et donc $\widehat{\pi} = \pi$. π est donc convexe. Le fait que π soit un polytope résulte du fait que $W(R)\subset Z(Q)$.

8.3. Théorème. — *Si* $\mu\in W(R)$ [resp. $Z(R)\cap\complement W(R)$] *et* $\mu\in V(K^m)$, *la fraction rationnelle* $R(x)$ *a des singularités* (*resp. des zéros*) *dans le polycercle* $v(x) = \mu$.

Preuve. — Il résulte de la remarque faite au début de ce paragraphe qu'il suffit de démontrer la proposition relative aux singularités.

Soit $\mu\in W(R)\cap V(K^m)$, et supposons que $R(x)$ n'ait pas de singularités dans le polycercle $v(x) = \mu$.

Supposons de plus, pour commencer, qu'il existe un segment, centré en μ, parallèle à l'un des axes de $\mathbf{R}^m$ (par exemple, l'axe $O\mu_1$) et intersectant $W(R)$ seulement au point μ. Soient (λ, μ') et (ν, μ') les deux extrémités de ce segment avec $\lambda < \mu_1 < \nu$, $\mu' = (\mu_2, \ldots, \mu_m)$, λ et ν appartenant à $v(K)$.

Il résulte du théorème 8.2 que R est développable en série de Laurent dans les polycercles $v(x) = (\lambda, \mu')$ et $v(x) = (\nu, \mu')$. Lorsque $x' = (x_2, \ldots, x_m)$ est fixé avec $v(x') = \mu'$, $R(x_1, x')$ est une fraction rationnelle de x_1 sans singularités pour $\lambda \leqq v(x_1) \leqq \nu$, donc développable en série de Laurent en x_1. Il résulte alors du corollaire 7.4 (avec $s = 1$) que R est développable en série de Laurent dans

$$A = \{ x : v(x') = \mu', \lambda < v(x_1) < \nu \}.$$

Soient π et π' les composantes connexes de $\complement W(R)$ contenant (λ, μ') et (ν, μ') respectivement. Posons $B = v^{-1}(\pi)$ et $B' = v^{-1}(\pi')$. Le triplet (A, B, B') est enchaîné. Comme R est développable en série de Laurent dans B, B' (th. 8.2) et A, il résulte du corollaire 2.15 qur R est développable en série de Laurent dans $A \cup B \cup B'$. Soit f cette série. $\mathrm{Conv}(f) \supset \widehat{\pi \cup \pi'}$ est un ouvert, et dans $C = v^{-1}(\widehat{\pi \cup \pi'})$, $f(x)$ et $R(x)$ coïncident comme on peut le voir en fixant toutes les variables sauf une. $R(x)$ n'a donc pas de singularités dans C. On doit donc avoir $W(R) \cap \widehat{\pi \cup \pi'} = \emptyset$, ce qui n'est pas le cas puisque $\mu \in \widehat{\pi \cup \pi'}$. R a donc des singularités dans le polycercle $v(x) = \mu$.

Si, en fait, il n'existe pas de segment contenant μ, parallèle à un axe et non contenu dans $W(R)$, on peut néanmoins trouver des entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \neq 0$ tels que le segment S d'équations (en ω) :

$$\frac{\omega_1 - \mu_1}{\alpha_1} = \frac{\omega_2 - \mu_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{\omega_m - \mu_m}{\alpha_m}, \qquad \lambda \leqq \omega \leqq \nu,$$

où λ et ν appartiennent à $v(K)$, intersecte $W(R)$ seulement en μ.

Posons

$$x = g(y) : \begin{array}{l} x_1 = y_1^{\alpha_1}, \\ x_2 = (y_1 y_2)^{\alpha_2}, \\ \vdots \\ x_m = (y_1, \ldots, y_n)^{\alpha_m} \end{array}$$

et soit $\mathcal{R}(y)$ la fraction rationnelle $\mathcal{R}(y) = R(g(y))$.

On a

$$\begin{aligned} v(x_1) &= \alpha_1 v(y_1), \\ &\vdots \\ v(x_m) &= \alpha_m (v(y_1) + \ldots + v(y_m)), \end{aligned}$$

g envoie donc surjectivement le polycercle $v(y) = \omega$ sur le polycercle $v(x) = M(\omega)$, où M est la matrice

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_1 . & & & \\ & \ddots & & 0 \\ \alpha_2 & & \alpha_2 & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \\ \alpha_m & \cdots & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{R}$ aura donc des singularités dans le polycercle $v(y) = \omega$ si, et seulement si, R a des singularités dans le polycercle $v(x) = M(\omega)$. $W(\mathcal{R})$ est donc l'image de $W(R)$ par l'application linéaire M^{-1}. Mais on voit que $M^{-1}(S)$ est parallèle à l'axe $(O\,\mu_1)$, le raisonnement fait précédemment nous montre que $\mathcal{R}$ a des singularités dans le polycercle $v(y) = M^{-1}(\mu)$, et par suite R a des singularités dans le polycercle $v(x) = \mu$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Barsky (D.). — Formes linéaires p-adique, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou Théorie des nombres*, 11e année, 1969-1970, n° 2, 8 p.

[2] Chabauty (C.). — Sur la théorie des fonctions dans un corps valué (II), *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 231, 1950, p. 432-434.

[3] Ingleton (A. W.). — Hahn-Banach theorem for non archimedean valued fields *Proc. Cambr. phil. Soc.*, t. 48, 1952, p. 41-45.

[4] Krasner (M.). — Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, *Colloques internationaux du CNRS : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres* [143, 1964, Clermont-Ferrand], p. 97-141. — Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1966.

[5] Lazard (M.). — *Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet.* — Paris, Presses universitaires de France, 1962 (*Institut des Hautes Études scientifiques. Publications mathématiques*, 14, p. 47-76).

[6] Motzkin (E.) et Robba (P.). — Prolongement analytique en analyse p-adique, *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux*, 1968-1969 (multigraphié).

[7] Motzkin (E.) et Robba (P.). — Ensembles d'analyticité en analyse p-adique, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 269, série A, 1969, p. 450-453.

(Texte reçu le 10 septembre 1972.)

Philippe Robba,
138, rue Nationale,
75013 Paris.