

BULLETIN DE LA S. M. F.

BERNARD VIROT

Modèles d'opérateurs linéaires et translations unilatérales simples

Bulletin de la S. M. F., tome 100 (1972), p. 157-175

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__157_0

© Bulletin de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODÈLES D'OPÉRATEURS LINÉAIRES ET TRANSLATIONS UNILATÉRALES SIMPLES

PAR

BERNARD VIROT

[Orléans]

Introduction

Les espaces de Banach considérés sont tous réels ou tous complexes. Soient E et F deux espaces de Banach. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F , et E' le dual topologique de E , munis de leurs normes usuelles. On écrit $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$. On note I_E l'application identique de E sur E . Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\rho(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{1/n}$. Si x appartient à E , on dit que x est un vecteur cyclique pour A lorsque l'ensemble $\{A^n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ est total dans E .

Enfin, si k est un nombre réel tel que $1 \leq k \leq +\infty$, on note k' le nombre conjugué de k , défini par $1/k + 1/k' = 1$.

Dans le paragraphe 1, après avoir rappelé divers résultats, on introduit plusieurs notions de modèles pour un opérateur linéaire continu sur un espace de Banach.

Soit H un espace hilbertien. ROTA a construit un modèle universel pour les opérateurs $A \in \mathcal{L}(H)$, vérifiant la condition $\rho(A) < 1$ [15]. Dans le paragraphe 2, utilisant les normes tensorielles g_k et d_k , introduites par P. SAPHAR [17] et S. CHEVET [2], on généralise ce modèle au cas où H est un espace de Banach quelconque.

Soient E un espace de Banach complexe, et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) \leq 1$. Dans le paragraphe 3, on établit une condition nécessaire et suffisante pour que T possède parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple S . Si E est un espace hilbertien et T une contraction, on retrouve ainsi une condition suffisante pour que S soit une transformée quasi-affine de T , obtenue par NAGY et FOIAS [14].

Dans le paragraphe 4, on obtient notamment le résultat suivant. Soient F un espace de Banach complexe de dimension infinie, et $B \in \mathcal{L}(F)$

un opérateur ayant la propriété $\rho(B) < 1$. Pour que B ait parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple, il faut et il suffit que B possède un vecteur cyclique x . Alors, l'application $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n B^n(x)$ de l^2 dans F est une injection nucléaire à image dense. Ce résultat précise une proposition de GERLACH ([8], p. 251).

§ 1. Rappels et définitions

1. Les normes tensorielles g_k et d_k (introduites par P. SAPHAR [17] et S. CHEVET [2]).

1.1. — Soient E un espace de Banach, $(x_i)_{i \in \mathbf{I}}$ une famille d'éléments de E , k un nombre réel tel que $1 \leq k \leq +\infty$, et k' le nombre conjugué de k . On pose

$$N_k[(x_i)_{i \in \mathbf{I}}] = (\sum_{i \in \mathbf{I}} \|x_i\|^k)^{1/k}, \quad \text{si } k \text{ est fini};$$

$$N_\infty[(x_i)_{i \in \mathbf{I}}] = \sup_{i \in \mathbf{I}} \|x_i\|.$$

Soit $\varepsilon = \{x' \in E' \mid \|x'\| \leq 1\}$. On pose

$$M_k[(x_i)_{i \in \mathbf{I}}] = \sup_{x' \in \varepsilon} N_k[(\langle x', x_i \rangle)_{i \in \mathbf{I}}].$$

S'il n'y a pas ambiguïté, on écrit $N_k(x_i)$ [resp. $M_k(x_i)$] au lieu de $N_k[(x_i)_{i \in \mathbf{I}}]$ (resp. $M_k[(x_i)_{i \in \mathbf{I}}]$).

On dit que la famille $(x_i)_{i \in \mathbf{I}}$ est scalairement de puissance $k^{\text{ième}}$ sommable si, pour tout $x' \in E'$, on a $N_k(\langle x', x_i \rangle) < +\infty$. Pour que la famille $(x_i)_{i \in \mathbf{I}}$ soit scalairement de puissance $k^{\text{ième}}$ sommable, il faut et il suffit que $M_k(x_i)$ soit fini.

1.2. — Soient k un nombre réel tel que $1 \leq k \leq +\infty$, E et F deux espaces de Banach. Si $v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ est un élément du produit tensoriel algébrique $E \otimes F$, on pose

$$g_k(v) = \inf N_k(x_i) M_{k'}(y_i), \quad d_k(v) = \inf M_{k'}(x_i) N_k(y_i),$$

les bornes inférieures étant prises sur l'ensemble des représentations de v de la forme $v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$.

Alors, g_k et d_k sont des normes tensorielles, ou \otimes -normes, sur $E \otimes F$. Donc, elles sont raisonnables (cf. [10], § 1). Par suite, pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a

$$g_k(x \otimes y) = d_k(x \otimes y) = \|x\| \cdot \|y\|.$$

De plus, les normes g_1 et d_1 sont égales à la norme projective π de Grothendieck ([2], § 2 et [17], § 3, n° 1).

Soient H_1 et H_2 des espaces hilbertiens. Si $1 < k \leq +\infty$ (resp. $k = 2$), les normes g_k et d_k sont équivalentes (resp. égales) sur $H_1 \otimes H_2$ à la norme du produit tensoriel préhilbertien classique ([17], th. 4.1 et [18], prop. 12).

1.3. — Si ν est une norme raisonnable sur $E \otimes F$, on note $E \otimes_\nu F$ l'espace $E \otimes F$ muni de ν , et $E \hat{\otimes}_\nu F$ son complété.

Soient $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E et $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de F , telles que l'on ait

$$N_k(x_n) < +\infty, \quad \text{et, de plus,} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = 0 \quad \text{si} \quad k = +\infty, \\ M_{k'}(y_n) < +\infty.$$

Alors, la famille $(x_n \otimes y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est sommable dans $E \hat{\otimes}_{g_k} F$ ([17], lemme 3.1).

2. Les applications k -nucléaires à gauche et à droite (voir [17], § 3, n° 2).

2.1. — On conserve les hypothèses et les notations introduites dans le n° 1 ci-dessus. Il existe une application linéaire continue naturelle Γ_k (resp. Δ_k) de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ (resp. $E' \hat{\otimes}_{d_k} F$) dans $\mathcal{L}(E, F)$. On dit qu'un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ est k -nucléaire à gauche (resp. à droite) s'il appartient à l'image par Γ_k (resp. Δ_k) de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ (resp. $E' \hat{\otimes}_{d_k} F$). On note $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ [resp. $\mathcal{L}_d^k(E, F)$] l'espace des applications k -nucléaires à gauche (resp. à droite) de E dans F .

On peut identifier $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ à l'espace vectoriel quotient

$$E' \hat{\otimes}_{g_k} F / \Gamma_k^{-1}(0).$$

On munit $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ de la norme quotient, qui en fait un espace de Banach. De manière analogue, on définit sur $\mathcal{L}_d^k(E, F)$ une structure d'espace de Banach.

La norme de l'injection canonique de $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ est inférieure ou égale à 1.

2.2. — On dit que E est accessible (ou vérifie l'hypothèse d'approximation) si I_E est limite uniforme sur les compacts de E d'applications linéaires continues de rang fini. Tout espace hilbertien est accessible. (cf. [9], chap. 1, § 5). Si E' ou F sont accessibles, les applications naturelles Γ_k et Δ_k de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ et $E' \hat{\otimes}_{d_k} F$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ sont injectives ([9], chap. 1, p. 95). Alors, l'application naturelle de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ (resp. $E' \hat{\otimes}_{d_k} F$) dans $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ [resp. $\mathcal{L}_d^k(E, F)$] est une isométrie.

3. Les espaces de Hardy \mathcal{H}^p (voir [12], chap. 3 et chap. 5).

3.1. — Soient $D = \{z \mid z \in \mathbf{C} \text{ et } |z| < 1\}$, $\mathcal{H}(D)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur D , à valeurs complexes, et soit p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$. Si f appartient à $\mathcal{H}(D)$, on pose

$$\lambda_p(f) = \sup_{0 < r < 1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right]^{1/p}, \quad \text{si } p \text{ est fini;}$$

$$\lambda_\infty(f) = \sup_{z \in D} |f(z)|.$$

Soit $\mathcal{H}^p = \{f \mid f \in \mathcal{H}(D) \text{ et } \lambda_p(f) < +\infty\}$. Alors, \mathcal{H}^p est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(D)$, et λ_p est une norme sur \mathcal{H}^p ; elle en fait un espace de Banach.

Soient \mathbf{T} l'ensemble des nombres complexes de module 1, et m la mesure de Lebesgue normalisée sur \mathbf{T} [c'est-à-dire telle que $m(\mathbf{T})$ soit égal à 1]. Pour $1 \leq p < +\infty$ (resp. $p = +\infty$), on note L^p l'espace de Banach des classes des fonctions définies sur \mathbf{T} , à valeurs complexes, m -mesurables et de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable (resp. bornées en mesure). Pour $p \leq 1 \leq +\infty$, \mathcal{H}^p est canoniquement isomorphe, en tant qu'espace vectoriel normé, à un sous-espace fermé de L^p .

3.2. — Si f appartient à \mathcal{H}^p , $\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rt)$ existe pour m -presque tout $t \in \mathbf{T}$; on note $f(t)$ cette limite.

Soit $f \in \mathcal{H}^\infty$. On dit que f est une fonction intérieure si on a

$$|f(t)| = 1 \quad \text{pour } m\text{-presque-tout } t \in \mathbf{T}.$$

Toute fonction intérieure f se met sous la forme $f = bs$, b étant un produit de Blaschke et s une fonction intérieure sans zéros dans D .

4. Quasi-affinités ; transformées quasi-affines; opérateurs quasi-semblables (cf. [3], p. 54 et [13], p. 64).

Soient E, F deux espaces de Banach, et $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que Φ est une quasi-affinité de E dans F si elle est injective et si, de plus, $\Phi(E)$ est partout dense dans F .

Soient $A \in \mathcal{L}(E)$ et $B \in \mathcal{L}(F)$. On dit que A est une transformée quasi-affine de B s'il existe une quasi-affinité Φ de E dans F vérifiant la relation

$$\Phi A = B \Phi.$$

On dit que les applications A et B sont quasi-semblables si chacune d'elles est une transformée quasi-affine de l'autre.

5. Certaines classes de contractions.

5.1. — Soient H un espace hilbertien, et C l'ensemble des contractions de H . Si $T \in C$, on pose

$$Z_T = \{ h \mid h \in H \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \| T^n(h) \| = 0 \}.$$

NAGY et FOIAS ont considéré les parties suivantes de C ([13], p. 66 et 114).

On note C_0 (resp. C_1) l'ensemble des $T \in C$ tels que Z_T soit égal à H (resp. $\{0\}$).

On note C_{0*} (resp. C_{1*}) l'ensemble des $T \in C$ tels que Z_{T^*} soit égal à H (resp. $\{0\}$).

On pose alors :

$$C_{ij} = C_i \cap C_j \quad (i, j = 0, 1).$$

Enfin, supposons H complexe. On note C_0^H , ou C_0^H s'il y a ambiguïté, l'ensemble des $T \in C$, complètement non unitaires, tels qu'il existe $f \in \mathcal{H}^\infty$ vérifiant les conditions : 1° $f \not\equiv 0$; 2° $f(T) = 0$ (au sens de NAGY et FOIAS).

On a $C_0 \subset C_{00}$ ([13], chap. III, prop. 4.2).

5.2. — Soient H_1 et H_2 des espaces hilbertiens complexes, $T_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(H_2)$ des contractions complètement non unitaires, telles que l'une soit une transformée quasi-affine de l'autre. Alors, si T_1 appartient à $C_0^{H_1}$, la contraction T_2 appartient à $C_0^{H_2}$ ([13], chap. III, prop. 4.6).

6. Translations unilatérales.

6.1. — Soient H un espace hilbertien, L un sous-espace vectoriel fermé de H , et $U \in \mathcal{L}(H)$ une isométrie. On dit que L est ambulant pour U si $U^n(L)$ est orthogonal à L pour tout entier $n \geq 1$.

L'isométrie U est appelée translation unilatérale s'il existe dans H un sous-espace L ambulant pour U , ayant la propriété

$$H = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} U^n(L).$$

Alors, ce sous espace est déterminé de manière unique par la translation unilatérale U . Sa dimension hilbertienne est appelée multiplicité de U ; elle détermine U à équivalence unitaire près ([13], chap. I, n° 1).

Les translations unilatérales de multiplicité 1 sont également appelées translations unilatérales simples.

6.2. — Toute translation unilatérale est complètement non unitaire ([13], chap. I, n° 3).

Par ailleurs, soit H un espace hilbertien complexe. On a $C_0 \subset C_{00}$ (n° 5.1 ci-dessus). Donc, si $U \in \mathcal{L}(H)$ est une translation unilatérale, U n'appartient pas à C_0 .

7. Modèles; définitions, exemples.

Dans ce numéro, nous introduisons diverses notions de modèles généralisant celle due à ROTA ([15], [16]).

DÉFINITION 1. — Soient E et F des espaces de Banach. Soient $M \in \mathcal{L}(E)$ et $T \in \mathcal{L}(F)$. On dit que M est un modèle de type 1 (resp. 2, 3) pour T s'il existe un sous-espace vectoriel fermé K de E , stable par M , et vérifiant la condition (1) [resp. (2, 3)] suivante.

- (1) M , restreint à K , est semblable à T .
- (2) M , restreint à K , est quasi-semblable à T .
- (3) M , restreint à K , est une transformée quasi-affine de T .

De plus, quand on peut choisir K égal à E , on dit que M est un modèle strict de type 1 (resp. 2, 3) pour T .

EXEMPLE 1. — Quand E et F sont égaux à un même espace hilbertien H , la notion de modèle de type 1 coïncide avec celle de modèle au sens de ROTA. Notamment, ROTA a établi le résultat suivant [15]. Soient \mathcal{H} l'espace hilbertien des suites de carré sommable d'éléments de H , et \mathcal{A} l'opérateur $(h_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto (h_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ de \mathcal{H} dans lui-même. Alors, \mathcal{A} est un modèle de type 1 pour tout élément T de $\mathcal{L}(H)$ vérifiant la condition $\rho(T) < 1$. On l'appelle modèle de Rota sur H .

EXEMPLE 2. — Soit H un espace hilbertien. D'après NAGY et FOIAS, tout élément de C_{11} possède parmi ses modèles stricts de type 2 un opérateur unitaire ([13], chap. II, prop. 3.5).

EXEMPLE 3. — Soit H un espace hilbertien complexe. Notons \mathcal{V} l'ensemble des $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i) $T \in C_{\cdot 0}$ et $T \notin C_0$;
- (ii) T a un vecteur cyclique.

Tout élément de \mathcal{V} possède parmi ses modèles stricts de type 3 une translation unilatérale simple ([14], prop. 3). On retrouve ce résultat dans le paragraphe 3 ci-dessous.

§ 2. Généralisation du modèle de Rota

PROPOSITION 1. — Soient H un espace hilbertien séparable, de dimension infinie, et $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une base orthonormale de H . Soient E un espace de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) < 1$, k un nombre réel tel que $1 \leq k \leq +\infty$.

(i) Pour tout $x \in E$, la famille $[T^n(x) \otimes e_n]_{n \in \mathbf{N}}$ est sommable dans $E \hat{\otimes}_{g_k} H$ (resp. $E \hat{\otimes}_{d_k} H$).

(ii) L'ensemble $\{\sum_{n=0}^{+\infty} T^n(x) \otimes e_n \mid x \in E\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E \hat{\otimes}_{g_k} H$ (resp. $E \hat{\otimes}_{d_k} H$); l'application linéaire

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} T^n(x) \otimes e_n$$

de E sur ce sous-espace est une bijection bicontinue.

Démonstration. — La norme g_k est une norme raisonnable (§ 1, n° 1.2). Donc, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} g_k[T^n(x) \otimes e_n] = \sum_{n=0}^{+\infty} \|T^n(x)\| \leq \|x\| \sum_{n=0}^{+\infty} \|T^n\| < +\infty.$$

Par suite, la famille $[T^n(x) \otimes e_n]_{n \in \mathbf{N}}$ est sommable dans l'espace de Banach $E \hat{\otimes}_{g_k} H$, et si on note v_x sa somme, on a l'inégalité

$$(2.1) \quad g_k(v_x) \leq \|x\| \sum_{n=0}^{+\infty} \|T^n\|.$$

D'autre part, la norme g_k étant une norme tensorielle, l'injection canonique de $E \otimes_{g_k} H$ dans $E'' \otimes_{g_k} H$ est une isométrie [10]. De plus, l'application naturelle de $E'' \hat{\otimes}_{g_k} H$ dans $\mathcal{L}_g^k(E', H)$ est une bijection isométrique (§ 1, n° 2.2). On en déduit qu'il existe une application linéaire isométrique naturelle de $E \hat{\otimes}_{g_k} H$ dans $\mathcal{L}_g^k(E', H)$. Soit V_x l'image par cette application de $v_x = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n(x) \otimes e_n$. Pour tout $x' \in E'$, on a

$$V_x(x') = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x', T^n(x) \rangle e_n.$$

Notons respectivement $\|V_x\|$ et $g_k(V_x)$ les normes de V_x dans $\mathcal{L}(E', H)$ et $\mathcal{L}_g^k(E', H)$. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on obtient aisément l'inégalité

$$\|x\| \leq \|V_x\|,$$

et, d'après le paragraphe 1, n° 2.1, on a

$$\|V_x\| \leq g_k(V_x).$$

Donc, il vient

$$(2.2) \quad \|x\| \leq \|V_x\| \leq g_k(V_x) = g_k(v_x).$$

D'après les inégalités (2.1) et (2.2) ci-dessus, l'ensemble $\{v_x \mid x \in E\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E \hat{\otimes}_{g_k} H$, et l'application linéaire $x \mapsto v_x$ de E sur ce sous-espace est une bijection bicontinue. On raisonne de manière analogue en remplaçant g_k par d_k .

COROLLAIRE. — *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que dans la proposition 1, pour tout $x \in E$, l'application $V_x : x' \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x', T^n(x) \rangle e_n$ de E' dans H est nucléaire.*

Démonstration. — Les normes g_1 et d_1 sont égales à la norme π (§ 1, n° 1.2). Donc, le résultat découle immédiatement de la proposition 1 (i).

REMARQUE 1. — Conservons les hypothèses et les notations de la proposition 1. Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ la translation unilatérale simple définie par $S(e_n) = e_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}$). Pour tout $x \in E$, l'application nucléaire V_x , introduite dans le corollaire ci-dessus, vérifie la relation

$$V_x {}^tT = S^* V_x.$$

Donc, l'adhérence $\overline{V_x(E')}$ de $V_x(E')$ dans H est stable par S^* , et, si V_x est injective, l'opérateur tT est une transformée quasi-affine de S^* restreint à $\overline{V_x(E')}$. D'après le théorème de Hahn-Banach, V_x est injective si et seulement si x est un vecteur cyclique pour T .

REMARQUE 2. — Soient E un espace de Banach complexe, et $x \in E$. Dans le paragraphe 4 ci-dessous, on montre que $\overline{V_x(E')}$ est égal à H si et seulement si le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{T^n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ est de dimension infinie.

Soient F et G deux espaces de Banach, ν une norme tensorielle sur $F \otimes G$; soient $A \in \mathcal{L}(F)$ et $B \in \mathcal{L}(G)$. Alors, $A \otimes B$ est une application linéaire continue de $F \otimes_\nu G$ dans lui-même ([1], § 1, n° 1). On note $A \otimes_\nu B$ son prolongement par continuité à $F \hat{\otimes}_\nu G$. On a le résultat suivant :

PROPOSITION 2. — *On conserve les hypothèses et les notations de la proposition 1. Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ une translation unilatérale simple,*

Les opérateurs $I_E \otimes_{g_k} S^ \in \mathcal{L}(E \hat{\otimes}_{g_k} H)$ et $I_E \otimes_{d_k} S^* \in \mathcal{L}(E \hat{\otimes}_{d_k} H)$ sont des modèles de type 1 pour l'opérateur T .*

Démonstration. — Il existe une base orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de H telle que l'on ait

$$S^*(e_0) = 0, \quad S^*(e_{n+1}) = e_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

D'après la proposition 1, l'ensemble $\mathcal{G} = \{ \sum_{n=0}^{+\infty} T^n(x) \otimes e_n \mid x \in E \}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E \hat{\otimes}_{g_k} H$, et l'application linéaire $A: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} T^n(x) \otimes e_n$ de E sur \mathcal{G} est une bijection bicontinue. De plus, \mathcal{G} est stable par $I_E \otimes_{g_k} S^*$, et on a

$$\left(I_E \otimes_{g_k} S^* \Big|_{\mathcal{G}} \right) A = AT.$$

Donc, l'opérateur $I_E \otimes_{g_k} S^*$ est un modèle de type 1 pour T .

Un raisonnement analogue montre qu'il en est de même pour $I_E \otimes_{d_k} S^*$.

REMARQUE. — Si E est un espace hilbertien, notons \mathcal{E} l'espace hilbertien des suites de carré sommable d'éléments de E , et \mathcal{R} l'application linéaire $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ de \mathcal{E} dans lui-même. L'opérateur \mathcal{R} est le modèle de Rota sur E (§ 1, n° 7, ex. 1). Si $1 < k \leq +\infty$ (resp. $k = 2$), il est semblable (resp. unitairement équivalent) aux opérateurs $I_E \otimes_{g_k} S^*$ et $I_E \otimes_{d_k} S^*$. Faisons la démonstration pour $I_E \otimes_{g_k} S^*$. Si $1 < k \leq +\infty$ (resp. $k = 2$), la norme g_k est équivalente (resp. égale) sur $E \otimes H$ à la norme du produit tensoriel préhilbertien classique (§ 1, n° 1.2). Donc, l'application linéaire $J_k: (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \otimes e_n$ de \mathcal{E} dans $E \hat{\otimes}_{g_k} H$ est bijective et bicontinue (resp. unitaire). De plus, on a

$$(I_E \otimes_{g_k} S^*) J_k = J_k \mathcal{R}.$$

Le résultat est obtenu. On raisonne de manière analogue en remplaçant g_k par d_k .

§ 3. Transformées quasi-affines; cas des opérateurs de rayon spectral inférieur ou égal à 1

Introduisons tout d'abord la notion de fonction minimum d'un opérateur relative à un vecteur.

DÉFINITION 1. — Soient E un espace de Banach complexe, $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) \leq 1$, et $x \in E$ un vecteur tel que $\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rT)(x)$ existe pour tout $f \in \mathcal{H}^\infty$. On pose

$$\mathcal{H} = \{ f \in \mathcal{H}^\infty \mid \lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rT)(x) = 0 \}.$$

Si q est une fonction intérieure, on dit que q est une fonction minimum de T relative au vecteur x lorsque l'on a

$$\mathcal{H} = q \mathcal{H}^\infty.$$

REMARQUE. — Si l'opérateur T possède une fonction minimum relative au vecteur x , cette fonction est unique, à une constante multiplicative de module 1 près.

Soit $D = \{z \in \mathbf{G} \text{ et } |z| < 1\}$. Si n appartient à \mathbf{N} , on note φ_n l'application $z \mapsto z^n$ de D dans \mathbf{G} .

PROPOSITION 1. — On fait sur E et T les mêmes hypothèses que dans la définition 1. Soient p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$, et $x \in E$ un vecteur tel que $\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rT)(x)$ existe pour tout $f \in \mathcal{H}^p$.

(i) L'application linéaire $\Phi : f \mapsto \lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rT)(x)$ de \mathcal{H}^p dans E est continue. Si on note U l'isométrie $f \mapsto f \varphi_1$ de \mathcal{H}^p dans lui-même, on a la relation $\Phi U = T \Phi$.

(ii) Supposons $p < +\infty$. Si Φ n'est pas injective, l'opérateur T possède une fonction minimum relative au vecteur x .

Démonstration. — Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{H}^p , convergeant vers zéro. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers zéro uniformément sur les compacts de D . Par conséquent, si $0 < r < 1$, $[f_n(rT)]_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers zéro dans $\mathcal{L}(E)$. Donc, l'application linéaire $\Phi_r : f \mapsto f(rT)(x)$ de \mathcal{H}^p dans E est continue. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il en est de même pour Φ .

Si U est l'opérateur de multiplication par φ_1 sur \mathcal{H}^p , des vérifications immédiates montrent que l'on a $\Phi U = T \Phi$. Par suite, le noyau de Φ est un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{H}^p , stable par l'opérateur U . Pour $1 \leq p < +\infty$, un tel sous-espace est, soit réduit à $\{0\}$, soit de la forme $q \mathcal{H}^p$, où q est une fonction intérieure ([11], p. 25). On en déduit immédiatement (ii), puisque l'on a

$$q \mathcal{H}^\infty = \mathcal{H}^\infty \cap [q \mathcal{H}^p].$$

REMARQUE. — Dans le paragraphe 4 ci-dessous, faisant l'hypothèse supplémentaire $\rho(T) < 1$, on montre que toute fonction minimum de T relative au vecteur x est, à une constante multiplicative de module 1 près, un produit de Blaschke fini.

LEMME 1. — Soient E un espace de Banach, $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E ayant la propriété

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|y_n\|^{1/n} \leq 1,$$

et soit p un nombre réel tel que $1 \leq p < +\infty$. Considérons les conditions :

(i) $M_{p'}(y_n) < +\infty$;

(ii) Pour tout $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p$

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n$$

existe dans E .

Alors, (i) et (ii) sont équivalentes. De plus, si elles sont vérifiées, on a

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y_n.$$

Démonstration. — Supposons vérifiée la condition (i). Soient Y' un élément non nul du dual topologique $(l^{p'})'$ de $l^{p'}$ et $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p$.

On a

$$N_p(\alpha_n Y') < +\infty, \quad M_{p'}(y_n) < +\infty$$

(cf. § 1, n° 1.1). Ces inégalités entraînent la sommabilité de la famille $(\alpha_n Y' \otimes y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $(l^{p'})' \hat{\otimes}_{g_p} E$ (§ 1, n° 1.3). L'application linéaire naturelle de $(l^{p'})' \hat{\otimes}_{g_p} E$ dans $\mathcal{L}(l^{p'}, E)$ est continue (§ 1, n° 2.1). Donc, pour tout $Y \in l^{p'}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \langle Y', Y \rangle y_n$ converge dans E . En particulier $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y_n$ est une série convergente. Utilisant le procédé de sommation d'Abel, on montre alors, comme dans le cas scalaire, que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n$ converge uniformément par rapport à $r \in (0, 1)$. On en déduit

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y_n.$$

Réciproquement, supposons vérifiée la condition (ii). D'après l'inégalité de Hölder, si $0 < r < 1$, l'application linéaire

$$\Phi'_r : (\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n$$

de l^p dans E est continue. Pour tout $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p$, $\Phi'_r[(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}]$ a une limite $\Phi'[(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}]$ quand r tend vers 1 ($0 < r < 1$). D'après le théorème de Banach-Steinhaus, l'application linéaire Φ' de l^p dans E ainsi définie est continue. Si $(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de scalaires ayant au plus un nombre fini de termes non nuls, on a

$$\Phi'[(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}}] = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n y_n.$$

Utilisant la densité dans l^p des suite de cette forme, on obtient

$$\Phi'[(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}] = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y_n, \quad \text{pour tout } (\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p.$$

Soit $x' \in E'$. Pour tout $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p$, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \langle x', y_n \rangle$ est convergente. Donc, $(\langle x', y_n \rangle)_{n \in \mathbf{N}}$ appartient à $l^{p'}$. Le résultat voulu en découle (cf. § 1, n° 1.1).

REMARQUE. — Si on ne fait pas l'hypothèse

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|y_n\|^{1/n} \leq 1,$$

on voit que (i) implique (ii) et que l'on a la relation

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y_n, \quad \text{pour tout } (\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^p.$$

PROPOSITION 2. — Soient E un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) \leq 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) T a parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple;

(ii) T possède un vecteur cyclique x tel que, pour tout élément non nul f de \mathcal{H}^2 , $f(rT)(x)$ ait une limite non nulle quand r tend vers 1 ($0 < r < 1$);

(iii) T possède un vecteur cyclique x ayant les propriétés :

(1) $M_2[(T^n(x))_{n \in \mathbf{N}}] < +\infty$;

(2) pour toute fonction intérieure q ,

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} q(rT)(x) \neq 0.$$

Démonstration. — Soit $D = \{z \mid z \in \mathbf{C} \text{ et } |z| < 1\}$ et, pour $n \in \mathbf{N}$, soit φ_n l'application $z \rightarrow z^n$ de D dans \mathbf{C} . Alors, $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une base ortho-normale de l'espace hilbertien \mathcal{H}^2 .

(i) \Rightarrow (iii) : Supposons vérifiée la condition (i). Deux translations unilatérales de même multiplicité sont unitairement équivalentes (§ 1, n° 6.1). Donc, si S est l'opérateur $f \mapsto \varphi_1 f$ de \mathcal{H}^2 dans lui-même, S est une transformée quasi-affine de T . Notons Q une quasi-affinité de \mathcal{H}^2 dans E vérifiant la relation $QS = TQ$. Le vecteur φ_0 étant cyclique pour S , $x = Q(\varphi_0)$ est cyclique pour T .

Par ailleurs, si f appartient à \mathcal{H}^2 , posons $f = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \varphi_n$ ($(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^2$). Il vient

$$f(rT)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n T^n(x).$$

Compte tenu des relations

$$T^n Q = QS^n, \quad S^n(\varphi_0) = \varphi_n \quad (n \in \mathbf{N}),$$

on en déduit :

$$(3.1) \quad f(rT)(x) = Q\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \varphi_n\right).$$

Dans \mathcal{H}^2 , on a

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \varphi_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \varphi_n = f,$$

par suite, l'égalité (3.1) ci-dessus implique

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rT)(x) = Q(f), \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{H}^2.$$

Utilisant le lemme 1 et le fait que Q est injective, on en déduit (iii).

(iii) \Rightarrow (ii) : Soit x un vecteur cyclique pour T vérifiant les conditions (1) et (2) de (iii). D'après le lemme 1, pour tout $f \in \mathcal{H}^2$,

$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rT)(x)$ existe dans E . Supposons qu'il existe un élément non nul f de \mathcal{H}^2 tel que l'on ait

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rT)(x) = 0.$$

Alors, d'après la proposition 1, l'opérateur T possède une fonction minimum q relative au vecteur x . On a

$$\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} q(rT)(x) = 0,$$

ce qui contredit la condition (2) de (iii).

(ii) \Rightarrow (i) : Supposons vérifiée la condition (ii). Soit Φ l'application linéaire $f \mapsto \lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rT)(x)$ de \mathcal{H}^2 dans E . Par hypothèse, Φ est injective; de plus, le vecteur x étant cyclique pour T , on a

$$\overline{\Phi(\mathcal{H}^2)} = E.$$

Utilisant la proposition 1, on en déduit que l'opérateur de multiplication par φ_1 sur \mathcal{H}^2 est une transformée quasi-affine de T .

PROPOSITION 3. — Soient H un espace hilbertien complexe, et $T \in \mathcal{L}(H)$ une contraction complètement non unitaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'opérateur T a parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple;

(ii) $T \notin C_0$ et, de plus, T possède un vecteur cyclique x tel que $M_2[(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}] < +\infty$.

Démonstration. — Supposons vérifiée la condition (i). D'après la proposition 2, T possède un vecteur cyclique x tel que l'on ait $M_2[(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}] < +\infty$. De plus, d'après le paragraphe 1, n° 5.2 et n° 6.2, l'opérateur T n'appartient pas à C_0 .

Réciproquement, montrons que (ii) implique (i). Supposons vérifiée la condition (ii). D'après la proposition 2, il suffit de montrer que, pour toute fonction intérieure q , on a $\lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} q(rT)(x) \neq 0$. Soit q une fonction intérieure vérifiant la relation

$$(3.2) \quad \lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} q(rT)(x) = 0.$$

La contraction T étant complètement non unitaire, l'application linéaire $q(T) : h \mapsto \lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} q(rT)(h)$ de H dans lui-même est continue ([13], chap. III, th. 2.1). D'après la relation (3.2) ci-dessus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $q(T)[T^n(x)] = 0$; puisque x est un vecteur cyclique pour T , on en déduit $q(T) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $T \notin C_0$.

Le corollaire suivant a été obtenu par NAGY et FOIAS ([14], prop. 3).

COROLLAIRE. — Soient H un espace hilbertien complexe, et $T \in \mathcal{L}(H)$ une contraction ayant les propriétés :

$$T \in C_0 \text{ et } T \notin C_0;$$

T possède un vecteur cyclique.

Alors, l'opérateur T a parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple.

Démonstration. — Soit U la dilatation unitaire minimum de T , définie sur un espace hilbertien \mathbf{H} contenant H ([13], chap. I, n° 4). On note P_H le projecteur orthogonal de \mathbf{H} sur H , et \mathbf{H}_+ le sous-espace vectoriel fermé de \mathbf{H} engendré par $\cup_{n \in \mathbf{N}} U^n(H)$.

Si x_0 est un vecteur cyclique pour T , on pose $H_0 = \mathbf{C} x_0$, et on note N le sous-espace vectoriel fermé de \mathbf{H}_+ engendré par $\cup_{n \in \mathbf{N}} U^n(H_0)$. Alors, on a les résultats suivants ([14], § 1, n° 2) :

(i) $F = N \ominus U(N)$ est ambulant pour U (cf. § 1, n° 6.1);

(ii) $\dim F = \dim H_0 = 1$; le sous-espace vectoriel fermé de \mathbf{H} engendré par $\cup_{n \in \mathbf{N}} T^n P_H(F)$ est égal à H ;

(iii) Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$P_H U^n \Big|_{\mathbf{H}_+} = T^n P_H \Big|_{\mathbf{H}_+}.$$

D'après (ii), si X est un élément non nul de F , le vecteur $x = P_H(X)$ est cyclique pour T .

Soit $y \in H$. On déduit de (iii) :

$$\langle y, T^n(x) \rangle = \langle y, U^n(X) \rangle, \text{ pour tout } n \in \mathbf{N};$$

par suite, d'après (i), on a $M_2[(T^n(x))_{n \in \mathbf{N}}] < +\infty$.

Enfin, puisque la contraction T appartient à C_0 , elle est complètement non unitaire. Le résultat découle alors de la proposition 3.

§ 4. Transformées quasi-affines; cas des opérateurs de rayon spectral strictement inférieur à 1

Soient E un espace de Banach complexe, et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur dont le rayon spectral $\rho(T)$ est strictement inférieur à 1. Si f est une fonction holomorphe sur le disque unité ouvert D de \mathbf{C} , à valeurs complexes, on a, dans $\mathcal{L}(E)$,

$$f(T) = \lim_{r \rightarrow 1, 0 < r < 1} f(rT).$$

Soit $x \in E$ un vecteur tel qu'il existe un élément f non nul de l'espace de Hardy \mathcal{H}^1 vérifiant la relation $f(T)(x) = 0$. Alors, on peut considérer une fonction minimum de T relative au vecteur x (§ 3, prop. 1).

On a le résultat suivant :

PROPOSITION 1. — Soient E un espace de Banach complexe, $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) < 1$, et x un vecteur non nul de E tel que l'on ait $\{f \mid f \in \mathcal{H}^1 \text{ et } f(T)(x) = 0\} \neq \{0\}$. Toute fonction minimum de T relative au vecteur x est, à une constante multiplicative de module 1 près, un produit de Blaschke fini, non constant, dont les zéros sont des valeurs propres de T .

Démonstration. — Soit q une fonction minimum de T relative au vecteur x . D'après le « Spectral Mapping Theorem », si q ne s'annule pas sur D , l'opérateur $q(T)$ est inversible ([7], p. 569). Or, ceci est impossible, puisque $q(T)(x) = 0$. La fonction q a donc des zéros dans D . Soit μ l'un d'eux. Il existe une fonction intérieure w ayant la propriété

$$(4.1) \quad q(z) = \frac{\mu - z}{1 - \bar{\mu}z} w(z), \quad \text{pour tout } z \in D.$$

On en déduit :

$$(I_E - \bar{\mu}T)q(T) = (\mu I_E - T)w(T).$$

Par suite, si μ n'est pas valeur propre de T , la relation $q(T)(x) = 0$ entraîne $w(T)(x) = 0$. Alors, q étant une fonction minimum de T relative au vecteur x , on a

$$(4.2) \quad w = qf, \quad \text{où } f \text{ est intérieure.}$$

Des vérifications immédiates montrent que les relations (4.1) et (4.2) sont incompatibles. Tout zéro de q dans D est donc une valeur propre dans T . Le spectre de l'opérateur T est une partie compacte de D . La fonction intérieure q étant holomorphe sur D et non identiquement nulle, elle a au plus un nombre fini de zéros sur ce compact. Donc, l'ensemble (non vide) des zéros de q dans D est fini.

Par ailleurs, on sait que q se met sous la forme

$$(4.3) \quad q = bs,$$

où b est un produit de Blaschke et s une fonction intérieure sans zéros dans D (§ 1, n° 3.2). Les fonctions b et q ont les mêmes zéros dans D . Par suite, b est un produit de Blaschke fini, non constant, dont les zéros sont des valeurs propres de T . D'après le « Spectral Mapping Theorem », l'opérateur $s(T)$ est inversible; donc, les relations

$$q(T)(x) = s(T)b(T)(x) = 0$$

impliquent $b(T)(x) = 0$. Compte tenu de la relation (4.3) ci-dessus, on en déduit que b est une fonction minimum de T relative au vecteur x .

COROLLAIRE 1. — *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que dans la proposition 1, il existe un polynôme R , de degré supérieur ou égal à 1, ayant les deux propriétés suivantes :*

- (i) $R(T)(x) = 0$;
- (ii) *Les zéros de R sont des valeurs propres de T .*

Démonstration. — Il suffit de considérer le numérateur R du produit de Blaschke, donné par la proposition 1 (cf. [14], p. 41).

REMARQUE. — Soient H un espace hilbertien complexe, et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur ayant les propriétés

$$\|T\| < 1 \quad \text{et} \quad T \in C_0.$$

NAGY et FOIAS ont démontré dans [14] qu'il existe alors un polynôme P , de degré supérieur ou égal à 1, vérifiant $P(T) = 0$.

PROPOSITION 2. — *Soient E un espace de Banach complexe, $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) < 1$. Soient $x \in E$, et p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$.*

Si on note Φ l'application $f \mapsto f(T)(x)$ de \mathcal{H}^p dans E , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Φ est injective;
- (ii) *Le sous-espace vectoriel de E , engendré par $\{T^n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$, est de dimension infinie.*

Démonstration. — Il est clair que (i) implique (ii). Réciproquement, supposons Φ non injective. Alors, il existe un polynôme R , de degré supérieur ou égal à 1, vérifiant la relation $R(T)(x) = 0$. En effet, si $x = 0$, cela est évident, et si $x \neq 0$, cela résulte du corollaire 1. De la relation $R(T)(x) = 0$, on déduit que le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{T^n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ est de dimension finie (cf. [14], p. 42).

COROLLAIRE 2. — *Soient H un espace hilbertien complexe, séparable, de dimension infinie, et $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une base orthonormale de H . Soient E un espace de Banach complexe, $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) < 1$. Soit $x \in E$. Notons V_x l'application $x' \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x', T^n(x) \rangle e_n$ de E' dans H . Pour que $V_x(E')$ soit partout dense dans H , il faut et il suffit que le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{T^n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ soit de dimension infinie.*

Démonstration. — L'application V_x a été introduite dans le paragraphe 2 (corol. de la prop. 1). On peut supposer que H est égal à l'espace de Hardy \mathcal{H}^2 , et e_n à l'application $\varphi_n : z \mapsto z^n$ ($|z| < 1$, $n \in \mathbf{N}$). Notons Λ l'involution

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \varphi_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{\alpha}_n \varphi_n$$

de \mathcal{H}^2 sur lui-même $((\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l^2)$. Si Φ est l'opérateur $f \mapsto f(T)(x)$ de \mathcal{H}^2 dans E , des vérifications immédiates montrent que l'on a

$$\mathcal{H}^2 \ominus \overline{V_x(E')} = \Lambda(\text{Ker } \Phi).$$

Donc, le résultat découle de la proposition 2.

PROPOSITION 3. — *Soient E un espace de Banach complexe, de dimension infinie, et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur ayant la propriété $\rho(T) < 1$. Considérons les conditions :*

- (i) *T possède un vecteur cyclique x ;*
- (ii) *T a parmi ses transformées quasi-affines une translation unilatérale simple.*

Alors (i) et (ii) sont équivalentes. De plus, si elles sont vérifiées, l'application

$$(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n T^n(x)$$

de l^2 dans E est une injection nucléaire, à image dense.

Démonstration. — Supposons vérifiée la condition (i). Le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{T^n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ est de dimension infinie. Donc, d'après la proposition 2, l'application $f \mapsto f(T)(x)$ de \mathcal{H}^2 dans E est injective. Utilisant alors la proposition 2 du paragraphe 3, on obtient (ii).

Par ailleurs, toute translation unilatérale simple a un vecteur cyclique. Donc, (ii) implique (i).

Si x est un vecteur cyclique pour T , soit Φ' l'application $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n T^n(x)$ de l^2 dans E . Il est clair que $\Phi'(l^2)$ est partout dense dans E ; des vérifications immédiates montrent que Φ' est nucléaire. Enfin, d'après la proposition 2, elle est injective.

REMARQUE. — On retrouve ainsi, en le précisant, un résultat annoncé récemment par GERLACH ([8], p. 251).

Indiquons quelques conséquences simples des résultats précédents.

PROPOSITION 4. — *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que dans la proposition 3, si T a un vecteur cyclique toute translation unilatérale simple est un modèle strict de type 3 pour T .*

PROPOSITION 5. — *Soient E un espace de Banach, et $A \in \mathcal{L}(E)$. Si on note $c(A)$ l'ensemble des vecteurs cycliques pour A , $c(A)$ est un G_δ de E . De plus, si E est complexe et de dimension infinie, $c(A)$ est vide ou total dans E .*

Démonstration. — Si $c(A)$ est vide, il est clair que $c(A)$ est un G_δ . Supposons $c(A)$ non vide. Soit $x_0 \in c(A)$. Si on note α le sous-espace

vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $\{A^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ on a

$$c(A) = \bigcap_{m \in \mathbf{N}} \bigcup_{A' \in \mathcal{A}} \{x \in E \mid \|A'(x) - x_0\| < 1/(m+1)\},$$

(cf. [4], lemme 4). Donc $c(A)$ est un G_δ .

Supposons maintenant E complexe et de dimension infinie. Si $c(A)$ n'est pas vide, on voit que $c(A)$ est total dans E en utilisant la proposition 3, et en raisonnant exactement comme dans [14], remarque 4.

REMARQUE. — Si E est un espace hilbertien complexe, de dimension infinie, NAGY et FOIAS ont démontré que $c(A)$ est vide ou total dans E . Ce résultat a été généralisé au cas où E est un espace de Banach quelconque par M. L. GEHÉR (cf. [14], rem. 4).

PROPOSITION 6. — Soient H un espace hilbertien complexe, séparable, de dimension infinie, et $S \in \mathcal{L}(H)$ une translation unilatérale simple. L'ensemble $c(S^*)$ est un G_δ partout dense dans H .

Démonstration. — Il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^2)$ tel que l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés non triviaux de \mathcal{H}^2 , stables par T , soit dénombrable ([5], ex. 1). Rangeons ses éléments en une suite $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$. On a

$$c(T) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} E_n.$$

L'espace \mathcal{H}^2 étant un espace de Baire, on en déduit

$$\overline{c(T)} = \mathcal{H}^2.$$

De même, il vient

$$\overline{c(T^*)} = \mathcal{H}^2.$$

On peut supposer $\|T\| < 1$. Alors, d'après la proposition 3, S est une transformée quasi-affine de T , et, par suite, T^* est une transformée quasi-affine de S^* . On en déduit, par des vérifications immédiates, que $c(S^*)$ est partout dense dans H .

Enfin, d'après la proposition 5, $c(S^*)$ est un G_δ de H .

Le résultat est obtenu.

REMARQUE. — DOUGLAS, SHAPIRO et SHIELDS ont démontré que $c(S^*)$ est partout dense dans H et que $\bigcap c(S^*)$ est un ensemble de première catégorie (ou maigre) dans H ([6], cor. 2.2.10 et th. 2.3.3).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMEMIYA (I.) and SHIGA (K.). — On tensor products of Banach spaces, *Kodai math. Sem. Rep.*, t. 9, 1957, p. 161-178.
- [2] CHEVET (Simone). — Sur certains produits tensoriels topologiques d'espaces de Banach, *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. 11, 1969, p. 120-138.
- [3] COLOJOARA (I.) and FOIAS (C.). — *Theory of generalized spectral operators*. — New York, Gordon and Breach, 1968 (*Mathematics and its Applications*, 9).
- [4] DIXMIER (J.) et MARÉCHAL (O.). — *Vecteurs totalisateurs d'une algèbre de von Neumann* (à paraître).
- [5] DONOGHUE (W. F.). — The lattice of invariant subspaces of a completely continuous quasi-nilpotent transformation, *Pacific J. Math.*, t. 7, 1957, p. 1031-1035.
- [6] DOUGLAS (R. G.), SHAPIRO (H. S.) and SHIELDS (A. L.). — Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 20, 1970, fasc. 1, p. 37-76.
- [7] DUNFORD (N.) and SCHWARTZ (J. T.). — *Linear operators*, Parts 1 and 2. — New York, Interscience Publishers, 1967 (*Pure and applied Mathematics*, Interscience, 7).
- [8] GERLACH (E.). — Sous-espaces hilbertiens invariants pour un opérateur linéaire, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 272, 1971, série A, p. 251-253.
- [9] GROTHENDIECK (A.). — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. — Providence, American mathematical Society, 1955 (*Memoirs of the American mathematical Society*, 16).
- [10] GROTHENDIECK (A.). — Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo*, t. 8, 1956, p. 1-79.
- [11] HELSON (H.). — *Lectures on invariant subspaces*. — New York, Academic Press, 1964.
- [12] HOFFMAN (K.). — *Banach spaces of analytic functions*. — Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1965 (*Prentice-Hall Series in modern Analysis*).
- [13] NAGY (B. Sz.) et FOIAS (C.). — *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*. — Paris, Masson et C^{ie}; Budapest, Akadémiai Kiado, 1967.
- [14] NAGY (B. Sz.) et FOIAS (C.). — Vecteurs cycliques et quasi-affinités, *Studia Math.*, Warszawa, t. 31, 1968, p. 35-42.
- [15] ROTA (G. C.). — On models for linear operators, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 13, 1960, p. 469-472.
- [16] ROTA (G. C.). — Note on the invariant subspaces of linear operators, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, série 2, t. 8, 1959, p. 182-184.
- [17] SAPHAR (P.). — Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications linéaires, *Studia Math.*, Warszawa, t. 38, 1970, p. 71-100.
- [18] SAPHAR (P.). — Applications à puissance nucléaire et applications de Hilbert-Schmidt dans les espaces de Banach, *Ann. scient. École Norm. Sup.*, t. 83, 1966, p. 113-151.

(Texte reçu le 19 octobre 1971.)

Bernard VIROT,
 Département de Mathématiques,
 Faculté des Sciences d'Orléans,
 Domaine universitaire de la Source,
 45-Orléans 02.