BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-MARIE STRELCYN

Flots sur le tore et nombres de rotation

Bulletin de la S. M. F., tome 100 (1972), p. 195-208
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__195_0>

Bull. Soc. math. France,
100, 1972, p. 195-208.

FLOTS SUR LE TORE ET NOMBRES DE ROTATION

PAR

JEAN-MARIE STRELCYN

RÉSUMÉ. — Soit sur le tore T^2 un champ de vecteurs X de classe C^k, $2 \leqq k \leqq \infty$, sans orbites compactes. Soit K une courbe simple fermée de classe C^k, transversale au champ X. Le premier retour dans K selon les trajectoires de X induit un homéomorphisme de K sur elle-même. La relation entre les nombres de rotation des homéomorphismes, correspondant à deux courbes K_1 et K_2, est étudiée. La structure des trajectoires du champ X est utilisée. Un corollaire permet d'éviter une certaine dissymétrie dans la théorie de la linéarisation du champ X.

1. Introduction

Nos notations concernant les champs de vecteurs sont les mêmes que celles de HELGASON [7]. On note $T^2 = R^2/Z^2$ le tore à deux dimensions. T^2 peut être identifié avec le produit de deux cercles :

$$T^2 = S^1 \times S^1 = \{ (p, q); p = e^{2\pi i x}, q = e^{2\pi i y}, x, y \in \mathbf{R} \}.$$

Si $z = (p, q) \in T^2$ les x et les y tels que $p = e^{2\pi i x}$, $q = e^{2\pi i y}$ ne sont pas définis d'une manière unique mais seulement modulo 1. Néanmoins, chaque point du tore T^2 admet un voisinage dans lequel on peut choisir les valeurs de x et y comme les fonctions de la classe C^∞. Malgré le fait que x et y sont définis seulement modulo 1, on peut traiter x et y comme le système de coordonnées sur T^2.

On peut donc dire que les fonctions x et y forment un système de coordonnées. En général, nous dirons que les fonctions $u(z)$ et $v(z)$, définies sur T^2, forment un système de coordonnées de classe C^k, s'il existe un difféomorphisme Φ de classe C^k de T^2 sur lui-même tel qu'on ait

$$u(z) = x(\Phi(z)) \qquad \text{et} \qquad v(z) = y(\Phi(z)) \qquad \text{pour} \quad z \in T^2.$$

Si (u, v) est un système de coordonnées sur T^2, on définit

$$K_1(u, v) = \{ (u, v);\ v = 0 \} \qquad \text{et} \qquad K_2(u, v) = \{ (u, v);\ u = 0 \}.$$

Il est évident que les courbes $K_1(u, v)$ et $K_2(u, v)$ sont des cycles non homologues à zéro, et que leurs classes d'homologie engendrent le groupe $H_1(T^2, Z) = \mathbf{Z}^2$.

Si X est un champ de vecteurs de classe C^1 sur T^2, et si $z \in T^2$, nous notons $\{ \varphi_t(z);\ t \in R \}$ la seule trajectoire de X qui passe par z, telle que $\varphi_0(z) = z$ et $\dot{\varphi}_t(z) = X(\varphi_t(z))$. Nous désignons par $\{ \varphi_t \}$ le flot induit par X sur T^2. Dans ce qui suit, nous ne ferons pas de distinction entre le système d'équations différentielles $dx/dt = F(x, y)$, $dy/dt = G(x, y)$ et le champ de vecteurs $F(x, y)\, \partial/\partial x + G(x, y)\, \partial/\partial y$. Soit $z \in T^2$, et soient A et ω respectivement un vecteur et un covecteur tangents en z, alors $\langle A, \omega \rangle$ désignera la valeur de ω sur A.

Considérons, sur le tore T^2, un champ de vecteurs X de classe C^k, $1 \leqq k \leqq \infty$, sans orbite compacte (c'est-à-dire sans point singulier et sans orbite fermée). On sait bien ([6], [11]) que, sous ces hypothèses, il existe sur le tore T^2 une courbe simple fermée K, de classe C^k, et transversale au champ X. On sait aussi que chaque demi-trajectoire $\{ \varphi_t(z);\ t \geqq 0 \}$ de X coupe K une infinité de fois. On appelle les courbes comme ci-dessus courbes de Siegel pour X (resp. pour le flot induit $\{ \varphi_t \}$).

Soient $g \in K$, et $t(g) > 0$ le plus petit nombre positif tel que $\varphi_{t(g)}(g) \in K$. L'application $T_K(g) = \varphi_{t(g)}(g)$ est un homéomorphisme de K. On peut donc parler du nombre de rotations de T_K ([4], [6]). Le champ X étant donné, ce nombre ne dépend que de K, et sera noté ρ_K. On sait que, sous nos hypothèses, ρ_K est toujours un nombre irrationnel ([4], [6]).

Dans cette Note, nous étudions la question suivante : soient K et L des courbes de Siegel pour le champ X. Comment sont liés entre eux les nombres ρ_K et ρ_L ?

Sous les hypothèses que le champ X et les courbes K et L sont de classe C^2, nous donnerons dans le théorème 1 la réponse complète.

A. B. Katok [Moscou] a bien voulu nous indiquer qu'il sait démonter, selon une méthode entièrement différente de la nôtre, un théorème plus général que le théorème 1.

Théorème 1. — *Considérons sur le tore T^2 un champ de vecteurs X de classe C^2, sans orbite compacte, et soient K et L deux courbes de Siegel pour X de classe C^2. Il existe alors une matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où $A, B, C, D \in Z$ et $AD - BC = \pm 1$, telle qu'on ait*

$$\rho_L = (A + B\rho_K)/(C + D\rho_K).$$

Dans les problèmes de linéarisation du champ X ([2], [8], [12], [13]), la classe de nombres

$$\mathfrak{M}_s = \left\{ x \in \mathbf{R};\ \exists\, C(x) > 0,\ \forall\, p, q \in Z,\ q \neq 0 : \left| x - \frac{p}{q} \right| > C(x)/|q|^s \right\},$$
$$s > 2,$$

joue un rôle essentiel. Il est évident que, pour un $s \in R$ arbitraire, les éléments de $\mathfrak{M}_s$ sont des nombres irrationnels. Comme conséquence du théorème 1, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1. — *Soient K et L avec la même signification que précédemment. Alors, pour chaque $s \in R$, $\rho_K \in \mathfrak{M}_s$ si, seulement si, $\rho_L \in \mathfrak{M}_s$.*

La démonstration dut héorème 1 est basée sur le théorème 2 (*cf.* [1], § 3).

Théorème 2. — *Considérons sur le tore T^2 le système d'équations (différentielles) :*

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} dx/dt = F(x, y), \\ dy/dt = G(x, y), \end{cases}$$

où $F, G \in C^k(T^2)$, $2 \leq k \leq \infty$. Supposons le système (1) sans orbite compacte. Soit K une courbe de Siegel de classe C^k pour le système (1) [c'est-à-dire pour le champ de vecteurs $X(x, y) = F(x, y)\,\partial/\partial x + G(x, y)\,\partial/\partial y$]. Il existe alors un difféomorphisme Φ de classe C^{k-1} du tore T^2 sur lui-même tel que, dans le système de coordonnées $u(z) = x(\Phi(z))$, $v(z) = y(\Phi(z))$, le système (1) prenne la forme

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} du/dt = A(u, v) > 0, \\ dy/dt = B(u, v) \end{cases}$$

et $K = \{(u, v);\ u = 0\} = K_2(u, v)$.

Le théorème 2 comble aussi une lacune qui se trouve dans le dernier paragraphe du livre de Coddington et Levinson [4]. Le théorème 2 et le corollaire 1 nous permettent aussi d'éviter une certaine dissymétrie dans la théorie des systèmes d'équations différentielles (1) ([4], [12]).

Dans la démonstration du lemme 1 du paragraphe 2, nous nous servirons du théorème de Beboutov et Stepanov sur le changement de temps dans les systèmes dynamiques [3]. Du fait que ce théorème n'est pas facilement accessible dans la littérature, nous en donnerons ici l'énoncé.

Théorème de Beboutov et Stepanov. — *Soit M un espace métrique, et soit g une fonction strictement positive et continue sur M. Soit $\{T_t\}$ un flot continu sur M. Posons*

$$s = s(p, t) = \int_0^t g\,[T_r(p)]\,dr.$$

Pour chaque point $p \in M$, la fonction $s(p, t)$ est strictement croissante. On peut alors parler d'une fonction inverse $t = t(p, s)$. Définissons un autre flot continu $\{ R_s \}$ sur M par la formule suivante : $R_s(p) = T_{t(p,s)}(p)$. Supposons que ν soit une mesure borélienne finie sur M, invariante par le flot $\{ T_t \}$; $g\,\nu$ est alors une mesure invariante finie pour le flot $\{ R_s \}$.

Je tiens à remercier H. Rosenberg et R. Roussarie pour l'aide très précieuse qu'ils m'ont apportée dans la démonstration du théorème 2, ainsi que J.-P. Bourguignon, F. Laudenbach et Mme J. Majerczyk pour leurs judicieux conseils à propos de ce même théorème.

Mes remerciements vont également à A. Avez qui a bien voulu relire et corriger le manuscrit de cette Note.

2. La démonstration du théorème 1

Considérons sur le tore T^2 le champ de vecteurs

$$X(x, y) = F(x, y)\,\partial/\partial x + G(x, y)\,\partial/\partial y.$$

Soit $\{ \varphi_t \}$ le flot induit par le champ X. D'après le théorème classique de Krylov et Bogoljubov [9], on sait qu'il existe au moins une mesure μ borélienne, invariante et ergodique par le flot $\{ \varphi_t \}$, et normée. D'après le théorème ergodique de Birkhoff, on a, pour toutes les fonctions $f \in L^1(T^2, \mu)$,

$$\lim_{t \to \infty} 1/T \int_0^T f(\varphi_t(z))\,dt = \int_{T^2} f\,d\mu, \quad \mu\text{-presque partout.}$$

(En réalité, la mesure μ est unique [14] et, pour les fonctions continues f sur T^2, d'après [9], la convergence est uniforme pour le membre de gauche dans le théorème de Birkhoff. Mais ces résultats plus puissants ne nous seront pas nécessaires.)

Dans ce qui suit, si nous considérons un système d'équations différentielles sur T^2, nous entendons, par mesure associée à ce système d'équations, une mesure borélienne, normée, invariante et ergodique par le flot induit par ce système d'équations.

Soit μ une mesure associée fixée pour le système d'équations (1).

Si nous considérons les cycles $K_1(x, y)$ et $K_2(x, y)$ comme une base de $H_1(T^2, R)$, les formes fermées dx et dy forment la base duale dans $H^1(T^2, R)$. Calculons les nombres de rotations de Gel'fand et Pjateckij-Šapiro ([5] et [10]) pour le système dynamique $(T^2, \mu, \{ \varphi_t \})$ et par rapport à cette base. Nous reprenons ici le calcul fait dans [5].

Soient $z \in T^2$ et $\alpha_t = \{ \varphi_r(z); 0 \leqq r \leqq t \}$,

$$\lim_{t \to +\infty} 1/t \int_{\alpha_t} dx = \lim_{t \to +\infty} 1/t \int_0^t \langle \dot{\varphi}_r(z), dx(\varphi_r(z)) \rangle dr$$

$$= \lim_{t \to +\infty} 1/t \int_0^t F(\varphi_r(z))\, dr = \int_{T^2} F\, d\mu, \quad \mu\text{-presque partout.}$$

De même,

$$\lim_{t \to +\infty} 1/t \int_{\alpha_t} dy = \int_{T^2} G\, d\mu, \quad \mu\text{-presque partout.}$$

Si M et N sont des cycles dont les classes d'homologie entière forment une base de $H_1(M, R)$, les nombres de rotations de Gel'fand et Pjateckij-Šapiro associés à ces cycles (par rapport au flot $\{ \varphi_t \}$) seront notés respectivement $\lambda_1(M, N)$ et $\lambda_2(M, N)$.

Nous voyons donc que, pour le système $(T^2, \mu, \{ \varphi_t \})$, on a

$$\lambda_1(K_1(x, y), K_2(x, y)) = \int_{T^2} F\, d\mu,$$

$$\lambda_2(K_1(x, y), K_2(x, y)) = \int_{T^2} G\, d\mu.$$

Soient L_1 et L_2 deux autres courbes simples fermées sur T^2; supposons que les classes d'homologie de L_1 et L_2 engendrent le groupe $H_1(T^2, R)$. Il existe alors une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $a, b, c, d \in Z$, $\varepsilon = ad - bc = \pm 1$, telle qu'au sens de l'homologie, on ait

$$L_1 = a K_1 + b K_2 \qquad \text{et} \qquad L_2 = c K_1 + d K_2.$$

Les classes d'homologie réelles des courbes L_1 et L_2 forment une base dans $H_1(T^2, R)$. Il est facile de voir que les formes fermées

$$\omega_1 = \varepsilon\, d.dx - \varepsilon\, c.dy \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = -\varepsilon\, b.dx + \varepsilon\, a.dy$$

forment la base duale dans $H^1(T^2, R)$ de la base formée par les classes d'homologie de L_1 et L_2. On calcule immédiatement

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \lambda_1(L_1, L_2) = \varepsilon\, d.\lambda_1(K_1, K_2) - \varepsilon\, c.\lambda_2(K_1, K_2), \\ \lambda_2(L_1, L_2) = -\varepsilon\, b.\lambda_1(K_1, K_2) + \varepsilon\, a.\lambda_2(K_1, K_2). \end{cases}$$

Lemme 1. — *Considérons sur le tore T^2 le système d'équations diffétentielles*

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} dx/dt = A(x, y) > 0, \\ dy/dt = B(x, y), \end{cases}$$

où $A, B \in C(T^2)$. Notons par $\{\beta_t\}$ le flot induit par le système (4). *Soit ν une mesure associée à ce système. Pour le flot induit par le système d'équations différentielles*

$$\begin{cases} dx/ds = 1, \\ dy/ds = B(x, y)/A(x, y), \end{cases}$$

$A(x, y)\,\nu$ sera alors une mesure invariante et ergodique (*borélienne et finie*).

Démonstration. — Posons, dans le théorème de Beboutov et Stepanov,

$$M = T^2, \qquad g(z) = A(z) \quad \text{pour } z \in T^2, \qquad \{T_t\} = \{\beta_t\}.$$

Alors

$$s = s(z, t) = \int_0^t A(\beta_r(z))\, dr.$$

Notons $\beta_r(z) = (x(r), y(r))$,

$$\frac{dx(t(s))}{ds} = \frac{dx(t(s))}{dt} \cdot \frac{dt(s)}{ds} = A(x(t(s)), y(t(s))) \cdot \frac{1}{A(x(t(s)), y(t(s)))} = 1$$

parce que $ds(z, t)/dt = A(x(t), y(t))$. De même, on a

$$\frac{dy(t(s))}{ds} = \frac{dy(t(s))}{dt} \cdot \frac{dt(s)}{ds} = \frac{B(x(t(s)), y(t(s)))}{A(x(t(s)), y(t(s)))}.$$

Le lemme résulte alors du théorème de Beboutov et Stepanov.

LEMME 2. — *Considérons le système d'équations différentielles sur T^2 :*

$$(5) \qquad \begin{cases} dx/dt = 1, \\ dy/dt = H(x, y), \end{cases}$$

où $H \in C^1(T^2)$. Pour ce système, la courbe $K_2(x, y)$ est une courbe de Siegel. Soit ν une mesure associée au système (5). *Alors*

$$\rho_{K_2(x,y)} = \int_{T^2} H\, d\nu.$$

Démonstration. — Pour la commodité du raisonnement, il sera plus pratique de traiter le tore T^2 comme une bande infinie

$$M = \{(x, y);\ 0 \leq x \leq 1\}$$

avec les identifications : $(x, y) \sim (x, y + 1)$ et $(0, y) \sim (1, y)$. Soit z_0 un point de T^2 tel que

$$(6) \qquad \lim_{t \to +\infty} 1/t \int_0^t H(\gamma_t(z_0))\, dt = \int_{T^2} H\, d\nu,$$

où $\{ \gamma_t \}$ dénote le flot induit par le système (5). Il est évident que (6) est satisfait pour tous les points de la trajectoire qui passe par z_0. Du fait que chaque trajectoire de (5) coupe $K_2(x, y)$, il existe alors un point $z = (0, a)$, $0 \leqq a < 1$, tel que

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t H(\gamma_t(z))\, dt = \int_{T^2} H\, d\nu.$$

Soit $\Gamma_t = \{ \gamma_r(z);\ 0 \leqq r \leqq t \}$. Donc

$$\lim_{N \to +\infty} 1/N \int_{\Gamma_N} dy = \lambda_2(K_1(x, y), K_2(x, y)) = \int_{T^2} H\, d\nu.$$

D'autre part,

$$1/N \int_{\Gamma_N} dy = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\alpha_k} dy, \qquad \text{où} \quad \alpha_k = \{ \gamma_r(z);\ k \leqq r < k+1 \}.$$

Notons $\tilde{T}$ l'homéomorphisme de la droite réelle définie par les conditions suivantes : $T_{K_2(x,y)} \circ \pi = \pi \circ \tilde{T}$, où π est la projection canonique de R sur $S^1 = R/Z$ et $0 \leqq \tilde{T}(a) < 1$,

$$\int_{\alpha_k} dy = \int_k^{k+1} \langle \dot{\gamma}_t(z), dy \rangle\, dt = \tilde{T}^{k+1}(a) - \tilde{T}^k(a).$$

Alors

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \int_{\Gamma_N} dy = \int_{T^2} H\, d\nu = \lim_{N \to \infty} \frac{\tilde{T}^N(a) - a}{N}.$$

Mais, par définition, cette dernière limite n'est rien d'autre que $\rho_{K_2(x,y)}$.

Nous pouvons enfin achever la démonstration du théorème 1. Soit μ une mesure associée au système (1), et soient K et L deux courbes de Siegel de classe C^2 pour le système (1). D'après le théorème 2, il existe un système de coordonnées (u, v) sur T^2 telle que le système (1) s'écrive sous la forme

$$(7) \qquad \begin{cases} du/dt = A(u, v) > 0, \\ dv/dt = B(u, v) \end{cases}$$

et $K = K_2(u, v)$; il existe aussi un système de coordonnées (w, z) sur T^2 tel que le système (1) s'écrive sous la forme

$$\begin{cases} dw/dt = C(w, z) > 0, \\ dz/dt = D(w, z) \end{cases}$$

et $L = K_2(w, z)$.

Montrons que $\rho_K = \int B\,d\mu \Big/ \int A\,d\mu$. Considérons le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} du/dt = 1, \\ dv/dt = B(u, v)/A(u, v). \end{cases}$$

D'après le lemme 1, on sait que la mesure $\nu = A(u, v) \Big/ \left(\int_{T^2} A\,d\mu\right).\mu$ est une mesure normée, associée au système (7). D'après le lemme 2, on a pour le système (6), l'égalité

$$\rho_K = \rho_{K_2(u,v)} = \int_{T^2} \frac{B(u, v)}{A(u, v)}\,d\nu = \int_{T^2} B\,d\mu \Big/ \int_{T^2} A\,d\mu.$$

De même, on a $\rho_L = \int D\,d\mu \Big/ \int C\,d\mu$. Alors

$$\rho_K = \frac{\lambda_2(K_1(u, v), K_2(u, v))}{\lambda_1(K_1(u, v), K_2(u, v))} \quad \text{et} \quad \rho_L = \frac{\lambda_2(K_1(w, z), K_2(w, z))}{\lambda_1(K_1(w, z), K_2(w, z))}.$$

Nous savons qu'il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d \in Z$, $ad - bc = \pm 1$ telle que, au sens de l'homologie entière, on ait les égalités

$$\begin{cases} K_1(w, z) = a\,K_1(u, v) + b\,K_2(u, v), \\ K_2(w, z) = c\,K_1(u, v) + dK_2(u, v). \end{cases}$$

D'après les formules (3), on a donc

$$\begin{aligned} \lambda_1(K_1(w, z), K_2(w, z)) = {} & \varepsilon\,d.\lambda_1(K_1(u, v), K_2(u, v)) \\ & - \varepsilon\,c.\lambda_2(K_1(u, v), K_2(u, v)), \\ \lambda_2(K_1(w, z), K_2(w, z)) = {} & -\varepsilon\,b.\lambda_1(K_1(u, v), K_2(u, v)) \\ & + \varepsilon\,a.\lambda_2(K_1(u, v), K_2(u, v)), \end{aligned}$$

où $\varepsilon = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Enfin

$$\rho_L = \frac{-b\lambda_1(K_1(u, v), K_2(u, v)) + a\lambda_2(K_1(u, v), K_2(u, v))}{d\lambda_1(K_1(u, v), K_2(u, v)) - c\lambda_2(K_1(u, v), K_2(u, v))} = \frac{-b + a\,\rho_K}{d - c\,\rho_K}.$$

3. Démonstration du corollaire 1

La démonstration de ce corollaire découle immédiatement du théorème 1 et du lemme suivant :

LEMME 3. — *Soient* $a, b, c, d \in Z$, $ad - bc = \pm 1$. *Alors, pour chaque* $s \in \mathbf{R} : x \in \mathfrak{M}_s$ *si, et seulement si,* $(a + bx)/(c + dx) \in \mathfrak{M}_s$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que si x est un nombre irrationnel, alors $x \notin \mathcal{M}_s$, si, et seulement si, $(a + bx)/(c + dx) \notin \mathcal{M}_s$.

Si $x \notin \mathcal{M}_s$, il existe alors une suite de nombre $r_n \to 0$ et une suite de fractions $\{ p_n/q_n \}$ où $p_n, q_n \in Z$, $q_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ telles que

$$| x - (p_n/q_n) | \leq r_n / | q_n |^s.$$

Du fait que x est un nombre irrationnel, pour chaque couple fixé de nombres entiers c et d, on a $c + dx \neq 0$, et on peut supposer de plus que $c + d\,(p_n/q_n) \neq 0$ pour $n = 1, 2, \ldots,$

$$\left| \frac{a + bx}{c + dx} - \frac{aq_n + bp_n}{cq_n + dp_n} \right| = \frac{| q_n | . | (p_n/q_n) - x |}{| (c + dx)\,(cq_n + dp_n) |}$$
$$\leq \frac{q_n\,(r_n / | q_n |^s)}{| (c + dx)\,(cq_n + dp_n) |} = \frac{s_n}{| cq_n + dp_n |^s},$$

où $s_n = (r_n / | c + dx |) . | c + d\,(p_n/q_n) |^{s-1}$. Parce que

$$\lim_{n \to \infty} r_n = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} (c + d\,(p_n/q_n) = c + dx,$$

alors

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{a + bx}{c + dx} \notin \mathcal{M}_s.$$

Inversement, supposons que $t = (a + bx)/(c + dx) \notin \mathcal{M}_s$, où a, b, c, $d \in Z$, $ad - bc = \pm 1$, alors $x = (-a + ct)/(b - dt)$ et, d'après ce qui précède, $x \notin \mathcal{M}_s$.

4. **La démonstration du théorème** 2

Considérons dans un ouvert $G \subset \mathbf{R}^2$ un champ de vecteurs X de classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$, sans point singulier. Soit $\gamma : (0, 1) \to G$ un arc de classe C^k paramétrisé régulièrement (i. e. vecteur vitesse $\neq 0$), transversal au champ X (resp. $\gamma : S^1 \to G$ une paramétrisation régulière d'une courbe simple fermée de classe C^k, transversale au champ X). Du fait que γ est transversale au champ X, il existe un ouvert G_1, tel que $\{ \gamma(s); 0 < s < 1 \} \subset G_1 \subset G$ (resp. tel que $\{ \gamma(s); s \in S^1 \} \subset G_1 \subset G$) et dans lequel chaque trajectoire de X coupe γ exactement en un point. Chaque point $z \in G_1$ est alors représenté d'une manière unique sous la forme $z = \varphi_t(\gamma(s))$, où $t \in \mathbf{R}$, $0 < s < 1$ (resp. $s \in S^1$), et où $\{ \varphi_t \}$ est le flot induit par le champ X. On sait ([4], [6]) que l'application $(t, x) \to \varphi_t(x)$ est de classe C^k. Donc l'application $(t, s) \to \varphi_t(\gamma(s))$ l'est aussi. On voit aisément qu'il existe un ouvert $G_2 \subset G_1$ contenant $\{ \gamma(s); 0 < s < 1 \}$ (resp. contenant $\{ \gamma(s); s \in S^1 \}$) où les fonctions $t = t(z)$ et $s = s(z)$ forment un système de coordonnées de classe C^k.

(Dans le cas où γ est une courbe simple fermée, la fonction $s(z)$ est définie mod 1, mais comme précédemment pour le cas du tore, nous traiterons (t, s) comme un système de coordonnées.) Nous appellerons le système de coordonnées construit ci-dessus le système de coordonnées canoniquement associé à l'arc paramétrisé régulièrement γ (resp. à la courbe simple fermée paramétrisé régulièrement). Dans ce système de coordonnées on a évidemment

$$X = \partial/\partial t \qquad \text{et} \qquad \gamma = \{ (t, s);\ t = 0 \}.$$

LEMME 1 [13]. — *Considérons sur la surface du tore T^2 un champ de vecteurs X de classe C^k, $1 \leqq k \leqq \infty$, sans orbite compacte.*

Soit K une courbe de Siegel pour X de classe C^k. Il existe alors une fonction réelle strictement positive $h \in C^k(T^2)$ telle que si on désigne par $\{ \psi_t \}$ le flot induit par le champ de vecteur hX, on ait $\psi_1(K) = K$ (remarquons que les champs de vecteurs X et hX ont les mêmes courbes intégrales).

Démonstration. — Si $z \in K$, nous désignons par $T(z)$ le plus petit nombre positif tel que $\varphi_{T(z)}(z) \in K$ où $\{ \varphi_t \}$ est le flot induit par le champ X. Soit $\gamma : S^1 \to K$ une paramétrisation régulière de classe C^k de K. Utilisant le système de coordonnées canoniquement associé à cette paramétrisation de K, on montre facilement que $T(z) \in C^k(K)$. Il est facile de voir que pour trouver la fonction h cherchée, il faut et il suffit de trouver une fonction positive de classe C^k sur le tore T^2, solution de l'équation intégrale suivante :

$$\int_0^{T(z)} \frac{1}{h(\varphi_g(z))} dg = 1 \qquad \text{pour} \quad z \in K. \tag{1}$$

Chaque $z \in K$ peut être identifié au $s \in S^1$ correspondant dans la paramétrisation γ de K. Par abus de langage, nous dirons que $s \in K$, et nous utiliserons la notation $T(s) = T(\gamma(s))$.

L'équation (1) s'écrit alors sous la forme

$$\int_0^{T(s)} \frac{1}{h(\varphi_g(s))} dg = 1. \tag{1'}$$

Soit $1/h = H$, l'équation (1') prend alors la forme

$$\int_0^{T(s)} H(\varphi_g(s))\, dg = 1. \tag{1''}$$

Il faut trouver la solution H de (1″) telle que $H > 0$ et $H \in C^k(T^2)$. Introduisons le système de coordonnées canoniquement associé à la courbe K, paramétrisée à l'aide de γ. Considérons, dans un certain ouvert U, homéomorphe à un anneau et contenant K, le système de coordonnées (t, s) de classe C^k tel que $X = \partial/\partial t$ et $K = \{(t, s); t = 0\}$.

Soit $a > 0$ un nombre assez petit pour que le cylindre

$$V = \{ \varphi_b(K) ; 0 < b < a \}$$

soit dans U. Posons $H|_{T^2 - V} = m$ où m est une constante telle que $0 < m < \min_{s \in K} 1/T(s)$. L'équation (1″) est alors équivalente à

$$\int_0^a H(t, s)\, dt = 1 - m(T(s) - a)$$

puisque $\varphi_t(0, s) = (t, s)$ pour $0 < t < a$. Il suffit de déterminer H sur V. Posons

$$H(t, s) = m + \left((1 - m\,T(s)) \Big/ \int_0^a p(t)\, dt\right) p(t),$$

où $p(t) \in C^k(0, a)$, $p(t) \geqq 0$, $p(t) = 0$ pour $\{ t; 0 < t \leqq a/4$ et $3/4\, a \leqq t < a \}$, et $\int_0^a p(t)\, dt > 0$.

H, définie comme ci-dessus, satisfait à toutes nos conditions. La démonstration du lemme suivant est laissée au lecteur.

LEMME 2. — *Soit X un champ de vecteurs de classe C^k, $1 \leqq k \leqq \infty$, défini sur un ouvert $G \subset \mathbf{R}^2$, sans point singulier. Supposons que l'anneau ouvert P, limité par deux trajectoires fermées de X différentes, appartient à G, et que chaque trajectoire de X qui passe par un point $z \in P$ soit fermée. Soit $A(z)$ la période de cette trajectoire. Alors $A(z) \in C^k(P)$.*

Nous pouvons enfin démontrer le théorème 2.

Soit $X = F\,\partial/\partial x + G\,\partial/\partial y$, X est un champ de vecteur de classe C^k. Désignons par $\{\varphi_t\}$ le flot induit par X; il est de classe C^k.

Soit (u, v) le système de coordonnées dont il est question dans le théorème 2. Remarquons que le système

$$\begin{cases} dx/dy = h(x, y)\, F(x, y), \\ dy/dt = h(x, y)\, G(x, y), \end{cases}$$

où $h \in C^k(T^2)$, $h > 0$ s'écrit avec les coordonnées (u, v) sous la forme

$$\begin{cases} du/dt = h(u, v)\, A(u, v) > 0, \\ dv/dt = h(u, v)\, B(u, v). \end{cases}$$

D'après le lemme 1, on voit donc que, sans restreindre la généralité, on peut supposer au départ que, pour le champ X, on a $\varphi_1(K) = K$. Soit $p \in S^1$, alors $p = e^{2\pi ir}$, posons $\alpha_p = \varphi_r(K)$. r n'est pas défini d'une manière univoque, mais α_p est bien défini. Il est facile de voir que, pour chaque t, les courbes simples fermées α_t de classe C^k sont transversales au champ X. Soit $V = \bigcup_{|r|<1/2} \varphi_r(K)$ un ouvert. Considérons sur K le champ S de vecteurs tangents non nuls de classe C^∞. Nous prolongerons ce champ sur V de la manière suivante : si $w \in V$, alors $w = \varphi_r(z)$ ou $|r| < 1/2$ et $z \in K$; r et z sont définis d'une manière unique. Définissons $Y_1(w) = [(d\varphi_r)(z)](S(z))$; Y_1 est un champ de vecteurs de classe C^{k-1}. De la même façon, nous définissons le champ Y_2 sur l'ensemble $\bigcup_{0 \leq r < 1} \varphi_r(K) = T^2$. Le champ Y_2 peut être discontinu sur K. Soit g une fonction à support compact dans $C^\infty(V)$, $0 \leq g \leq 1$, telle qu'il existe un ouvert W tel que $K \subset W \subset V$ et $g|_W = 1$. Posons $Y_3 = g\,Y_1 + (1 - g)\,Y_2$. Alors $Y_3(z) \neq 0$ si $z \in T^2$, et Y_3 est de classe C^{k-1}. Les trajectoires de Y_3 sont précisément les courbes α_p, $p \in S^1$. Nous désignons par $C(p)$ la période de α_p, où α_p est considéré comme une trajectoire de Y_3; $C(p) > 0$. Si $z \in \alpha_p$, on pose $C(z) = C(t)$.

On a, d'après le lemme 2, $C(z) \in C^{k-1}(T^2)$. Soit $Y(z) = C(z)\,Y_3(z)$ pour $z \in T_2$. Y est un champ de vecteurs de classe C^{k-1}. La période de α_t considéré comme une trajectoire de Y, est égale à 1.

LEMME 3. — *Il existe une courbe simple fermée L de classe C^{k-1}, transversale au champ Y, et telle que L coupe chaque courbe α_t précisément en un point.*

Démonstration. — Soit $z \in K$. Considérons la demi-trajectoire positive de X qui passe par z. Désignons-la par $\Gamma(t)$; $\Gamma(1) \in K$, $\Gamma(1) \neq z = \Gamma(0)$ du fait que le champ X n'admet pas des trajectoires fermées. Utilisant les systèmes des coordonnées canoniquement associés aux arcs transverses à K (par rapport au champ Y), on peut facilement trouver un $\varepsilon > 0$ tel que, pour chaque δ, $0 < \delta \leq \varepsilon$, il existe une courbe L de classe C^{k-1} telle que L satisfait à toutes nos conditions et

$$L \cap \{\Gamma(t);\, 0 \leq t \leq 1\} = \{\Gamma(t);\, 0 \leq t \leq 1 - \delta\}.$$

LEMME 4. — *Soit $z \in T^2$, il existe alors un $p \in S^1$ unique tel que $z \in \alpha_p$. L'application $\pi(z) = p(\pi : T^2 \to S^1)$ est de classe C^k.*

Démonstration. — Soit $z_0 \in T^2$, $z_0 \in \alpha_{p_0}$. α_{p_0} étant une courbe de classe C^k transversale au champ X, on peut utiliser le système de coordonnées canoniquement associé à α_{p_0}, qui est de classe C^k. Il existe alors un ouvert $U \supset \alpha_{p_0} \ni z_0$ dans lequel le système de coordonnées (t, s) est bien défini, $\alpha_{p_0} = \{(t, s);\, t = 0\}$, $X = \partial/\partial t$. On a alors dans U : $\pi(z) = p_0 e^{2\pi i t(z)}$. Mais puisque $t(z) \in C^k(U)$, alors $\pi(z) \in C^k(T^2)$.

LEMME 5. — *Définissons sur la courbe L la paramétrisation suivante :* $h(p) = L \cap \alpha_p$ où $p \in S^1$. C'est une paramétrisation régulière de classe C^{k-1}.

Démonstration. — Soit $\gamma : S^1 \to L$ une paramétrisation régulière de L de classe C^{k-1}. D'après le lemme 4, $f = h^{-1} : L \to S^1$ est une application de classe C^{k-1}, parce que L est de classe C^{k-1}. Pour démontrer le lemme 5, il suffit de prouver que, pour chaque $p \in S^1 : d(f \circ \gamma)(p)$ est une application non nulle. Comme $f \circ \gamma = \pi \circ \gamma$, il suffit de démontrer que $d(\pi \circ \gamma)(p)$ est non nulle. On a

$$d(\pi \circ \gamma)(p) = d\pi(\gamma(p)) \circ d\gamma(p).$$

Soit $z \in \alpha_p$, le sous-espace $\ker d\pi(z)$ est exactement l'espace tangent à la courbe α_p dans z. Le vecteur $d\gamma(p)$ est un vecteur tangent à la courbe L dans $\gamma(p)$. Mais L et α_p se coupent transversalement, donc

$$d\gamma(p) \notin \ker d\pi(\gamma(p)),$$

et enfin $d\pi(\gamma(p)) \circ d\gamma(p) \neq 0$.

Le champ X induit le flot $\{\varphi_t\}$; $\varphi_1(K) = K$. Le champ Y induit le flot $\{\psi_s\}$; $\psi_1(L) = L$. Les champs X et Y sont de classe C^{k-1} (X est de classe C^k). Si $p = e^{2\pi i t}$, alors $\alpha_p = \varphi_t(K)$. Posons $\beta_p = \psi_t(L)$.

Soit $z = (p, q) \in S^1 \times S^1 = T^2$. Posons $\overline{\Phi}(z) = \alpha_p \cap \beta_q$. Il est évident que $\overline{\Phi}$ est un homéomorphisme du tore T^2 sur lui-même. Introduisons, sur la courbe L, la paramétrisation h du lemme 5. On a alors $\pi \circ h = \mathrm{Id}_{S^1}$. On peut écrire $\overline{\Phi}$ de la manière suivante : si $z = (p, q) \in S^1 \times S^1 = T^2$, alors $\overline{\Phi}(z) = \psi_q(h(p))$. On voit alors que $\overline{\Phi}$ est une application de classe C^{k-1}. Afin de montrer que c'est un difféomorphisme, il suffit de prouver que :

(a) pour chaque $z \in T^2$: $[d\overline{\Phi}(z)](\partial/\partial p) \neq 0$;

(b) » » » : $[d\overline{\Phi}(z)](\partial/\partial q) \neq 0$.

(a) $(\pi \circ \overline{\Phi})(p, q) = p$, alors $[d(\pi \circ \overline{\Phi})(p, q)](\partial/\partial p) = \partial/\partial p \neq 0$ où, à gauche, $\partial/\partial p$ est un vecteur tangent à T^2 dans (p, q) et, à droite, un vecteur tangent à S^1 dans p. D'autre part,

$$[d(\pi \circ \overline{\Phi})(p, q)](\partial/\partial p) = d\pi\{[d\overline{\Phi}(p, q)](\partial/\partial p)\},$$

d'où il suit immédiatement que $[d\overline{\Phi}(z)](\partial/\partial p) \neq 0$.

(b) Ceci résulte du fait que le champ de vecteurs Y est sans point singulier, et de l'égalité suivante $[d\overline{\Phi}(z)](\partial/\partial q) = Y(\overline{\Phi}(z))$.

Finalement, $\overline{\Phi}$ est un difféomorphisme de classe C^{k-1}. Posons $\Phi = \overline{\Phi}^{-1}$. On voit facilement que la première équation du système (1) du théorème 2 prend dans les coordonnées (u, v) la forme $du/dt > 0$. On a aussi $K = \{(u, v);\ u = 0\}$.