BULLETIN DE LA S. M. F.

RENÉ MICHEL

Problèmes d'analyse géométrique liés à la conjecture de Blaschke

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 17-69

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__17_0>

Bull. Soc. math. France,
101, 1973, p. 17-69.

PROBLÈMES D'ANALYSE GÉOMÉTRIQUE LIÉS A LA CONJECTURE DE BLASCHKE (*)

PAR

RENÉ MICHEL

RÉSUMÉ. — Le résultat le plus important caractérise, dans le projectif réel $P_n(\mathbf{R})$, les formes symétriques de degré 2 à intégrale nulle sur toutes droites projectives, ce qui résoud infinitésimalement une conjecture généralisée de Blaschke; ce résultat est obtenu comme cas particulier d'un théorème plus général concernant les projectifs complexes, quaternionniens et le plan projectif des octaves de Cayley.

CHAPITRE 1

Introduction

Un résultat essentiel de ce travail est une résolution infinitésimale de la conjecture de Blaschke généralisée; le problème posé, en 1921, par cette conjecture est le suivant :

Dans le projectif réel $P_2(\mathbf{R})$, et plus généralement dans celui de dimension n, $P_n(\mathbf{R})$, la structure canonique, est-elle la seule pour laquelle toutes les géodésiques sont fermées et de même longueur π ?

Pour $P_2(\mathbf{R})$, le problème a été résolu affirmativement, en 1963, par L. W. GREEN [10] après de nombreux travaux.

La recherche de ces structures sur la sphère S_2 remonte au moins à l'école de HILBERT; en 1903, les surfaces de Zoll montrait l'existence sur S_2 d'*autres* structures à géodésiques toutes fermées, de même longueur, que la canonique, et même d'une famille analytique de telles structures issue de la structure canonique ([19] ou [1], p. 145).

En 1913, en recherchant toutes les variations à un paramètre, supposées conformes, autour de la métrique canonique de S_2, par des métriques à géodésiques toutes fermées de longueur π [abréviation m. g. t. f. (π)],

(*) *Thèse Sc. math.*, Paris-VII, 1972.

Funk [9] montrait l'impossibilité pour ces variations d'être invariantes par l'antipodie de S_2, c'est-à-dire de passer à $P_2(\mathbf{R})$: il résolvait pour cela le problème de la reconstitution d'une fonction paire sur S_2 connaissant la valeur de ses intégrales sur tous les grands cercles, et probablement était-ce le premier problème de transformation de Radon.

Si, pour $n \geqq 3$, la conjecture généralisée de Blaschke reste posée, elle est valablement renforcée par le théorème suivant :

Dans $P_n(\mathbf{R})$, toute variation à un paramètre g_λ par des m. g. t. f. (π) est triviale infinitésimalement, c'est-à-dire g_λ est tangente pour $\lambda = 0$ à un transport de structure $(d_\lambda)^* g$, les d_λ étant des difféomorphismes (théorème 5.1).

En fait, grâce au théorème du slice de Ebin [8], on voit que g_λ et $(d_\lambda)^* g$ ont un contact infini en 0.

La difficulté essentielle du théorème ci-dessus est rencontrée, après linéarisation du problème, dans la caractérisation des tenseurs k, symétriques de degré 2, tels que pour toute géodésique f paramétrée par son arc, on ait

$$\int_0^\pi k(f'_t, f'_t)\, dt = 0. \tag{1}$$

Ces tenseurs sont rencontrés aussi dans la linéarisation du problème de Pu [2]. On démontre ici le résultat suivant :

Dans $P_n(\mathbf{R})$, les tenseurs vérifiant (1) *sont exactement les dérivées de Lie de la métrique canonique* (théorème 3.1, cas réel).

La même caractérisation se pose pour les projectifs complexes $P_n(\mathbf{C})$, quaternioniens $P_n(\mathbf{H})$, et le plan projectif des octaves de Cayley $P_2(\mathbf{Ca})$, pour lesquels la métrique canonique est une m. g. t. f. (π).

On n'a obtenu, dans ces derniers cas, qu'un résultat plus faible *qui contient* cependant le théorème précédent.

Soient dans $P_n(\mathbf{K})$, avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ ou $P_2(\mathbf{Ca})$, les tenseurs qui, en restriction à chaque droite projective, sont des dérivées de Lie de la métrique induite :

Ce sont exactement les dérivées de Lie de la métrique canonique (théorème 3.1).

Ce théorème donne à son tour, dans $P_n(\mathbf{C})$, $P_n(\mathbf{H})$, $P_2(\mathbf{Ca})$, le résultat de rigidité infinitésimale suivant :

Toute variation à un paramètre, de la métrique canonique par des métriques pour lesquelles les droites projectives sont à courbure constante 4, *est triviale au premier ordre* (*sans hypothèse de compatibilité telle que hermitien, etc.*) (théorème 5.2).

On a aussi dans $P_n(\mathbf{C})$, $P_n(\mathbf{H})$, $P_2(\mathbf{Ca})$ des *résultats de variation triviale* pour les m. g. t. f. (π) vérifiant une hypothèse supplémentaire, de parité (théorème 5.3) ou de conforme (théorème 5.4).

Il est donc naturel de poser les problèmes de rigidité globale correspondant à ces résultats infinitésimaux.

La démonstration du théorème 3.1 nécessite d'importants résultats d'analyse et de géométrie tels que certaines décompositions des tenseurs symétriques de degré 2 (Berger-Ebin [3]); l'injectivité de la transformation de Radon pour les projectifs (résultats d'Helgason et Semyanistyi [11]).

Un problème de décomposition spectrale d'un opérateur elliptique autoadjoint en restriction à un sous-espace invariant est aussi rencontré.

Enfin sont utilisés (bien qu'une démonstration élémentaire soit possible) des résultats sur les invariants orthogonaux, pour exprimer l'intégrale d'un polynôme tensoriel sur le fibré unitaire d'une variété riemannienne à l'aide de traces du tenseur; cette expression, qui ne semble pas explicitée dans la littérature, devrait être utile en géométrie riemannienne.

La mise en œuvre de ces outils est longue et délicate; l'opérateur laplacien Δ de Lichnerowicz [13] a un rôle important dans la démonstration, en particulier :

Si on appelle Geod la variété des géodésiques de $P_n(\mathbf{K})$, elle a une structure riemannienne naturelle, et si on note

$$\hat{k}(\gamma) = \int_\gamma k(\gamma'(t), \gamma'(t))\, dt, \qquad \text{pour} \quad \gamma \in \text{Geod}$$

on a la commutation

$$\widehat{\Delta k} = \square(\hat{k}),$$

où $\square$ est le laplacien sur les fonctions de Geod.

Certaines propriétés des valeurs propres de divers laplaciens ont aussi un rôle essentiel.

En résumé, ce travail se divise de façon naturelle en quatre chapitres, *le plus important étant le chapitre* 3 :

Chapitre 1 : Introduction.
» 2 : Linéarisation de problèmes géométriques dans les projectifs et rigidité infinitésimale pour des structures riemanniennes.
» 3 : Un problème d'analyse géométrique (théorème 3.1).
» 4 : Fin de la démonstration du théorème 3.1.
» 5 : Résultats et problèmes.

Une partie des chapitres 2 et 3 a déjà fait l'objet de publications ([14], [15]).

Je remercie vivement M. Berger et F. Borel pour d'utiles discussions.

CHAPITRE 2

Linéarisation de problèmes géométriques dans les projectifs

2.1. Variations de métriques

Soient M une variété C^∞, et $S^2(T^*)$ le fibré sur M des formes bilinéaires symétriques; on note $\mathrm{Sym}\,2 = C^\infty(S^2\,T^*)$. Si g est un tenseur métrique sur M, on appellera *variation* C^p *de la métrique* g une application

$$\begin{aligned} I \times M &\to S^2(T^*), \\ (\lambda, x) &\to g_\lambda(x), \end{aligned}$$

où I est un intervalle contenant 0, qui est de classe C^p en (λ, x), de classe C^∞ en x, et telle que $g_0 = g$; on impose aussi à g_λ d'être une métrique, ce qui est d'ailleurs réalisé si M est compacte et I assez petit.

En considérant l'espace $\mathcal{M}$ des métriques riemanniennes muni de la topologie C^∞, on voit aisément qu'une variation g_λ est C^p si, et seulement si, l'application

$$\begin{aligned} I &\to \mathcal{M}(C^\infty) \text{ est de classe } C^p. \\ \lambda &\to g_\lambda \end{aligned}$$

2.2. Les structures à géodésiques toutes fermées et de même longueur

2.2.1. — La connaissance des variétés possédant une métrique à géodésiques toutes fermées de même longueur, π par exemple, est un problème difficile; pour une telle variété, on note M. G. T. F. l'ensemble de telles métriques, et cet ensemble est stable dans $\mathcal{M}$ par transport de structure (*voir* en 2.4.1); les exemplaires connus sont, à isométrie près, les sphères, les projectifs et les surfaces de Zoll, ou leurs analogues en dimension supérieure à 2.

D'après le théorème de Green, l'ensemble M. G. T. F. est réduit à la structure canonique pour $P_2(\mathbf{R})$, alors que pour S_2 cet ensemble contient au moins une courbe issue de la structure canonique.

La méthode de Green est cependant bien particulière à la dimension 2 (*voir* [10] ou [1], p. 292).

Pour démontrer le théorème 5.1, énoncé dans l'introduction, et qui supporte la conjecture de Blaschke pour $n \geqq 3$, on commence par linéariser le problème.

2.2.2. — On fait d'abord une étude locale autour d'une géodésique fermée, sans autre hypothèse sur la variété riemannienne (M, g).

Soit $f : \mathbf{R} \to M$, la géodésique fermée, de longueur T, paramétrée par l'arc de longueur, de conditions initiales $f(0) = m$, $f'(0) = x$.

Soit $n = \dim M$. On considère des champs de vecteurs transportés parallèlement le long de $f : X_1(t), \ldots, X_n(t)$, formant une base orthonormée de façon que $X_1(t) = f'$. Notons $B_r \in TM_m$ la boule ouverte de centre 0, de rayon r, dans l'orthogonal de $X_1(0) = x$. Il existe $r > 0$ et $V \subset M$, ouvert tubulaire autour de f, tels que l'application $R \times B_r \to V$ définie par

$$\varphi(x^1; x^2, \ldots, x^n) = \exp_{f(x^1)}(x^2 X_2(x^1) + \ldots + x^n X_n(x^1))$$

soit un difféomorphisme local (système de coordonnées dit de Fermi).

On considère une variation C^1 de la métrique g, soit $\lambda \to g_\lambda \in \mathcal{M}$, et on s'intéresse aux géodésiques f_λ de la variété (M, g_λ) ayant les mêmes conditions initiales que $f = f_0$. On travaille en coordonnées à l'aide de φ pour exprimer que chaque f_λ est fermée, de longueur T.

L'équation des géodésiques de (M, g_λ) s'écrit :

$$x''^{j}_\lambda + {}^\lambda\Gamma^j_{ik}\, x'^k_\lambda\, x'^i_\lambda = 0 \qquad (1 \leqq j \leqq n). \tag{2.2.2.1}$$

On a noté ${}^\lambda\Gamma^j_{ik}$ et (x^j_λ) [resp. Γ^j_{ik} et (x^j)] les symboles de Christoffel et les coordonnées des géodésiques pour g_λ (resp. g).

On étudie donc les solutions de (2.2.2.1) vérifiant les conditions initiales

$$(x^j_\lambda(0)) = (0, 0, \ldots, 0) \qquad \text{et} \qquad (x'^j_\lambda(0)) = (1, 0, \ldots, 0). \tag{2.2.2.2}$$

Par le théorème sur la dépendance des solutions par rapport au paramètre, on a : Pour $\alpha > 0$, il existe un intervalle I (contenant 0 et non réduit à 0) tel que les solutions de (2.2.2.1), ayant les conditions initiales (2.2.2.2), existent pour $\lambda \in I$, sur l'intervalle $[-\alpha, T + \alpha]$ et sont telles que $(x^j_\lambda(t)) \in [-\alpha, T + \alpha] \times B_r$; de plus, $(x^j_\lambda(t))$ dépend $C^{1,\infty}$ de (λ, t), et l'équation vérifiée par

$$\left[\frac{\partial}{\partial \lambda}(x^j_\lambda(t))\right]_{\lambda=0} = (h^j(t))$$

s'obtient en dérivant (2.2.2.1) par rapport à λ, et en prenant $\lambda = 0$.

En tenant compte de

(2.2.2.3) $(x^j(t)) = (t, 0, \ldots, 0), \qquad (x'^j(t)) = (1, 0, \ldots, 0),$

et puisque $\Gamma^j_{1i}(t, 0, \ldots, 0) = 0$, on obtient

$$h''^j(t) + \frac{\partial}{\partial\lambda}[{}^\lambda\Gamma^j_{11}(x^1_\lambda(t), \ldots, x^n_\lambda(t))]_{\lambda=0} = 0,$$

ou encore

$$h''^j(t) + \frac{\partial\Gamma^j_{11}}{\partial x^l}(t, 0, \ldots, 0).h^l(t) + \frac{\partial}{\partial\lambda}[{}^\lambda\Gamma^j_{11}](t, 0, \ldots, 0)\Big|_{\lambda=0} = 0.$$

Le dernier terme est calculé dans [13] (p. 40) : en posant $k = (\partial g_\lambda/\partial\lambda)_{\lambda=0}$,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}({}^\lambda\Gamma^j_{11})(t, 0, \ldots, 0)\Big|_{\lambda=0} = \frac{1}{2}(-\nabla^j k_{11} + 2\nabla_1 k^j_1)(t, 0, \ldots, 0).$$

D'autre part, il est simple à vérifier que le long de f,

$$R_{1l1}{}^j(t, 0, \ldots, 0) = \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^j_{11}(t, 0, \ldots, 0) \qquad (1 \leqq l, j \leqq n),$$

l'équation linéarisée de (2.2.2.1) s'écrit donc :

(2.2.2.4) $$h''^j + R_{1l1}{}^j h^l = \frac{1}{2}(\nabla^j k_{11} - 2\nabla_1 k^j_1),$$

le premier membre est bien celui de l'équation de Jacobi, obtenue, elle, en dérivant par rapport aux conditions initiales.

Pour $j = 1$, l'équation (2.2.2.4) s'écrit :

$$h''^1(t) = -\frac{1}{2}\nabla^1 k_{11}(t, 0, \ldots, 0) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{k_{11}(t, 0, \ldots, 0)\},$$

les conditions initiales (2.2.2.2) imposant $h^1(0) = h'^1(0) = 0$, il vient en intégrant :

(2.2.2.5) $$h^1(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t k_{11}(t, 0, \ldots, 0)\,dt + \frac{t}{2}k_{11}(0, \ldots, 0).$$

2.2.3. *Condition nécessaire de fermeture et longueur T pour f_λ.* — Soit $\lambda \in I$; si t varie dans $[0, T_\lambda]$ pour qu'on ait $f_\lambda(T_\lambda) = m$, il faut que $T = T_\lambda.\{g_\lambda(x, x)\}^{1/2}$, et aussi, par un argument simple de continuité,

(2.2.3.1) $$(x^i_\lambda(T)) = (T, 0, \ldots, 0).$$

En dérivant (2.2.3.1), de classe C^1, on a pour $\lambda = 0$ la relation

(2.2.3.2) $$(h^i(T)) - \frac{T}{2}k_{11}(0, \ldots, 0) \times (1, 0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0).$$

D'après (2.2.2.5) et (2.2.3.2), on a la condition

$$\int_0^T k_{11}(t, 0, \ldots, 0)\, dt = 0. \tag{2.2.3.3}$$

Remarque 1. — On n'a exploité (2.2.2.4) et (2.2.3.1), que pour $j = 1$; en fait, on trouve la même condition (2.2.3.3) en se servant de $1 < j \leq n$.

Remarque 2. — On n'a pas utilisé pour obtenir (2.2.3.3) toute la condition de fermeture, à savoir $f'_\lambda(T_\lambda) = x$, ni le fait que $f'(T) = x$; on peut donc énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2.3. — *Sur une variété riemannienne* (M, g), *soit* $f : [0, T] \to M$ *une géodésique paramétrée par son arc de longueur et telle que* $f(0) = m = f(T)$.

Soit $\lambda \to g_\lambda$ *une variation* C^1 *de* g.

Si les géodésiques f_λ *pour* (M, g_λ) *telles que* $f'(0) = f'_\lambda(0)$ *repassent en* m, *avec la même longueur* T, *on a*

$$\int_0^T k(f'_t, f'_t)\, dt = 0, \qquad \text{où} \quad k = \left[\frac{\partial}{\partial\lambda} g_\lambda\right]_{\lambda=0}.$$

Remarque 3. — Cette condition peut s'obtenir par une méthode plus variationnelle (Alan WEINSTEIN, non publié), et une étude analogue, pour une sous-variété minimale assujettie à des conditions au bord et à rester minimale pendant la variation de la métrique, donne une condition intégrale du même type.

2.2.4. — On voit qu'il est naturel pour une variété M, munie d'une m. g. t. f. (T), d'étudier le sous-espace suivant de Sym 2.

DÉFINITION 2.2.4. — On note F l'ensemble des k tels que, pour toute géodésique f paramétrée par son arc, on ait

$$\int_0^T k(f'_t, f'_t)\, dt = 0.$$

PROPOSITION 2.2.4. — *Pour toute variation* C^1 *autour de* g, *soit* g_λ, *contenue dans* M. G. T. F., *on a*

$$\left[\frac{\partial g_\lambda}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=0} \in F.$$

Ceci est conséquence immédiate de la proposition 2.2.3.

2.2.5. — Pour une (M, g) on a noté L le sous-espace de Sym 2 des tenseurs qui sont des dérivées de Lie de la métrique g, c'est-à-dire

$$k \in L \quad \text{si } k = L_X(g), \qquad \text{avec} \quad X \in C^\infty(TM),$$

en coordonnées $k_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i$.

Corollaire 2.2.5. — *Pour* M *munie d'une m. g. t. f.* (T), *soit* g, *on a* $L \subset F$.

On peut en faire une vérification triviale par le calcul, mais une raison géométrique est la suivante : soit $k = L_X(g)$ et $\lambda \to d_\lambda$ le groupe à un paramètre de difféomorphismes qui induit X, donc tel que :

$$\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(d_\lambda^* g)\right]_{\lambda=0} = k;$$

chaque $d_\lambda^* g$ étant une m.g. t. f. (T), il résulte de la proposition 2.2.4 que k est dans F.

Pour un résultat plus précis, *voir* [15], proposition 2.1.

2.3. Les métriques riemanniennes à « courbure projective » constante dans les projectifs non réels

2.3.1. — Il est classique (par exemple [11], p. 167) que sur $P_n(\mathbf{C})$, $P_n(\mathbf{H})$, $P_2(\mathbf{Ca})$ avec leur métrique canonique g, les droites projectives sont des sphères de dimensions respectives 2, 4, 8 et à courbure constante $+4$; de plus, sur le projectif complexe $P_n(\mathbf{C})$, il est connu que la structure canonique est la seule structure kählérienne à courbure holomorphe constante $+4$.

On s'intéresse à l'ensemble $A \subset \mathcal{M}$ des métriques pour lesquelles les droites projectives sont à courbure constante $+4$, sans hypothèse de compatibilité de structures telle que kählérien ou hermitien; on doit remarquer que A n'est pas stable dans $\mathcal{M}$ par l'action des difféomorphismes.

2.3.2. *Linéarisation dans* A *sur* $P_n(\mathbf{K})$, $\mathbf{K} \neq R$.

Définition 2.3.2. — On appelle $F_{\mathbf{K}}$ le sous-espace de Sym 2 des k qui, en restriction à chaque droite projective, sont des dérivées de Lie de la métrique induite; c'est-à-dire : Soit S une droite projective quelconque, l'inclusion canonique dans $P_n(\mathbf{K})$, étant notée i, on a

$$i^* k = L_X(i^* g), \quad \text{où } X \text{ est un champ } C^\infty \text{ sur } S.$$

PROPOSITION 2.3.2. — *Pour toute variation C^1, soit g_λ, contenue dans A, on a*

$$\left[\frac{\partial g_\lambda}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0} \in F_{\mathbf{K}}.$$

Démonstration. — Chaque S munie de $i^* g_\lambda$ est à courbure constante 4; il existe donc une famille $\lambda \to r_\lambda$ de difféomorphismes de S tels que

$$(2.3.2.1) \qquad i^* g_\lambda = r_\lambda^* (i^* g).$$

On peut assujettir les r_λ à être C^1 par rapport à λ : on reprend pour cela la démonstration de la rigidité des structures à courbure constante (par exemple [12], p. 262), on fixe un point x_0 dans S; si $\exp_\lambda$ (resp. exp) est l'exponentielle en x_0 de $i^* g_\lambda$ (resp. $i^* g$), en posant $r_\lambda = \exp \circ \exp_\lambda^{-1}$, on définit une isométrie locale que l'on peut étendre et qui convient.

On dérive (2.3.2.1) :

$$\left[\frac{\partial}{\partial \lambda}(i^* g_\lambda)\right]_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[r_\lambda^* (i^* g)\right]_{\lambda=0},$$

le second membre est bien une dérivée de Lie de $i^* g$ dans S, et le premier membre n'est autre que $i^* [(\partial/\partial\lambda)\, g_\lambda]_{\lambda=0}$.

C. Q. F. D.

2.3.3. PROPRIÉTÉ. — Sur $P_n(\mathbf{K})$, on a, *a priori*, $L \subset F_{\mathbf{K}} \subset F$.

L'essentiel est que les droites projectives S sont totalement géodésiques dans $P_n(\mathbf{K})$; dans ce cas, si Y est un champ sur $P_n(\mathbf{K})$, on a $i^* L_Y(g) = L_X(i^* g)$, où X est le champ sur S qui est la projection orthogonale de Y, donc $L \subset F_{\mathbf{K}}$.

D'autre part, pour toute géodésique f, soient S la droite projective qui la contient, et k un élément de $F_{\mathbf{K}}$; d'après le corollaire 2.2.5, appliqué sur S, on a

$$\int_0^\pi i^* k(f_t', f_t')\, dt = 0, \qquad \text{donc} \quad k \in F.$$

C. Q. F. D.

2.4. Sur la rigidité infinitésimale de certaines structures géométriques

2.4.1. — On utilise ici des résultats de EBIN [8] et de BERGER-EBIN [3] pour préciser la situation de rigidité infinitésimale que l'on rencontrera au chapitre 4, et concernant les problèmes précédents. On rappelle ces résultats rapidement.

Soit M une variété compacte, C^∞, sans bord. On a posé

$$\text{Sym } 2 = C^\infty(S^2 T^*) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(S^2 T^*).$$

C'est un espace de Fréchet pour la topologie C^∞, dans lequel l'espace $\mathcal{M}$ des métriques riemanniennes est un cône convexe ouvert. Si on fixe une telle métrique g, on note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire global des sections, relativement au produit scalaire local et à la mesure v_g associée à g,

$$\langle h, k \rangle = \int_M h^{ij}\, k_{ij}\, v_g,$$

d'où Sym 2, muni de $\langle\ ,\ \rangle$, est un espace préhilbertien.

Plusieurs décompositions de Sym 2, orthogonales pour $\langle\ ,\ \rangle$ sont, données dans Berger-Ebin [3] et celle qui s'avère essentielle au chapitre 3 est la suivante : Les opérateurs différentiels

$$\begin{aligned} \delta^* &: C^\infty(T^*) \to \mathrm{Sym}\ 2, \\ & \xi \to \frac{1}{2} L_X(g), \qquad \text{avec } X \text{ et } \xi \text{ duaux par } g \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \delta &: \mathrm{Sym}\ 2 \to C^\infty(T^*), \\ & k \to \delta k, \qquad \text{avec} \quad \delta k_i = -\nabla^j k_{ji} \end{aligned}$$

(dont le premier est à symbole injectif) sont adjoints formels, et on a la décomposition :

$$\mathrm{Sym}\ 2 = \mathrm{Ker}\ \delta \oplus L \quad ([3], \text{p. } 382),$$

où $L = \mathrm{Im}\ \delta^*$ est l'espace des dérivées de Lie de la métrique g.

Le groupe des difféomorphismes de M, soit $\mathcal{D}$, agit sur $\mathcal{M}$ par transport de structure : $(g, d) \to d^* g$; on note $O(g)$ l'orbite de g,

$$O(g) = \{ d^* g \mid d \in \mathcal{D} \} \subset \mathcal{M}.$$

Comme il est naturel, l'espace tangent en g à $O(g)$ est L.

Ebin a montré, dans [8], l'existence au voisinage de g d'une sous-variété S de $\mathcal{M}$, transversale aux orbites de $\mathcal{D}$ (un « slice ») et homéomorphe à un voisinage de $O(g)$, la structure de g, dans l'espace $\mathcal{M}/\mathcal{D}$ des structures riemanniennes sur M; l'espace tangent à S en g n'est autre que Ker δ.

2.4.2. — On dira qu'un sous-ensemble ξ de $\mathcal{M}$ est *rigide au premier ordre* si :

« Pour toute variation C^1 de la métrique g contenue dans ξ, on a $[\partial g_\lambda / \partial \lambda]_{\lambda=0} \in L$. »

Lemme 2.4.2. — *Soient S un slice, et ξ un sous-ensemble de $\mathcal{M}$, rigide au premier ordre. Pour toute variation C^∞ de g, soit r_λ, contenue dans $\xi \cap S$, on a $\forall\, n > 0$,*

$$\left[\frac{\partial^n r_\lambda}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0} = 0.$$

Démonstration. — Soit n entier tel que $\forall\, m$, $0 < m < n$, on ait

$$\left[\frac{\partial^m r_\lambda}{\partial\lambda^m}\right]_{\lambda=0} = 0.$$

On applique la formule de Taylor à l'application $\lambda \to r_\lambda$ sur $[0, \lambda_0]$ à l'ordre $n+1$ dans $C^q(S^2\, T^*)$, pour $\forall\, q$; on a donc dans Sym 2 :

$$r_\lambda = g + \lambda^n k + \lambda^{n+1} l(\lambda), \qquad \text{avec} \quad k = \frac{1}{n\,!}\left[\frac{\partial^n r_\lambda}{\partial\lambda^n}\right]_{\lambda=0}.$$

On se restreint à $I = [0, a[$; on pose $\mu = \lambda^n$, $\mu \in [0, b[$, avec $b = a^n$ et $\rho_\mu = r_{\mu^{1/n}}$, chaque $\rho_\mu \in \mathrm{Sym}\, 2$, et la variation

$$(\mu, x) \to \rho_\mu(x) = g(x) + \mu\, k(x) + \mu^{(n+1)/n}\, l(\mu^{1/n})(x) \in S^2(T^*),$$

est C^1 sur $[0, b[$.

En reprenant la définition de la topologie de $\mathfrak{M}$, on voit que l'application $\mu \to \rho_\mu$ est dérivable en 0, à droite, et de dérivée k; puisque $\rho_\mu \in S$, d'après [8] (p. 30) et [3] (p. 384), on a $\delta k = 0$. L'hypothèse de rigidité impose donc $k \in L \cap \operatorname{Ker} \delta = \{0\}$, et le lemme en résulte.

2.4.3. — Donnons une formulation indépendante du slice.

PROPOSITION 2.4.3. — *Soit ξ un sous-ensemble de $\mathfrak{M}$, rigide au premier ordre et stable par $\mathcal{D}$. Pour toute variation C^∞ de g, soit g_λ, contenue dans ξ, il existe une famille de difféomorphismes de M, soit $\lambda \to d_\lambda \in \mathcal{D}$, de classe C^∞, telle que*

$$\forall\, n \geq 0, \quad \left[\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}(g_\lambda - d_\lambda^* g)\right]_{\lambda=0} = 0.$$

En d'autres termes, g_λ est un transport de structure à une variation, infiniment plate en g, près.

Démonstration. — Ceci est conséquence rapide du théorème du slice ([8], p. 30-33) : un slice S existe tel que, pour chaque $g_\lambda \in \mathfrak{M}$, il corresponde $r_\lambda \in S$ et $d_\lambda \in \mathcal{D}$ tels que $g_\lambda = d_\lambda^*(r_\lambda)$, $r_0 = g$, $d_0 =$ identité.

En suivant sa démonstration, on voit que l'application $\lambda \to d_\lambda^{-1} \in \mathcal{D}$ (muni de la topologie C^∞) est de classe C^∞.

Il en résulte facilement que $\lambda \to r_\lambda = (d_\lambda^{-1})^* g_\lambda$ est une variation C^∞ de g. De plus, $r_\lambda \in \xi \cap S$: car, d'une part $r_\lambda \in S$, et d'autre part r_λ est dans l'orbite de g_λ, qui appartient à l'ensemble stable ξ.

Donc, d'après le lemme précédent,

$$\forall\, n > 0, \quad \left[\frac{\partial^n r_\lambda}{\partial\lambda^n}\right]_{\lambda=0} = 0.$$

En dérivant n fois dans $g_\lambda = d_\lambda^* (r_\lambda)$:

$$\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}(d_\lambda^* r_\lambda) = \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}(g_\lambda)$$

il reste pour $\lambda = 0$:

$$\left[\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}(d_\lambda^* g)\right]_{\lambda=0} = \left[\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} g_\lambda\right]_{\lambda=0}.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Il serait intéressant d'examiner le cas de variations analytiques en λ (en supposant éventuellement aussi, les métriques g_λ et la variété M, analytiques). Si l'on montrait dans la proposition 2.4.3 que $d_\lambda^* g$ est analytique en λ, on aurait un résultat local.

CHAPITRE 3

Un problème d'analyse géométrique

3.1. Le théorème principal

On a défini $F_{\mathbf{K}}$, en 2.3.2, pour $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ ou $\mathbf{Ca}$; on remarque que $F_{\mathbf{R}}$ a aussi un sens pour cette définition, et que $F_{\mathbf{R}} = F$: en effet, sur $P_n(\mathbf{R})$, dire que k est, en restriction à chaque droite projective, c'est-à-dire, à chaque géodésique, la dérivée d'un champ X tangent à cette géodésique revient à dire que $i^*(k)(t)$ est la dérivée ordinaire de la fonction π-périodique $X(t)$, et ceci équivaut à la condition d'intégrale nulle.

On a vu, en 2.3.2, que, *a priori*, $L \subset F_{\mathbf{K}} \subset F$.

Dans la suite, on démontre le résultat suivant.

THÉORÈME 3.1. — *Si sur* $P_n(\mathbf{K})$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ *ou* $P_2(\mathbf{Ca})$, *muni de sa métrique canonique* g, *on pose*

$$L = \{ L_X(g) \mid X \text{ champ de vecteurs } C^\infty \},$$

$$F = \left\{ k \in \operatorname{Sym} 2 \mid \forall f, \text{ géodésique paramétrée par l'arc} : \int_0^\pi k(f_t', f_t')\,dt = 0 \right\},$$

$F_{\mathbf{K}}$ = *les tenseurs de* Sym 2, *qui, en restriction à chaque droite projective, sont des dérivées de Lie de la métrique induite :*

on a

$$L = F_{\mathbf{K}}$$

en particulier sur $P_n(\mathbf{R})$:

$$L = F.$$

COROLLAIRE 3.1.1. — *Soit $\mathfrak{L}$ le sous-espace des tenseurs de F, sur P_n ($\mathbf{K}$), qui sont pairs en restriction à chaque droite projective, on a*

$$\mathfrak{L} \subset L.$$

On peut donner une définition en apparence plus faible de l'espace $F_{\mathbf{K}}$ pour $\mathbf{K} \neq \mathbf{R}$ en imposant à ses éléments d'être *localement* des dérivées de la métrique induite, en restriction aux droites projectives. En fait, sur la sphère S_q canonique ($q \geqq 2$), un tenseur qui est une dérivée de Lie locale de la métrique est une dérivée globale : on peut recoller les champs locaux à l'aide d'isométries infinitésimales (*voir* CALABI [6], p. 158), ce qui est évidemment faux pour S_1, puisque, en restriction à une courbe, *tout* élément de Sym 2 est localement une dérivée de la métrique induite.

3.1.2. « *Esquisse analyse* » *de la démonstration du théorème* 3.1. — La démonstration du théorème 3.1 contient celle qu'on a faite dans [15] pour P_n ($\mathbf{R}$); étant toutefois plus longue et plus technique, on en donne ici une « *esquisse analyse* ». Après les préliminaires 3.2, on montre deux faits essentiels :

— l'espace F est orthogonal à $\mathbf{R}\, g$ (lemme 3.3);

— pour P_n ($\mathbf{K}$) l'espace F est stable par l'opérateur Δ (lemme 3.4); plus précisément, on a la formule de commutation des laplaciens 3.5.3, où intervient la variété des géodésiques, munie d'une métrique naturelle; il en résulte que Δ induit un isomorphisme de F sur F (prop. 3.5.8).

Un argument fondamental aussi est la décomposition de BERGER-EBIN : le théorème 3.1 équivaut ainsi à ce que $F_{\mathbf{K}} \cap \operatorname{Ker} \delta = 0$.

Au lemme 3.5, si $k \in F_{\mathbf{K}} \cap \operatorname{Ker} \delta$, on a $\operatorname{tr} k = 0$ (on arrive à passer du global au local par transformation de Radon en se concentrant sur $\operatorname{tr} k$ et $\Delta \operatorname{tr} k$, et on peut conclure grâce à des inégalités sur les valeurs propres du laplacien).

Au paragraphe 3.7, il intervient Pk, la partie « pure » du tenseur k,

$$(Pk)(x, x) = \frac{1}{q} \operatorname{tr}_{\mathbf{K}x} k . g(x, x), \qquad \text{où} \quad q = \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{K};$$

Pk est un tenseur; on l'exprime à l'aide de la courbure (3.2.4.2).

Au lemme 3.7, si $k \in F_{\mathbf{K}} \cap \ker \delta$, on a $\Delta Pk = (2q(n+3) - 8)\, Pk$. Pour P_n ($\mathbf{R}$), $Pk = k$, et le théorème en résulte rapidement.

L'argument important est que les dérivées de Lie de la métrique sur toute variété riemannienne à courbure scalaire constante sont solutions d'une certaine équation du deuxième ordre; en utilisant cela sur des sous-variétés totalement géodésiques pour le tenseur induit, on arrive, par des calculs locaux, à l'équation vérifiée par Pk; on pose

$$A = F_{\mathbf{K}} \cap \ker \delta = F_{\mathbf{K}} \cap \ker \delta \cap \ker \operatorname{tr}$$

et

$$B = F \cap \ker \delta \cap \ker \operatorname{tr}.$$

Au lemme 3.7.6, si $P(A) \neq 0$, alors $2q(n+3) - 8$ est dans le spectre de Δ_B, la restriction de Δ à B, qui est un isomorphisme. Ceci n'est pas une conséquence évidente de 3.7 car, d'une part P n'opère pas dans F, et d'autre part B n'est pas un sous-espace complet de Sym 2, muni de $\langle\ ,\ \rangle$.

Au paragraphe 4.1, pour une métrique sur M qui est une m. g. t. f., les éléments de F vérifient une inégalité quadratique obtenue en intégrant sur le fibré unitaire U l'inégalité de Wirtinger (principe du minimum pour un cercle). On doit savoir pour cela exprimer l'intégrale sur la sphère S_n canonique d'un polynôme $T(x, \ldots, x)$ en fonction de la *forme* multilinéaire T (prop. 4.2.1).

On en déduit alors que le spectre de Δ_B est minoré par $4(qn+4)$, et il résulte du lemme 3.7.6 que $P(k) = 0$ pour $k \in A$.

Au paragraphe 4.9, si $k \in A$, on obtient finalement $k = 0$ par la méthode locale de 3.7 et en exploitant $\operatorname{tr} k = 0$ et $Pk = 0$, le théorème en résulte.

3.2. **Quelques propriétés nécessaires**

3.2.1. *Rappels sur les laplaciens.* — Pour une variété riemannienne (M, g), on sait que l'opérateur de dérivation covariante $\nabla : C^\infty(T_s^r) \to C^\infty(T_{s+1}^r)$ est à symbole injectif; soit ∇^* son adjoint formel.

Comme dans [13] (p. 25) ou [3] (p. 386), on pose

$$\overline{\Delta} = \nabla^* \nabla : \quad C^\infty(T_s^r) \to C^\infty(T_s^r).$$

En coordonnées avec la convention d'Einstein (qu'on emploie suivant le contexte) :

$$(\nabla^* t)^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = -\nabla^i t^{i_1 \ldots i_r}_{i j_1 \ldots j_s},$$
$$(\overline{\Delta} t)^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = -\nabla^i \nabla_i t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s},$$

le laplacien $\Delta : C^\infty(T_s^r) \to C^\infty(T_s^r)$, introduit par Lichnerowicz dans [13] (p. 26) et qui généralise le laplacien de de Rham sur les formes antisymétriques, s'écrit :

(3.2.1.1) $$\Delta = \overline{\Delta} + K,$$

où K est un opérateur d'ordre 0, donc un tenseur, défini à l'aide du tenseur de courbure.

Δ et $\overline{\Delta}$ sont autoadjoints, elliptiques (fortement pour $\overline{\Delta}$) et préservent les symétries; ainsi, dans la suite, Δ et $\overline{\Delta}$ désigneront ces opérateurs agissant sur Sym 2; dans ces conditions, K s'écrit :

(3.2.1.2) $$Kk_{ab} = \rho_{aj}\, k^j_b + \rho_{bj}\, k^j_a - 2\, \mathrm{R}_{aibj}\, k^{ij},$$

où R désigne le tenseur de courbure, ρ celui de Ricci.

Pour $k \in \mathrm{Sym}\, 2$, on a les commutations :

(3.2.1.3) $$\mathrm{tr}\, \overline{\Delta} k = \Delta\, \mathrm{tr}\, k = \mathrm{tr}\, \Delta k\, ; \qquad \mathrm{tr}\, Kk = 0,$$

la trace étant prise relativement à g, et $\Delta : C^\infty(\mathrm{M}) \to C^\infty(M)$ désignant l'opérateur classique de Laplace-Beltrami.

3.2.2. *Sur la commutation de Ricci des dérivées.* — On rappelle pour un tenseur de degré 2 l'identité de Ricci :

(3.2.2.1) $$\nabla_a \nabla_b\, k_{uv} - \nabla_b \nabla_a\, k_{uv} = R_{abu}{}^l\, k_{lv} + R_{abv}{}^l\, k_{ul}.$$

En particulier, en courbure constante λ :

(3.2.2.2) $$\nabla_a \nabla_b\, k_{ab} - \nabla_b \nabla_a\, k_{ab} = \lambda\, (k_{bb} - k_{aa}).$$

D'autre part, on rencontre dans la suite la fonction sur M :

(3.2.2.3) $$\nabla^a \nabla^b\, k_{ab} - \nabla^a \nabla_a\, k^b_b \qquad \text{(convention d'Einstein)},$$

qui s'écrit aussi : $\nabla^* \nabla^* k + \Delta\, \mathrm{tr}\, k$; un fait essentiel est que, si la fonction courbure scalaire $\tau = \mathrm{R}_{ij}{}^{ij}$ est constante, toutes les dérivées disparaissent dans (3.2.2.3) lorsque $k = \mathrm{L}_X(g)$, le champ X étant quelconque. Ceci s'explique en considérant une variation de métrique g (avec $g_0 = g$) telle que $[\partial g_\lambda / \partial \lambda]_{\lambda=0} = k$; la variation de la courbure scalaire τ_{g_λ} vérifie en effet (*voir* par exemple [13], p. 43) :

(3.2.2.4) $$\left[\frac{\partial \tau_{g\lambda}}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0} = \nabla^* \nabla^* k + \Delta\, \mathrm{tr} k - k_{ij}\, \rho^{ij}.$$

Soit d_λ le groupe à un paramètre de difféomorphismes induisant X; pour tout point p de M, $\tau_g(d_\lambda(p)) = \tau_{d^*_\lambda g}(p) = \tau_g(p)$; en particulier, si la variété est d'Einstein, avec $\rho = \alpha\, g$, on a donc, pour $k \in L$:

(3.2.2.5) $$\nabla^* \nabla^* k + \Delta\, \mathrm{tr}\, k = \alpha\, \mathrm{tr}\, k.$$

3.2.3. *Définition et hérédité des projectifs.* — Soit $\mathbf{K}$ l'un des trois corps $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$, et $q = \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{K}$.

On munit $\mathbf{K}^{n+1}$ de sa structure d'espace vectoriel à droite,

$$x\, \lambda = (x_1, \ldots, x_n)\, \lambda = (x_1\, \lambda, \ldots, x_n\, \lambda),$$

du produit hermitien :

$$\langle x, y \rangle = \Sigma_{i=1}\, \overline{x}_i\, y_i,$$

et du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle_{\mathbf{R}} = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle.$$

Les projectifs $P_n(\mathbf{K})$ sont définis comme quotients de $\mathbf{K}^{n+1} - \{ 0 \}$ par l'action multiplicative (à droite) du groupe $\mathbf{K} - \{ 0 \}$; ils ont une structure naturelle de variété C^∞ réelle, de dimension qn, et on a la fibration principale :

(3.2.3.1) $$S_{q-1} \to S_{qn+q-1} \xrightarrow{\pi} P_n(\mathbf{K}),$$

où S_{qn+q-1} est la sphère unité dans $\mathbf{R}^{q(n+1)} \simeq \mathbf{K}^{n+1}$, et S_{q-1} le groupe des unités de $\mathbf{K}$.

Ceci est classique [*voir :* CHEVALLEY, *Theory of Lie groups*, p. 9-18 et STEENROD, *The topology of fibre bundles*, p. 105].

Notations. — Pour $m \in S_{qn+q-1}$, on écrit $\pi(m) = m^\cdot$. Il résulte de (3.2.3.1) que le tangent en $m^\cdot$ à $P_n(\mathbf{K})$ s'identifie au quotient de $(m\, S_{q-1}) \times m^\perp$, où $m^\perp$ est l'orthogonal de m pour $\langle\ ,\ \rangle$, par la relation

$$(m\,\lambda, t) \sim (m\,\mu, s) \quad \text{si, et seulement si, } t\,\lambda^{-1} = s\,\mu^{-1};$$

la classe des $(m\,\lambda, t\,\lambda)$ est notée $(m, t)^\cdot$.

Le produit scalaire $\langle t, s \rangle_{\mathbf{R}}$ est invariant par l'action de S_{q-1} :

$$\begin{aligned} 2\langle t\,\lambda, s\,\lambda \rangle_{\mathbf{R}} &= \langle t\,\lambda, s\,\lambda \rangle + \langle s\,\lambda, t\,\lambda \rangle = \bar{\lambda}\langle t, s \rangle \lambda + \bar{\lambda}\langle s, t \rangle \lambda \\ &= \bar{\lambda}(\langle t, s \rangle + \langle s, t \rangle)\,\lambda = 2\,\bar{\lambda}\langle t, s \rangle_{\mathbf{R}}\,\lambda = 2\langle t, s \rangle_{\mathbf{R}}. \end{aligned}$$

A cause de la commutativité, $\langle t, s \rangle_{\mathbf{C}}$ est invariant par S_1, il n'en est pas de même de $\langle t, s \rangle_{\mathbf{H}}$.

Dans $T_{m^\cdot}(P_n(\mathbf{K}))$, on a le produit scalaire canonique :

(3.2.3.2) $$g((m, t)^\cdot, (m, s)^\cdot) = \langle t, s \rangle_{\mathbf{R}},$$

et une notion de **K**-*dépendance* (et **K**-*indépendance*).

Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on a un produit par un scalaire canonique dans l'espace tangent en $m^\cdot$:

$$(m, t)^\cdot \times \alpha = (m, t\,\alpha)^\cdot,$$

car, grâce à la commutativité,

$$(m\,\lambda, t\,\lambda)^\cdot \times \alpha = (m\,\lambda, t\,\lambda\,\alpha)^\cdot = (m\,\lambda, t\,\alpha\lambda)^\cdot = (m, t\,\alpha)^\cdot,$$

d'où, dans $T_{m^\cdot}(P_n(\mathbf{C}))$, la structure d'espace vectoriel, complexe.

Cette multiplication n'a pas de sens pour $P_n(\mathbf{H})$; cependant, si (m, t), (m, s) sont **K**-dépendants, c'est-à-dire si $\alpha \in \mathbf{K}$ existe tel que

$t = s\,\alpha$, alors

$$t\,\lambda = s\,\lambda\,(\lambda^{-1}\,\alpha\lambda);$$

d'où la notion de **K**-dépendance pour $(m, t)^{\cdot}$ et $(m, s)^{\cdot}$.

Notons (abusivement pour les quaternions) $\mathbf{K}\,x$ la classe des vecteurs **K**-dépendants de x dans $T_{m^{\cdot}}(P_n(\mathbf{K}))$.

Il est clair que $\mathbf{K}\,x$ est un **R**-sous-espace, de dimension q.

(3.2.3.3) *Base adaptée :* Soient x_1, x_2 unitaires en m, avec x_2 orthogonal à $\mathbf{K}\,x_1$:

$$g(x_1, x_1) = g(x_2, x_2) = 1, \qquad g(x_2, \mathbf{K}\,x_1) = 0.$$

On vérifie que $\mathbf{K}\,x_2$ est orthogonal à $\mathbf{K}\,x_1$ pour g.

On a donc, en itérant, une somme directe orthogonale pour g :

$$T_{m^{\cdot}}(P_n(\mathbf{K})) = \mathbf{K}\,x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{K}\,x_n,$$

avec $x_i = (m, t_i)^{\cdot}$.

Si on prend une base orthonormée $(x_j^1 = x_j, \ldots, x_j^q)$ pour chaque $\mathbf{K}\,x_j$, les qn vecteurs (x_j^s), $1 \leq s \leq q$, $1 \leq j \leq n$ forment une base dite adaptée de $T_{m^{\cdot}}(P_n(\mathbf{K}))$.

(3.2.3.4) *Hérédité des projectifs :* Soient $(1, i_2, \ldots, i_q)$ une base orthonormée de **K** sur **R**, et $(1, i_2, \ldots, i_{q'})$ une base d'un sous-corps de **K**, soit $\mathbf{K}'$ ($q' = 1,2$ ou 4 et $q' \leq q$).

Considérons l'inclusion : $\mathbf{K}'^{n'+1} \times \mathbf{K}^{n-n'} \to \mathbf{K}^{n'+1} \times \mathbf{K}^{n-n'}$ avec $n' \leq n$.

On note $U(n+1, \mathbf{K})$ le sous-groupe de $G(n+1, \mathbf{K})$ laissant $\langle\ ,\ \rangle$ invariant dans $\mathbf{K}^{n+1}$; c'est le groupe orthogonal, unitaire ou symplectique; le sous-groupe, qui laisse $\mathbf{K}'^{n'+1}$ invariant et $\mathbf{K}^{n-n'}$ fixe point par point, s'identifie à $U(n'+1, \mathbf{K}')$.

Appelons $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbf{K}^{n+1}$.

Si p est l'action de $U(n+1, \mathbf{K})$ sur $P_n(\mathbf{K})$ donnée par

$$p(\sigma) = (\sigma(e_{n+1}))^{\cdot},$$

on a, d'après la caractérisation connue des projectifs comme espaces symétriques,

$$\begin{tikzcd}
U(n, \mathbf{K})\,U(1, \mathbf{K}) \arrow[r, "i_1"] & U(n+1, \mathbf{K}) \arrow[r, "p"] & P_n(\mathbf{K}) \\
U(n', \mathbf{K}')\,U(1, \mathbf{K}') \arrow[r, "i_3"] \arrow[u, "i_2"'] & U(n'+1, \mathbf{K}') \arrow[r, "p'"] \arrow[u, "i_4"'] & P_{n'}(\mathbf{K}') \arrow[u, "i_5"']
\end{tikzcd}$$

où i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 sont des inclusions.

$P_{n'}(\mathbf{K}')$ est ici défini comme *sous-espace symétrique* de $P_n(\mathbf{K})$: c'est donc une sous-variété totalement géodésique de $P_n(\mathbf{K})$ (*voir* [12], p. 234 .

Posons

$$x_1 = (e_{n+1}, e_1)^{\bullet}, \ \ldots, x_1^{q'} = (e_{n+1}, e_1 \, i_{q'})^{\bullet}$$
$$\vdots$$
$$x_{n'} = (e_{n+1}, e_{n'})^{\bullet}, \ \ldots, x_{n'}^{q'} = (e_{n+1}, e_n, i_{q'})^{\bullet}$$

dans l'espace tangent en $e^{\bullet}_{n+1}$.

Le tangent à $P_{n'}(\mathbf{K}')$ en $e^{\bullet}_{n+1}$ n'est autre que

(3.2.3.5) $E = \mathbf{R}\, x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{R}\, x_1^{q'} \oplus \ldots \oplus \mathbf{R}\, x_{n'} \oplus \ldots \oplus \mathbf{R}\, x_{n'}^{q'}$,

la somme étant orthogonale pour b, et on a donc :

$$\exp_{e^{\bullet}_{n+1}} E = P_{n'}(\mathbf{K}').$$

Soient maintenant $m^{\bullet}$ quelconque, et des vecteurs tangents $[X_l^s = (m, t_l^s)^{\bullet}]$ $(1 \leqq s \leqq q', 1 \leqq l \leqq n')$ extraits d'une base adaptée; avec la même notation que (3.2.3.5), on a encore :

(3.2.3.6) $\exp_{m^{\bullet}} E$ *est un projectif* $P_{n'}(\mathbf{K}')$ *plongé géodésiquement.*

Pour voir cela, on se ramène dans la base canonique, à l'aide d'un élément de $U(n+1, \mathbf{K})$, c'est-à-dire une isométrie de $P_{n+1}(\mathbf{K})$.

Cas particuliers :

— Si $q' = 1$, $n' = 1$, $\exp_{m^{\bullet}} \mathbf{R}\, x$ est une géodésique, sous-variété isométrique à $P_1(\mathbf{R})$; elle est donc fermée, de longueur π.

— Si $q' = 1$, $n' = 2$, $\exp_{m^{\bullet}} (\mathbf{R}\, x_1 + \mathbf{R}\, x_2)$, avec $g_{m^{\bullet}}(x_1, x_2) = 0$, et x_1 orthogonal à $\mathbf{K}\, x_2$ est un projectif $P_2(\mathbf{R})$ géodésique dans $P_n(\mathbf{K})$.

— Si $q' = q$, $n' = 1$, $\exp_{m^{\bullet}} \mathbf{K}\, x$ est isométrique à $P_1(\mathbf{K})$, et il est classique que $P_1(\mathbf{K})$ est une sphère à courbure constante 4 de dimension q; c'est la droite projective définie par m et t, où $x = (m, t)^{\bullet}$.

(3.2.3.7) *Conséquence : courbure des projectifs :* Soient x_1 et x_2 d'une base adaptée en $m^{\bullet}$.

— Si $x_1 \in \mathbf{K}\, x_2$, on a $R(x_1, x_2)\, x_1 = 4\, x_2$.

— Si $x_1 \perp \mathbf{K}\, x_2$, on a $R(x_1, x_2)\, x_1 = x_2$.

Ces relations sont vraies, en effet, avec la courbure $\tilde{R}$ de

$$\exp_{m^{\bullet}} (\mathbf{R}\, x_1 \oplus \mathbf{R}\, x_2)$$

qui est donc dans les deux cas, à courbure constante; étant de plus géodésique dans $P_n(\mathbf{K})$, les relations valent avec le tenseur R (par exemple [12], II, p. 58). On déduit aisément aussi que $\nabla R = 0$ par un argument analogue.

(3.2.3.8) *Cas de* P_2 (**Ca**) : Pour l'algèbre à division des octaves de Cayley qui n'est pas associative, on n'a pas de notion usuelle de projectif, mais l'espace symétrique compact de rang 1, F_4/Spin 9, de dimension 16, noté P_2 (**Ca**).

Pour x unitaire au point p, on note ici **Ca** x l'espace engendré par x et l'espace propre de dimension 7 relatif à la valeur propre 4 de l'endomorphisme autoadjoint

$$U \to R(x, U)x.$$

L'espace propre relatif à la valeur 1, de dimension 8, est de la forme **Ca** y, et on a

$$T_p(P_2(\mathbf{Ca})) = \mathbf{Ca}\, x \oplus \mathbf{Ca}\, y.$$

On vérifie encore les propriétés (3.2.3.6) en utilisant un plongement de Spin 3 dans F_4.

(3.2.3.9) Pour le projectif P_n (**K**), qui est d'Einstein, l'expression du tenseur de Ricci est

$$\rho = [(n+3)q - 4]\, g.$$

En fait, pour une base adaptée (X_i), on a, d'après (3.2.3.7),

$$\rho(X_j, X_j) = \textstyle\sum_i g(R(X_i, X_j)X_i, X_j) = [(n-1)q + 4(q-1)]\, g(X_j, X_j),$$

ρ et g étant symétriques, l'égalité en résulte.

3.2.4. *L'opérateur P de moyenne projective dans* P_n (**K**). — Pour $k \in$ Sym 2 et $X \in T_p(P_n(\mathbf{K}))$, posons

$$(Pk)_p(X, X) = \frac{1}{q}\operatorname{tr}_{\mathbf{K}x} kg_p(X, X).$$

(3.2.4.1) Propriété : *Pk est un tenseur de* Sym 2. — Il n'est pas évident, *a priori*, que la fonction homogène de X, de degré 2, définie par $Pk(X, X)$ soit de classe C_2 [et donc soit une forme quadratique dans $T_p(P_n(\mathbf{K}))$].

— Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, P est l'identité.

— Pour $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, en appelant J l'opérateur de la structure complexe, on a

$$(Pk)(X, Y) = \frac{1}{2}[k(X, Y) + k(JX, JY)].$$

— Pour $\mathbf{K} = \mathbf{H}$, on a aussi trois anti-involutions locales J_1, J_2, J_3 de $T(P_n(\mathbf{H}))$ telles que

$$(Pk)(X, Y) = \frac{1}{4}[k(X, Y) + k(J_1X, J_1Y) + k(J_2X, J_2Y) + k(J_3X, J_3Y)]$$

définit *globalement* un élément de Sym 2 (pour ceci *voir* [5], p. 53-56).

En fait, on a une expression simple de P à l'aide du tenseur K (déf. 3.2.1.2).

Soient $X \in T_p(P_n(K))$, et $\{X_i\}$, $1 \leq i \leq qn$, une base adaptée telle que $\{X_i, \ldots, X_q\} \subset \mathbf{K}X$.

On a

$$(Kk)(X, X) = 2\sum_i \rho(X, X_i)\, k(X, X_i) - 2\sum_{i,j} g(R(X, X_i)X, X_j)\, k(X_i, X_j).$$

D'après (3.2.3.7) et (3.2.3.9),

$$\begin{aligned}(Kk)(X, X) &= 2[(n+3)q - 4]\sum_i g(X, X_i)\, k(X, X_i) \\ &\quad -2\sum_i g(R(X, X_i)X, X_i)\, k(X_i, X_i) \\ &= 2[(n+3)q-4]\, k(X, X) \\ &\quad - 2\sum_{X_i \in \mathbf{K}X} g(R(X, X_i)X, X_i)\, k(X_i, X_i) \\ &\quad - 2\sum_{X_i \perp \mathbf{K}X} g(R(X, X_i)X, X_i)\, k(X_i, X_i);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(Kk)(X, X) &= 2((n+3)q-4)\, k(X, X) \\ &\quad - 8[q.Pk(X, X) - k(X, X)] \\ &\quad - 2[\operatorname{tr} k.g(X, X) - q.Pk(X, X)]\end{aligned}$$

et donc $Pk(X, X)$ est une forme quadratique; d'où, en particulier pour $P_2(\mathbf{C}a)$, la relation entre *tenseurs* symétriques :

(3.2.4.2) $$Pk = \frac{1}{6q}[2(n+3)qk - 2\operatorname{tr} kg - Kk].$$

(3.2.4.3) LEMME. — *P est un projecteur dans* Sym 2, *autoadjoint, qui commute avec K, $\bar{\Delta}$ et Δ.*

— $P^2 = P$ résulte de la définition; on a aussi $\operatorname{tr} Pk = \operatorname{tr} k$ et $Pg = g$.

— $\langle Pk, h\rangle = \langle k, Ph\rangle$ résulte de (3.2.4.2), puisque K est autoadjoint.

— $PK = KP$ se voit sur (3.2.4.2), car $\operatorname{tr} Kk = 0 = Kg$.

— $\bar{\Delta}K = K\bar{\Delta}$ se vérifie sur la définition de K (3.2.1.2), puisque $\nabla R = 0$.

3.3. **Lemme.** — *Soit une variété M munie d'une m. g. t. f. (π), soit g.*

L'espace F (définition 2.2.4) *est orthogonal à* $\mathbf{R}\, g$ *dans* (Sym 2, $\langle\ ,\ \rangle$), *c'est-à-dire*

$$\forall\, k \in F, \quad \langle h, g\rangle = \int_M \operatorname{tr} kv_g = 0.$$

Soit le fibré U des vecteurs tangents unitaires de (M, g); il a une structure riemannienne naturelle et donc une mesure associée (*voir* par exemple [1], p. 163) invariante par le flot géodésique. Dans cette situation, on sait qu'on a une fibration localement triviale de U sur la variété Geod (M). Comme la mesure de U passe à la base, l'intégrale de la forme quadratique $k(x, x)$ est nulle sur U, puisque nulle sur les fibres (définition de F). On reprend la fibration de U sur M; l'intégrale sur la fibre sphère U_m, en chaque point m de M, vaut $\int_{U_m} k(x, x)\, v_{g_m} = \alpha\,(\operatorname{tr} k)_m$, où α est le volume de la sphère canonique S_{n-1} divisé par $n = \dim M$; d'où $\int_M \operatorname{tr} k v_g = 0$.

C. Q. F. D.

3.4. **Lemme.** — *Sur $P_n(\mathbf{K})$, avec sa métrique canonique qui est une m. g. t. f. (π), on a $\Delta F \subset F$, où Δ est le laplacien de Lichnerowicz, agissant dans* Sym 2. *De plus, Δ respecte la somme directe $F = (F \cap \operatorname{Ker} \delta) \oplus L$.* [Définition de Δ en (3.2.1.1), de F en 2.2.4.]

3.4.1. — On considère sur $P_n(\mathbf{K})$ une géodésique f (fixée) telle que $f(0) = m$, $f'(0) = x$, unitaire; c'est donc une fonction π-périodique.

Soit $\{U_1 = x, U_2, \ldots, U_{qn}\}$ une base adaptée en m, donc formée de vecteurs propres de $Y \to R(x, Y)\,x$; soit $U_i(t)$ le champ obtenu par transport parallèle de U_i le long de f.

Si on appelle P_i le plan engendré par x et U_i $(i > 1)$ par (3.2.3.6), $\exp_m P_i$ est une surface totalement géodésique à courbure λ_i (la valeur propre correspondant à U_i, valant 1 ou 4).

Laissant toujours $i > 1$ fixé, on considère la famille à un paramètre de géodésiques autour de f, définie pour $(t, u) \in [-\pi/2, \pi/2] \times]-\alpha, \alpha[$ par

$$\varphi(t, u) = \exp_m tx(u),$$

avec $x(u) = x \cos\sqrt{\lambda_i}\, u + U_i \sin\sqrt{\lambda_i}\, u \in P_i$.

Chaque géodésique $t \to \varphi(t, u)$ est donc paramétrée par son arc de longueur; on note $\varphi^{\cdot}(t, u)$ son vecteur tangent en t.

On considère la fonction énergie associée à la 2-forme symétrique k et à la variation φ, soit

$$E_i(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k(\varphi^{\cdot}(t, u), \varphi^{\cdot}(t, u))\, dt. \tag{3.4.1.1}$$

On calcule $(d^2 E_i/du^2)(0)$.

Puisque $\varphi(t, u) \subset S_i$, en notant i l'inclusion $S_i \hookrightarrow P_n(\mathbf{K})$, on a

$$k(\varphi^{\cdot}(t, u), \varphi^{\cdot}(t, u)) = i^* k((i_*)^{-1} \varphi^{\cdot}(t, u), (i_*)^{-1} \varphi^{\cdot}(t, u))$$

et on calcule donc $(d^2 E_i/du^2)(0)$ sur S_i.

Soient, dans P_i, l'ouvert $V = \{\,]-\pi/2,\ 0[\cup]0,\ \pi/2[\,\}\times]-\alpha,\ \alpha[$, et le système de coordonnées polaires $V \xrightarrow[\varphi]{} \varphi(V) \subset S_i$.

La métrique induite sur V s'écrit :

$$ds^2 = \varphi^*(g) = dt^2 + \sin^2\sqrt{\lambda_i}\,t\,du^2.$$

En posant 1 et 2 pour t et u, les symboles de Christoffel non nuls sont :

$$\Gamma^1_{22} = -\sqrt{\lambda_i}\sin\sqrt{\lambda_i}\,t.\cos\sqrt{\lambda_i}\,t,$$

$$\Gamma^2_{21} = \sqrt{\lambda_i}\,\frac{\cos\sqrt{\lambda_i}\,t}{\sin\sqrt{\lambda_i}\,t}.$$

De plus, on a $E_i(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k_{11}(t,\,u)\,dt$ (en écrivant encore k pour i^*k). On a donc

$$\frac{d^2E_i}{du^2}(0) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}k_{11}\right)(t,\,0)\,dt.$$

Calcul de $[(\partial^2/\partial u^2)\,k_{11}]\,(t,\,0)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}k_{11}\right)(t,\,u) = \nabla_2 k_{11} + 2\,\Gamma^l_{21}\,k_{l1} = \nabla_2 k_{11} + 2\,\Gamma^2_{12}\,k_{12},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}k_{11}\right)(t,\,u) = \frac{\partial}{\partial u}(\nabla_2 k_{11}) + 2\,\Gamma^2_{12}\,\frac{\partial}{\partial u}(k_{12}),$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}k_{11}\right)(t,\,u) = \nabla_2\nabla_2 k_{11} + \Gamma^l_{22}\,\nabla_l k_{11} + 2\,\Gamma^l_{21}\,\nabla_2 k_{l1} + 2\,\Gamma^2_{12}\,[\nabla_2 k_{12} + \Gamma^l_{21}\,k_{l2} + \Gamma^l_{22}\,k_{1l}],$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}k_{11}\right)(t,\,u) = \nabla_2\nabla_2 k_{11} + \Gamma^1_{22}\,\nabla_1 k_{11} + 4\,\Gamma^2_{21}\,\nabla_2 k_{12} + 2\,\Gamma^2_{12}\,\Gamma^2_{12}\,k_{22} + 2\,\Gamma^2_{12}\,\Gamma^1_{22}\,k_{11},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}k_{11}\right)(t,\,u) = \nabla_2\nabla_2 k_{11} - \sqrt{\lambda_i}\sin\sqrt{\lambda_i}\,t\cos\sqrt{\lambda_i}\,t\,\nabla_1 k_{11} - 2\,\lambda_i\cos^2\sqrt{\lambda_i}\,t\,k_{11} + 4\sqrt{\lambda_i}\,\frac{\cos\sqrt{\lambda_i}\,t}{\sin\sqrt{\lambda_i}\,t}\nabla_2 k_{12} + 2\,\lambda_i\frac{\cos^2\sqrt{\lambda_i}\,t}{\sin^2\sqrt{\lambda_i}\,t}k_{22}.$$

Puisque on a $(\partial/\partial u)_{f(t)} = \sin\sqrt{\lambda_i}\,t\,U_i(t)$, on voit que

$$\frac{k_{22}}{\sin^2\sqrt{\lambda_i}\,t}(t,\,0) = k_{f(t)}\left(\frac{1}{\sin\sqrt{\lambda_i}\,t}\,\frac{\partial}{\partial u},\ \frac{1}{\sin\sqrt{\lambda_i}\,t}\,\frac{\partial}{\partial u}\right) = k_{f(t)}(U_i(t),\ U_i(t)),$$

de même

$$\frac{1}{\sin^2\sqrt{\lambda_i}\,t}\nabla_2\,k_{12}\,(t,\,0)=\frac{1}{\sin^2\sqrt{\lambda_i}\,t}\nabla\,k\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\right)$$
$$=\nabla\,k\,(U_1\,(t),\,U_i\,(t);\,U_i\,(t)).$$

Finalement, pour $t\in\,]-\pi/2,\,0[\,\cup\,]0,\,\pi/2[$, et en posant U_i pour $U_i\,(t)$ $(i\geqq 1)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{du^2}k_{11}\,(t,\,0)&=\sin^2\sqrt{\lambda_i}\,t\,(\nabla_{U_i}\nabla_{U_i}\,k)\,(U_1,\,U_1)\\&\quad-\sqrt{\lambda_i}\sin\sqrt{\lambda_i}\,t\cos\sqrt{\lambda_i}\,t\,(\nabla_{U_1}\,k)\,(U_1,\,U_1)\\&\quad+4\sqrt{\lambda_i}\sin\sqrt{\lambda_i}\,t\cos\sqrt{\lambda_i}\,t\,(\nabla_{U_i}\,k)\,(U_1,\,U_i)\\&\quad-2\,\lambda_i\cos^2\sqrt{\lambda_i}\,t\,k\,(U_1,\,U_1)+2\,\lambda_i\cos^2\sqrt{\lambda_i}\,t\,k\,(U_i,\,U_i),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(3.4.1.2)\quad\frac{d^2\,E_i}{du^2}(0)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big\{&(\sin^2\sqrt{\lambda_i}\,t\,(\nabla_{U_i}\nabla_{U_i}\,k)\,(U_1,\,U_1)\\&+[4\,(\nabla_{U_i}\,k)\,(U_1,\,U_i)\\&\quad-(\nabla_{U_1}\,k)\,(U_1,\,U_1)].\sqrt{\lambda_i}\sin\sqrt{\lambda_i}\,t\cos\sqrt{\lambda_i}\,t\\&+2\,\lambda_i\cos^2\sqrt{\lambda_i}\,t\,[k\,(U_i,\,U_i)-k\,(U_1,\,U_1]\,dt)\Big\}.\end{aligned}$$

L'opérateur ∇ est ici celui de différentiation covariante dans S_i, et k est écrit pour $i^*\,k$: puisque S_i est totalement géodésique, l'expression est la même si l'on considère ∇ comme la dérivation covariante dans $P_n\,(\mathbf{K})$ et k avec sa signification de tenseur sur $P_n\,(\mathbf{K})$.

3.4.2. — On fait le même raisonnement avec la géodésique l, définie par $l\,(t)=f\big(t+(\pi/2\sqrt{\lambda_i})\big)$ et avec les champs

$$U_{i*}\,(t)=U_i\left(t+\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_i}}\right),\qquad U_{1*}\,(t)=l'\,(t)=U_1\left(t+\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda_i}}\right).$$

On obtient l'expression correspondante :

$$\begin{aligned}(3.4.2.1)\quad\frac{d^2\,E_{i*}}{du^2}(0)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big\{&(\sin^2\sqrt{\lambda_i}\,t\,\big(\nabla_{U_{i*}}\nabla_{U_{i*}}\,k\big)\,(U_{1*},\,U_{1*})\\&+\sqrt{\lambda_i}\sin\sqrt{\lambda_i}\,t\cos\sqrt{\lambda_i}\,t\\&\quad\times\big[4\,\big(\nabla_{U_{i*}}k\big)\,(U_{1*},\,U_{i*})\\&\qquad-\big(\nabla_{U_{1*}}k\big)\,(U_{1*},\,U_{1*})\big]\\&+2\,\lambda_i\cos^2\sqrt{\lambda_i}\,t\,[k\,(U_{i*},\,U_{i*})\\&\qquad-k\,(U_{1*},\,U_{1*})]\Big\}\,dt.\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $s = t + (\pi/2\sqrt{\lambda_i})$, et en gardant les mêmes bornes puisque l'intégrant est π-périodique, on obtient

$$(3.4.2.2)\quad \frac{d^2 E_{i*}}{du^2}(0) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big\{ \cos^2\sqrt{\lambda_i}\, s\, (\nabla_{U_i} \nabla_{U_i} k)(U_1, U_1) - \sqrt{\lambda_i} \sin\sqrt{\lambda_i}\, s \cos\sqrt{\lambda_i}\, s \times [4(\nabla_{U_i} k)(U_1, U_i) - (\nabla_{U_1} k)(U_1, U_1)] + 2\lambda_i \sin^2\sqrt{\lambda_i}\, s\,[k(U_i, U_i) - k(U_1, U_1)] \Big\}\, ds.$$

On écrit les équations (3.4.1.2), (3.4.2.2) pour chaque $i > 1$, et on fait la somme des $2qn - 2$ équations obtenues : on a donc

$$(3.4.2.3)\quad \Sigma_{i=2}^{qn} \frac{d^2 E_i}{du^2}(0) + \frac{d^2 E_{i*}}{du^2}(0) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \{ \Sigma_2^{qn} (\nabla_{U_i} \nabla_{U_i} k)(U_1, U_1) + 2\Sigma_2^{qn} g(R(U_1, U_i) U_1, U_i)(k(U_i U_i) - k(U_1, U_1)) \}\, dt.$$

On remarque que l'expression du deuxième membre a un sens, et est nulle pour $i = 1$. On trouve donc :

$$\Sigma_{i=1}^{qn} (\nabla_{U_i} \nabla_{U_i} k)(U_1, U_1) = (\operatorname{tr} \nabla\nabla\, k)(U_1, U_1) = -\bar{\Delta} k(U_1, U_1);$$

de même,

$$\Sigma_{i=1}^{n} R_{1i1i}(k_{ii} - k_{11}) = \Sigma_{1 \le i, j \le qn} R_{1i1j}\, k_{ij} - \rho_{11}\, k_{11},$$

où ρ désigne le tenseur de Ricci; puisque pour les projectifs $\rho = \lambda\, g$, (3.4.2.3) s'écrit finalement :

$$(3.4.2.4)\quad \Sigma_{2 \le i \le qn} - \left\{ \frac{d^2 E_i}{du^2}(0) + \frac{d^2 E_{i*}}{du^2}(0) \right\} = \int_0^{\pi} \{ \bar{\Delta} k(U_1, U_1) + 2\Sigma_{1 \le j \le qn}\, \rho_{1i}\, k_{1j} - 2\Sigma_{1 \le i, j \le qn} R_{1i1j}\, k_{ij} \}\, dt.$$

On reconnaît dans (3.4.2.4) l'opérateur Δ de Lichnerowicz.

On a donc la formule, dans laquelle E_i, E_{i*} sont définis à l'aide des champs $U_i(t)$ le long de la géodésique f :

$$(3.4.2.5)\quad \int_0^{\pi} \Delta k(f'_t, f'_t)\, dt = -\Sigma_{2 \le i \le qn} \left\{ \frac{d^2 E_i}{du^2}(0) + \frac{d^2 E_{i*}}{du^2}(0) \right\}.$$

Donc, si $k \in F$, $E_i(u) = 0 = E_{i*}(u)$, d'où

$$\int_0^\pi \Delta k(f'_t, f'_t)\, dt = 0 \qquad \text{(pour chaque géodésique } f\text{)},$$

et par conséquent $\Delta k \in F$.

C. Q. F. D.

3.4.3. *L'opérateur* Δ *respecte la somme directe :* $F = (F \cap \operatorname{Ker} \delta) \oplus L$. — En effet, si $k \in L$, $k = L_X(g)$, soit en coordonnées $k_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i$; d'après [13] (p. 28-29), sur une variété à tenseur de Ricci parallèle, $\Delta \nabla X = \nabla \Delta X$, d'où il résulte :

$$\Delta L_X(g) = L_{\Delta X}(g) \qquad \text{et} \qquad \Delta L \subset L.$$

De même, soit $k \in F$ et $\delta k = 0$, on a vu que $\Delta k \in F$ et, d'après [13] (p. 28-29), on a aussi $\delta \Delta k = \Delta \delta k$, donc $\Delta k \in F \cap \delta^{-1}(0)$.

3.5. **La variété des géodésiques orientées pour une variété munie d'une** m. g. t. f. (π).

3.5.1. — Le deuxième membre de (3.4.2.5) conduit à l'étude de la variété des géodésiques de $P_n(\mathbf{K})$ et, plus généralement, d'une variété M munie d'une m. g. t. f. (π), soit g.

On appelle Geod (M) (ou Geod) l'ensemble des géodésiques orientées de M, c'est-à-dire l'ensemble des sous-variétés géodésiques de dimension 1, munies d'une orientation : il est donc formé des orbites du fibré unitaire U sous l'action du flot géodésique, et a ainsi une structure de variété de dimension : $2 \dim M - 2$.

Pour $\gamma \in$ Geod, le tangent en γ à Geod, soit T_γ (Geod) s'identifie naturellement aux champs de Jacobi normaux à γ (*voir* [16], p. 80-81). Pour réaliser l'identification, on fabrique une carte de Geod autour de γ en faisant une tranche dans U à l'action du flot géodésique (orthogonalement au vecteur $x \in U$, x tangent à γ); dans une trivialisation de cette carte, une courbe, issue de x, s'écrit : $t \to (a_t, v_t)$ avec $a_t \in$ carte de M, $v_t \in \mathbf{R}^{\dim M}$, $g_{a_t}(v_t, v_t) = 1$ et $(a_0, v_0) =$ image de x dans la trivialisation.

En dérivant pour $t = 0$, on a ainsi le vecteur tangent le plus général de T_γ (Geod); ce vecteur s'écrit dans la trivialisation $(a_0, v_0; \dot{a}_0, \dot{v}_0)$ avec $g_{a_0}(v_0, \dot{v}_0) = 0$ et $g_{a_0}(v_0, \dot{a}_0) = 0$.

On définit un champ de Jacobi normal unique W le long de γ en posant $W(0) = \dot{a}_0$, $\nabla_x W = \dot{v}_0$, et on vérifie bien que ce champ ne dépend pas de la trivialisation choisie, d'où l'identification.

On a, sur Geod, une métrique riemannienne naturelle en posant

$$\forall\ V,\ W \in T_\gamma\,(\mathrm{Geod}) \simeq \text{champs de Jacobi le long de } \gamma :$$

$$\bar{g}_\gamma\,(V,\ W) = \frac{2}{\pi}\int_\gamma g\,(V_t,\ W_t)\,dt.$$

On voit que $\bar{g}$ est invariante par les isométries (rigides) de $(M,\ g)$.

3.5.2. *La variété* Geod *pour* $P_n\,(\mathbf{K})$. — Dans ce cas, Geod est un espace homogène puisque $\mathrm{SO}\,(n+1)$ [resp. $U\,(n+1)$, $\mathrm{Sp}\,(n+1)$] agit transitivement sur le fibré unitaire de $P_n\,(\mathbf{R})$ [resp. $P_n\,(\mathbf{C})$, $P_n\,(\mathbf{H})$], donc aussi sur Geod. Notons $G\,(n+1)$ l'un des groupes précédents. D'après (3.2.3.4) appliqué avec $n' = 1$, $q' = 1$, la géodésique f de condition initiale $x = (m,\ t)^{\bullet}$ est l'application

$$u \to \pi\,(m \cos u + t \sin u) \in P_n\,(\mathbf{K}).$$

Dans une base $(m,\ t,\ e_3,\ \ldots,\ e_{n+1})$ de $\mathbf{K}^{n+1}$, orthonormée pour $\langle\ ,\ \rangle$, un système de coordonnées homogènes pour f est donc :

$$u \to (\cos u,\ \sin u,\ 0,\ \ldots,\ 0).$$

Le groupe d'isotropie de l'élément de Geod paramétré par f, lorsque $G\,(n+1)$ agit dans Geod, est donc le produit direct de deux sous-groupes; l'un est isomorphe à $G\,(n-1)$, il invarie l'orthogonal de $\{\ m,\ t\ \}$, l'autre est formé des matrices :

$$M\,(s,\ \alpha) = \begin{pmatrix} s \cos \alpha & -s \sin \alpha & 0 \\ s \sin \alpha & s \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{où} \quad \|\ s\ \| = 1, \qquad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ on a immédiatement pour Geod l'expression :

$$\frac{\mathrm{SO}\,(n+1)}{\mathrm{SO}\,(n-1) \times \mathrm{SO}\,(2)} = \text{la variété de Grassman}$$

des 2-plans orientés de $\mathbf{R}^{n+1}$.

Autrement, soit l'homomorphisme $(s,\ \alpha) \to M\,(s,\ \alpha^{\bullet})$, où $\alpha = (\alpha + 2\pi\,\mathbf{Z})$ Son noyau est le groupe $\Gamma = \{\ (1,\ 0^{\bullet}),\ (-1,\ \pi^{\bullet})\ \}$; d'où les expressions pour Geod :

— Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, $\dfrac{U\,(n+1)}{U\,(n-1) \times \{\ U\,(1) \times \mathrm{SO}\,(2)\ \}/\Gamma}$.

— Si $\mathbf{K} = \mathbf{H}$, $\dfrac{\mathrm{Sp}\,(n+1)}{\mathrm{Sp}\,(n-1) \times \{\ \mathrm{Sp}\,(1) \times \mathrm{SO}\,(2)\ \}/\Gamma}$.

(3.5.2.1) *Pour* $P_n\,(\mathbf{K})$, Geod *a une structure presque complexe naturelle, pour laquelle la métrique invariante* $\bar{g}$ *est hermitienne :* Soient $\gamma \in \mathrm{Geod}$, et f une représentation paramétrique de γ par l'arc de longueur t, l'orientation de γ correspondant à t croissant; on reprend la base

$$\{ U_1(t) = f'(t), U_2(t), \ldots, U_{qn}(t) \}$$

définie en 3.4.1.

Les champs de Jacobi définis le long de γ, à l'aide de f, par

$$W_i\ (f(t)) = U_i(t) \sin \sqrt{\lambda_i}\, t \qquad (2 \leq i \leq qn),$$
$$W_{i*}\ (f(t)) = U_i(t) \cos \sqrt{\lambda_i}\, t$$

forment une base orthonormée de T_γ (Geod).

Si on pose $J_\gamma(W_i) = W_{i*}$, et $J_\gamma(W_{i*}) = - W_i$, on définit bien un automorphisme de T_γ (Geod), indépendamment de la géodésique *orientée* f, qui vérifie

$$J_\gamma^2 = - I.$$

De plus, $\bar{g}_\gamma(J_\gamma(V), J_\gamma(W)) = \bar{g}_\gamma(V, W)$, d'où $\bar{g}$ est hermitienne.

C. Q. F. D.

Ces remarques sont peut être utiles, puisqu'elles donnent des conditions nécessaires sur Geod, pour la conjecture de Blaschke généralisée.

3.5.3. *Une formule de commutations des laplaciens.* — Considérons l'application linéaire :

$$\text{Sym } 2 \to C^\infty \text{ (Geod)},$$
$$k \to \hat{k} : \quad \hat{k}(\gamma) = \int_\gamma k(\gamma'_t, \gamma'_t)\, dt.$$

Pour vérifier que $\hat{k} \in C^\infty$ (Geod), on repère les géodésiques voisines de γ_0 par un vecteur unitaire $u = u(\gamma)$; la dépendance des conditions initiales entraîne que le vecteur $\gamma'(t)$ dépend C^∞ de (t, u); de plus, $\tilde{k} : T(M) \to \mathbf{R}$, où $\tilde{k}(v) = k(v, v)$ est C^∞; donc $k(\gamma'_t, \gamma'_t)$ dépend C^∞ de (t, u), et par conséquent $\int_\gamma k(\gamma'_t, \gamma'_t)\, dt$ est C^∞ en u. Notons que l'espace F est le noyau de cette application.

Théorème 3.5.3. — *Pour un projectif canonique $P_n(\mathbf{K})$, si Δ est le laplacien généralisé de Lichnerowicz, et $\square$ le laplacien sur les fonctions de la variété riemannienne* Geod $(P_n(\mathbf{K}))$, *on a la formule :*

$$\forall\ k \in \text{Sym } 2, \quad \Delta \hat{k} = \square(\hat{k}).$$

On doit prouver que le deuxième membre de la formule (3.4.2.5) n'est autre que $\square(\hat{k})$. On utilise la caractérisation suivante du laplacien :

Si N est une variété riemannienne, p un point de N, $(V_1, \ldots, V_l)$ une base orthonormée de TN_p, et φ_i les géodésiques telles que $\varphi'_i(0) = V_i$, pour une fonction différentiable θ sur N, on a

$$(\Delta\theta)_p = -\Sigma_{1 \leq i \leq l} \frac{d^2}{du^2} (\theta \circ \varphi_i)(0).$$

Soient encore $\gamma \in \mathrm{Geod}$, et f une représentation orientée de γ; on considère la variation $u \to \varphi_i(u)$ de 3.4.1 avec

$$\varphi_i(u)(t) = \exp_m t\left(x \cos\sqrt{\lambda_i}\, u + U_i \sin\sqrt{\lambda_i}\, u\right)$$

comme une courbe dans Geod.

Avec cette notation, la fonction E_i définie en (3.4.1.1) s'écrit :

$$E_i = \hat{k} \circ \varphi_i.$$

Avec la géodésique l, définie par $l(t) = f\left(t + (\pi/2\sqrt{\lambda_i})\right)$, on a de même

$$E_{i*} = \hat{k} \circ \varphi_{i*}.$$

Puisque le vecteur tangent en $u = 0$ à φ_i (resp. φ_{i*}) dans Geod est le champ de Jacobi W_i (resp. W_{i*}) défini en (3.5.2.1), il suffit donc, pour avoir la formule de commutation, de vérifier le lemme suivant :

LEMME 3.5.4. — *Pour les* $P_n(\mathbf{K})$, *les courbes* $u \to \varphi_i(u)$ *avec* $i \in \{2, \ldots, nq, 2^*, \ldots, (nq)^*\}$ *de* R *dans* (Geod, $\bar{g}$) *sont des géodésiques.*

On montre que $\varphi = \varphi_i$ est critique pour la fonction énergie.

On se donne une variation autour de φ, à extrémités fixes, par une application de classe C^1 :

$$\begin{aligned} \psi :\ & [0, \pi] \times [0, u_1] \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \to P_n(\mathbf{K}), \\ & (t, u, \varepsilon) \to \psi(t, u, \varepsilon) = \varphi_\varepsilon(t, u), \end{aligned}$$

telle que :

1° $\forall (u, \varepsilon)$, la courbe $t \to \psi(t, u, \varepsilon)$ est une géodésique paramétrée par son arc;

2° $\forall (t, u)$,

$$\psi(t, u, 0) = \varphi(t, u) = \varphi_0(t, u);$$

3° $\forall (t, \varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \psi(t, 0, \varepsilon) &= \psi(t, 0, 0) = \varphi(t, 0), \\ \psi(t, u_1, \varepsilon) &= \psi(t, u_1, 0) = \varphi(t, u_1). \end{aligned}$$

Pour tout (u, ε), le champ $t \to (\partial\psi/\partial u)(t, u, 0)$ est de Jacobi; on peut choisir ψ pour qu'il soit normal à $t \to \psi(t, u, \varepsilon)$: en effet, ce champ est périodique, donc sa composante sur $(\partial\psi/\partial t)(t, u, \varepsilon)$ est une constante $h(u, \varepsilon)$; on redresse ce champ de Jacobi en prenant $\psi\left(t - \int_0^u h(u, \varepsilon)\, du, u, \varepsilon\right)$.

On considère l'énergie de la courbe $\varepsilon \to \varphi_\varepsilon$ dans Geod :

$$E(\varphi_\varepsilon) = \int_0^{u_1} \bar{g}\left(\frac{\partial}{\partial u}\varphi_\varepsilon, \frac{\partial}{\partial u}\varphi_\varepsilon\right) du,$$

où $(\partial/\partial u)\,\varphi_\varepsilon$ est le champ $t \to (\partial\psi/\partial u)(t, u, \varepsilon)$ qui est de Jacobi et normal, et

$$\bar{g}\left(\frac{\partial}{\partial u}\varphi_\varepsilon, \frac{\partial}{\partial u}\varphi_\varepsilon\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}(t, u, \varepsilon), \frac{\partial\psi}{\partial u}(t, u, \varepsilon)\right) dt,$$

d'où

$$E(\varphi_\varepsilon) = \frac{2}{\pi}\iint_{[0, u_1]\times[0, \pi]} g\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}(t, u, \varepsilon), \frac{\partial\psi}{\partial u}(t, u, \varepsilon)\right) du\, dt.$$

On calcule la variation première : $(d/d\varepsilon)\,[E(\varphi_\varepsilon)]_{\varepsilon=0}$.

L'intégration par parties est classique et les extrémités étant fixes, il reste :

$$\frac{d}{d\varepsilon}[E(\varphi_\varepsilon)]_{\varepsilon=0} = \frac{4}{\pi}\iint_{[0, u_1]\times[0, \pi]} g\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}(t, u, 0), \nabla_{\partial\psi/\partial u(t, u, 0)}\frac{\partial\psi}{\partial u}(t, u, 0)\right) du\, dt$$

et d'après 3.4.1 :

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial\psi/\partial u(t, u, 0)}\frac{\partial\psi}{\partial u}(t, u, 0) &= \nabla_{\partial\varphi/\partial u(t, u)}\frac{\partial\varphi}{\partial u}(t, u)\\ &= -\sqrt{\lambda_i}\sin\sqrt{\lambda_i}\,t\cos\sqrt{\lambda_i}\,t\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, u).\end{aligned}$$

Or le champ $t \to (\partial\psi/\partial\varepsilon)(t, u, 0)$ est de Jacobi, et puisqu'il est périodique, sa composante sur $(\partial\varphi/\partial t)(t, u)$ est une constante $A(u)$, donc :

$$\frac{d}{d\varepsilon}[E(\varphi_\varepsilon)]_{\varepsilon=0} = +\frac{4}{\pi}\sqrt{\lambda_i}\iint_{[0, u_1]\times[0, \pi]} \sin\sqrt{\lambda_i}\,t\cos\sqrt{\lambda_i}\,t\,A(u)\, du\, dt = 0.$$

Le lemme en résulte ainsi que la proposition 3.5.3.

3.5.5. *Formule de commutation pour les fonctions.* — On considère l'application linéaire : $C^\infty(P_n(\mathbf{K})) \to C^\infty(\text{Geod})$, définie par $\varphi \to \check{\varphi}$, et

$$\check{\varphi}(\gamma) = \int_\gamma \varphi\, dt = \int_0^{\pi} \varphi(\gamma(t))\, dt.$$

Si on applique la formule 3.5.3 à un tenseur conforme $\varphi\, g$, on a immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 3.5.5. — *Si* Δ (*resp.* $\square$) *est le laplacien sur les fonctions de* $P_n(\mathbf{K})$ (*resp.* Geod), *on a*

$$\forall\ \varphi \in C^\infty(M), \quad \Delta\check{\varphi} = \square\,(\check{\varphi}).$$

Pour $P_2(R)$, cette formule coïncide avec celle de [11] (p. 170, th. 5.1).

3.5.6. *Conséquence pour les spectres de* Δ *et* $\square$. — Soient $\varphi \neq 0$ une fonction propre de Δ, λ la valeur propre correspondante, on a

$$\check{\Delta\varphi} = \check{\lambda\varphi} = \lambda\check{\varphi} = \square\,(\check{\varphi}),$$

et λ sera valeur propre de $\square$ si on est assuré que $\check{\varphi} \neq 0$; ceci est conséquence de résultats sur la transformation de Radon (*voir* [11], p. 165) :

Pour un projectif ou une sphère, il correspond à chaque point p une variété antipodale A_p; pour une sphère, A_p est le point antipode de p, et, pour $P_n(\mathbf{K})$, A_p qui est l'ensemble des points à distance $\pi/2$ de p est un $P_{n-1}(\mathbf{K})$ plongé de façon totalement géodésique.

L'ensemble Σ des variétés antipodales $A_p = H$ est muni d'une façon naturelle d'une structure différentiable et métrique qui rend $P_n(\mathbf{K})$ et Σ isométriques. A chaque fonction $f \in C^\infty(P_n(\mathbf{K}))$, on associe $\tilde{f} \in C^\infty(\Sigma)$ par

$$H \in \Sigma, \quad \tilde{f}(H) = \int_H f.$$

Il est remarquable, d'après Helgason et Semjanistyj ([11], p. 170) que l'application $f \to \tilde{f}$ soit un isomorphisme linéaire, la connaissance de $\tilde{f}$ permettant la reconstitution de f :

Supposons $\check{\varphi} = 0$; si on applique le lemme 3.3 pour $M = A_p$ au tenseur conforme $\varphi\, g$, il vient $\int_H \operatorname{tr}(\varphi\, g\,|_H) = 0 = \int_H \varphi$, soit $\tilde{\varphi} = 0$ et donc par l'isomorphisme, $\varphi = 0$.

Corollaire 3.5.7. — *Sur* $P_n(\mathbf{K})$, *si* φ *et* λ *sont fonction et valeur propres de* Δ, *alors* $\tilde{\check{\varphi}}$ *et* λ *sont fonction et valeur propres de* $\square$; *donc pour les spectres :*

$$\operatorname{Sp}\Delta \subset \operatorname{Sp}\square.$$

3.5.8. — On a vu que, pour les $P_n(\mathbf{K})$, on a $\Delta F \subset F$; en fait on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.5.9. — *L'opérateur Δ_F est un isomorphisme de F sur F.*

— Δ_F *est injectif,* car $\operatorname{Ker}\Delta = \mathbf{R}\,g$ et $\mathbf{R}\,g \cap F = \{0\}$; en effet, si $\Delta k = 0$, $\langle \Delta k, k\rangle = \langle \bar{\Delta} k, k\rangle + \langle Kk, k\rangle = 0$; or $\langle \bar{\Delta} k, k\rangle \geqq 0$ et, en courbure sectionnelle positive, $\langle Kk, k\rangle \geqq 0$ (*voir* [3], p. 388) avec $\langle Kk, k\rangle = 0$ implique $k = \varphi\, g$; donc $\bar{\Delta} k = 0$ entraîne $k \in \mathbf{R}\, g$.

— Δ_F *est surjectif :* puisque Δ est elliptique, on a la décomposition orthogonale de Sym 2,

$$\text{Sym } 2 = \Delta\,(\text{Sym } 2) \oplus \mathbf{R}\, g \quad ([3], \text{ p. } 389).$$

Soit $k \in F$; comme F est orthogonal à $\mathbf{R}\, g$ (lemme 3.3), on a

$$k = \Delta h;$$

avec les notations de 3.5.3,

$$\hat{k} = \widehat{\Delta h} = 0$$

et par le théorème 3.5.3,

$$\square\,(\hat{h}) = 0;$$

puisque Geod est compacte, la fonction $\hat{h}$ est constante sur Geod.

D'où

$$\hat{h} = \text{Cte} = \alpha\, \hat{g},$$

$$\widehat{h - \alpha\, g} = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad h - \alpha\, g \in F$$

et

$$k = \Delta\,(h - \alpha\, g).$$

C. Q. F. D.

3.6. **Étude de $F_{\mathbf{K}}$ sur $P_n(\mathbf{K})$.**

LEMME 3.6. — *Pour $k \in F_{\mathbf{K}} \cap \operatorname{Ker} \delta$, on a* $\operatorname{tr} k = 0$.

Soit $H \in \Sigma$ (*voir* 3.5.6) un hyperplan projectif quelconque de $P_n(\mathbf{K})$, et soit i l'inclusion $H \overset{i}{\hookrightarrow} P_n(\mathbf{K})$.

3.6.1. *H est totalement géodésique dans $P_n(\mathbf{K})$,* et puisque H est isométrique à $P_{n-1}(\mathbf{K})$, on considère les espaces F correspondant à H et $P_n(\mathbf{K})$, respectivement F_{n-1} et F_n, et les opérateurs :

$$\Delta_{n-1} = \bar{\Delta}_{n-1} + K_{n-1}, \qquad \Delta_n = \bar{\Delta}_n + K_n.$$

Soient $p \in H$, et N l'espace normal en p à $T_p(H)$. Soit $(X_1, \ldots, X_{q(n-1)})$ une base orthonormée de $T_p(H)$; $(X_{q(n-1)+1}, \ldots, X_{qn})$ une base orthonormée de N avec encore $q = \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{K}$.

3.6.2. *Sous-lemme.* — Pour $k \in F$, $H \in \Sigma$, on a

$$\int_H \{ \Delta_n \operatorname{tr} k - 2q(n-1)\operatorname{tr} k + \Sigma_{q(n-1)<a, i \leq qn} \nabla_a \nabla_a k_{ii} \} = 0$$

(pour la mesure riemannienne de H).

Démonstration de 3.6.2. — Par le lemme 3.4 et 3.6.1, on a

$$\begin{aligned} k \in F_n &\Rightarrow i^* k \in F_{n-1} &&\Rightarrow \Delta_{n-1}(i^* k) \in F_{n-1}, \\ k \in F_n &\Rightarrow \Delta_n k \in F_n &&\Rightarrow i^*(\Delta_n k) \in F_{n-1}, \end{aligned}$$

d'où il résulte, par le lemme 3.3 :

$$(3.6.2.1)\quad 0 = \int_{P_n(\mathbf{K})} \operatorname{tr} k = \int_H \operatorname{tr}(i^* k) = \int_H \operatorname{tr}(i^* \Delta_n k) = \int_H \operatorname{tr} \Delta_{n-1}(i^* k),$$

où $\operatorname{tr} k$ [resp. $\operatorname{tr}(i^* k)$] est une fonction sur $P_n(\mathbf{K})$, (resp. H), et est relative à la métrique g (resp. $i^* g$).

On a, en p, grâce à 3.6.1, la relation

$$(3.6.2.2)\qquad i^*(\overline{\Delta}_n k) + i^* \operatorname{tr}_N(\nabla\nabla k) = \overline{\Delta}_{n-1}(i^* k)$$

avec, pour $1 \leq i, j \leq q(n-1)$,

$$i^* \operatorname{tr}_N (\nabla\nabla k)_{ij} = \Sigma_{a=q(n-1)+1}^{a=qn} \nabla_a \nabla_a k_{ij}$$

on voit, sur la relation (3.6.2.2) que $i^* \operatorname{tr}_N(\nabla\nabla k)$ est une forme bilinéaire sur $T_p(H)$, indépendante de la base de N choisie.

On introduit Δ et K (au lieu de $\overline{\Delta}$) dans (3.6.2.2) :

$$(3.6.2.3)\qquad \begin{aligned} & i^*(\Delta_n k) - i^*(K_n k) + i^* \operatorname{tr}_N(\nabla\nabla k) \\ &\quad = \Delta_{n-1}(i^* k) - K_{n-1}(i^* k). \end{aligned}$$

D'après (3.2.4.2), on a pour $K_n k$ et $K_{n-1}(i^* k)$:

$$K_n k = 2(n+3) qk - 2 \operatorname{tr} kg - 6 q P_n(k),$$

$$(3.6.2.4)\quad i^*(K_n k) = 2(n+3) qi^* k - 2 \operatorname{tr} ki^* g - 2 qi^* P_n(k),$$

$$(3.6.2.5)\quad K_{n-1}(i^* k) = 2(n+2) qi^* k - 2 \operatorname{tr} i^* ki^* g - 2 q P_{n-1}(i^* k).$$

On prend la trace dans la relation (3.6.2.3) relativement à la métrique $i^* g$ de H, et on intègre cette égalité sur H (avec la mesure riemannienne).

En tenant compte de (3.6.2.1), il reste :

$$\int_H \operatorname{tr}(i^* \operatorname{tr}_N \nabla\nabla k) + \operatorname{tr}[K_{n-1}(i^* k) - i^*(K_n k)] = 0.$$

D'après (3.6.2.4), (3.6.2.5), (3.6.2.1) et de ce que

$$i^* P_n(k) = P_{n-1}(i^* k),$$

on a

$$(3.6.2.6) \qquad \int_H \{ \operatorname{tr}(i^* \operatorname{tr}_N \nabla\nabla k) + 2q(n-1) \operatorname{tr} k \} = 0.$$

En commutant ∇ et contraction, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(3.6.2.7) \quad \Sigma_{q(n-1)<a\leq qn} \nabla_a \nabla_a \operatorname{tr} k &= \Sigma_{1\leq i\leq qn, q(n-1)<a\leq qn} \nabla_a \nabla_a k_{ii} \\ &= \operatorname{tr}(i^* \operatorname{tr}_N \nabla\nabla k) + \Sigma_{q(n-1)<i\leq qn, q(n-1)<a\leq qn} \nabla_a \nabla_a k_{ii}.\end{aligned}$$

On a aussi, à cause de 3.6.1, en tout point de H :

$$(3.6.2.8) \qquad \Delta_n \operatorname{tr} k = \Delta_{n-1} \operatorname{tr} k\,|_H - \Sigma_{q(n-1)<a\leq qn} \nabla_a \nabla_a \operatorname{tr} k.$$

D'après (3.6.2.7) et (3.6.2.8) et puisque $\int_H \Delta_{n-1} \operatorname{tr} k\,|_H = 0$ comme intégrale de toute divergence, on a, en portant dans (2.6.2.6) :

$$(3.6.2.9) \quad \int_H \{ \Delta_n \operatorname{tr} k + \Sigma_{q(n-1)<a, i\leq qn} \nabla_a \nabla_a k_{ii} - 2q(n-1) \operatorname{tr} k \} = 0.$$

3.6.3. *Calcul de* $A = \Sigma_{q(n-1)<a,b\leq qn} \nabla_a \nabla_a k_{bb}$. — On utilise pour cela l'hypothèse $\delta k = 0$; ceci est équivalent à $\nabla \delta k$ antisymétrique (la partie symétrique de $\nabla \delta k$ n'est autre que $\delta^* \delta k$ et, si $\delta^* \delta k = 0$, alors $\langle \delta^* \delta k, k \rangle = \|\delta k\|^2 = 0$).

Pour chaque vecteur de base X_a :

$$\nabla \delta k(X_a, X_a) = \nabla_a \delta k_a = 0 = \Sigma_{1\leq b\leq qn} \nabla_a \nabla_b k_{ba},$$

on pose

$$B = \Sigma_{q(n-1)<a,b\leq qn} \nabla_a \nabla_b k_{ab} = -\Sigma_{q(n-1)<a\leq qn, 1\leq b\leq q(n-1)} \nabla_a \nabla_b k_{ab}.$$

On commute les dérivées $\nabla_a \nabla_b$; d'après la commutation de Ricci (3.2.2.1),

$$B = -\Sigma_{q(n-1)<a\leq qn, 1\leq b\leq q(n-1)} \nabla_b \nabla_a k_{ab} + q(n-1) \operatorname{tr} k - qn \operatorname{tr}(i^* k).$$

La sommation A s'écrit trivialement :

$$A = B - \Sigma_{q(n-1)<a,b\leq qn} (\nabla_a \nabla_b k_{ab} - \nabla_a \nabla_a k_{bb}) = B - D.$$

En posant

$$E = -\Sigma_{q(n-1)<a\leq qn, 1\leq b\leq q(n-1)} \nabla_b \nabla_a k_{ab},$$

on a donc :

(3.6.3.1) $\quad A = E + q(n-1)\operatorname{tr} k - qn \operatorname{tr}(i^* k) - D.$

En portant (3.6.2.9), et tenant compte de (3.6.2.1), on a le résultat suivant :

3.6.4. $$\int_H \{ \Delta_n \operatorname{tr} k - q(n-1)\operatorname{tr} k + E - D \} = 0.$$

3.6.5. *Sous-lemme :* $\int_H E = 0.$ — Considérons pour cela la forme linéaire φ sur $T_p(H)$, définie par

$$\varphi(Y) = \Sigma_{q(n-1)<a\leq qn}(\nabla_{X_a} k)(X_a, Y),$$

φ est bien définie, indépendamment de la base orthonormée de N, puisque

$$\varphi = i^*(\delta_n k) - \delta_{n-1}(i^* k), \quad \text{à cause de 3.6.1.}$$

On vérifie alors que $E = \delta\tilde{\varphi}$, $\tilde{\delta}$ désignant l'opérateur de divergence sur les 1-formes, dans H.

On a

$$-\tilde{\delta}\varphi = \Sigma_{1\leq b\leq q(n-1)} \tilde{\nabla}_b \varphi_b = \Sigma_{1\leq b\leq q(n-1)} (\tilde{\nabla}_{X_b} \varphi)(X_b),$$

où $\tilde{\nabla}$ est la dérivation covariante dans H.

On étend les champs X_b $[1 \leq b \leq q(n-1)]$ autour de p en des champs $\overline{X}_b$, en leur imposant sur H, d'être tangents à H et de rester une base orthonormée; on étend les champs X_a $[q(n-1) < a \leq qn]$ de N_p d'abord dans H parallèlement le long des géodésiques issues de p; soit $\overline{X}_a$ des extensions au voisinage de p.

On a alors :

$$(\tilde{\nabla}_{X_b} \varphi)(X_b) = \Sigma_{q(n-1)<a\leq qn} \nabla_b \nabla_a k_{ab}$$

puisque

$$\begin{aligned}(\nabla_{X_b} \nabla_{X_a} k)(X_a, X_b) = {} & \nabla_X [(\nabla_{\overline{X}_a} k)(\overline{X}_a, \overline{X}_b)] - (\nabla_{\nabla_{X_b}\overline{X}_a} k)(X_a, X_b) \\ & - (\nabla_{X_a} k)(\nabla_{X_b} \overline{X}_a, X_b) - (\nabla_{X_a} k)(X_a, \nabla_{X_b} \overline{X}_b),\end{aligned}$$

avec $\nabla_{X_b} \overline{X}_a = 0$, pour $q(n-1) < a \leq qn$, $1 \leq b \leq q(n-1)$.

D'où

$$\begin{aligned}\Sigma_{q(n-1)<a\leq qn} (\nabla_{X_b} \nabla_{X_n} k)(X_a, X_b) &= \nabla_{X_b}[\varphi(\overline{X}_b)] - \varphi(\nabla_{X_b} \overline{X}_b) \\ &= (\tilde{\nabla}_{X_b}\varphi)(X_b) \quad \text{d'après 3.6.1.}\end{aligned}$$

On a donc $E = \bar{\delta}\varphi$ et l'intégrale d'une divergence étant nulle, 3.6.5 en résulte.

3.6.6. *Calcul de D, pour $k \in F_{\mathbf{K}}$, avec*

$$D = \Sigma_{q(n-1)<a,b\leq qn} (\nabla_a \nabla_b k_{ab} - \nabla_a \nabla_a k_{bb}).$$

Pour $P_n(\mathbf{R})$ $(q = 1)$, ce terme est nul; pour $\mathbf{K} \neq \mathbf{R}$, c'est pour calculer D que l'on a besoin de l'hypothèse d'appartenance à $F_{\mathbf{K}}$.

Considérons $\exp_p N$: c'est une droite projective, donc une sphère S_q, de dimension q, à courbure 4, qui est totalement géodésique.

Soient $j : S_q \hookrightarrow P_p(\mathbf{K})$, $j^* k = h$ et $\overline{\nabla}$ la connexion induite.

Puisque S_q est totalement géodésique,

$$D = \Sigma_{q(n-1)<a,b\leq qn} (\overline{\nabla}_a \overline{\nabla}_b h_{ab} - \overline{\nabla}_a \overline{\nabla}_a h_{bb})$$

donc $D = \bar{\delta}\bar{\delta}h + \bar{\Delta}\,\overline{\mathrm{tr}}\,h$ (la barre indique une opération dans S_q), or $k \in F_{\mathbf{K}}$ signifie que h est une dérivée de Lie de la métrique $j^* g$ sur S_q, donc, d'après (3.2.2.5), on a

$$D = 4(q-1)\,\overline{\mathrm{tr}}\,h$$

et en revenant à k :

$$D = 4(q-1)(\mathrm{tr}\,k - \mathrm{tr}\,i^* k). \tag{3.6.6.1}$$

Il reste finalement dans 3.6.4, d'après 3.6.5, (3.6.6.1), (3.6.2.1),

$$(\forall H \in \Sigma), \quad \int_H \{\Delta_n \mathrm{tr}\,k - (q(n+3)-4)\,\mathrm{tr}\,k\} = 0. \tag{3.6.6.2}$$

Donc d'après (3.6.6.2) et, grâce à l'injectivité de la transformation de Radon ([11], p. 170), rappelée en 3.5.6, on a

$$\Delta_n \mathrm{tr}\,k - (q(n+3)-4)\,\mathrm{tr}\,k = 0. \tag{3.6.6.3}$$

Mais (3.6.6.3) est de la forme $\Delta_n \mathrm{tr}\,k - \alpha\,\mathrm{tr}\,k = 0$, et $\rho = \alpha g$, avec $\alpha = q(n+3) - 4$ (3.2.3).

D'après [4], (p. 179), la première valeur propre du laplacien sur les fonctions, soit λ_1, est telle que

$$\lambda_1 \geq \frac{qn}{qn-1}\alpha > \alpha. \tag{3.6.6.4}$$

Il en résulte que $\mathrm{tr}\,k = 0$.

C. Q. F. D.

Remarque. — L'idée d'utiliser la trace et le laplacien dans la démonstration précédente, démonstration qui ne paraît pas heuristique, se trouve cependant dans l'analyse du cas le plus simple, celui de $P_2(\mathbf{R})$ (*voir* [15]); les difficultés supplémentaires sont surtout techniques.

3.7. **Lemme local.** — *Sur* $P_n(\mathbf{K})$, $\mathbf{K}=\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ *et* $P_2(\mathbf{Pa})$ *si on pose* $h = Pk$ (définition 3.2.4), *pour* $k \in F_{\mathbf{K}} \cap \operatorname{Ker} \delta$, *on a* $\bar{\Delta} h = (6q-8)h$ *ou encore* $\Delta h = [(2n+6)q-8]h$.

3.7.1. — On commence par démontrer 3.7 pour $P_2(\mathbf{R})$; le résultat est en effet utilisé dans la démonstration pour $P_n(\mathbf{K})$, et d'autre part l'idée de la méthode y apparaît. Soit $k \in F_{\mathbf{R}} = F$ et soit $\delta k = 0$. Soit une base orthonormée (X_1, X_2) de $T_p(P_2(\mathbf{R}))$.

Comme au 3.6.3, on écrit :

$$(E_1) \qquad \nabla \delta k (X_1, X_1) = 0 = \nabla_1 \nabla_1 k_{11} + \nabla_1 \nabla_2 k_{21},$$

$$(E_2) \qquad \nabla \delta k (X_2, X_2) = 0 = \nabla_2 \nabla_1 k_{12} + \nabla_2 \nabla_2 k_{22}.$$

Puisque $\operatorname{tr} k = 0$ (lemme 3.6), on a

$$(3.7.1.1) \qquad \nabla_1 \nabla_1 \operatorname{tr} k = \nabla_1 \nabla_1 k_{11} + \nabla_1 \nabla_1 k_{22} = 0.$$

En formant $(E_2) - (E_1)$, et utilisant (3.7.1.1) :

$$\bar{\Delta} k_{22} + \nabla_1 \nabla_2 k_{21} - \nabla_2 \nabla_1 k_{12} = 0.$$

Étant en courbure constante 1, par commutation de Ricci (3.2.2.2), on a

$$\bar{\Delta} k_{22} + k_{22} - k_{11} = \bar{\Delta} k_{22} + 2 k_{22} = 0,$$

donc, $\forall X$, $(\bar{\Delta} k + 2k)(X, X) = 0$, et parce que $\bar{\Delta} k + 2k$ est symétrique : $\bar{\Delta} k + 2k = 0$ (condition cherchée), d'où les valeurs propres de $\bar{\Delta}$ étant positives : $k = 0$.

Donc, puisque $F = (F \cap \operatorname{Ker} \delta) \oplus L$, on a le théorème 3.1, pour $P_2(\mathbf{R})$.

$$(3.7.1.2) \qquad \textit{Pour } P_2(\mathbf{R}), \quad F = L.$$

Remarque. — En fait sur une surface compacte quelconque, les deux conditions $\operatorname{tr} k = 0$ et $\delta k = 0$ entraînent $k = 0$, d'après [3] (p. 388).

3.7.2. *Démonstration du lemme* 3.7. — Soient $x \in T_p(P_n(\mathbf{K}))$, et la décomposition $T_p(P_n(\mathbf{K})) = T_p(P_{n-1}(\mathbf{K})) \oplus \mathbf{K}x$. Soient $(X_1, \ldots, X_{q(n-1)})$ une base orthonormée de $T_p(P_{n-1}(\mathbf{K}))$, et $(X_{q(n-1)+1}, \ldots, X_{qn})$ une base orthonormée de $\mathbf{K}x$.

On écrit encore que $\nabla \delta k$ est antisymétrique :

$$(E_1) \qquad (\nabla \delta k)(X_1 X_1) = 0 = \textstyle\sum_{1 \leq a \leq qn} \nabla_1 \nabla_a k_{a1},$$

$$(E_{q(n-1)}) \quad (\nabla \delta k)(X_{q(n-1)}, X_{q(n-1)}) = \textstyle\sum_{1 \leq a \leq qn} \nabla_{q(n-1)} \nabla_a k_{a, q(n-1)},$$

$$(E_{q(n-1)+1}) \quad (\nabla \delta k)(X_{q(n-1)+1}, X_{q(n-1)+1}) = \textstyle\sum_{1 \leq a \leq qn} \nabla_{q(n-1)+1} \nabla_a k_{a, q(n-1)+1},$$

$$(E_{qn}) \qquad (\nabla \delta k)(X_{qn}, X_{qn}) = \textstyle\sum_{1 \leq a \leq qn} \nabla_{qn} \nabla_a k_{a, qn}.$$

Puisque $\operatorname{tr} k = 0$ (lemme 3.6),

(3.7.2.1) $\sum_{q(n-1)<a\leq qn} \nabla_a \nabla_a \operatorname{tr} k = 0 = \sum_{q(n-1)<a\leq qn, 1\leq b\leq qn} \nabla_a \nabla_a k_{bb}$.

On forme $(E_1) + \ldots + (E_{q(n-1)}) - ((E_{q(n-1)+1}) + \ldots + (E_{qn}))$; en tenant compte de (3.7.2.1), et en ajoutant et retranchant l'expression

$$\sum_{1\leq a\neq b\leq q(n-1)} \nabla_a \nabla_a k_{bb},$$

on obtient

(3.7.2.2) $$\begin{aligned} &\sum_{1\leq a\leq qn, 1\leq b\leq q(n-1)} \nabla_a \nabla_a k_{bb} \\ &+ \sum_{q(n-1)<a,b\leq qn} (\nabla_a \nabla_a k_{bb} - \nabla_a \nabla_b k_{ab}) \\ &+ \sum_{1\leq a,b\leq q(n-1)} (\nabla_a \nabla_b k_{ab} - \nabla_a \nabla_a k_{bb}) \\ &+ \sum_{1\leq a\leq q(n-1), q(n-1)\leq b\leq qn} (\nabla_a \nabla_b k_{ab} - \nabla_b \nabla_a k_{ab}) = 0. \end{aligned}$$

On calcule les termes de cette relation.

Puisque $\operatorname{tr} k = 0$:

$$\Delta \operatorname{tr} k = 0 = -\sum_{1\leq a\leq qn, 1\leq b\leq qn} \nabla_a \nabla_a k_{bb},$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq a\leq qn, 1\leq b\leq q(n-1)} \nabla_a \nabla_a k_{bb} &= -\sum_{1\leq a\leq qn, q(n-1)<b\leq qn} \nabla_a \nabla_a k_{bb} \\ &= \sum_{q(n-1)<b\leq qn} \overline{\Delta}\, k_{bb}. \end{aligned}$$

(3.7.2.3) Chaque terme des trois autres sommations se calcule bien pour la raison suivante : soient X_a et X_b, où $1 \leq a \neq b \leq qn$, deux vecteurs de la base choisie, P le plan engendré par X_a et X_b (sur $\mathbf{R}$), et $S_{a,b} = S = \exp_p P$.

Si X_a et X_b sont $\mathbf{K}$-dépendants, S est une 2-sphère totalement géodésique (en abrégé T. G.) à courbure 4, et en restriction à S, k est une dérivée de Lie de la métrique induite (en effet, c'est vrai sur $\exp_p \mathbf{K} X_a$, par hypothèse, et S y est T. G.). Si X_a et X_b sont $\mathbf{K}$-indépendants, S est un projectif $P_2(\mathbf{R})$, T. G., à courbure 1, donc k est encore en restriction à S une dérivée de Lie comme conséquence de (3.7.1.1).

Pour le calcul de la deuxième et la troisième sommation dans (3.7.2.2), on se sert donc de (3.2.2.5) en calculant chaque terme

$$(\nabla_a \nabla_a k_{bb} - \nabla_a \nabla_b k_{ab}) + (\nabla_b \nabla_b k_{aa} - \nabla_b \nabla_a k_{ba})$$

avec la connexion induite sur $S = S_{ab}$.

On a ainsi :

$$\sum_{q(n-1)<a,b\leq qn} (\nabla_a \nabla_a k_{bb} - \nabla_a \nabla_b k_{ab}) = -4(q-1) \sum_{q(n-1)<b\leq qn} k_{bb}$$

et après calcul :

$$\begin{aligned} &\sum_{1\leq a,b\leq q(n-1)} (\nabla_a \nabla_b k_{ab} - \nabla_a \nabla_a k_{bb}) \\ &\quad = [(n+2)q-4] \sum_{1\leq b\leq q(n-1)} k_{bb} = -[(n+2)q-4] \sum_{q(n-1)<b\leq qn} k_{bb}. \end{aligned}$$

Pour

$$A = \Sigma_{1 \leq a \leq q(n-1),\, q(n-1) < b \leq qn} (\nabla_a \nabla_b k_{ab} - \nabla_b \nabla_a k_{ab})$$

d'après Ricci, (3.2.2.2), et $R_{abab} = 1$,

$$A = \Sigma_{1 \leq a \leq q(n-1),\, q(n-1) < b \leq qn} (k_{bb} - k_{aa}) = qn \, \Sigma_{q(n-1) < b \leq qn} k_{bb}$$

$$(\text{car } \operatorname{tr} k = 0).$$

En récapitulant dans (3.7.2.2) :

(3.7.2.4) $\Sigma_{q(n-1) < b \leq qn} \bar{\Delta} k_{bb} + (8 - 6q) \Sigma_{q(n-1) < b \leq qn} k_{bb} = 0,$

d'où on a, $\forall \, x \in TP_n(\mathbf{K})$,

$$P \bar{\Delta} k(x, x) = (6q - 8) Pk(x, x),$$

k étant symétrique : $P \bar{\Delta} k = (6q - 8) Pk$, et d'après (3.2.4.4), $\bar{\Delta} Pk = (6q - 8) Pk$, donc,

(3.7.2.5) $\bar{\Delta} h = (6q - 8) h, \quad \text{avec} \quad h = Pk.$

On introduit $\Delta = \bar{\Delta} + K$; on a vu (3.2.4.2) que

$$Kh = 2nqh - 2 \operatorname{tr} hg,$$

et puisque $\operatorname{tr} h = 0 = \operatorname{tr} k$, (3.7.2.5) s'écrit :

(3.7.2.6) $\Delta h = [(2n + 6) q - 8] h.$

C. Q. F. D.

3.7.3. — On a, à ce stade, le théorème 3.1 pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

Théorème. — *Pour $P_n(\mathbf{R})$, on a $F \cap \operatorname{Ker} \delta = \{0\}$, c'est-à-dire $F = L$.*

Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, on a $P = \mathrm{Id}$, $F_{\mathbf{R}} = F$, donc dans (3.7.2.6),

(3.7.3.1) $\bar{\Delta} k + 2k = 0,$

et puisque $\bar{\Delta}$ est un opérateur positif, $k = 0$.

C. Q. F. D.

3.7.4. Corollaire. — *Appelons F' le sous-espace de* Sym 2, *sur la sphère S_n munie de sa structure riemannienne canonique, des tenseurs à intégrales constantes sur les grands cercles, IP celui des tenseurs impairs par l'application antipodale, et L_p celui des dérivées de Lie de g qui sont paires. On a la somme directe orthogonale :*

$$F' = \mathbf{R}\, g \oplus L_p \oplus IP.$$

Démonstration. — Soit P l'espace des tenseurs pairs, on a d'abord

$$F' = (F' \cap P) \oplus IP.$$

Il revient à vérifier que sur le projectif $P_n(\mathbf{R})$, avec les mêmes notations,

$$F' = \mathbf{R}\, g \oplus L.$$

Soit la forme linéaire $\varphi : F' \to \mathbf{R}$ telle que

$$\varphi(k) = \hat{k}(\gamma) = \text{constante en } \gamma \quad \text{(notation de 3.5.3)},$$

on a $\varphi(g) = \pi$ [pour $P_n(\mathbf{R})$], d'où la somme directe :

$$F' = \operatorname{Ker} \varphi \oplus \mathbf{R}\, g = F \oplus \mathbf{R}\, g = L \oplus \mathbf{R}\, g \quad (3.7.3)$$

et cette somme est orthogonale.

C. Q. F. D.

3.7.5. *Suite de la démonstration du théorème* 3.1 *pour* $\mathbf{K} \neq \mathbf{R}$. — On veut prouver que $F_{\mathbf{K}} \cap \operatorname{Ker} \delta = \{0\}$; d'après le lemme 3.7, si $h = Pk$ est différent de 0, alors $(2n+6)q - 8$ est une valeur propre de Δ sur Sym 2; cependant cette seule information semble insuffisante. Une idée éventuelle serait d'utiliser la propriété suivante : Sur une variété riemannienne (M, g) compacte, connexe, à courbure positive ou nulle, donc par exemple un $P_n(\mathbf{K})$, si on appelle λ_1 (resp. μ_1) la première valeur propre, non nulle, de Δ dans Sym 2 [resp. de l'opérateur Δ^0 sur $C^\infty(M)$], on a

(3.7.5.1) $$\lambda_1 \leq \mu_1.$$

En effet, il est classique (par exemple [4], p. 186) que

$$\mu_1 = \inf_{(\operatorname{Ker} \Delta^0)^\perp} \langle \Delta^0 f, f \rangle / \| f \|^2$$

et que

$$\lambda_1 = \inf_{(\operatorname{Ker} \Delta)^\perp} \langle \Delta k, k \rangle / \| k \|^2,$$

or $f \in (\operatorname{Ker} \Delta^0)^\perp$ signifie $\langle f, 1 \rangle = \int_M f = 0$, et en courbure positive, $\operatorname{Ker} \Delta = \mathbf{R}\, g$ (*voir* [3], p. 388 et 358).

Si on prend $k = fg$, avec $\langle f, 1 \rangle = 0$, on a $\langle fg, g \rangle = 0$, donc $fg \in (\operatorname{Ker} \Delta)^\perp$; puisque

$$\frac{\langle \Delta(fg), g \rangle}{\| fg \|^2} = \frac{\langle \Delta^0 f, f \rangle}{\| f \|^2},$$

l'inégalité en résulte.

(3.7.5.2) Pour $P_n(\mathbf{C})$, il est connu que

$$\mu_1 = 4(n+1) = (2n+6).2 - 8$$

est la première valeur propre de Δ^0, et on n'a pas contradiction avec (3.7.5.1), mais même s'il était vrai que l'inégalité soit stricte dans (3.7.5.1), elle serait encore inopérante, car $(2n+6)q-8$, qui est dans le spectre de Δ, n'est pas forcément égal à λ_1.

3.7.6. — On doit donc encore exploiter l'hypothèse $k \in F$, et en particulier le fait que F est stable par Δ.

On pose

$$F_{\mathbf{K}} \cap \operatorname{Ker} \delta = F_{\mathbf{K}} \cap \operatorname{Ker} \delta \cap \operatorname{tr}^{-1}(0) = A$$

et

$$F \cap \operatorname{Ker} \delta \cap \operatorname{tr}^{-1}(0) = B.$$

On note $\Delta_B : B \to B$ la restriction de Δ à B qui est un isomorphisme (en conséquence de 3.4.3 et 3.5.8).

LEMME 3.7.6. — *Si $P(A) \neq \{0\}$, alors $(2n+6)q-8$ appartient au spectre de Δ_B.*

Soit $k \in A$ tel que $h = Pk \neq 0$; alors $(2n+6)q-8$ et h sont valeur propre et tenseur propre de Δ, d'après le lemme 3.7. On sait que, Δ étant un opérateur elliptique autoadjoint, il existe une base hilbertienne de vecteurs propres pour l'espace $H^0(S^2 T^*)$, complété de Sym 2 pour $\langle\ ,\ \rangle$ (*voir* [17], p. 182).

Il n'est pas évident que la décomposition de Fourier de $k \in A \subset B$ se fasse sur les tenseurs propres de Δ qui sont dans B, puisque B n'est pas un sous-espace complet; en fait, B est fermé dans Sym 2, *muni de la topologie* C^1, comme on le vérifie facilement; à cause de cela, on se place dans l'espace de Sobolev $H^{2r}(S^2 T^*)$ avec $2r > (qn/2)+1$, et on suit de près PALAIS ([17], p. 182).

On sait que $\mathrm{Sym}\,2 = \Delta(\mathrm{Sym}\,2) \oplus \mathbf{R}\,g$, pour $\langle\ ,\ \rangle$ ([3], p. 389). Soit p la projection de Sym 2 sur $\mathbf{R}\,g$, d'où $p(k) = \operatorname{tr} kg$.

On pose $\Delta_1 = \Delta + p$. Il est simple que Δ_1 est autoadjoint pour $\langle\ ,\ \rangle$, elliptique de degré 2, et que $\operatorname{Ker} \Delta_1 = 0$.

D'après le théorème 14, page 182, de [17] si on appelle $\{k_n\}$ une base orthonormée pour $\langle\ ,\ \rangle$ de vecteurs propres de Δ_1, la formule

$$\text{(3.7.6.1)} \qquad \langle k, h \rangle_{2r} = \textstyle\sum_n \lambda_n^{2r} \langle k, k_n \rangle \langle h, k_n \rangle$$

fournit un produit scalaire admissible pour $H^{2r}(S^2 T^*)$.

D'après le théorème 12, p. 180 de [17], Δ_1 est bijectif et, d'après le corollaire 2 de [17] (p. 169), Δ_1^{-1} s'étend en un opérateur compact de $H^{2r}(S^2 T^*)$, soit $\widetilde{\Delta_1^{-1}}$.

D'autre part, pour $k, h \in \mathrm{Sym}\,2 \cap H^{2r}(S^2 T^*)$, on vérifie sur (3.7.6.1) que

$$\langle \Delta_1^{-1} h, k \rangle_{2r} = \langle h, \Delta_1^{-1} k \rangle_{2r}.$$

Puisque Sym 2 est dense dans $H^{2r}(S^2 T^*)$, Δ_1^{-1} est autoadjoint pour $\langle\ ,\ \rangle_{2r}$. Considérons le complété pour $\langle\ ,\ \rangle_{2r}$ de B dans $H^{2r}(S^2 T^*)$, soit B^{2r}. Puisque $\Delta_1^{-1}(B) = B$ et que $\widetilde{\Delta_1^{-1}}$ est continue, on a

$$\widetilde{\Delta_1^{-1}}(B^{2r}) \subset B^{2r}.$$

Il en résulte que $\widetilde{\Delta_1^{-1}}\,|_{B^{2r}}$ est un opérateur compact, autoadjoint dans l'espace de Hilbert B^{2r} et, d'après le théorème spectral, il existe dans B^{2r} une base hilbertienne pour $\langle\ ,\ \rangle_{2r}$ de tenseurs propres de $\widetilde{\Delta_1^{-1}}\,|_{B^{2r}}$; un tel tenseur propre l appartient à $\mathrm{B}^{2r} \cap \mathrm{Sym}\,2$ par régularité ([17], p. 182); donc on a

$$l = \lim_{\mathrm{H}^{2r}} l_n, \qquad \text{avec} \quad l_n \in B,$$

et, d'après le théorème de Sobolev ([17], p. 169),

$$l = \lim_{C^1} l_n;$$

comme B est fermé dans Sym 2 muni de la topologie C^1, on a $l \in B$.

Revenons à $k \in A$ et $h = Pk \neq 0$. On décompose k en série de Fourier dans B pour $\langle\ ,\ \rangle_{2r}$ sur une base hilbertienne de Δ_B (puisque $\Delta_B = \Delta_{1\,|\,B}$ et que des tenseurs propres de $\Delta_{1\,|\,B}^{-1}$ sont des tenseurs propres de $\Delta_{1\,|\,B}$).

$k = k_1 + \ldots + k_p + \ldots$ dans $\langle\ ,\ \rangle_{2r}$ avec

$$(3.7.6.2) \qquad \Delta k_i = \lambda_i\, k_i \qquad \text{et} \qquad k_i \in B.$$

D'après le théorème 7 de [17] (p. 152), l'opérateur P s'étend en un opérateur continu de $H^{2r}(S^2 T^*)$.

On a donc

$$Pk = h = Pk_1 + \ldots + Pk_p + \ldots \quad \text{dans } \langle\ ,\ \rangle_{2r},$$

c'est-à-dire

$$Pk = h = h_1 + \ldots + h_p + \ldots$$

et

$$\Delta Pk_i = P\,\Delta k_i = P\,\lambda_i\, k_i = \lambda_i\, Pk_i,$$

c'est-à-dire

$$(3.7.6.3) \qquad \Delta h_i = \lambda_i\, h_i.$$

De plus, $\Delta k = \lambda_1\, k_1 + \ldots + \lambda_p\, k_p + \ldots$ dans $\langle\ ,\ \rangle_{2r}$, et par continuité de P :

$$(3.7.6.4) \qquad P\,\Delta k = \Delta Pk = \Delta h = \lambda_1\, h_1 + \ldots + \lambda_p\, h_p + \ldots$$

or d'après le lemme 3.7, pour $k \in A$:

$$\Delta h = [(2n+6)q-8]h$$

donc si $h \neq 0$, d'après (3.7.6.2), (3.7.6.3) et (3.7.6.4), $(2n+6)q-8$ est l'un des λ_i correspondant à un tenseur propre de Δ *qui est dans B.*

C. Q. F. D.

CHAPITRE 4

Fin de la démonstration du théorème 3.1

On établit ici une inégalité métrique vérifiée par les éléments de F dans une variété munie d'une m. g. t. f. (T), d'après l'idée de M. Berger d'utiliser l'inégalité suivante.

4.1. Intégration de l'inégalité de Wirtinger sur le fibré unitaire

Pour une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, de classe C^1, T-périodique vérifiant $\int_0^T f(t)\, dt = 0$, on a l'inégalité de Wirtinger, qui est conséquence rapide de la formule de Parseval :

$$\int_0^T \left(\frac{df}{dt}\right)^2 dt \geqq \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \int_0^T f^2\, dt. \tag{4.1.1.1}$$

Soit $G_t : U \to U$ le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de la variété M, munie d'une m. g. t. f. (T), soit g.

Pour $k \in F$, on a $\int_0^T k(G_t(x), G_t(x))\, dt = 0$ et, d'après (4.1.1.1) :

$$\forall x \in U, \quad \int_0^T [(\nabla_{G_t(x)} k)(G_t(x), G_t(x))]^2\, dt \geqq \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \int_0^T [k(G_t(x), G_t(x))]\, dt.$$

On intègre cette inégalité sur U par le raisonnement de [1] (p. 273) et, la mesure μ sur U étant invariante par G_t, on obtient

$$\int_U [\nabla_x k(x, x)]^2 \mu \geqq \frac{4\pi^2}{T^2} \int [k(x, x)]^2 \mu. \tag{4.1.1.2}$$

En décomposant les intégrales suivant la fibration de U sur M :

$$\int_M [[\nabla_x k(x, x)]^2 V_{g_m}] V_g \geqq \frac{4\pi^2}{T^2} \int_M \left[\int_{U_m} [k(x, x)]^2 V_{g_m}\right] V_g. \tag{4.1.1.3}$$

4.2. **Utilisation de l'inégalité** (4.1.1.3)

Cette utilisation oblige à savoir exprimer une intégrale du type $\int_{S_{n-1}} \varphi(X, \ldots, X)$, où φ est une forme d-linéaire, *à l'aide de scalaires liés à* φ [et pas seulement au polynôme $\tilde{\varphi}$ tel que $\tilde{\varphi}(X) = \varphi(X, \ldots, X)$] ceci, bien que théoriquement connu depuis H. WEYL, ne semble pas avoir été explicité.

PROPOSITION 4.2.1. — *Soit S_{n-1} la sphère unité canonique de $\mathbf{R}^n$, euclidien;* l'intégrale $\int_{S_{n-1}} \varphi(X, \ldots, X)$ *est égale à la somme des traces possibles sur les coefficients de* φ *(en égalant les indices deux à deux), et ceci à un coefficient près dépendant seulement de n et d =* degré *de* φ.

On précise : soit dans une base orthonormée :

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \sum a_{i_1 \ldots i_d} X_1^{i_1} \ldots X_d^{i_d} = \sum a_i X_1^{i_1} \ldots X_d^{i_d},$$

où i décrit l'ensemble $a(d, n)$ des applications de $\{1, \ldots, d\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$. Soit T l'ensemble des involutions sans point fixe de $\{1, \ldots, d\}$, alors :

$$(4.2.1.1) \qquad \int_{S_{n-1}} \varphi(X, \ldots, X) = c(n, d) \sum_{t \in T} \left(\sum_{i \in a(d,n)\ i \circ t = i} a_i\right),$$

avec

$$c(n, d) = \frac{\operatorname{Vol}(S_{n-1})}{n(n+2) \ldots (n+d-2)}.$$

Démonstration. — Soit l'application $I : \bigoplus^d \mathbf{R}^{n*} \to \mathbf{R}$ définie par

$$I(\varphi) = \int_{S_{n-1}} \varphi(X, \ldots, X).$$

Soit $\sigma \in O(n)$, et soit $\sigma\varphi$ définie par

$$(\sigma\varphi)(X_1, \ldots, X_d) = \varphi(\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_d));$$

la mesure canonique de S_{n-1} étant invariante par σ, on a

$$I(\sigma\varphi) = I(\varphi) \qquad [\forall\, \sigma \in O(n)],$$

autrement dit, I est un invariant orthogonal, et puisque I est linéaire, c'est une forme linéaire par rapport aux traces [pour cela, consulter H. WEYL (*The classical groups*, p. 53), DIEUDONNÉ [7] (p. 40), ainsi que BERGER-GAUDUCHON-MAZET [4] (p. 76 et 83), pour une démonstration synthétique et des applications géométriques].

D'autre part, si Π_d est le groupe symétrique de d éléments, pour $\sigma \in \Pi_d$ et $\sigma \times \varphi$, définie par

$$(\sigma \times \varphi)(X_1, \ldots, X_d) = \varphi(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(d)}),$$

on a bien

$$I(\sigma \times \varphi) = I(\varphi);$$

d'où I, étant un invariant du groupe symétrique Π_d, la forme linéaire est symétrique par rapport aux traces, et donc I est la somme de ces traces à un coefficient près, soit $c(n, d)$.

Pour calculer $c(n, d)$, on spécialise une forme; posons $d = 2p$, le cas d impair donnant toujours une intégrale nulle, et

$$\varphi(X^1, X^2, \ldots, X^{2p+1}, X^{2p}) = \langle X^1, X^2 \rangle \ldots \langle X^{2p-1}, X^{2p} \rangle.$$

En effectuant l'identification dans (4.2.1.1), il vient par un calcul d'analyse combinatoire :

$$\int_{S_{n-1}} \varphi(X, \ldots, X) = \text{Vol}(S_{n-1}) = c(n, d).(n(n+2)\ldots(n+d-2)).$$

C. Q. F. D.

Remarque. — On peut faire aussi une vérification élémentaire de (4.2.1.1) en partant de la formule donnant

$$\int_{S_{n-1}} (X^1)^{\alpha_1} \ldots (X^n)^{\alpha_n} \qquad (\alpha_i \geqq 0 \text{ et } \alpha_1 + \ldots + \alpha_i = d),$$

si celle-ci est supposée obtenue par le calcul intégral, comme dans H. Weyl ([18], p. 465-466).

4.2.2. *Expression de* $\int_{U_m} [(\nabla_x k)(x, x)]^2 \, V_{g_m}$. — On calcule dans une base orthonormée du tangent en m d'une variété riemannienne quelconque; on applique (4.2.1.1) avec $\varphi = (\nabla k \oplus \nabla k)_m$.

Le coefficient $c(n, d) = c(n, 6)$ vaut $\text{Vol}(S_{n-1})/n(n+2)(n+4)$.

Il y a 5×3 opérations de traces sur les coefficients $\nabla_i k_{uv} \nabla_p k_{qr}$.

On note $(T, S)_m$ et $|T|_m^2 = (T, T)_m$, le produit scalaire local en m pour deux tenseurs de même variance, et on emploie la convention de sommation :

$$\left.\begin{array}{lll} i = u, & v = p, & q = r \\ i = v, & u = p, & q = r \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \nabla_i k_{iv} \nabla_p k_{vp} = -(\delta k, d \operatorname{tr} k)_m, \\ \text{idem, puisque } k \text{ est symétrique,} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lll} i = u, & v = q, & p = r \\ i = v, & u = q, & p = r \\ i = u, & v = r, & p = q \\ i = v, & u = r, & p = q \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \nabla_i k_{iv} \nabla_p k_{vp} = (-\delta k, -\delta k)_m = |\delta k|_m^2, \\ \text{idem,} \\ \text{idem,} \\ \text{idem,} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
i = p, & u = v, & q = r & \nabla_i k_{uu} \nabla_i k_{qq} = |\, d \operatorname{tr} k \,|^2_m, \\
i = p, & u = q, & v = r \Big\} & \nabla_i k_{uv} \nabla_i k_{uv} = |\, \nabla k \,|^2_m, \\
i = p, & u = r, & v = q & \text{idm}, \\
i = q, & u = p, & v = r & \nabla_i k_{uv} \nabla^u k^{iv}, \\
i = r, & u = p, & v = q & \text{idem}, \\
i = q, & u = r, & v = p & \text{idem}, \\
i = r, & u = q, & v = p & \text{idem}, \\
i = q, & u = v, & p = r & \nabla_i k_{uu} \nabla_p k_{ip} = -(\delta k, d \operatorname{tr} k)_m, \\
i = r, & u = v, & p = q & \text{idem}.
\end{array}$$

Finalement :

(4.2.2.1)
$$\int_{U_m} [(\nabla_x k)(x, x)]^2 V_{g_m} = V_{n-1}/n(n+2)(n+4)\,[-4(\delta k, d \operatorname{tr} k)_m + 4\,|\,\delta k\,|^2_m + |\,d \operatorname{tr} k\,|^2_m + 2\,|\,\nabla k\,|^2_m + 4\,\nabla_i k_{uv} \nabla^u k^{iv}].$$

En intégrant sur M, on a donc l'égalité correspondant à (4.2.2.1) avec les produits scalaires globaux; on a rapidement

(4.2.2.2)
$$\int_M \nabla_i k_{ux} \nabla^u k^{iv} V_g = \|\,\delta k\,\|^2 - \frac{1}{2}\langle Kk, k\rangle.$$

Vérification : on pose $T_{iuv} = \nabla_u k_{iv}$, et on calcule

$$\langle \nabla k, T\rangle = \langle k, \delta T\rangle = -\int_M k^{uv} \nabla^i T_{iuv} = -\int_M k^{uv} \nabla^i \nabla_u k_{iv},$$

par commutation de Ricci des dérivées, le terme $\langle k, \nabla \delta k\rangle = \|\,\delta k\,\|^2$ apparaît, et le terme en la courbure s'exprime à l'aide de K [définition (3.2.1.2)].

Il s'ensuit, pour une variété riemannienne M et k dans Sym 2, l'identité

(4.2.2.3)
$$\int_U [\nabla_x k(x, x)]^2 \mu = V_{n-1}/n(n+2)(n+4) \times [-4\langle \delta k, d \operatorname{tr} k\rangle + 8\,\|\,\delta k\,\|^2 + \|\,d \operatorname{tr} k\,\|^2 + 2\,\|\,\nabla k\,\|^2 - 2\langle K k, k\rangle].$$

(4.2.2.4) L'expression de $\int_{U_m} k^2(x, x)\, V_{g_m} = \int_{S_{n-1}} k_{ij} k_{uv} x^i x^j x^u x^v$ présente trois contractions, et on a immédiatement :

(4.2.2.5)
$$\int_0 k^2(x, x).\mu = V_{n-1}/n(n+2)\,\{\, 2\,\|\,k\,\|^2 + \|\operatorname{tr} k\,\|^2 \,\}.$$

4.2.3. — On peut maintenant expliciter l'inégalité (4.2.2.3) grâce à (4.2.2.4) et (4.2.2.5).

LEMME. — *Pour une variété M, de* dim n, *munie d'une m. g. t. f.* (T), *et pour k dans F, on a l'inégalité*

$$(4.2.3.1)\quad 2\,\|\nabla k\|^2 + \|d\,\mathrm{tr}\,k\|^2 + 8\,\|\delta k\|^2 - 4\langle \delta k, d\,\mathrm{tr}\,k\rangle$$
$$- 2\langle Kk, k\rangle \geqq \frac{4\pi^2}{T^2}(n+4)\,(2\,\|k\|^2 + \|\mathrm{tr}\,k\|^2.$$

On revient sur $P_n(\mathbf{K})$; si $k \in B = F \cap \mathrm{Ker}\,\delta \cap \mathrm{tr}^{-1}(0)$, puisque

$$\|\nabla k\|^2 = \langle \bar{\Delta} k, k\rangle = \langle \Delta k, k\rangle - \langle K, k\rangle,$$

il reste :

$$(4.2.3.2)\qquad \langle \Delta k, k\rangle \geqq 4\,(qn+4)\,\|k\|^2 + 2\langle Kk, k\rangle.$$

En appliquant (4.2.3.2) à un tenseur propre quelconque k de Δ, différent de 0, qui est dans B, on a

$$(4.2.3.3)\qquad \begin{cases} \Delta k = \lambda\, k, \qquad \langle k, \Delta k\rangle = \lambda\,\|k\|^2, \\ \lambda\,\|k\|^2 \geqq 4\,(qn+4)\,\|k\|^2 + 2\langle Kk, k\rangle. \end{cases}$$

De plus, la courbure sectionnelle étant positive, on a $\langle Kk, k\rangle > 0$, si $k \neq 0$ et $\mathrm{tr}\,k = 0$ ([3], p. 388, prop. 6.1).

(4.2.3.4) $4\,(qn+4)$ est un minorant strict du spectre de Δ_B (privé de 0).

4.2.4. LEMME. — $P(A) = \{0\}$, *c'est-à-dire pour* $k \in E_{\mathbf{K}} \cap \mathrm{Ker}\,\delta$, *on a* $P(k) = 0$.

D'après le lemme 3.7.6 et (4.2.3.4), si $P(A) \neq \{0\}$, on doit avoir

$$4\,(qn+4) < (2\,n+6)\,q - 8,$$

et ceci est faux pour $q = 2, 4, 8$ et pour $\forall\, n \geqq 2$.

C. Q. F. D.

4.3. **Fin de la démonstration du théorème 3.1**

On a montré que, pour $k \in F_{\mathbf{K}} \cap \mathrm{Ker}\,\delta = A$, on a $\mathrm{tr}\,k = 0$ (lemme 3.6) et $Pk = 0$ (lemme 4.2.4). On en déduit le lemme suivant :

LEMME 4.3.1. — *Pour* $k \in A$, *pour x unitaire dans* $T_p(P_n(\mathbf{K}))$ *et y unitaire, orthogonal à* $\mathbf{K}\,x$, *on a*

$$(\bar{\Delta} k + 8\,k)\,(x, x) = (\bar{\Delta} k + 8\,k)\,(y, y).$$

4.3.2. — Supposant (4.3.1) démontré, fixons x et prenons la trace sur $\mathbf{K}\,y$; on obtient

$$(\bar{\Delta}k + 8\,k)\,(x, x) = (\bar{\Delta}h + 8\,h)\,(y, y) = 0,$$

puisque $h = Pk = 0$; comme k est symétrique,

$$\bar{\Delta}k = 8\,k = 0,$$

et Δ étant un opérateur à valeurs propres positives :

$$k = 0.$$

Donc, d'après la décomposition de [3] (p. 382) : $F_{\mathbf{K}} = (F_{\mathbf{K}} \cap \operatorname{Ker} \delta) \oplus L$. D'où

$$F_{\mathbf{K}} = L,$$

ce qui prouve le théorème 3.1.

4.3.3. *Démonstration du lemme* 4.3.1. — Posons

$$\mathbf{K}\,x = \mathbf{R}\,x \oplus E_x,$$
$$\mathbf{K}\,y = \mathbf{R}\,y \oplus E_y.$$

et

$$T_p\,(P_n\,(\mathbf{K})) = \mathbf{K}\,x \oplus \mathbf{K}\,y \oplus E,$$

ces sommes devant être orthogonales.

Soit $X_1, \ldots, X_{qn}$ une base orthonormée telle que :

— $(X_1, \ldots, X_{q(n-2)})$ est une base de E;
— $(X_{q(n-2)+1}, \ldots, X_{q(n-1)-1})$ est une base de E_x;
— $X_{q(n-1)} = y$,
— $(X_{q(n-1)+1}, \ldots, X_{qn-1})$ est une base de E_y,
et $X_{qn} = x$.

On emploie à nouveau la méthode du lemme 3.7; l'équation (3.7.2.2) s'écrit :

(4.3.3.1) $$\Sigma_{q(n-1)<b\leq qn}\,\bar{\Delta}k_{bb} + A_1 + A_2 + A_3 = 0,$$

avec

$$A_1 = \Sigma_{q(n-1)<a,\,b\leq qn}\,(\nabla_a\,\nabla_a\,k_{bb} - \nabla_a\,\nabla_b\,k_{ab}),$$
$$A_2 = \Sigma_{1\leq a,\,b\leq q(n-1)}\,(\nabla_a\,\nabla_b\,k_{ab} - \nabla_b\,\nabla_a\,k_{bb}),$$
$$A_3 = \Sigma_{1\leq a\leq q(n-1),\,q(n-1)<b\leq qn}\,(\nabla_a\,\nabla_b\,k_{ab} - \nabla_b\,\nabla_a\,k_{ab}),$$

On calcule chaque terme :

$$\Sigma_{q(n-1)<b\leq qn}\,\bar{\Delta}k_{bb} = \Sigma_{X_b \in F_y}\,\bar{\Delta}k_{bb} + \bar{\Delta}k\,(x, x)$$

et puisque P et $\bar{\Delta}$ commutent et que $Pk = 0$, on a

$$\bar{\Delta} Pk(y, y) = P\bar{\Delta} k(y, y) = \frac{1}{q} \operatorname{tr}_{K_y} \bar{\Delta} k = \frac{1}{q}\left(\Sigma_{E_y} \bar{\Delta} k_{bb} + \bar{\Delta} k_{yy}\right) = 0,$$

$$(4.3.3.2) \qquad \Sigma_{q(n-1)<b\leq qn} \bar{\Delta} k_{bb} = \bar{\Delta}\, k(x, x) - \bar{\Delta} k(y, y).$$

Calcul de A_1. — Posons $\theta_{ab} = \nabla_a \nabla_a k_{bb} - \nabla_a \nabla_b k_{ab}$,

$$A_1 = \Sigma_{X_a, X_b \in E_y} \theta_{a,b} + \Sigma_{X_a = x, X_b \in E} (\theta_{ab} + \theta_{ba})$$

(on a écrit E_y au lieu de la base orthonormée choisie de E_y).

Mais $\exp_p E_y$ est une hypersphère totalement géodésique de $\exp_p \mathbf{K}\, y = S_q$, qui l'est aussi; il en résulte que k étant une dérivée de Lie, en restriction à S_q, l'est aussi en restriction à $\exp_p E_y$; en calculant avec la connexion induite (*voir* 3.6.6), il résulte de (3.2.2.5), et de $Pk = 0$, que

$$\Sigma_{X_a, X_b \in E_y} \theta_{a,b} = -4(q-2)\, \Sigma_{X_a \in E_y} k_{aa} = 4(q-2)\, k(y, y)$$

on a aussi, l'argument étant celui de (3.7.2.3), si l'on pose $\varphi_{ab} = \theta_{ab} + \theta_{ba}$,

$$\begin{aligned} \Sigma_{X_a = x, X_b \in E_y} \varphi_{ab} &= -(q-1)\, k(x, x) - \Sigma_{X_b \in E_y} k_{bb} \\ &= (q-1)\, k(x, x) + k(y, y), \\ A_1 &= [4(q-2) + 1]\, k(y, y)\, (q-1)\, k(x, x). \end{aligned}$$

Calcul de A_2 :

$$\begin{aligned} A_2 = {} & \Sigma_{X_a, X_b \in E} \theta_{ab} + \Sigma_{X_a, X_b \in E_x} \theta_{a,b} \\ & + \Sigma_{X_a \in E, X_b \in E_x} \varphi_{ab} + \Sigma_{X_a = y, X_b \in E} \varphi_{ab} + \Sigma_{X_a = y, X_b \in E_x} \varphi_{ab}. \end{aligned}$$

On a comme en (3.7.2.3) et puisque $Pk = 0$, successivement :

$$\begin{aligned} \Sigma_{X_a, X_b \in E} \theta_{ab} &= -((n+1)\, q - 4)\, \Sigma_{X_b \in E} k_{bb} = 0, \\ \Sigma_{X_a, X_b \in E_x} \theta_{ab} &= 4(q-2)\, k(x, x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{X_a \in E, X_b \in E_x} \varphi_{ab} = {} & -(q-1)\, \Sigma_{X_a \in E} k_{aa} \\ & - q(n-2)\, \Sigma_{X_b \in E_x} k_{bb} = q(n-2)\, k(x, x), \end{aligned}$$

$$\Sigma_{X_a = y, X_b \in E} \varphi_{ab} = -q(n-2)\, k_{yy} - \Sigma_{X_b \in E} k_{bb} = -q(n-2)\, k_{(yy)},$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{X_a = y, X_b \in E_x} \varphi_{ab} &= -(q-1)\, k_{(y, y)} - \Sigma_{X_b \in E_x} k_{bb} \\ &= -(q-1)\, k(y, y) + k(x, x); \end{aligned}$$

d'où

$$(-A_2) = (nq + 2q - 7)\, k(xx) - (nq - q - 1)\, k(yy).$$

Calcul de A_3. — Par commutation de Ricci, en courbure constante :

$$\nabla_a \nabla_b k_{ab} - \nabla_b \nabla_a k_{ab} = - R_{abab} (k_{aa} - k_{bb}) = \alpha_{ab},$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \Sigma_{X_a \in E, X_b \in E_y} \alpha_{ab} + \Sigma_{X_a \in E, X_b = x} \alpha_{ab} + \Sigma_{X_a \in E_x, X_b \in E_y} \alpha_{ab} \\ &+ \Sigma_{X_a \in E_x, X_b = x} \alpha_{ab} + \Sigma_{X_a = y, X_b \in E_y} \alpha_{ab} + \Sigma_{X_a = y, X_b = x} \alpha_{ab} \end{aligned}$$

comme $Pk = 0$:

$$\begin{aligned} \Sigma_{X_a \in E, X_b \in E_y} \alpha_{ab} &= - (q-1) \Sigma_{X_a \in E} k_{aa} \\ &\quad + q(n-2) \Sigma_{X_b \in E_y} k_{bb} = - q (n-2) k(y, y), \\ \Sigma_{X_a \in E, X_b = x} \alpha_{ab} &= - \Sigma_{X_a \in E} k_{aa} + q (n-2) k(x, x) = q(n-2) k(x, x), \\ \Sigma_{X_a \in E_x, X_b \in E_y} \alpha_{ab} &= - (q-1) \Sigma_{X_a \in E_x} k_{aa} + (q-1) \Sigma_{X_b \in E_y} k_{bb} \\ &= (q-1) k(x, x) - (q-1) k(y, y), \\ \Sigma_{X_a \in E_x, X_b = x} \alpha_{ab} &= - 4 \Sigma_{X_a \in E_x} k_{aa} + 4 (q-1) k(x, x) = 4 q k(x, x), \\ \Sigma_{X_a = y, X_b \in E_y} \alpha_{ab} &= - 4 (q-1) k(y, y) + 4 \Sigma_{X_b \in E_y} k_{bb} = - 4 q k(y, y), \\ \Sigma_{X_a = y, X_b = x} \alpha_{ab} &= - k(y, y) + k(x, x), \end{aligned}$$

d'où

$$A_3 = (qn + 3q)(k(x, x) - k(y, y)),$$

l'équation (4.3.3.1) s'écrit finalement, compte tenu de (4.3.3.2) :

$$\bar{\Delta} k(x, x) - \bar{\Delta} k(y, y) + 8 k(x, x) - 8 k(y, y) = 0,$$

ce qui prouve le lemme 4.3.1.

4.3.4. *Démonstration du corollaire* 3.1.1. — Par définition (3.1.1), $\mathfrak{L}$ est le sous-espace de F dans $P_n(\mathbf{K})$ des tenseurs dont la restriction à chaque droite projective S_q est paire [c'est-à-dire passe au projectif réel $P_q(\mathbf{R})$ de la sphère S_q].

Si $k \in \mathfrak{L}$ et $i : S_q \hookrightarrow P_n(\mathbf{K})$, on applique le théorème 3.1 pour le projectif réel $P_q(\mathbf{R})$ à la restriction $i^* k$ [en fait à sa projection sur $P_q(\mathbf{R})$]; $i^* k$ est donc une dérivée de la métrique induite, d'où $k \in F_{\mathbf{K}}$ (définition) et donc, par le théorème 3.1, $k \in L$.

C. Q. F. D.

CHAPITRE 5

Résultats et problèmes

5.1. Rigidité infinitésimale des métriques à géodésiques toutes fermées dans $P_n(\mathbf{R})$

THÉORÈME 5. — *Toute variation C^∞ dans M. G. T. F. autour de la métrique canonique est un transport de structure à une variation infiniment plate près.*

Ce résultat est la conséquence de la proposition 2.2.4, du théorème 3.1 pour P_n (**R**), et de la proposition 2.4.3.

Il serait intéressant de pouvoir déduire de cela un résultat local.

5.2. Rigidité infinitésimale des métriques pour lesquelles les droites projectives sont à courbure constante dans P_n (C), P_n (H), P_2 (Ca)

THÉORÈME 5.2. — *Toute variation C^1 par de telles métriques est tangente à la structure canonique (c'est-à-dire à l'orbite de la métrique canonique par l'action de $\mathcal{D}$).*

Ce résultat est conséquence directe de la proposition 2.3.2, du théorème 3.1 et de 2.4.1; il signifie essentiellement que l'ensemble A (défini en 2.3.1) est tangent en g à l'orbite $O(g)$; on peut saturer A par l'action de $\mathcal{D}$: l'ensemble stable obtenu est aussi tangent en g à $O(g)$, comme on voit facilement; toutefois cela n'est pas géométriquement plus significatif.

5.3. Métriques à géodésiques toutes fermées paires dans P_n (C), P_n (H), P_2 (Ca)

Une métrique sera dite paire si la restriction à chaque droite projective est paire (c'est-à-dire invariante par l'antipodie de cette sphère). La métrique canonique est évidemment paire.

THÉORÈME 5.3. — *Toute variation C^1 par des m. g. t. f. (π), paires, dans P_n (C), P_n (H) ou P_2 (Ca) est tangente à la structure canonique $O(g)$.*

Démonstration. — D'après la proposition 2.2.4, pour une telle variation g, on a $[\partial g_\lambda/\partial\lambda]_{\lambda=0} \in F$; de plus, comme g_λ est paire, $[\partial g_\lambda/\partial\lambda]_{\lambda=0}$ l'est aussi, donc d'après le corollaire 3.1, $[\partial g_\lambda/\partial\lambda]_{\lambda=0} \in L$.

C. Q. F. D.

5.4. Rigidité infinitésimale dans P_n (K) pour les *m. g. t. f.* (π), conformes

THÉORÈME 5.4 — *Soit un projectif quelconque P_n (K). Pour toute variation C^∞ par des m. g. t. f. (π), conformes* (c'est-à-dire $g_\lambda = \varphi_\lambda g$), *on a*

$$(\forall\, n), \quad [\partial^n \varphi_\lambda/\partial\lambda^n]_{\lambda=0} = 0.$$

Si φ_λ dépend analytiquement de λ, nécessairement $g_\lambda = g$.

Démonstration. — D'après la proposition 2.2.4, on a $[\partial\varphi_\lambda/\partial\lambda]_{\lambda=0} \times g \in F$ et, par le raisonnement fait en 3.5.6 (transformation de Radon), on a

$[\partial\varphi_\lambda/\partial\lambda]_{\lambda=0} = 0$. Une récurrence, analogue à celle de FUNK [9], basée sur la dérivation à l'ordre p des équations (2.2.2.1) et (2.2.3.6), fournit après un calcul technique la même condition pour toutes les dérivées; le théorème en résulte.

Conséquence. — Si on considère dans $P_n(\mathbf{K})$ un groupe à un paramètre de « transformations conformes », telles que $d_\lambda^* g = \varphi_\lambda g$, on retrouve, comme conséquence du théorème 5.4, qu'il est formé d'isométries : $d_\lambda^* g = g$.

Remarque. — On voit qu'une vraie variation conforme ne peut être tangente en g à un slice de Ebin puisque le tangent est Ker δ et que $\delta(\varphi g) = - d\varphi$; donc, dans $\mathcal{M}$, les métriques conformes à g forment un ensemble oblique, qui, par ailleurs, n'engendre pas $\mathcal{M}$ entier si l'on sature par isométries (cela est explicité dans [2]).

5.5. Problèmes locaux et globaux

Il n'est pas déraisonnable de conjecturer pour les métriques considérées en 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4, un résultat de rigidité local, sinon global, à savoir qu'une telle métrique (supposée éventuellement assez voisine de g) *appartient* à $O(g)$, l'orbite de g par $\mathcal{D}$.

5.5.1. — Il semble probable aussi que, pour $P_n(\mathbf{C})$, $P_n(\mathbf{H})$ ou $P_2(\mathbf{Ca})$, l'inclusion $L \subset F$ doive être stricte, et il serait intéressant de caractériser autrement l'espace $F \cap \operatorname{Ker} \delta$, ou au moins d'exhiber, par exemple, un élément de Sym 2 qui soit impair en restriction aux droites projectives et n'appartienne pas à L [ceci étant banal pour $P_1(\mathbf{C})$ ou $P_1(\mathbf{H})$].

5.6. Problème plus général

Soit $P_n(\mathbf{K})$ avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{Ca}$, $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{K} = q$, et $G_q^{n,m}$ l'ensemble de ses sous-espaces projectifs $P_m(\mathbf{K})$ $(m < n)$.

Soit σ_p la p-ième fonction symétrique fondamentale de qm variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_{qm}$.

Si $k \in$ Sym 2, sa restriction $i^* k$ à $P_m(\mathbf{K})$ permet de définir relativement à $i^* g$, et en chaque point u de $P_m(\mathbf{K})$, le nombre $\sigma_p(i^* k)(u)$; pour $p = 1$,

$$\sigma_1(i^* k)(u) = \operatorname{tr}_g(i^* k);$$

pour $p = qm$,

$$\sigma_{qm}(i^* k) = \frac{\det(i^* k)}{\det(i^* g)}.$$

On peut donc définir l'espace $F(q, n, m, p)$, avec $m < n$ et $p \leqq qm$, des tenseurs de Sym 2, tels que $\forall\, H \in G_q^{n, m}$,

$$\int_H \sigma_p (i^* k)(u)\, du = 0.$$

Questions. — Existe-t-il un problème géométrique « intéressant » dont la linéarisation impose au tenseur dérivée d'être dans $F(q, n, m, p)$?

Dans l'affirmative, on a donc $L \subset F(q, n, m, p)$ et, dans ce cas, quand a-t-on l'égalité ?

Dans [2], M. Berger montre que cette égalité n'a pas lieu pour

$$F(1, n, n-1, 1),$$

alors qu'elle est vraie pour $F(1, n, 1, 1)$ (théorème 3.1).

5.7. Problèmes analogues pour les espaces symétriques de rang 1 non compacts

On peut s'intéresser dans ce cas à l'espace F des tenseurs de Sym 2, *à support compact* et à énergie nulle sur toutes les géodésiques.

On traitera ultérieurement de cette question pour laquelle il semble que le théorème 3.1 soit encore vrai, en particulier pour $\mathbf{R}^n$ et pour l'espace hyperbolique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Berger (M.). — *Lectures on geodesics in riemannian geometry.* — Bombay, Tata Institute, 1965 (*Tata Institute of fundamental Research. Lectures on Mathematics*, 33).

[2] Berger (M.). — Du côté de chez Pu, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 5, 1972, p. 1-44.

[3] Berger (M.) and Ebin (D. G.). — Some decompositions of the space of symmetric tensors on a riemannian manifold, *J. of diff. Geometry*, t. 3, 1969, p. 379-392.

[4] Berger (M.), Gauduchon (P.) et Mazet (E.). — *Le spectre d'une variété riemannienne.* — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 194).

[5] Bonan (E.). — Sur les *G*-structures de type quaternionnien, *Cahiers de Topolobie et Géom. diff.*, t. 9, 1967, p. 389-463 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1967).

[6] Calabi (E.). — On compact riemannian manifolds with constant curvature, I, *Differential geometry*, p. 155-180. — Providence, American mathematical Society, 1961 (*Proceedings of Symposia in pure Mathematics*, 3).

[7] Dieudonné (J.) and Carrel (J.). — Invariant theory, old and new, *Advances in Mathematics*, t. 4, 1970, p. 1-80.

[8] Ebin (D. G.). — The manifold of riemannian metrics, *Global analysis*, II, p. 11-40. — Providence, American mathematical Society, 1970 (*Proceedings of Symposia in pure Mathematics*, 15).

[9] Funk (P.). — Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, *Math. Annalen*, t. 74, 1913, p. 278-300.

[10] Green (L. W.). — Auf Wiedersehenflächen, *Annals of Math.*, Series 2, t. 78, 1963, p. 289-299.

[11] Helgason (S.). — The Radon transform on euclidean spaces, compact two-point homogeneous spaces and Grassmann manifolds, *Acta Mathematica*, Uppsala, t. 113, 1965, p. 153-180.

[12] Kobayashi (S.) and Nomizu (K.). — *Foundations of differential geometry*. Vol. 1 and 2. — New York, Interscience Publishers, 1963-1969 (*Interscience Tracts in pure and applied Mathematics*, 15).

[13] Lichnerowicz (A.). — *Propagateurs et commutateurs en relativité générale*. — Paris, Presses universitaires de France, 1961 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 10).

[14] Michel (R.). — Sur les déformations de la métrique..., *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 268, série A, 1969, p. 1477-1480.

[15] Michel (R.). — Sur certains tenseurs symétriques des projectifs réels, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 51, fasc. 2, 1972, p. 273-293.

[16] Milnor (J.). — *Morse theory*. — Princeton, Princeton University Press, 1963 (*Annals of Mathematics Studies*, 51).

[17] Palais (R. S.). — *Seminar on the Atiyah-Singer theorem*. — Princeton, Princeton University Press, 1965 (*Annals of Mathematics Studies*, 57).

[18] Weyl (H.). — On the volume of tubes, *Amer. J. of Math.*, t. 61, 1939, p. 461-472.

[19] Zoll (O.). — Über Flächen mit Scharen geschlossener geodätischer Linien, *Math. Annalen*, t. 57, 1903, p. 108-133.

(Texte reçu le 19 juin 1972.)

René Michel,
Collège scientifique universitaire,
33, rue Louis-Pasteur,
84000 Avignon.