HIROSHI UMEMURA

Fibrés vectoriels positifs sur une courbe elliptique

Bulletin de la S. M. F., tome 100 (1972), p. 431-433
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__431_0>

Bull. Soc. Math. France,
100, 1972, p. 431 à 433.

FIBRÉS VECTORIELS POSITIFS SUR UNE COURBE ELLIPTIQUE

PAR

HIROSHI UMEMURA
[I. H. E. S., Bures-sur-Yvette]

RÉSUMÉ. — On montre qu'un fibré vectoriel sur une courbe elliptique est différentiellement positif si, et seulement si, il est ample au sens de HARTSHORNE.

1. Définition

Soient V une variété kählérienne de dimension n, et E un fibré vectoriel de rang r sur V. E est (différentiellement) positif (resp. non négatif), s'il existe une métrique hermitienne h sur E telle que la forme quadratique hermitienne en deux variables $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^r)$, $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$

$$\Theta(\xi, \eta) = \sum_{1 \leq \rho, \tau, \sigma \leq r, 1 \leq i, j \leq n} h_{\rho\bar{\tau}} \Theta^{\bar{\tau}}_{\bar{\sigma} i \bar{j}} \xi^\rho \bar{\xi}^\sigma \eta^i \bar{\eta}^j$$

soit définie positive (resp. non négative), où $(\Theta^{\bar{\tau}}_{\bar{\sigma}})_{1 \leq \tau, \sigma \leq r}$ est la courbure de la connection $h^{-1}\,\partial h$ (*voir* ANDREOTTI et GRAUERT [1], et GRIFFITHS [3]).

2. Propriétés

(i) Un fibré vectoriel quotient d'un fibré vectoriel positif ou non négatif l'est aussi.

(ii) La somme directe de deux fibrés vectoriels positifs est positive.

(iii) Soient E un fibré vectoriel positif, et E' un fibré vectoriel non négatif. Alors le produit tensoriel $E \otimes E'$ est positif.

(iv) Un fibré vectoriel positif est ample (au sens de HARTSHORNE [4]).

(v) Un fibré de rang 1 est positif si et seulement s'il est ample.

(vi) Soient $V \xrightarrow{\pi} V'$ un revêtement fini non ramifié d'une variété kählérienne V', et E un fibré vectoriel positif sur V. Alors l'image directe $\pi_* E$ est positive.

Pour la démonstration de (i), (ii), (iii) et (iv), *voir* GRIFFITHS [3]. (v) est bien connu. (vi) est une conséquence de (ii).

3. Équivalence des conditions

Soient C une courbe elliptique sur $\mathbf{C}$, et E un fibré vectoriel sur C.

PROPOSITION. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(*a*) *E est positif;*
(*b*) *E* est *ample* (*au sens de* HARTSHORNE [4]).

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est générale (2 (iv)). Nous allons démontrer $(b) \Rightarrow (a)$. On peut supposer que E est indécomposable et de degré positif. On utilise la classification d'ATIYAH [2].

LEMME. — *Supposons $E \in E(r, d)$, avec $d > r$. Alors E est non négatif.*

Preuve du lemme. — Soit P un point de C. On a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}(-P) \to \mathcal{O} \to \mathbf{C} \to 0.$$

En tensorisant avec E, on a

$$0 \to E \otimes \mathcal{O}(-P) \to E \to E_P \to 0,$$

où E_P est la fibre de E en P. Signalons que $E \otimes \mathcal{O}(-P)$ est un élément de $E(r, d-r)$, et que $H^1(C, E')$ s'annule si E' est un élément de $E(r, d')$ avec $d' > 0$ (*voir* ATIYAH [2]). Alors on a une suite exacte

$$0 \to F \to \Gamma(C, E) \to E \to 0.$$

Puisque le fibré vectoriel trivial est non négatif [d'après 2, (i)], E est non négatif.

Q. E. D.

COROLLAIRE DU LEMME. — *Si E est un élément de $E(r, d)$ avec $d > 2r$, alors E est positif.*

En effet, E est le produit tensoriel d'un fibré inversible de degré 1 et d'un élément E' de $E(r, d-r)$, $d - r > r$. Donc E est le produit tensoriel d'un fibré vectoriel positif et d'un fibré vectoriel non négatif. D'après 2, (iii), E est positif.

Revenons à la démonstration de la proposition. Raisonnons par récurrence sur r. Si $r = 1$, d'après 2 (iv), on a $(b) \Rightarrow (c)$. Supposons que l'on ait $(b) \Rightarrow (a)$ pour $r - 1$ et démontrons-le pour r. Désignons par π l'application de C dans C qui transforme x en mx. Le degré de l'image réciproque $\pi^* E$ est $m^2 d$. Si $\pi^* E$ est décomposable, alors, par hypothèse de récurrence et 2 (ii), $\pi^* E$ est positif. Si $\pi^* E$ est indécomposable, d'après le corollaire,

$\pi^* E$ est positif pour m assez grand. On fixe m tel que π^*E soit positif. D'après 2 (vi), $\pi_* \pi^*E$ est positif. D'ailleurs, on a

$$\pi_* \pi^* E = E \otimes \pi_* 0_C.$$

Donc E est un facteur direct de $\pi_* \pi^*E$. D'après 2 (i), E est positif, ce qui achève la démonstration de la proposition.

4. Conclusion

Sur une courbe elliptique, la positivité différentielle est une bonne notion. En effet, sur une courbe elliptique sur **C**, les trois notions suivantes coïncident :

(i) *positif* : définition différentielle d'amplitude;

(ii) *ample* : définition algébro-géométrique d'amplitude;

(iii) *tous les fibrés vectoriels quotients sont de degré positif :* définition topologique d'amplitude.

Voir GRIFFITHS [3] et HARTSHORNE [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREOTTI (A.) et GRAUERT (H). — Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 193-259.

[2] ATIYAH (M. F.). — Vector bundles over an elliptic curve, *Proc. Lond. math. Soc.*, Series 3, t. 7, 1957, p. 414-452.

[3] GRIFFITHS (P. A.). — Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles. *Global analysis*. Papers in honor of K. Kodaira, p. 185-215. — Princeton, Princeton University Press et University of Tokyo Press, 1969 (*Princeton mathematical Series*, 29).

[4] HARTSHORNE (R.). — *Ample vector bundles*. — Paris, Presses universitaires de France, 1966 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 29, p. 63-94).

[5] HARTSHORNE (R.). — Ample vector bundles on curves, *Nagoya math. J.*, t. 43, 1971, p. 73-89.

(Texte reçu le 27 mai 1972.)

Hiroshi UMEMURA,
Institut des Hautes Études Scientifiques,
35, route de Chartres,
91440 Bures-sur-Yvette
et Mathematical Institute
Faculty of Science, Nagoya University,
Nagoya (Japon).