

BULLETIN DE LA S. M. F.

BERNARD VIROT

Modèles d'opérateurs linéaires et translations unilatérales simples

Bulletin de la S. M. F., tome 100 (1972), p. 157-175

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__157_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

MODÈLES D'OPÉRATEURS LINÉAIRES ET TRANSLATIONS UNILATÉRALES SIMPLES

PAR

BERNARD VIROT

[Orléans]

Introduction

Les espaces de Banach considérés sont tous réels ou tous complexes. Soient E et F deux espaces de Banach. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F , et E' le dual topologique de E , munis de leurs normes usuelles. On écrit $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$. On note I_E l'application identique de E sur E . Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\rho(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{1/n}$. Si x appartient à E , on dit que x est un vecteur cyclique pour A lorsque l'ensemble $\{A^n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ est total dans E .

Enfin, si k est un nombre réel tel que $1 \leq k \leq +\infty$, on note k' le nombre conjugué de k , défini par $1/k + 1/k' = 1$.

Dans le paragraphe 1, après avoir rappelé divers résultats, on introduit plusieurs notions de modèles pour un opérateur linéaire continu sur un espace de Banach.

Soit H un espace hilbertien. ROTA a construit un modèle universel pour les opérateurs $A \in \mathcal{L}(H)$, vérifiant la condition $\rho(A) < 1$ [15]. Dans le paragraphe 2, utilisant les normes tensorielles g_k et d_k , introduites par P. SAPHAR [17] et S. CHEVET [2], on généralise ce modèle au cas où H est un espace de Banach quelconque.

Soient E un espace de Banach complexe, et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) \leq 1$. Dans le paragraphe 3, on établit une condition nécessaire et suffisante pour que T possède parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple S . Si E est un espace hilbertien et T une contraction, on retrouve ainsi une condition suffisante pour que S soit une transformée quasi-affine de T , obtenue par NAGY et FOIAS [14].

Dans le paragraphe 4, on obtient notamment le résultat suivant. Soient F un espace de Banach complexe de dimension infinie, et $B \in \mathcal{L}(F)$

un opérateur ayant la propriété $\rho(B) < 1$. Pour que B ait parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple, il faut et il suffit que B possède un vecteur cyclique x . Alors, l'application $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n B^n(x)$ de l^2 dans F est une injection nucléaire à image dense. Ce résultat précise une proposition de GERLACH ([8], p. 251).

§ 1. Rappels et définitions

1. Les normes tensorielles g_k et d_k (introduites par P. SAPHAR [17] et S. CHEVET [2]).

1.1. — Soient E un espace de Banach, $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ une famille d'éléments de E , k un nombre réel tel que $1 \leq k \leq +\infty$, et k' le nombre conjugué de k . On pose

$$N_k[(x_i)_{i \in \mathbb{I}}] = (\sum_{i \in \mathbb{I}} \|x_i\|^k)^{1/k}, \quad \text{si } k \text{ est fini};$$

$$N_\infty[(x_i)_{i \in \mathbb{I}}] = \sup_{i \in \mathbb{I}} \|x_i\|.$$

Soit $\varepsilon = \{x' \in E' \mid \|x'\| \leq 1\}$. On pose

$$M_k[(x_i)_{i \in \mathbb{I}}] = \sup_{x' \in \varepsilon} N_k[\langle x', x_i \rangle_{i \in \mathbb{I}}].$$

S'il n'y a pas ambiguïté, on écrit $N_k(x_i)$ [resp. $M_k(x_i)$] au lieu de $N_k[(x_i)_{i \in \mathbb{I}}]$ (resp. $M_k[(x_i)_{i \in \mathbb{I}}]$).

On dit que la famille $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est scalairement de puissance $k^{\text{ième}}$ sommable si, pour tout $x' \in E'$, on a $N_k(\langle x', x_i \rangle) < +\infty$. Pour que la famille $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ soit scalairement de puissance $k^{\text{ième}}$ sommable, il faut et il suffit que $M_k(x_i)$ soit fini.

1.2. — Soient k un nombre réel tel que $1 \leq k \leq +\infty$, E et F deux espaces de Banach. Si $v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ est un élément du produit tensoriel algébrique $E \otimes F$, on pose

$$g_k(v) = \inf N_k(x_i) M_{k'}(y_i), \quad d_k(v) = \inf M_k(x_i) N_k(y_i),$$

les bornes inférieures étant prises sur l'ensemble des représentations de v de la forme $v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$.

Alors, g_k et d_k sont des normes tensorielles, ou \otimes -normes, sur $E \otimes F$. Donc, elles sont raisonnables (*cf.* [10], § 1). Par suite, pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a

$$g_k(x \otimes y) = d_k(x \otimes y) = \|x\| \cdot \|y\|.$$

De plus, les normes g_1 et d_1 sont égales à la norme projective π de Grothendieck ([2], § 2 et [17], § 3, n° 1).

Soient H_1 et H_2 des espaces hilbertiens. Si $1 < k \leq +\infty$ (resp. $k = 2$), les normes g_k et d_k sont équivalentes (resp. égales) sur $H_1 \otimes H_2$ à la norme du produit tensoriel préhilbertien classique ([17], th. 4.1 et [18], prop. 12).

1.3. — Si ν est une norme raisonnable sur $E \otimes F$, on note $E \otimes_\nu F$ l'espace $E \otimes F$ muni de ν , et $E \hat{\otimes}_\nu F$ son complété.

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F , telles que l'on ait

$$\begin{aligned} N_k(x_n) &< +\infty, \quad \text{et, de plus, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = 0 \quad \text{si } k = +\infty, \\ M_{k'}(y_n) &< +\infty. \end{aligned}$$

Alors, la famille $(x_n \otimes y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable dans $E \hat{\otimes}_{g_k} F$ ([17], lemme 3.1).

2. Les applications k -nucléaires à gauche et à droite (voir [17], § 3, n° 2).

2.1. — On conserve les hypothèses et les notations introduites dans le n° 1 ci-dessus. Il existe une application linéaire continue naturelle Γ_k (resp. Δ_k) de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ (resp. $E' \hat{\otimes}_{d_k} F$) dans $\mathcal{L}(E, F)$. On dit qu'un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ est k -nucléaire à gauche (resp. à droite) s'il appartient à l'image par Γ_k (resp. Δ_k) de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ (resp. $E' \hat{\otimes}_{d_k} F$). On note $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ [resp. $\mathcal{L}_d^k(E, F)$] l'espace des applications k -nucléaires à gauche (resp. à droite) de E dans F .

On peut identifier $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ à l'espace vectoriel quotient

$$E' \hat{\otimes}_{g_k} F / \Gamma_k^{-1}(0).$$

On munit $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ de la norme quotient, qui en fait un espace de Banach. De manière analogue, on définit sur $\mathcal{L}_d^k(E, F)$ une structure d'espace de Banach.

La norme de l'injection canonique de $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ est inférieure ou égale à 1.

2.2. — On dit que E est accessible (ou vérifie l'hypothèse d'approximation) si I_E est limite uniforme sur les compacts de E d'applications linéaires continues de rang fini. Tout espace hilbertien est accessible. (cf. [9], chap. 1, § 5). Si E' ou F sont accessibles, les applications naturelles Γ_k et Δ_k de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ et $E' \hat{\otimes}_{d_k} F$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ sont injectives ([9], chap. 1, p. 95). Alors, l'application naturelle de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ (resp. $E' \hat{\otimes}_{d_k} F$) dans $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ [resp. $\mathcal{L}_d^k(E, F)$] est une isométrie.

3. Les espaces de Hardy \mathcal{H}^p (voir [12], chap. 3 et chap. 5).

3.1. — Soient $D = \{z \mid z \in \mathbf{C} \text{ et } |z| < 1\}$, $\mathcal{H}(D)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur D , à valeurs complexes, et soit p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$. Si f appartient à $\mathcal{H}(D)$, on pose

$$\lambda_p(f) = \sup_{0 < r < 1} \left[\frac{1}{2} \pi \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\theta})|^p d\theta \right]^{1/p}, \quad \text{si } p \text{ est fini;} \\ \lambda_\infty(f) = \sup_{z \in D} |f(z)|.$$

Soit $\mathcal{H}^p = \{f \mid f \in \mathcal{H}(D) \text{ et } \lambda_p(f) < +\infty\}$. Alors, \mathcal{H}^p est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(D)$, et λ_p est une norme sur \mathcal{H}^p ; elle en fait un espace de Banach.

Soient \mathbf{T} l'ensemble des nombres complexes de module 1, et m la mesure de Lebesgue normalisée sur \mathbf{T} [c'est-à-dire telle que $m(\mathbf{T})$ soit égal à 1]. Pour $1 \leq p < +\infty$ (resp. $p = +\infty$), on note L^p l'espace de Banach des classes des fonctions définies sur \mathbf{T} , à valeurs complexes, m -mesurables et de puissance $p^{\text{ème}}$ intégrable (resp. bornées en mesure). Pour $p \leq 1 \leq +\infty$, \mathcal{H}^p est canoniquement isomorphe, en tant qu'espace vectoriel normé, à un sous-espace fermé de L^p .

3.2. — Si f appartient à \mathcal{H}^p , $\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rt)$ existe pour m -presque tout $t \in \mathbf{T}$; on note $f(t)$ cette limite.

Soit $f \in \mathcal{H}^\infty$. On dit que f est une fonction intérieure si on a

$$|f(t)| = 1 \quad \text{pour } m\text{-presque-tout } t \in \mathbf{T}.$$

Toute fonction intérieure f se met sous la forme $f = bs$, b étant un produit de Blaschke et s une fonction intérieure sans zéros dans D .

4. Quasi-affinités ; transformées quasi-affines; opérateurs quasi-semblables (cf. [3], p. 54 et [13], p. 64).

Soient E, F deux espaces de Banach, et $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que Φ est une quasi-affinité de E dans F si elle est injective et si, de plus, $\Phi(E)$ est partout dense dans F .

Soient $A \in \mathcal{L}(E)$ et $B \in \mathcal{L}(F)$. On dit que A est une transformée quasi-affine de B s'il existe une quasi-affinité Φ de E dans F vérifiant la relation

$$\Phi A = B \Phi.$$

On dit que les applications A et B sont quasi-semblables si chacune d'elles est une transformée quasi-affine de l'autre.

5. Certaines classes de contractions.

5.1. — Soient H un espace hilbertien, et C l'ensemble des contractions de H . Si $T \in C$, on pose

$$Z_T = \{ h \mid h \in H \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \| T^n(h) \| = 0 \}.$$

NAGY et FOIAS ont considéré les parties suivantes de C ([13], p. 66 et 114).

On note C_0 . (resp. C_1) l'ensemble des $T \in C$ tels que Z_T soit égal à H (resp. $\{0\}$).

On note C_{\circ} (resp. C_{\cdot}) l'ensemble des $T \in C$ tels que Z_{T^*} soit égal à H (resp. $\{0\}$).

On pose alors :

$$C_{ij} = C_{i\cdot} \cap C_{\cdot j} \quad (i, j = 0, 1).$$

Enfin, supposons H complexe. On note C_0 , ou C_0^H s'il y a ambiguïté, l'ensemble des $T \in C$, complètement non unitaires, tels qu'il existe $f \in \mathcal{E}^\infty$ vérifiant les conditions : 1° $f \not\equiv 0$; 2° $f(T) = 0$ (au sens de NAGY et FOIAS).

On a $C_0 \subset C_{00}$ ([13], chap. III, prop. 4.2).

5.2. — Soient H_1 et H_2 des espaces hilbertiens complexes, $T_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(H_2)$ des contractions complètement non unitaires, telles que l'une soit une transformée quasi-affine de l'autre. Alors, si T_1 appartient à $C_0^{H_1}$, la contraction T_2 appartient à $C_0^{H_2}$ ([13], chap. III, prop. 4.6).

6. Translations unilatérales.

6.1. — Soient H un espace hilbertien, L un sous-espace vectoriel fermé de H , et $U \in \mathcal{L}(H)$ une isométrie. On dit que L est ambulant pour U si $U^n(L)$ est orthogonal à L pour tout entier $n \geq 1$.

L'isométrie U est appelée translation unilatérale s'il existe dans H un sous-espace L ambulant pour U , ayant la propriété

$$H = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} U^n(L).$$

Alors, ce sous espace est déterminé de manière unique par la translation unilatérale U . Sa dimension hilbertienne est appelée multiplicité de U ; elle détermine U à équivalence unitaire près ([13], chap. I, n° 1).

Les translations unilatérales de multiplicité 1 sont également appelées translations unilatérales simples.

6.2. — Toute translation unilatérale est complètement non unitaire ([13], chap. I, n° 3).

Par ailleurs, soit H un espace hilbertien complexe. On a $C_0 \subset C_{00}$ (n° 5.1 ci-dessus). Donc, si $U \in \mathcal{L}(H)$ est une translation unilatérale, U n'appartient pas à C_0 .

7. Modèles; définitions, exemples.

Dans ce numéro, nous introduisons diverses notions de modèles généralisant celle due à ROTA ([15], [16]).

DÉFINITION 1. — Soient E et F des espaces de Banach. Soient $M \in \mathcal{L}(E)$ et $T \in \mathcal{L}(F)$. On dit que M est un modèle de type 1 (resp. 2, 3) pour T s'il existe un sous-espace vectoriel fermé K de E , stable par M , et vérifiant la condition (1) [resp. (2, 3)] suivante.

- (1) M , restreint à K , est semblable à T .
- (2) M , restreint à K , est quasi-semblable à T .
- (3) M , restreint à K , est une transformée quasi-affine de T .

De plus, quand on peut choisir K égal à E , on dit que M est un modèle strict de type 1 (resp. 2, 3) pour T .

EXEMPLE 1. — Quand E et F sont égaux à un même espace hilbertien H , la notion de modèle de type 1 coïncide avec celle de modèle au sens de ROTA. Notamment, ROTA a établi le résultat suivant [15]. Soient \mathcal{E} l'espace hilbertien des suites de carré sommable d'éléments de H , et \mathcal{R} l'opérateur $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (h_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{E} dans lui-même. Alors, \mathcal{R} est un modèle de type 1 pour tout élément T de $\mathcal{L}(H)$ vérifiant la condition $\rho(T) < 1$. On l'appelle modèle de Rota sur H .

EXEMPLE 2. — Soit H un espace hilbertien. D'après NAGY et FOIAS, tout élément de C_{11} possède parmi ses modèles stricts de type 2 un opérateur unitaire ([13], chap. II, prop. 3.5).

EXEMPLE 3. — Soit H un espace hilbertien complexe. Notons \mathfrak{V} l'ensemble des $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i) $T \in C_0$ et $T \notin C_0$;
- (ii) T a un vecteur cyclique.

Tout élément de \mathfrak{V} possède parmi ses modèles stricts de type 3 une translation unilatérale simple ([14], prop. 3). On retrouve ce résultat dans le paragraphe 3 ci-dessous.

§ 2. Généralisation du modèle de Rota

PROPOSITION 1. — Soient H un espace hilbertien séparable, de dimension infinie, et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormale de H . Soient E un espace de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) < 1$, k un nombre réel tel que $1 \leq k \leq +\infty$.

(i) Pour tout $x \in E$, la famille $[T^n(x) \otimes e_n]_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable dans $E \hat{\otimes}_{g_k} H$ (resp. $E \hat{\otimes}_{d_k} H$).

(ii) L'ensemble $\{\Sigma_{n=0}^{+\infty} T^n(x) \otimes e_n \mid x \in E\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E \hat{\otimes}_{g_k} H$ (resp. $E \hat{\otimes}_{d_k} H$); l'application linéaire

$$x \mapsto \Sigma_{n=0}^{+\infty} T^n(x) \otimes e_n$$

de E sur ce sous-espace est une bijection bicontinue.

Démonstration. — La norme g_k est une norme raisonnable (§ 1, n° 1.2). Donc, on a

$$\Sigma_{n=0}^{+\infty} g_k [T^n(x) \otimes e_n] = \Sigma_{n=0}^{+\infty} \|T^n(x)\| \leq \|x\| \Sigma_{n=0}^{+\infty} \|T^n\| < +\infty.$$

Par suite, la famille $[T^n(x) \otimes e_n]_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable dans l'espace de Banach $E \hat{\otimes}_{g_k} H$, et si on note v_x sa somme, on a l'inégalité

$$(2.1) \quad g_k(v_x) \leq \|x\| \Sigma_{n=0}^{+\infty} \|T^n\|.$$

D'autre part, la norme g_k étant une norme tensorielle, l'injection canonique de $E \otimes_{g_k} H$ dans $E'' \otimes_{g_k} H$ est une isométrie [10]. De plus, l'application naturelle de $E'' \hat{\otimes}_{g_k} H$ dans $\mathcal{L}_g^k(E', H)$ est une bijection isométrique (§ 1, n° 2.2). On en déduit qu'il existe une application linéaire isométrique naturelle de $E \hat{\otimes}_{g_k} H$ dans $\mathcal{L}_g^k(E', H)$. Soit V_x l'image par cette application de $v_x = \Sigma_{n=0}^{+\infty} T^n(x) \otimes e_n$. Pour tout $x' \in E'$, on a

$$V_x(x') = \Sigma_{n=0}^{+\infty} \langle x', T^n(x) \rangle e_n.$$

Notons respectivement $\|V_x\|$ et $g_k(V_x)$ les normes de V_x dans $\mathcal{L}(E', H)$ et $\mathcal{L}_g^k(E', H)$. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on obtient aisément l'inégalité

$$\|x\| \leq \|V_x\|,$$

et, d'après le paragraphe 1, n° 2.1, on a

$$\|V_x\| \leq g_k(V_x).$$

Donc, il vient

$$(2.2) \quad \|x\| \leq \|V_x\| \leq g_k(V_x) = g_k(v_x).$$

D'après les inégalités (2.1) et (2.2) ci-dessus, l'ensemble $\{v_x \mid x \in E\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E \hat{\otimes}_{g_k} H$, et l'application linéaire $x \mapsto v_x$ de E sur ce sous-espace est une bijection bicontinue. On raisonne de manière analogue en remplaçant g_k par d_k .

COROLLAIRE. — *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que dans la proposition 1, pour tout $x \in E$, l'application $V_x : x' \mapsto \Sigma_{n=0}^{+\infty} \langle x', T^n(x) \rangle e_n$ de E' dans H est nucléaire.*

Démonstration. — Les normes g_1 et d_1 sont égales à la norme π (§ 1, n° 1.2). Donc, le résultat découle immédiatement de la proposition 1 (i).

REMARQUE 1. — Conservons les hypothèses et les notations de la proposition 1. Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ la translation unilatérale simple définie par $S(e_n) = e_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}$). Pour tout $x \in E$, l'application nucléaire V_x , introduite dans le corollaire ci-dessus, vérifie la relation

$$V_x {}^t T = S^* V_x.$$

Donc, l'adhérence $\overline{V_x(E')}$ de $V_x(E')$ dans H est stable par S^* , et, si V_x est injective, l'opérateur ${}^t T$ est une transformée quasi-affine de S^* restreint à $\overline{V_x(E')}$. D'après le théorème de Hahn-Banach, V_x est injective si et seulement si x est un vecteur cyclique pour T .

REMARQUE 2. — Soient E un espace de Banach complexe, et $x \in E$. Dans le paragraphe 4 ci-dessous, on montre que $\overline{V_x(E')}$ est égal à H si et seulement si le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{T^n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ est de dimension infinie.

Soient F et G deux espaces de Banach, ν une norme tensorielle sur $F \otimes G$; soient $A \in \mathcal{L}(F)$ et $B \in \mathcal{L}(G)$. Alors, $A \otimes B$ est une application linéaire continue de $F \otimes_\nu G$ dans lui-même ([1], § 1, n° 1). On note $A \otimes_\nu B$ son prolongement par continuité à $F \hat{\otimes}_\nu G$. On a le résultat suivant :

PROPOSITION 2. — *On conserve les hypothèses et les notations de la proposition 1. Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ une translation unilatérale simple.*

Les opérateurs $I_E \otimes_{g_k} S^ \in \mathcal{L}(E \hat{\otimes}_{g_k} H)$ et $I_E \otimes_{d_k} S^* \in \mathcal{L}(E \hat{\otimes}_{d_k} H)$ sont des modèles de type 1 pour l'opérateur T .*

Démonstration. — Il existe une base orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de H telle que l'on ait

$$S^*(e_0) = 0, \quad S^*(e_{n+1}) = e_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

D'après la proposition 1, l'ensemble $\mathcal{G} = \{\sum_{n=0}^{+\infty} T^n(x) \otimes e_n \mid x \in E\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E \hat{\otimes}_{g_k} H$, et l'application linéaire $A : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} T^n(x) \otimes e_n$ de E sur \mathcal{G} est une bijection bicontinue. De plus, \mathcal{G} est stable par $I_E \otimes_{g_k} S^*$, et on a

$$\left(I_E \otimes_{g_k} S^* \Big|_{\mathcal{G}} \right) A = AT.$$

Donc, l'opérateur $I_E \otimes_{g_k} S^*$ est un modèle de type 1 pour T .

Un raisonnement analogue montre qu'il en est de même pour $I_E \otimes_{d_k} S^*$.

REMARQUE. — Si E est un espace hilbertien, notons \mathcal{E} l'espace hilbertien des suites de carré sommable d'éléments de E , et \mathcal{R} l'application linéaire $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ de \mathcal{E} dans lui-même. L'opérateur \mathcal{R} est le modèle de Rota sur E (§ 1, n° 7, ex. 1). Si $1 < k \leq +\infty$ (resp. $k = 2$), il est semblable (resp. unitairement équivalent) aux opérateurs $I_E \otimes_{g_k} S^*$ et $I_E \otimes_{d_k} S^*$. Faisons la démonstration pour $I_E \otimes_{g_k} S^*$. Si $1 < k \leq +\infty$ (resp. $k = 2$), la norme g_k est équivalente (resp. égale) sur $E \otimes H$ à la norme du produit tensoriel préhilbertien classique (§ 1, n° 1.2). Donc, l'application linéaire $J_k : (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \otimes e_n$ de \mathcal{E} dans $E \hat{\otimes}_{g_k} H$ est bijective et bicontinue (resp. unitaire). De plus, on a

$$(I_E \otimes_{g_k} S^*) J_k = J_k \mathcal{R}.$$

Le résultat est obtenu. On raisonne de manière analogue en remplaçant g_k par d_k .

§ 3. Transformées quasi-affines ; cas des opérateurs de rayon spectral inférieur ou égal à 1

Introduisons tout d'abord la notion de fonction minimum d'un opérateur relative à un vecteur.

DÉFINITION 1. — Soient E un espace de Banach complexe, $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) \leq 1$, et $x \in E$ un vecteur tel que $\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rT)(x)$ existe pour tout $f \in \mathcal{H}^\infty$. On pose

$$\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{H}^\infty \mid \lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rT)(x) = 0\}.$$

Si q est une fonction intérieure, on dit que q est une fonction minimum de T relative au vecteur x lorsque l'on a

$$\mathcal{N} = q \mathcal{H}^\infty.$$

REMARQUE. — Si l'opérateur T possède une fonction minimum relative au vecteur x , cette fonction est unique, à une constante multiplicative de module 1 près.

Soit $D = \{z \in \mathbf{C} \text{ et } |z| < 1\}$. Si n appartient à \mathbf{N} , on note φ_n l'application $z \mapsto z^n$ de D dans \mathbf{C} .

PROPOSITION 1. — *On fait sur E et T les mêmes hypothèses que dans la définition 1. Soient p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$, et $x \in E$ un vecteur tel que $\lim_{r \rightarrow 1,0 < r < 1} f(rT)(x)$ existe pour tout $f \in \mathcal{E}^p$.*

(i) *L'application linéaire $\Phi : f \mapsto \lim_{r \rightarrow 1,0 < r < 1} f(rT)(x)$ de \mathcal{E}^p dans E est continue. Si on note U l'isométrie $f \mapsto f\varphi_1$ de \mathcal{E}^p dans lui-même, on a la relation $\Phi U = T \Phi$.*

(ii) *Supposons $p < +\infty$. Si Φ n'est pas injective, l'opérateur T possède une fonction minimum relative au vecteur x .*

Démonstration. — Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{E}^p , convergeant vers zéro. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers zéro uniformément sur les compacts de D . Par conséquent, si $0 < r < 1$, $[f_n(rT)]_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers zéro dans $\mathcal{L}(E)$. Donc, l'application linéaire $\Phi_r : f \mapsto f(rT)(x)$ de \mathcal{E}^p dans E est continue. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il en est de même pour Φ .

Si U est l'opérateur de multiplication par φ_1 sur \mathcal{E}^p , des vérifications immédiates montrent que l'on a $\Phi U = T \Phi$. Par suite, le noyau de Φ est un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{E}^p , stable par l'opérateur U . Pour $1 \leq p < +\infty$, un tel sous-espace est, soit réduit à $\{0\}$, soit de la forme $q\mathcal{E}^p$, où q est une fonction intérieure ([11], p. 25). On en déduit immédiatement (ii), puisque l'on a

$$q\mathcal{E}^\infty = \mathcal{E}^\infty \cap [q\mathcal{E}^p].$$

REMARQUE. — Dans le paragraphe 4 ci-dessous, faisant l'hypothèse supplémentaire $\rho(T) < 1$, on montre que toute fonction minimum de T relative au vecteur x est, à une constante multiplicative de module 1 près, un produit de Blaschke fini.

LEMME 1. — *Soient E un espace de Banach, $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E ayant la propriété*

$$\lim \sup_{n \rightarrow +\infty} \|y_n\|^{1/n} \leq 1,$$

et soit p un nombre réel tel que $1 \leq p < +\infty$. Considérons les conditions :

- (i) $M_{p'}(y_n) < +\infty$;
- (ii) *Pour tout $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p$*

$$\lim_{r \rightarrow 1,0 < r < 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n$$

existe dans E .

Alors, (i) et (ii) sont équivalentes. De plus, si elles sont vérifiées, on a

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y_n.$$

Démonstration. — Supposons vérifiée la condition (i). Soient Y' un élément non nul du dual topologique $(l^p)'$ de l^p et $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p$.

On a

$$N_p(\alpha_n Y') < +\infty, \quad M_{p'}(y_n) < +\infty$$

(cf. § 1, n° 1.1). Ces inégalités entraînent la sommabilité de la famille $(\alpha_n Y' \otimes y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $(l^p)' \hat{\otimes}_{s_p} E$ (§ 1, n° 1.3). L'application linéaire naturelle de $(l^p)' \hat{\otimes}_{s_p} E$ dans $\mathcal{L}(l^p, E)$ est continue (§ 1, n° 2.1). Donc, pour tout $Y \in l^p$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \langle Y', Y \rangle y_n$ converge dans E . En particulier $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y_n$ est une série convergente. Utilisant le procédé de sommation d'Abel, on montre alors, comme dans le cas scalaire, que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n$ converge uniformément par rapport à $r \in (0, 1)$. On en déduit

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y_n.$$

Réciproquement, supposons vérifiée la condition (ii). D'après l'inégalité de Hölder, si $0 < r < 1$, l'application linéaire

$$\Phi'_r : (\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n$$

de l^p dans E est continue. Pour tout $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p$, $\Phi'_r[(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}]$ a une limite $\Phi'[(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}]$ quand r tend vers 1 ($0 < r < 1$). D'après le théorème de Banach-Steinhaus, l'application linéaire Φ' de l^p dans E ainsi définie est continue. Si $(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de scalaires ayant au plus un nombre fini de termes non nuls, on a

$$\Phi'[(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}}] = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n y_n.$$

Utilisant la densité dans l^p des suites de cette forme, on obtient

$$\Phi'[(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}] = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y_n, \quad \text{pour tout } (\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p.$$

Soit $x' \in E'$. Pour tout $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p$, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \langle x', y_n \rangle$ est convergente. Donc, $(\langle x', y_n \rangle)_{n \in \mathbf{N}}$ appartient à $l^{p'}$. Le résultat voulu en découle (cf. § 1, n° 1.1).

REMARQUE. — Si on ne fait pas l'hypothèse

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|y_n\|^{1/n} \leq 1,$$

on voit que (i) implique (ii) et que l'on a la relation

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y_n, \quad \text{pour tout } (\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p.$$

PROPOSITION 2. — Soient E un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\varphi(T) \leq 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) T a parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple;
- (ii) T possède un vecteur cyclique x tel que, pour tout élément non nul f de \mathcal{H}^2 , $f(rT)(x)$ ait une limite non nulle quand r tend vers 1 ($0 < r < 1$);
- (iii) T possède un vecteur cyclique x ayant les propriétés :

 - (1) $M_2[(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}] < +\infty$;
 - (2) pour toute fonction intérieure q ,

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} q(rT)(x) \neq 0.$$

Démonstration. — Soit $D = \{z \mid z \in \mathbb{C} \text{ et } |z| < 1\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, soit φ_n l'application $z \mapsto z^n$ de D dans \mathbb{C} . Alors, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de l'espace hilbertien \mathcal{H}^2 .

(i) \Rightarrow (iii) : Supposons vérifiée la condition (i). Deux translations unilatérales de même multiplicité sont unitairement équivalentes (§ 1, n° 6.1). Donc, si S est l'opérateur $f \mapsto \varphi_1 f$ de \mathcal{H}^2 dans lui-même, S est une transformée quasi-affine de T . Notons Q une quasi-affinité de \mathcal{H}^2 dans E vérifiant la relation $QS = TQ$. Le vecteur φ_0 étant cyclique pour S , $x = Q(\varphi_0)$ est cyclique pour T .

Par ailleurs, si f appartient à \mathcal{H}^2 , posons $f = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \varphi_n ((\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2)$. Il vient

$$f(rT)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n T^n(x).$$

Compte tenu des relations

$$T^n Q = QS^n, \quad S^n(\varphi_0) = \varphi_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

on en déduit :

$$(3.1) \quad f(rT)(x) = Q(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \varphi_n).$$

Dans \mathcal{H}^2 , on a

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \varphi_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \varphi_n = f,$$

par suite, l'égalité (3.1) ci-dessus implique

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rT)(x) = Q(f), \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{H}^2.$$

Utilisant le lemme 1 et le fait que Q est injective, on en déduit (iii).

(iii) \Rightarrow (ii) : Soit x un vecteur cyclique pour T vérifiant les conditions (1) et (2) de (iii). D'après le lemme 1, pour tout $f \in \mathcal{H}^2$,

$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rT)(x)$ existe dans E . Supposons qu'il existe un élément non nul f de \mathcal{E}^2 tel que l'on ait

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rT)(x) = 0.$$

Alors, d'après la proposition 1, l'opérateur T possède une fonction minimum q relative au vecteur x . On a

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} q(rT)(x) = 0,$$

ce qui contredit la condition (2) de (iii).

(ii) \Rightarrow (i) : Supposons vérifiée la condition (ii). Soit Φ l'application linéaire $f \mapsto \lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rT)(x)$ de \mathcal{E}^2 dans E . Par hypothèse, Φ est injective; de plus, le vecteur x étant cyclique pour T , on a

$$\overline{\Phi(\mathcal{E}^2)} = E.$$

Utilisant la proposition 1, on en déduit que l'opérateur de multiplication par φ_1 sur \mathcal{E}^2 est une transformée quasi-affine de T .

PROPOSITION 3. — *Soient H un espace hilbertien complexe, et $T \in \mathcal{L}(H)$ une contraction complètement non unitaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *L'opérateur T a parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple;*
- (ii) *$T \notin C_0$ et, de plus, T possède un vecteur cyclique x tel que $M_x[(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}] < +\infty$.*

Démonstration. — Supposons vérifiée la condition (i). D'après la proposition 2, T possède un vecteur cyclique x tel que l'on ait $M_x[(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}] < +\infty$. De plus, d'après le paragraphe 1, n° 5.2 et n° 6.2, l'opérateur T n'appartient pas à C_0 .

Réciproquement, montrons que (ii) implique (i). Supposons vérifiée la condition (ii). D'après la proposition 2, il suffit de montrer que, pour toute fonction intérieure q , on a $\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} q(rT)(x) \neq 0$. Soit q une fonction intérieure vérifiant la relation

$$(3.2) \quad \lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} q(rT)(x) = 0.$$

La contraction T étant complètement non unitaire, l'application linéaire $q(T) : h \mapsto \lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} q(rT)(h)$ de H dans lui-même est continue ([13], chap. III, th. 2.1). D'après la relation (3.2) ci-dessus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $q(T)[T^n(x)] = 0$; puisque x est un vecteur cyclique pour T , on en déduit $q(T) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $T \notin C_0$.

Le corollaire suivant a été obtenu par NAGY et FOIAS ([14], prop. 3).

COROLLAIRE. — Soient H un espace hilbertien complexe, et $T \in \mathcal{L}(H)$ une contraction ayant les propriétés :

$T \in C_0$ et $T \notin C_0$;

T possède un vecteur cyclique.

Alors, l'opérateur T a parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple.

Démonstration. — Soit U la dilatation unitaire minimum de T , définie sur un espace hilbertien \mathbf{H} contenant H ([13], chap. I, n° 4). On note P_H le projecteur orthogonal de \mathbf{H} sur H , et \mathbf{H}_+ le sous-espace vectoriel fermé de \mathbf{H} engendré par $\cup_{n \in \mathbf{N}} U^n(H)$.

Si x_0 est un vecteur cyclique pour T , on pose $H_0 = \mathbf{C}x_0$, et on note N le sous-espace vectoriel fermé de \mathbf{H}_+ engendré par $\cup_{n \in \mathbf{N}} U^n(H_0)$. Alors, on a les résultats suivants ([14], § 1, n° 2) :

(i) $F = N \ominus U(N)$ est ambulant pour U (cf. § 1, n° 6.1);

(ii) $\dim F = \dim H_0 = 1$; le sous-espace vectoriel fermé de \mathbf{H} engendré par $\cup_{n \in \mathbf{N}} T^n P_H(F)$ est égal à H ;

(iii) Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$P_H U^n \Big|_{\mathbf{H}_+} = T^n P_H \Big|_{\mathbf{H}_+}.$$

D'après (ii), si X est un élément non nul de F , le vecteur $x = P_H(X)$ est cyclique pour T .

Soit $y \in H$. On déduit de (iii) :

$$\langle y, T^n(x) \rangle = \langle y, U^n(X) \rangle, \text{ pour tout } n \in \mathbf{N};$$

par suite, d'après (i), on a $M_2[(T^n(x))_{n \in \mathbf{N}}] < +\infty$.

Enfin, puisque la contraction T appartient à C_0 , elle est complètement non unitaire. Le résultat découle alors de la proposition 3.

§ 4. Transformées quasi-affines; cas des opérateurs de rayon spectral strictement inférieur à 1

Soient E un espace de Banach complexe, et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur dont le rayon spectral $\rho(T)$ est strictement inférieur à 1. Si f est une fonction holomorphe sur le disque unité ouvert D de \mathbf{C} , à valeurs complexes, on a, dans $\mathcal{L}(E)$,

$$f(T) = \lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rT).$$

Soit $x \in E$ un vecteur tel qu'il existe un élément f non nul de l'espace de Hardy \mathcal{H}^1 vérifiant la relation $f(T)(x) = 0$. Alors, on peut considérer une fonction minimum de T relative au vecteur x (§ 3, prop. 1).

On a le résultat suivant :

PROPOSITION 1. — Soient E un espace de Banach complexe, $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) < 1$, et x un vecteur non nul de E tel que l'on ait $\{f \mid f \in \mathcal{A}^1 \text{ et } f(T)(x) = 0\} \neq \{0\}$. Toute fonction minimum de T relative au vecteur x est, à une constante multiplicative de module 1 près, un produit de Blaschke fini, non constant, dont les zéros sont des valeurs propres de T .

Démonstration. — Soit q une fonction minimum de T relative au vecteur x . D'après le « Spectral Mapping Theorem », si q ne s'annule pas sur D , l'opérateur $q(T)$ est inversible ([7], p. 569). Or, ceci est impossible, puisque $q(T)(x) = 0$. La fonction q a donc des zéros dans D . Soit μ l'un d'eux. Il existe une fonction intérieure w ayant la propriété

$$(4.1) \quad q(z) = \frac{\mu - z}{1 - \bar{\mu}z} w(z), \quad \text{pour tout } z \in D.$$

On en déduit :

$$(I_E - \bar{\mu}T)q(T) = (\mu I_E - T)w(T).$$

Par suite, si μ n'est pas valeur propre de T , la relation $q(T)(x) = 0$ entraîne $w(T)(x) = 0$. Alors, q étant une fonction minimum de T relative au vecteur x , on a

$$(4.2) \quad w = qf, \quad \text{où } f \text{ est intérieure.}$$

Des vérifications immédiates montrent que les relations (4.1) et (4.2) sont incompatibles. Tout zéro de q dans D est donc une valeur propre dans T . Le spectre de l'opérateur T est une partie compacte de D . La fonction intérieure q étant holomorphe sur D et non identiquement nulle, elle a au plus un nombre fini de zéros sur ce compact. Donc, l'ensemble (non vide) des zéros de q dans D est fini.

Par ailleurs, on sait que q se met sous la forme

$$(4.3) \quad q = bs,$$

où b est un produit de Blaschke et s une fonction intérieure sans zéros dans D (§ 1, n° 3.2). Les fonctions b et q ont les mêmes zéros dans D . Par suite, b est un produit de Blaschke fini, non constant, dont les zéros sont des valeurs propres de T . D'après le « Spectral Mapping Theorem », l'opérateur $s(T)$ est inversible; donc, les relations

$$q(T)(x) = s(T)b(T)(x) = 0$$

impliquent $b(T)(x) = 0$. Compte tenu de la relation (4.3) ci-dessus, on en déduit que b est une fonction minimum de T relative au vecteur x .

COROLLAIRE 1. — *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que dans la proposition 1, il existe un polynôme R , de degré supérieur ou égal à 1, ayant les deux propriétés suivantes :*

- (i) $R(T)(x) = 0$;
- (ii) *Les zéros de R sont des valeurs propres de T .*

Démonstration. — Il suffit de considérer le numérateur R du produit de Blaschke, donné par la proposition 1 (cf. [14], p. 41).

REMARQUE. — Soient H un espace hilbertien complexe, et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur ayant les propriétés

$$\|T\| < 1 \quad \text{et} \quad T \in C_0.$$

NAGY et FOIAS ont démontré dans [14] qu'il existe alors un polynôme P , de degré supérieur ou égal à 1, vérifiant $P(T) = 0$.

PROPOSITION 2. — *Soient E un espace de Banach complexe, $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) < 1$. Soient $x \in E$, et p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$.*

Si on note Φ l'application $f \mapsto f(T)(x)$ de \mathcal{C}^p dans E , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Φ est injective;
- (ii) *Le sous-espace vectoriel de E , engendré par $\{T^n(x) | n \in \mathbb{N}\}$, est de dimension infinie.*

Démonstration. — Il est clair que (i) implique (ii). Réciproquement, supposons Φ non injective. Alors, il existe un polynôme R , de degré supérieur ou égal à 1, vérifiant la relation $R(T)(x) = 0$. En effet, si $x = 0$, cela est évident, et si $x \neq 0$, cela résulte du corollaire 1. De la relation $R(T)(x) = 0$, on déduit que le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{T^n(x) | n \in \mathbb{N}\}$ est de dimension finie (cf. [14], p. 42).

COROLLAIRE 2. — *Soient H un espace hilbertien complexe, séparable, de dimension infinie, et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormale de H . Soient E un espace de Banach complexe, $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) < 1$. Soit $x \in E$. Notons V_x l'application $x' \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x', T^n(x) \rangle e_n$ de E' dans H . Pour que $V_x(E')$ soit partout dense dans H , il faut et il suffit que le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{T^n(x) | n \in \mathbb{N}\}$ soit de dimension infinie.*

Démonstration. — L'application V_x a été introduite dans le paragraphe 2 (corol. de la prop. 1). On peut supposer que H est égal à l'espace de Hardy \mathcal{H}^2 , et e_n à l'application $\varphi_n : z \mapsto z^n$ ($|z| < 1$, $n \in \mathbb{N}$). Notons Λ l'involution

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \varphi_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{\alpha}_n \varphi_n$$

de \mathcal{H}^2 sur lui-même ($(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^2$). Si Φ est l'opérateur $f \mapsto f(T)(x)$ de \mathcal{H}^2 dans E , des vérifications immédiates montrent que l'on a

$$\mathcal{H}^2 \ominus \overline{V_x(E')} = \Lambda(\text{Ker } \Phi).$$

Donc, le résultat découle de la proposition 2.

PROPOSITION 3. — *Soient E un espace de Banach complexe, de dimension infinie, et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) < 1$. Considérons les conditions :*

(i) *T possède un vecteur cyclique x ;*

(ii) *T a parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple.*

Alors (i) et (ii) sont équivalentes. De plus, si elles sont vérifiées, l'application

$$(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n T^n(x)$$

de l^2 dans E est une injection nucléaire, à image dense.

Démonstration. — Supposons vérifiée la condition (i). Le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{T^n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ est de dimension infinie. Donc, d'après la proposition 2, l'application $f \mapsto f(T)(x)$ de \mathcal{H}^2 dans E est injective. Utilisant alors la proposition 2 du paragraphe 3, on obtient (ii).

Par ailleurs, toute translation unilatérale simple a un vecteur cyclique. Donc, (ii) implique (i).

Si x est un vecteur cyclique pour T , soit Φ' l'application $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n T^n(x)$ de l^2 dans E . Il est clair que $\Phi'(l^2)$ est partout dense dans E ; des vérifications immédiates montrent que Φ' est nucléaire. Enfin, d'après la proposition 2, elle est injective.

REMARQUE. — On retrouve ainsi, en le précisant, un résultat annoncé récemment par GERLACH ([8], p. 251).

Indiquons quelques conséquences simples des résultats précédents.

PROPOSITION 4. — *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que dans la proposition 3, si T a un vecteur cyclique toute translation unilatérale simple est un modèle strict de type 3 pour T .*

PROPOSITION 5. — *Soient E un espace de Banach, et $A \in \mathcal{L}(E)$. Si on note $c(A)$ l'ensemble des vecteurs cycliques pour A , $c(A)$ est un G_δ de E . De plus, si E est complexe et de dimension infinie, $c(A)$ est vide ou total dans E .*

Démonstration. — Si $c(A)$ est vide, il est clair que $c(A)$ est un G_δ . Supposons $c(A)$ non vide. Soit $x_0 \in c(A)$. Si on note \mathcal{C} le sous-espace

vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $\{A^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ on a

$$c(A) = \bigcap_{m \in \mathbf{N}} \bigcup_{A' \in \alpha} \{x \in E \mid \|A'(x) - x_0\| < 1/(m+1)\},$$

(cf. [4], lemme 4). Donc $c(A)$ est un G_δ .

Supposons maintenant E complexe et de dimension infinie. Si $c(A)$ n'est pas vide, on voit que $c(A)$ est total dans E en utilisant la proposition 3, et en raisonnant exactement comme dans [14], remarque 4.

REMARQUE. — Si E est un espace hilbertien complexe, de dimension infinie, NAGY et FOIAS ont démontré que $c(A)$ est vide ou total dans E . Ce résultat a été généralisé au cas où E est un espace de Banach quelconque par M. L. GEHÉR (cf. [14], rem. 4).

PROPOSITION 6. — Soient H un espace hilbertien complexe, séparable, de dimension infinie, et $S \in \mathcal{L}(H)$ une translation unilatérale simple. L'ensemble $c(S^*)$ est un G_δ partout dense dans H .

Démonstration. — Il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^2)$ tel que l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés non triviaux de \mathcal{H}^2 , stables par T , soit dénombrable ([5], ex. 1). Rangeons ses éléments en une suite $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$. On a

$$c(T) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{E \in \mathcal{H}^2} E_n.$$

L'espace \mathcal{H}^2 étant un espace de Baire, on en déduit

$$\overline{c(T)} = \mathcal{H}^2.$$

De même, il vient

$$\overline{c(T^*)} = \mathcal{H}^2.$$

On peut supposer $\|T\| < 1$. Alors, d'après la proposition 3, S est une transformée quasi-affine de T , et, par suite, T^* est une transformée quasi-affine de S^* . On en déduit, par des vérifications immédiates, que $c(S^*)$ est partout dense dans H .

Enfin, d'après la proposition 5, $c(S^*)$ est un G_δ de H .

Le résultat est obtenu.

REMARQUE. — DOUGLAS, SHAPIRO et SHIELDS ont démontré que $c(S^*)$ est partout dense dans H et que $\overline{\bigcup c(S^*)}$ est un ensemble de première catégorie (ou maigre) dans H ([6], cor. 2.2.10 et th. 2.3.3).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMEMIYA (I.) and SHIGA (K.). — On tensor products of Banach spaces, *Kodai math. Sem. Rep.*, t. 9, 1957, p. 161-178.
- [2] CHEVET (Simone). — Sur certains produits tensoriels topologiques d'espaces de Banach, *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. 11, 1969, p. 120-138.
- [3] COLOJOARA (I.) and FOIAS (C.). — *Theory of generalized spectral operators*. — New York, Gordon and Breach, 1968 (*Mathematics and its Applications*, 9).
- [4] DIXMIER (J.) et MARÉCHAL (O.). — Vecteurs totalisateurs d'une algèbre de von Neumann (à paraître).
- [5] DONOGHUE (W. F.). — The lattice of invariant subspaces of a completely continuous quasi-nilpotent transformation, *Pacific J. Math.*, t. 7, 1957, p. 1031-1035.
- [6] DOUGLAS (R. G.), SHAPIRO (H. S.) and SHIELDS (A. L.). — Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 20, 1970, fasc. 1, p. 37-76.
- [7] DUNFORD (N.) and SCHWARTZ (J. T.). — *Linear operators*, Parts 1 and 2. — New York, Interscience Publishers, 1967 (*Pure and applied Mathematics*, Interscience, 7).
- [8] GERLACH (E.). — Sous-espaces hilbertiens invariants pour un opérateur linéaire, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 272, 1971, série A, p. 251-253.
- [9] GROTHENDIECK (A.). — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. — Providence, American mathematical Society, 1955 (*Memoirs of the American mathematical Society*, 16).
- [10] GROTHENDIECK (A.). — Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, *Bol. Soc. Mat. São Paulo*, t. 8, 1956, p. 1-79.
- [11] HELSON (H.). — *Lectures on invariant subspaces*. — New York, Academic Press, 1964.
- [12] HOFFMAN (K.). — *Banach spaces of analytic functions*. — Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1965 (*Prentice-Hall Series in modern Analysis*).
- [13] NAGY (B. Sz.) et FOIAS (C.). — *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*. — Paris, Masson et C^e; Budapest, Akadémiai Kiado, 1967.
- [14] NAGY (B. Sz.) et FOIAS (C.). — Vecteurs cycliques et quasi-affinités, *Studia Math.*, Warszawa, t. 31, 1968, p. 35-42.
- [15] ROTA (G. C.). — On models for linear operators, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 13, 1960, p. 469-472.
- [16] ROTA (G. C.). — Note on the invariant subspaces of linear operators, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, série 2, t. 8, 1959, p. 182-184.
- [17] SAPHAR (P.). — Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications linéaires, *Studia Math.*, Warszawa, t. 38, 1970, p. 71-100.
- [18] SAPHAR (P.). — Applications à puissance nucléaire et applications de Hilbert-Schmidt dans les espaces de Banach, *Ann. scient. École Norm. Sup.*, t. 83, 1966, p. 113-151.

(Texte reçu le 19 octobre 1971.)

Bernard VIROT,
 Département de Mathématiques,
 Faculté des Sciences d'Orléans,
 Domaine universitaire de la Source,
 45-Orléans 02.