

# BULLETIN DE LA S. M. F.

GÉRARD RAUZY

## **Fonctions entières et répartition modulo 1**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 100 (1972), p. 409-415

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1972\\_\\_100\\_\\_409\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__409_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## FONCTIONS ENTIÈRES ET RÉPARTITION MODULO 1

PAR

GÉRARD RAUZY

Selon un résultat de PÓLYA (Über ganze ganzwertige Funktionen *Nach. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.*, 1920, p. 1-10), si  $f$  est une fonction entière telle qu'il existe deux nombres réels  $\alpha$  et  $C$  vérifiant les inégalités :

$$\alpha < \log 2 \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathbf{C}, \quad |f(z)| \leq C e^{\alpha|z|},$$

alors, si  $f(n)$  est un entier, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f$  est un polynôme.

Nous nous proposons, ici, en imposant à  $f$  des conditions de croissance plus strictes, mais également des conditions de régularité sur les coefficients de son développement en série entière, d'examiner la répartition modulo 1 de la suite  $f(n)$ .

Le résultat essentiel est le suivant :

THÉORÈME. — Soit  $f$  une fonction analytique de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}$  admettant le développement :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (x^n/n!), \quad v_n \in \mathbf{R}.$$

Supposons que :

(i) il existe une constante  $C$  telle que, pour  $n$  assez grand,

$$0 < |v_{n+1}| \leq C |v_n|^{(n+1/n-1)};$$

(ii)  $|v_n|^{1/n^{2^n}} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Alors, pour tout  $\lambda \neq 0$ , la suite  $(\lambda f(n))$  est équirépartie modulo 1.

Remarque. — Le cas où  $f$  est un polynôme (où la répartition modulo 1 est donc bien connue) a été écarté en imposant l'inégalité stricte dans la condition (i).

D'autre part, ce résultat montre que, au moins pour certaines suites  $(u_n)$  assez régulières et de croissance supérieure à celle d'un polynôme [en prenant par exemple tous les coefficients  $v_n$  positifs et  $u_n = f(n)$ ],  $(\lambda u_n)$  est équirépartie modulo 1 pour tout  $\lambda \neq 0$ , ce qui n'est pas le cas, on le sait, dès que  $(u_n)$  est de croissance exponentielle.

Remarquons encore que les conditions imposées impliquent que la suite  $(f(n))$  n'est pas bornée.

*Démonstration.* — Posant  $e(x) = e^{2i\pi x}$ , il suffit, en raison du critère de Weyl, de montrer que, pour tout  $\lambda \neq 0$ ,

$$1/N \sum_{0 \leq n < N} e(\lambda f(n)) \rightarrow 0.$$

Les conditions imposées à  $f$  sont manifestement vérifiées par  $\lambda f$ , il suffit donc en fait de montrer que

$$S_N = 1/N \sum_{0 \leq n < N} e(f(n)) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad N \rightarrow \infty.$$

Pour  $s$  assez grand, soit  $M(s)$  l'entier vérifiant l'inégalité

$$(1) \quad |v_s| M(s)^{s-1} \leq 1/4 < |v_s| (M(s) + 1)^{s-1}.$$

Nous allons montrer que  $M(s)$  tend vers l'infini et que, dès que  $s$  est assez grand,  $M(s+1) > M(s)$ .

Nous majorerons ensuite  $S_N$  pour  $M(s) \leq N < M(s+1)$ , par une quantité  $\varepsilon(s)$  qui tend vers zéro quand  $s \rightarrow +\infty$ , ce qui achèvera la démonstration.

Cette majoration s'effectuera au moyen du lemme suivant, qui sera démontré dans le paragraphe D :

LEMME 1. — Soit  $f$  une fonction indéfiniment dérivable de  $(0, +\infty[$  dans  $\mathbf{R}$ . Soient  $s, M, N$  des entiers tels que  $s \geq 1, 1 \leq M \leq N$ . Posons

$$\alpha = f^{(s)}(0), \quad \beta = \sup_{0 \leq x \leq N} |f^{(s+1)}(x)|$$

et supposons que :

- (i)  $|\alpha| M^{s-1} \leq 1/4$ ;
- (ii)  $\beta N \leq |\alpha|/2$ ,

alors

$$|1/N \sum_{0 \leq n < N} e(f(n))| \leq 4 [2((2 + \log M)^{s-1} |\alpha| M^s)]^{1/2^{s-1}} + \pi (\beta M^{s+1}/(s+1)!)$$

### A. Inégalités sur $M(s)$

On a, d'après (1),  $M(s) + 1 \geq (4|v_s|)^{-1/(s-1)}$ ; comme  $|v_s|^{1/s^{2^s}} \rightarrow 0$ , *a fortiori*  $|v_s|^{1/(s-1)} \rightarrow 0$ , donc  $M(s) \rightarrow \infty$ . En particulier, dès que  $s$  est assez grand,  $M(s) \geq 1$ , et on a donc par exemple :

$$2M(s) \geq (4|v_s|)^{-1/(s-1)}.$$

Appliquant de nouveau l'hypothèse (ii) du théorème, on en déduit que

$$(2) \quad M(s)^{1/2^s} \rightarrow +\infty.$$

En particulier,  $(M(s)/M(s+1))^{1/(s-1)} \rightarrow 1$ , et on a donc, dès que  $s$  est assez grand, la double inégalité

$$(3) \quad 1/8 \leq |v_s| M(s)^{s-1} \leq 1/4.$$

D'autre part, l'hypothèse (i) du théorème entraîne que, dès que  $s$  est assez grand, on a

$$(4) \quad |v_{s+1}| \leq C_0 |v_s|^{(s+1)/(s-1)};$$

on en tire alors

$$M(s)^{s+1} \leq (4 |v_s|)^{-(s+1)/(s-1)} \leq 4^{-(s+1)/(s-1)} C_0 |v_{s+1}|^{-1},$$

soit encore, en posant  $C_1 = 2 C_0$  et utilisant l'inégalité (3),

$$(5) \quad M(s)^{s+1} \leq C_1 M(s+1)^s.$$

En particulier,  $M(s+1)/M(s) \leq (M(s)/C_1)^{1/s}$  qui tend vers l'infini d'après (2), donc, dès que  $s$  est assez grand :

$$(6) \quad M(s+1) > M(s).$$

### B. Vérification des conditions d'application du lemme 1

On applique le lemme 1 en prenant  $M = M(s)$ ,  $M(s) \leq N < M(s+1)$ , on a donc

$$\alpha = v_s$$

et

$$\beta \leq \sup_{0 \leq x \leq M(s+1)} |f^{(s+1)}(x)|.$$

Mais,  $f^{(s+1)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{s+1+k} x^k/k!$ , d'où

$$\beta \leq \sum_{s=0}^{\infty} |v_{s+1+k}| M(s+1)^k/k!,$$

d'où

$$\beta M(s+1)^s \leq \sum_{k=0}^{\infty} (|v_{s+1+k}| M(s+1)^{s+k})/k!;$$

or, d'après (6),  $M(s+1)^{s+k} \leq M(s+1+k)^{s+k}$ , et d'après (3) :

$$|v_{s+1+k}| M(s+1)^{s+k} \leq |v_{s+1+k}| M(s+1+k)^{s+k} \leq 1/4;$$

d'où finalement :

$$\beta M(s+1)^s \leq e/4 \leq 1.$$

Utilisant (3) et (5), on en tire alors les deux inégalités

$$(7) \quad \beta M(s)^{s+1} \leq C_1 \quad \text{et} \quad \beta \leq 8 |v_{s+1}|.$$

Pour appliquer le lemme, il suffit de montrer que  $\beta N \leq |\alpha|/2$ , l'inégalité  $|\alpha| M^{s-1} \leq 1/4$  étant réalisée par définition de  $\alpha$  et  $M$ .

Or on a, d'après (7),  $\beta N \leq \beta M(s+1) \leq 8 |v_{s+1}| M(s+1)$ , mais d'après (3),  $M(s+1) \leq |v_{s+1}|^{-1/s}$ , d'où

$$\beta N \leq 8 |v_{s+1}|^{(s-1)/s} \leq 8 \times C_0^{(s-1)/s} |v_s|^{(s+1)/s},$$

La quantité  $8 \times C_0^{(s-1)/s} \times |v_s|^{1/s}$  tend vers zéro quand  $s \rightarrow +\infty$ , en vertu de l'hypothèse (ii) du théorème. Elle est donc inférieure à  $1/2$  dès que  $s$  est assez grand, et on a bien alors

$$\beta N \leq |\alpha|/2.$$

### C. Application du lemme 1

On a  $|S_N| \leq \varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)$ , où

$$\varepsilon_1(s) = 4 [2 ((2 + \log M(s))^{s-1} / |v_s| M(s)^s)]^{1/2^{s-1}}$$

$$\varepsilon_2(s) = \pi (\beta M(s)^{s+1} / (s+1)!).$$

En vertu de (7),  $\varepsilon_2(s) \leq \pi C_1 / (s+1)!$ , donc tend vers zéro quand  $s \rightarrow +\infty$ . Il reste donc à montrer que  $\varepsilon_1(s)$  tend vers zéro.

C'est ici qu'intervient réellement la condition (ii) des hypothèses : jusqu'à maintenant les mêmes résultats auraient été obtenus en supposant seulement  $|v_s|^{1/s} \rightarrow 0$ . Comme  $|v_s|^{1/s 2^s} \rightarrow 0$ , il en résulte que  $M(s)^{1/2^s} \rightarrow \infty$ , donc  $1/2^s \log M(s) \rightarrow +\infty$  et  $\log \log M(s) - s \log 2 \rightarrow +\infty$ .

En particulier, dès que  $s$  est assez grand,  $s \leq \log \log M(s) / \log 2$ , d'où

$$(s-1) \log \log M(s) \leq [\log \log M(s)]^2 / \log 2.$$

Comme  $M(s) \rightarrow +\infty$ ,  $\log M(s) \rightarrow +\infty$ , donc  $[\log \log M(s)]^2 / \log M(s) \rightarrow 0$  et, par conséquent, dès que  $s$  est assez grand :

$$[2 + \log M(s)]^{s-1} \leq (2 \log M(s))^{s-1} \leq e^{(s-1) \log \log M(s)} \leq \sqrt{M(s)} / 16.$$

D'autre part, d'après (3),  $1/(|v_s| M(s)^s) \leq 8/M(s)$ , d'où finalement dès que  $s$  est assez grand :

$$\varepsilon_1(s) \leq 4 (1/M(s))^{1/2^s}.$$

Le deuxième membre tend vers zéro quand  $s \rightarrow +\infty$ , ce qui achève la démonstration.

**D. Démonstration du lemme 1**

Définissons l'entier  $K$  par l'inégalité  $KM \leq N < (K + 1)M$ , et posons

$$M_k = kM \quad \text{pour } k = 0, \dots, K, \quad M_{K+1} = N,$$

d'où, pour tout  $k$ ,

$$M_{k+1} - M_k \leq M.$$

On a alors

$$NS_N = \sum_{0 \leq n < N} e(f(n)) = \sum_{0 \leq k \leq K} T_k,$$

où  $T_k = \sum_{M_k \leq n < M_{k+1}} e(f(n))$ .

Dans chacun des intervalles  $[M_k, M_{k+1})$ , nous approchons  $f$  par un polynôme de degré  $s$  plus précisément :

$$f(x) = P_k(x) + R_k(x).$$

où

$$P_k(x) = \sum_{h=0}^s (x - M_k)^h / h! f^{(h)}(M_k)$$

et

$$|R_k(x)| \leq (M_{k+1} - M_k)^{s+1} / (s+1)! \sup_{M_k \leq t \leq M_{k+1}} |f^{(s+1)}(t)|,$$

soit encore  $|R_k(x)| \leq \beta M^{s+1} / (s+1)!$

Si nous posons alors

$$V_k = \sum_{M_k \leq n < M_{k+1}} e(P_k(n)),$$

il résulte de l'inégalité  $|e(u) - 1| \leq \pi |u|$  que

$$|NS_N - \sum_{0 \leq k \leq K} V_k| \leq N (\pi \beta M^{s+1} / (s+1)!).$$

Si  $V = \sup_{0 \leq k \leq K} |V_k|$ , on en tire alors

$$N |S_N| \leq (K+1)V + N (\pi \beta M^{s+1} / (s+1)!).$$

Mais comme  $N \geq M$ ,  $K \geq 1$ , donc  $K+1 \leq 2K \leq 2(N/M)$ .

Le lemme en résulte si nous pouvons montrer que

$$(8) \quad V \leq 2M [2((2 + \log M)^{s-1} / |\alpha| M^s)]^{1/2^{s-1}}.$$

Remarquons que le coefficient du terme de plus haut degré dans le polynôme  $P_k$  est  $\alpha_k / s!$ , où  $\alpha_k = f^{(s)}(M_k)$ .

D'autre part, la formule des accroissements finis donne

$$|f^{(s)}(M_k) - f^{(s)}(0)| \leq M_k \sup_{0 \leq x \leq M_k} |f^{(s+1)}(x)|,$$

d'où  $|\alpha_k - \alpha| \leq \beta N$ , et en vertu de l'hypothèse (ii) du lemme, on en tire

$$|\alpha|/2 \leq |\alpha_k| \leq 2|\alpha|,$$

ce qui entraîne, en vertu de (i), que

$$|\alpha_k| M^{s-1} \leq 1/2.$$

La majoration de  $V$  résulte alors immédiatement du lemme suivant :

**LEMME 2.** — Soient  $A, B, M$  des entiers tels que  $0 < B - A \leq M$ ; soit  $P$  un polynôme de degré  $s$ , dont le coefficient du terme de plus haut degré est  $\alpha/s!$

Sous la condition  $|\alpha| M^{s-1} \leq 1/2$ , on a

$$|\sum_{A \leq n < B} e(P(n))|^{2s-1} \leq (2M)^{2s-1} \min(1, (2 + \log M)^{s-1} |\alpha| M)^s.$$

### E. Démonstration du lemme 2

Elle est plus ou moins classique dans l'étude du problème de Waring.

Elle se fait par récurrence sur le degré de  $P$  :

— Si  $s = 1$ , on a

$$|\sum_{A \leq n < B} e(P(n))| \leq \min(B - A, 2|e(\alpha) - 1|),$$

et la condition  $|\alpha| \leq 1/2$  implique

$$|e(\alpha) - 1| = 2|\sin \pi\alpha| \geq 4|\alpha|,$$

d'où le résultat.

— Si la propriété est vraie pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à  $s - 1$ , et si  $P$  est un polynôme de degré  $s > 1$ , posons

$$S = \sum_{A \leq n < B} e(P(n));$$

on a

$$|S|^2 = \sum_{n, m} e(P(n) - P(m)).$$

La somme étant étendue à tous les couples  $(m, n)$  tels que  $A \leq m < B$ ,  $A \leq n < B$ , on peut encore écrire

$$|S|^2 = \sum_{|h| < M} T_h,$$

où  $T_h = \sum_{m-n=h} e(P(m) - P(n))$ , somme partielle étendue aux couples précédents dont la différence  $m - n$  est égal à l'entier relatif  $h$ .

Mais  $T_h$  est une somme portant sur moins de  $M$  valeurs consécutives du polynôme  $P(x+h) - P(x)$  de degré  $s - 1$ .

Comme le coefficient de son terme de plus haut degré est  $h\alpha/(s-1)!$ , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence puisque

$$|h\alpha| M^{s-2} \leq |\alpha| M^{s-1} \leq 1/2;$$

et on a donc

$$|T_h|^{2^{s-2}} \leq (2M)^{2^{s-2}} \min(1, (2 + \log M)^{s-2} / |\alpha h| M^{s-1}).$$

D'autre part, une application répétée de l'inégalité de Schwarz conduit, compte tenu du fait qu'il y a  $2M - 1 < 2M$  entiers  $h$  tels que  $|h| < M$ , à

$$|S|^{2^{s-1}} \leq (\sum_{|h| < M} |T_h|^{2^{s-2}}) \times (2M)^{2^{s-2}-1}.$$

Soit encore

$$|S|^{2^{s-1}} \leq (2M)^{2^{s-1}} \times 1/2 M [\sum_{1 \leq |h| < M} ((2 + \log M)^{s-2} / |\alpha h| M^{s-1}) + 1],$$

or  $\sum_{1 \leq |h| < M} 1/h \leq 1 + \log M$  et  $1 \leq 2((2 + \log M)^{s-2} / |\alpha| M^{s-1})$  puisque  $|\alpha| M^{s-1} \leq 1/2$ ; on a donc bien

$$|S|^{2^{s-1}} \leq (2M)^{2^{s-1}} \times (2 + \log M)^{s-1} / |\alpha| M^s,$$

d'autre part, évidemment,  $|S| \leq M \leq 2M$ , d'où le résultat.

(Texte définitif reçu le 10 octobre 1972.)

Gérard RAUZY,  
U. E. R. de Marseille-Luminy,  
Mathématique-Informatique,  
70, route Léon Lachamp,  
13288 Marseille Cedex 2.

---