BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL WALDSCHMIDT

Indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 285-304

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__285_0>

Bull. Soc. math. France,
99, 1971, p. 285 à 304.

INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE DES VALEURS DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

PAR

MICHEL WALDSCHMIDT.

[Bordeaux]

0. Introduction.

Plusieurs théorèmes d'indépendance algébrique, concernant les valeurs de la fonction exponentielle, ont été démontrés par GEL'FOND, ŠMELEV et LANG (§ 1). Nous montrerons que les conditions d'approximation qui figurent dans leurs hypothèses sont superflues. Le principal théorème (§ 2) que nous obtiendrons est une amélioration d'un résultat de LANG.

THÉORÈME 1. — *Soient* $x_1, \ldots, x_N$ (*resp.* $y_1, \ldots, y_M$) *des nombres complexes* **Q***-linéairement indépendants. Si* $MN \geqq 2(M+N)$, *alors deux au moins des nombres*

$$e^{x_i y_j} \quad (1 \leqq i \leqq N,\ 1 \leqq j \leqq M)$$

sont algébriquement indépendants sur **Q**.

La démonstration (§ 5) du théorème 1 utilise un critère de transcendance (§ 3) ainsi qu'un lemme sur la répartition des zéros d'une somme de fonctions exponentielles (§ 4).

Pour terminer, nous étudierons (§ 6) une manière d'approcher des résultats d'indépendance algébrique dans le cas où la dimension est supérieure à 1, à partir d'une définition de LANG de « types de transcendance ». Nous obtiendrons enfin une application géométrique :

Soit K *un sous-corps de* **C**, *algébriquement clos, de degré de transcendance sur* **Q** *inférieur ou égal à* 1. *Soit* G *un groupe linéaire sur* **C** *et soit*

$\varphi : \mathbf{C} \to G_{\mathbf{C}}$ *un sous-groupe à un paramètre de* G, *de dimension algébrique* $d \geqq 1$. *Soit* Γ *un sous-groupe de* $\mathbf{C}$ *contenant au moins* m *éléments* $\mathbf{Q}$*-linéairement indépendants, et tel que* $\varphi(\Gamma) \subset G_K$. *Alors* $md < 2(m+d)$. *De plus,*

$$\begin{array}{lll} \textit{si} & \Gamma \subset K, & \textit{alors} \quad md < 2(m+d-1); \\ \textit{si} & \varphi'(0) \in G_K, & \textit{alors} \quad md < 2m+d. \end{array}$$

Enfin, je voudrais exprimer ma plus vive reconnaissance à Jean FRESNEL pour les conseils qu'il m'a donnés.

1. Notations et historique.

Nous désignerons par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers rationnels positifs, Z l'anneau des entiers rationnels, $\mathbf{Q}$ le corps des nombres rationnels, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, et $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes. Le logarithme népérien sera noté Log. D'autre part, e sera le nombre réel tel que $\mathrm{Log}\, e = 1$. Enfin, on se donne une détermination du logarithme complexe qui coïncide avec le logarithme népérien sur l'ensemble des nombres réels positifs.

Rappelons que la *hauteur d'un polynôme* de $\mathbf{C}[X]$ est le maximum des valeurs absolues des coefficients de ce polynôme. *On notera* $|P|$ la hauteur de $P(X)$.

Soient L un corps de nombres (c'est-à-dire une extension algébrique finie de $\mathbf{Q}$), et a_i $(1 \leqq i \leqq n)$ n éléments de L; *on notera* $\| (a_i) \|$ le maximum des valeurs absolues ordinaires des conjugués des a_i sur $\mathbf{Q}$; *un dénominateur de* (a_i) sera un élément Δ de *l'anneau* I_L *des entiers* de L, tel que :

$$\Delta a_i \in I_L \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Aperçu historique. — Après le théorème de Hermite-Lindemann, les résultats que GEL'FOND obtint en 1949 ([3], [4], [5]) furent les premiers concernant l'indépendance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle. La méthode qu'il utilisait était une généralisation de celle qui lui avait permis de résoudre le septième problème de Hilbert, en 1934. Dans ces nouveaux travaux, il remplace l'hypothèse : « Le corps K est une extension algébrique de $\mathbf{Q}$ », qui doit conduire à une contradiction et montrer qu'un nombre est transcendant, par l'hypothèse : « le corps K est une extension de $\mathbf{Q}$ de degré de transcendance 1 » qui, dans la démonstration par l'absurde, donnera un théorème d'indépendance algébrique. Aussi GEL'FOND étudie-t-il les extensions de $\mathbf{Q}$ de type fini et de degré de transcendance 1 (en abrégé « corps $\mathbf{Q}_1$ »), et c'est un critère de transcendance (§ 3) qui jouera un rôle fondamental. Notons que cette méthode permit à GEL'FOND d'obtenir des mesures de transcendance ([4], (5)].

Il obtint également, avec FEL'DMAN [7], une mesure d'indépendance algébrique.

Le premier des deux théorèmes d'indépendance algébrique de GEL'FOND a été complété par ŠMELEV [15] en 1968. D'autre part, cette méthode permit à LANG d'obtenir plusieurs résultats du même type [10]. Nous allons voir que l'on peut éliminer les conditions d'approximation qui figurent dans les hypothèses des théorèmes de GEL'FOND, ŠMELEV et LANG.

2. Énoncé du théorème principal.

THÉORÈME 1. — *Soient* $x_1, \ldots, x_N$ *(resp.* $y_1, \ldots, y_M$*) des nombres complexes linéairement indépendants sur* $\mathbf{Q}$. *Si* $MN \geqq 3(M+N)$, *alors deux au moins des nombres*

$$e^{x_i y_j} \quad (1 \leqq i \leqq N;\ 1 \leqq j \leqq M)$$

sont algébriquement indépendants.

La condition $MN \geqq 2(M+N)$ est équivalente à $(M \geqq 3,\ N \geqq 6)$ ou $(M \geqq 4,\ N \geqq 4)$. On obtient alors les corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. — *Soient* $a_1, \ldots, a_m, b$ *des nombres complexes. On suppose* $\operatorname{Log} a_1, \ldots, \operatorname{Log} a_m$ *(resp.* $1, b, \ldots, b^k$*) linéairement indépendants sur* $\mathbf{Q}$. *Alors deux au moins des nombres*

$$a_i^{b^j} \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$$

sont algébriquement indépendants dans les quatre cas suivants :

1°	$m = 1$;	$k = 3$;	$n = 6$;
2°	$m = 2$;	$k = 3$;	$n = 4$ (1);
3°	$m = 3$;	$k = 2$;	$n = 3$ (1);
4°	$m = 6$;	$k = 2$;	$n = 2$.

COROLLAIRE 2. — *Soient* $y_1, y_2 \in \mathbf{C}$, *et* K *une extension de* $\mathbf{Q}$ *de degré de transcendance inférieur ou égal à* 1. *Si*

$$x^{y_1} \in K \quad \text{et} \quad x^{y_2} \in K \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{N},$$

alors $1, y_1, y_2$ *sont linéairement dépendants sur* $\mathbf{Q}$.

---

(1) Pour 2° et 3° on suppose de plus que $\operatorname{Log} a_1, \ldots, \operatorname{Log} a_m, b \operatorname{Log} a_1, \ldots, b \operatorname{Log} a_m$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Démonstration des corollaires.

1° $m=1$; $k=3$; $n=6$. On pose

$$x_i=b^{i-1}\operatorname{Log}a; \qquad y_j=b^{j-1} \qquad (1\leq i\leq 4;\ 1\leq j\leq 4).$$

2° et 3° $mn\geq 3m+n-1$; on pose : $N=2m$; $M=n-1$;

$$y_j=b^{j-1}; \qquad x_{2i-1}=\operatorname{Log}a_i; \qquad x_{2i}=b\operatorname{Log}a_i.$$

4° $m=6$; $k=2$; $n=2$;

$$y_j=b^{j-1} \quad (j=1,\ 2,\ 3); \qquad x_i=\operatorname{Log}a_i \quad (1\leq i\leq 6).$$

Pour le corollaire 2, on pose : $y_3=1$, $x_i=\operatorname{Log}a_i$, où $a_1, \ldots, a_6$ sont six nombres premiers distincts.

Le meilleur résultat que l'on puisse espérer pour améliorer le théorème 1 est le suivant :

CONJECTURE 1. — *Soient x_1, x_2 (resp. $y_1, \ldots, y_n$) des nombres complexes* **Q***-linéairement indépendants. Alors le corps obtenu en adjoignant à* **Q** *les $2n$ nombres*

$$e^{x_i y_j} \quad (i=1,\ 2;\ j=1,\ \ldots,\ n)$$

a un degré de transcendance supérieur ou égal à $n-1$.

3. Un critère de transcendance.

La méthode que GEL'FOND avait utilisée pour résoudre des problèmes de transcendance a pu être généralisée à des théorèmes d'indépendance algébrique grâce à un critère de transcendance qui joue, dans cette démonstration, le rôle du théorème de Liouville [13] dans la première. Nous étudierons plus loin les conséquences qu'aurait une généralisation de ce lemme de Gel'fond à un critère d'indépendance algébrique.

Le lemme de Gel'fond a été amélioré par LANG [8]. Voici un troisième énoncé, plus fin que les précédents, et qui permet en particulier de résoudre un problème posé par SCHNEIDER [17] (problème 8 de [13]).

LEMME FONDAMENTAL. — *Soient $\alpha\in\mathbf{C}$, $\varepsilon>0$, σ_1 et σ_2 deux fonctions réelles de variable réelle x, strictement croissantes, qui tendent vers $+\infty$ avec x; soient $a_1(x)$ et $a_2(x)$ deux fonctions réelles de x, supérieures à 1.*

On suppose que, pour tout $x>0$, on a

$$(3.1) \qquad \sigma_2(x)\leq\sigma_1(x); \qquad \sigma_i(x+1)\leq a_i(x)\,\sigma_i(x) \qquad (i=1,\ 2).$$

On suppose qu'il existe un entier N_0 positif, et pour tout entier $N > N_0$, un polynôme $P_N \in \mathbf{Z}[X]$, non nul, de hauteur H_N et de degré d_N, tel que

$$(3.2) \qquad \begin{cases} |P_N(\alpha)| < \exp\{-C(N)\sigma_1(N)\sigma_2(N)\}, \\ \operatorname{Log} H_N \leqq \sigma_1(N); \qquad d_N \leqq \sigma_2(N), \end{cases}$$

où $C(N) = \max\left[10 + \varepsilon; (4+\varepsilon) \sup_{N-1 \leqq x < N} a_1(x)\, a_2(x)\right]$.

Alors α est algébrique, et il existe un entier N_1 tel que, pour $N > N_1$, on ait $P_N(\alpha) = 0$.

REMARQUE 1. — La dernière partie de l'énoncé

$$P_N(\alpha) = 0 \qquad \textit{pour} \quad N > N_1$$

résulte d'une généralisation d'un théorème de Liouville [13] :

Si α est algébrique de degré s, il existe une constante $C(\alpha) = C > 0$ telle que, pour tout polynôme $P \in \mathbf{Z}[X]$ de hauteur H et de degré n avec $P(\alpha) \neq 0$, on ait

$$(3.3) \qquad |P(\alpha)| > C^n H^{-s+1}.$$

REMARQUE 2. — Nous utiliserons le lemme avec $a_i(x)$ constants. L'existence des U-nombres au sens de MAHLER [13] justifie la condition

$$\sigma_i(x+1) \leqq a_i \sigma_i(x).$$

REMARQUE 3. — Le principe de Dirichlet prouve, ainsi que nous le verrons (§ 4), que le nombre $C(N)$ dans (3.2) ne peut pas être remplacé par un nombre inférieur à 1.

Pour la démonstration du lemme fondamental, nous utiliserons deux résultats de GEL'FOND ([4], [5]). Le premier est une généralisation d'un lemme de Popken et Koksma (*voir* [13], lemme 16).

LEMME 1. — *Soient P_1, $P_2 \in \mathbf{C}[X]$ deux polynômes de hauteur H_1 et H_2 respectivement. Soient H et n la hauteur et le degré de $P_1 P_2$. Alors :*

$$(3.4) \qquad H \geqq e^{-n} H_1 H_2.$$

LEMME 2. — *Soient $\alpha \in \mathbf{C}$, transcendant, $P \in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme primitif de hauteur H_0 et de degré d_0. Si*

$$(3.5) \qquad |P(\alpha)| < H^{-\lambda n}, \quad \lambda > 6; \qquad \operatorname{Log} H \geqq n \geqq d_0; \qquad H \geqq H_0,$$

alors le polynôme P a un diviseur primitif irréductible Q tel que

$$|Q(\alpha)| < H^{-\frac{\lambda-6}{s}n}, \qquad H^{\frac{1}{s}}e^{\frac{2n}{s}} \geqq h; \qquad \frac{n}{s} \geqq \delta, \tag{3.6}$$

où h et δ sont la hauteur et le degré de Q, et s un entier positif.

Un lemme analogue au lemme 2 a été démontré par LANG ([10], VI, § 2).

Démonstration du lemme fondamental. — En divisant P_N par le p. g. c. d. de ses coefficients, on se ramène au cas où P_N est primitif, ce que nous supposerons. D'autre part, les valeurs de $\sigma_i(x)$ $(i = 1, 2)$ intervenant sont $\sigma_i(N)$ pour N entier et $N \geqq N_0$. On peut donc supposer σ_i continue, et $\sigma_i(0) = 0$, pour définir σ_i^{-1} de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}_+$.

Supposons les hypothèses du lemme vérifiées et le nombre α transcendant. Les conditions (3.2), (3.5) et (3.6), avec $\operatorname{Log} H = \sigma_1(q)$ et $n = \sigma_2(q)$, montrent que, pour tout $q > N_0$, il existe un entier $s > 0$ et un polynôme $Q_q \in \mathbf{Z}[X]$, primitif, irréductible, de hauteur h_q et de degré δ_q, tel que

$$\begin{cases} |Q_q(\alpha)| \leqq \exp\left[-\dfrac{C(q)-6}{s}\sigma_1(q)\sigma_2(q)\right], \\ \delta_q \leqq \dfrac{1}{s}\sigma_2(q), \\ \operatorname{Log} h_q \leqq \dfrac{1}{s}\sigma_1(q) + \dfrac{2}{s}\sigma_2(q) \leqq \dfrac{3}{s}\sigma_1(q). \end{cases} \tag{3.7}$$

La condition $\sigma_i(x) \to \infty$, quand $x \to \infty$, montre que l'ensemble des polynômes Q_q $(q \geqq N_0)$ est infini. On pose

$$z_q = \max\left[\sigma_1^{-1}\left(\frac{1}{3}\operatorname{Log} h_q\right); \sigma_2^{-1}\left(\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}}\right)\delta_q\right]. \tag{3.8}$$

Comme σ_1 et σ_2 sont croissantes, on déduit de (3.7) et (3.8) :

$$z_q \leqq \max\left[\sigma_1^{-1}\left(\frac{1}{s}\sigma_1(q)\right); \sigma_2^{-1}\left[\left(\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{\frac{1}{s}}\sigma_2(q)\right]\right].$$

On aura donc : d'une part,

$$\text{soit} \quad \sigma_1(z_q) \leqq \frac{1}{s}\sigma_1(q), \qquad \text{soit} \quad \sigma_2(z_q) \leqq \frac{1}{s}\sigma_2(q),$$

d'autre part, $z_q \leqq q$. D'où

$$\sigma_1(z_q)\sigma_2(z_q) \leqq \frac{1}{s}\sigma_1(q)\sigma_2(q). \tag{3.9}$$

Résumons les conditions (3.7) et 3.9) :

Il existe une suite (Q_q) de polynômes primitifs irréductibles de $\mathbf{Z}[X]$ *tels que*

$$(3.10)\qquad \begin{cases} |Q_q(\alpha)| \leq \exp -(4+\varepsilon)\sigma_1(z_q)\sigma_2(z_q), \\ z_q = \max\left[\sigma_1^{-1}\left(\frac{1}{3}\operatorname{Log} h_q\right); \sigma_2^{-1}\left[\left(\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{\delta_q}\right]\right], \end{cases}$$

où δ_q est le degré de Q_q et h_q sa hauteur.

Comme il y a une infinité de polynômes Q_q $(q > N_0)$, l'un des ensembles $\{h_q \mid q > N_0\}$; $\{\delta_q \mid q > N_0\}$ n'est pas borné.

On peut extraire de la suite (z_q) une suite qui tend vers $+\infty$ avec q. On notera encore (z_q) cette nouvelle suite. Soit $q > N_0$, $N = N_q = [z_q]$, et $P_N \in \mathbf{Z}[X]$, où P_N est défini par les hypothèses (3.2) de l'énoncé. On a donc

$$(3.11)\qquad \begin{cases} |P_N(\alpha)| \leq \exp[-C(N)\sigma_1(N)\sigma_2(N)] \\ \qquad\qquad \leq \exp[-C(N)\sigma_1(z_q-1)\sigma_2(z_q-1)], \\ \operatorname{Log} H_N \leq \sigma_1(N) \leq \sigma_1(z_q) \qquad \text{et} \qquad d_N \leq \sigma_2(N) \leq \sigma_2(z_q), \end{cases}$$

car $z_q - 1 < N \leq z_q$.

Or, par hypothèse, on a

$$\sigma_i(z-1) \geqq \frac{1}{a_i(z-1)}\sigma_i(z) \qquad (i = 1, 2)$$

et

$$C(N) \geqq (4+\varepsilon)\, a_1(z_q-1)\, a_2(z_q-1), \qquad \text{car} \quad N-1 \leq z_q - 1 < N.$$

On aura donc

$$(3.12)\qquad |P_N(\alpha)| \leq \exp[-(4+\varepsilon)\sigma_1(z_q)\sigma_2(z_q)].$$

Le résultant de P_N et Q_q est un entier rationnel R qui vérifie, d'après Lang ([10], V, § 2),

$$(3.13)\qquad |R| \leq [(1+|\alpha|)(d_N+\delta_q)]^{d_N+\delta_q} H_N^{\delta_q} h_q^{\delta_N} \times [|P_N(\alpha)| + |Q_q(\alpha)|].$$

Or, si q est assez grand, on a, d'après (3.10), (3.11), (3.12), (3.13),

$$[(1+|\alpha|)(d_N+\delta_q)]^{d_N+\delta_q} \leq \exp\left[\frac{\varepsilon}{4}\sigma_1(z_q)\sigma_2(z_q)\right],$$

$$H_N^{\delta_q} h_q^{d_N} \leq \exp\left(4+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sigma_1(z_q)\sigma_2(z_2),$$

$$|P_N(\alpha)| + |Q_q(\alpha)| \leq 2\exp[-(4+\varepsilon)\sigma_1(z_q)\sigma_2(z_q)].$$

D'où $|R| < 1$, donc $R = 0$, et Q_q divise P_N. Comme Q_q est un polynôme primitif, il existe $\mathbf{R} \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $P_N = Q_q . R$.

Utilisons le lemme 1. D'après (3.4), on aura

$$\delta_q \leqq d_N \leqq \sigma_2(z_q) < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\sigma_2(z_q)$$

$$h_q \leqq H_N\, e^{d_N} < e^{3\sigma_i(z_q)},$$

ce qui contredit la définition (3.8) de z_q.

Donc α est algébrique.

4. Répartition des zéros d'une somme de fonctions exponentielles.

Pour utiliser le lemme fondamental, nous aurons besoin d'une majoration du nombre de zéros d'une fonction du type

$$z \to \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{q_j} b_{i,j}\, z^{i-1} e^{\omega_j z},$$

où $q_1, \ldots, q_l$ sont des nombres entiers positifs, et ω_j, $b_{i,j}$ ($1 \leqq i \leqq q_j$, $1 \leqq j \leqq l$) des nombres complexes. Gel'fond a énoncé un tel lemme en 1949 [4]. Son étude a été reprise par Mahler [11], puis par Dancs et Turan [1], mais leurs énoncés font intervenir un minorant de

$$\delta_j = \prod_{\substack{i \neq j \\ 1 \leqq i \leqq l}} (\omega_i - \omega_j),$$

et, pour utiliser ces résultats, il fallait imposer une condition d'indépendance linéaire des nombres $x_1, \ldots, x_N$ intervenant dans l'hypothèse.

Le lemme suivant permet de supprimer cette condition. C'est probablement un cas particulier d'un résultat annoncé par Van der Poorten [16] (2).

Lemme 3. — *Soient $q_1, \ldots, q_l$ des nombres entiers positifs. Soient $\omega_1, \ldots, \omega_l$ des nombres complexes deux à deux distincts, et $b_{i,j}$ ($1 \leqq i \leqq q_j$; $1 \leqq j \leqq l$) des nombres complexes non tous nuls.*

Le nombre de zéros de la fonction

$$f(z) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{q_j} b_{i,j}\, z^{i-1} e^{\omega_j z}, \tag{4.1}$$

(2) *Cf.* R. Tijdeman, *Koninkl. Nederl. Akak. van Wet.*, Proc., Série A, t. 74, 1971, p. 1-7.

comptés avec leur ordre de multiplicité, dans le disque $|z-z_0| \leq \rho$, *est inférieur à*

$$\min_{\lambda>0}\left[\frac{n}{\lambda}+2\cdot\frac{1+n^{\lambda}}{\lambda \operatorname{Log} n}(1+\rho\Omega)\right], \tag{4.2}$$

où $\Omega = \max_{1\leq j\leq l}|\omega_j|$ et $n=\sum_{j=1}^{l} q_j$.

Démonstration. — Nous verrons en (*b*) que l'un des nombres $f^{(s-1)}(z_a)$, $1\leq s\leq n$, est non nul. Quitte à remplacer z par $z-z_0$ et $b_{i,j}$ par

$$\sum_{k=i}^{q_j} b_{k,j}\binom{k-1}{i-1} z_0^{k-i}\, e^{\omega_j z_0},$$

nous supposerons $z_0 = 0$.

(*a*) Soit $F(z)$ une fonction entière sur $\mathbf{C}$, non identique à zéro, et soit σ le nombre de zéros de F dans le disque $|z|\leq\rho$, comptés avec leur ordre de multiplicité. Soient s un entier, $s\geq 0$, et R un nombre réel, $R>\rho+1$.

On a alors

$$|F^{(s)}(0)| \leq s!\,\frac{R}{R-1}\left(\frac{\rho+1}{R-\rho}\right)^{\sigma}\times\max_{|\xi|=R}|F(\xi)|. \tag{4.3}$$

En effet, si $\beta_1, \ldots, \beta_\sigma$ sont les zéros de F, comptés un nombre de fois égal à leur multiplicité, la formule de Cauchy montre que l'on a

$$F^{(s)}(0) = \frac{s!}{(2i\pi)^2}\int_{|z|=1}\frac{1}{z^{s+1}}\left[\int_{|\xi|=R}\prod_{i=1}^{\sigma}\left(\frac{z-\beta_i}{\xi-\beta_i}\right)\frac{F(\xi)}{\xi-z}\,d\xi\right]dz.$$

Pour obtenir (4.3), on remarque que, pour $|\xi| = R$ et $|z| = 1$, on a

$$|\xi-z|\geq R-1, \qquad |\xi-\beta_i|\geq R-\rho \qquad \text{et} \qquad |z-\beta_i|\leq\rho+1.$$

(*b*) Nous supposons désormais les hypothèses du lemme 3 vérifiées. Soit $n=\sum_{j=1}^{l} q_j$, et soit Δ le déterminant

$$\Delta = \left|\left[\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\,z^{i-1}\,e^{\omega_j z}\right]_{z=0}\right| = \left|\left[\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}\,z^{s-1}\right]_{z=\omega_j}\right|, \tag{4.4}$$

où (i, j) est l'indice de ligne, $1\leq j\leq l$, $1\leq i\leq q_j$, et s est l'indice de colonne, $1\leq s\leq n$. Le déterminant Δ est un polynôme en $T=\omega_1$ dont les dérivées d'ordre inférieur à $q_1 q_2$ sont nulles pour $T=\omega_2$. On en déduit

que Δ ne diffère de $\prod_{i<j}(\omega_i-\omega_j)^{q_jq_j}$, que par une constante multiplicative (en fait, cette constante est $\prod_{i=1}^{l}\prod_{s=0}^{q_j-1} s!$). Donc $\Delta \neq 0$.

(*c*) Soit $\Delta_{s,(i,j)}$ le cofacteur de l'élément $\left[\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} z^{i-1} e^{\omega_j z}\right]_{z=0}$ dans le déterminant Δ (4.4).

En utilisant la méthode de Van der Poorten [16], nous allons montrer que l'on a

$$(4.5)\qquad \max_{0\leq s\leq n-1} |f^{(s)}(0)| \geqq |f(u)| \times \left(\sum_{t=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{q_j} u^{i-1} e^{\omega_i u} \frac{\Delta_{t,(i,j)}}{\Delta} \right| \right)^{-1}$$

pour tout $u \in \mathbf{C}$.

En effet, si on considère les n relations linéaires en $b_{i,j}$:

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{q_j} b_{i,j} \left[\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} z^{i-1} e^{\omega_j z} \right]_{z=0} = \left[\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} f \right]_{z=0}$$

pour $1 \leq s \leq n$, les formules de Cramer donnent

$$b_{i,j}\Delta = \sum_{t=1}^{n} \Delta_{t,(i,j)} f^{(t)}(0).$$

D'où

$$\Delta f(u) = \sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{q_j} u^{j-1} e^{\omega_i u} \Delta_{l,(i,j)} \right) \times f^{(t)}(0).$$

La majoration (4.5) en découle immédiatement.

(*d*) Le polynôme

$$(4.6)\qquad P(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^{k-1},$$

où

$$(4.7)\qquad a_k = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{q_j} \Delta_{k,(i,j)} u^{i-1} e^{\omega_j u},$$

vérifie les n relations :

$$(4.8)\qquad P^{(k-1)}(\omega_h) = \Delta . \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} e^{uz} \right]_{z=\omega_k} \qquad (1 \leq h \leq l,\ 1 \leq k \leq q_l).$$

En effet, les polynômes

$$(4.9) \qquad Q_{i,j}(z) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{k,(i,j)} z^{k-1} \qquad (1 \leq j \leq l,\ 1 \leq i \leq q_j)$$

vérifient les relations

$$Q_{i,j}^{(k-1)}(\omega_h) = \Delta . \delta_{(i,j),(k,h)} \qquad (1 \leq h \leq l,\ 1 \leq k \leq p_h),$$

où

$$\delta_{(i,j),(k,h)} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (k,h), \\ 0 & \text{si } (i,j) \neq (k,h). \end{cases}$$

Il suffit de remarquer que l'on a, d'après (4.6), (4.7) et (4.9),

$$P(z) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{q_j} u^{i-1} e^{\omega_j u} Q_{i,j}(z).$$

D'où les n relations (4.8).

(*e*) Le seul polynôme P, vérifiant (4.6) et (4.8), est défini par les relations [6] :

$$(4.10) \qquad P(z) = \sum_{k=1}^{n} \Delta . c_k \prod_{h<k} (z - \alpha_h);$$

$$(4.11) \qquad c_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{u\gamma}}{\prod_{h \leq k} (\gamma - \alpha_h)} d\gamma,$$

où la suite $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est la suite $(\omega_1, \ldots, \omega_1, \ldots, \omega_l, \ldots, \omega_l)$, ω_h étant écrit q_h fois, et où Γ est un cercle $|\gamma| = R_1$ avec $R_1 > \Omega = \sup_{1 \leq h \leq l} |\omega_h|$.

(*f*) Nous allons établir la relation :

$$(4.12) \qquad \sum_{h=1}^{n} |a_h| \leq \sum_{k=1}^{n} \Delta |c_k| \prod_{m<k} (1 + |\alpha_m|),$$

où a_h est défini par (4.7) et c_k par (4.11). Soit

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{n} \Delta |c_k| \prod_{h<k} (z + |\alpha_h|).$$

On a, d'après (4.6) et (4.10),

$$a_h = \frac{1}{h!} \left[\frac{d^h}{dz^h} P(z) \right]_{z=0} = \frac{1}{h!} \sum_{k=1}^{n} \Delta c_k \left[\frac{d^h}{dz^h} \prod_{m<k} (z - \alpha_m) \right]_{z=0},$$

or

$$\left|\left[\frac{d^h}{dz^h}\prod_{m<k}(z-\alpha_m)\right)_{z=0}\right| \leq \left[\frac{d^h}{dz^h}\prod_{m<k}(z+|\alpha_m|)\right]_{z=0}.$$

D'où $\sum_{i=1}^{n}|a_i| \leq Q(1)$, ce qui est la relation (4.12).

(*g*) On pose $R_1 = \Omega + 1$, où $\Omega = \sup_{1\leq h\leq l}|\omega_h|$. Pour $|u| \leq R$, on a, d'après (4.11) et (4.12),

$$|c_k| \leq (\Omega+1)\, e^{R(\Omega+1)},$$

et

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i| \leq n(\Omega+1)\, e^{R(\Omega+1)}(\Omega+1)^n\Delta. \tag{4.13}$$

De (4.5), (4.7) et (4.13), on déduit, puisque $\Delta \neq 0$,

$$\max_{0\leq s\leq n-1}|f^{(s)}(0)| \geq [n(\Omega+1)^{n+1}\, e^{R(\Omega+1)}]^{-1} \times \max_{|u|=R}|f(u)|.$$

Utilisons la relation (4.3) avec $F = f$. Comme $\Delta \neq 0$, on a, pour $R > \rho + 1$,

$$\left(\frac{R-\rho}{\rho+1}\right)^{\sigma} \leq n!\,(\Omega+1)^{n+1}\,\frac{R}{R-1}\, e^{R(1+\Omega)}. \tag{4.14}$$

Pour $\Omega = 0$, f est un polynôme et $\sigma < n$, donc la formule (4.2) est vraie. Si $\Omega > 0$, le nombre σ est égal au nombre de zéros de la fonction $z \to f\left(\frac{z}{\Omega}\right)$ dans le disque $|z| < \rho\,\Omega$, d'où

$$\left(\frac{R-\rho\Omega}{\rho\Omega+1}\right)^{\sigma} \leq n!\, 2^n \frac{2R}{R-1}\, e^{2R}.$$

Soit $\lambda > 0$ et $\Lambda = n^{\lambda}(1+\rho\Omega) + \rho\Omega$. Si $\Lambda \geq \frac{3}{2}$, on choisit $R = \Lambda$, et on majore $\frac{2R}{R-1}$ par e^2, et $n!\,2^n$ par n^n. D'où

$$\sigma < \frac{n}{\lambda} + \frac{2(n^{\lambda}+1)}{\lambda \operatorname{Log} n}(\rho\Omega+1).$$

Si $\Lambda < \frac{3}{2}$, alors $\rho\Omega < \frac{1}{4}$ et $n^{\lambda} < \frac{3}{2}$. On choisit $R = \frac{13}{4}\rho\Omega + \frac{9}{4}$. On majore $\frac{9}{2}(\rho\Omega+1)$ par $n \operatorname{Log} n$, d'où $2(R+1) < 2(1+\rho\Omega) + n\operatorname{Log} n$, et

$$\sigma < \frac{n\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}\frac{3}{2}} + \frac{1+\rho\Omega}{\operatorname{Log}\frac{3}{2}} < \frac{n}{\lambda} + \frac{(1+\rho\Omega)}{\lambda \operatorname{Log} n},$$

d'où la relation (4.2).

5. Démonstration du théorème 1.

Pour démontrer le théorème 1 (§ 2), nous suivrons le schéma suivant : on suppose que la conclusion est fausse; ainsi un corps K est du type $\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$, où α_2 est algébrique sur $\mathbf{Q}(\alpha_1)$.

1° On construit, grâce à un lemme de Siegel, une fonction auxiliaire F qui a de nombreux zéros.

2° Le lemme 3 (§ 4) permet de majorer le nombre de zéros de F. Soit γ une valeur correspondante non nulle de F.

3° Le principe du maximum donne une majoration de γ.

4° On construit ainsi une suite de polynômes en α_1 qui vérifie les hypothèses du lemme fondamental, donc α_1 est algébrique, ce qui contredit un théorème de Lang [10].

Rappelons le lemme de Siegel qui donne des conditions suffisantes pour résoudre, en nombres entiers algébriques, un système d'équations linéaires homogènes à coefficients algébriques.

LEMME 4. — *Soient L un corps de nombres, r et n deux nombres entiers positifs, $r < n$. Soient*

$$a_{i,j} \quad (1 \leq i \leq r;\ 1 \leq j \leq n)$$

des éléments de L, d_i $(1 \leq i \leq r)$ un dénominateur de $(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n})$, $d = \max d_i$ et $A = \| (a_{i,j}) \|$.

Alors il existe n éléments $x_1, \ldots, x_n$ de I_L, non tous nuls, tels que

$$(5.1) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0 \quad \textit{pour tout } i = 1, \ldots, r, \\ \| x_i \| \leq C_1 (C_2\, n d A)^{\frac{r}{n-r}} + C_1, \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes ne dépendant que de L.

Démonstration. — Voir LANG [10] (chap. I, § 2) ou SCHNEIDER [13] (appendice).

Soient $x_1, \ldots, x_N$ (resp. $y_1, \ldots, y_M$) des nombres complexes $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants. Soit K le corps obtenu en adjoignant à $\mathbf{Q}$ les MN nombres

$$e^{x_i y_j} \quad (1 \leq i \leq N;\ 1 \leq j \leq M).$$

Supposons $MN \geq 2(M+N)$; alors, d'après un théorème de LANG ([10]), chap. II, § 1, th. 1; RAMACHANDRA [12]), l'un au moins des nombres

considérés est transcendant. Nous allons supposer que le degré de transcendance de K sur $\mathbf{Q}$ est 1, pour obtenir une contradiction. Ainsi, il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}$ tels que

$$K = \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2),$$

α_1 étant transcendant sur $\mathbf{Q}$, et α_2 entier sur $\mathbf{Z}[\alpha_1]$. Soit $d = [K : \mathbf{Q}(\alpha_1)]$. Les nombres $\{ e^{x_i y_j} \mid 1 \leq i \leq N;\ 1 \leq j \leq M \}$ s'écrivent $\left\{ \frac{N_l}{N_0} \,\middle|\, 1 \leq l \leq MN \right\}$, où N_k ($0 \leq k \leq MN$) est un élément de $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_2]$. Il s'écrit de manière unique

$$N_k = \sum_{h_1 \geq 0} \sum_{h_2 = 0}^{d-1} a_{h_1, h_2} \alpha_1^{h_1} \alpha_2^{h_2},$$

où $a_{h_1, h_2} \in \mathbf{Z}$.

Soit r le maximum des degrés de N_k ($0 \leq k \leq MN$) et de α_2^d.

Soit X un nombre entier arbitrairement grand : X sera minoré par un nombre fini d'inégalités. On désignera par $k_0, k_1, \ldots$ des constantes indépendantes de X.

1° *Il existe une famille d'entiers rationnels non tous nuls,*

$$P(\lambda_1, \ldots, \lambda_{N+2}) = P(\lambda),$$

définis pour

$$\text{(5.2)} \qquad \begin{cases} 0 \leq \lambda_i \leq 2X^M - 1; & 1 \leq i \leq N; \\ 0 \leq \lambda_{N+1} \leq 2NMr^2 X^{M+N} - 1; \\ 0 \leq \lambda_{N+2} \leq d - 1, \end{cases}$$

et majorés par

$$\text{(5.3)} \qquad |P(\lambda)| < \exp k_0 X^{M+N},$$

tels que la fonction F, définie par

$$\text{(5.4)} \qquad F(z) = \sum_{(\lambda)} P(\lambda) \exp \left[\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i z \right] . \alpha_1^{\lambda_{N+1}} \alpha_2^{\lambda_{N+2}},$$

vérifie

$$\text{(5.5)} \quad F(a_1 y_1 + \ldots + a_M y_M) = 0 \qquad \textit{pour} \quad 1 \leq a_j \leq X^N; \quad 1 \leq j \leq M.$$

En effet, en notant $a.y$ la somme $\sum_{j=1}^{M} a_j y_j$, on a, d'après (5.4) et (5.5),

$$\text{(5.6)} \qquad F(a.y) = \sum_{(\lambda)} P(\lambda) \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{M} e^{x_i y_j . \lambda_i a_j} . \alpha_1^{\lambda_{N+1}} \alpha_2^{\lambda_{N+2}}.$$

Donc $N_0^{2NMX^{M+N}} F(a.y)$ est un élément de $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_2]$ pour $1 \leq a_j \leq X^N$, $1 \leq j \leq M$. Ainsi il existe $A_{\lambda,h,a} \in \mathbf{Z}$ tels que

$$N_0^{2NMX^{M+N}} F(a.y) = \sum_{h_1=0}^{\tau-1} \sum_{h_2=0}^{d-1} \left(\sum_{(\lambda)} P(\lambda) A_{\lambda,h,a} \right) \alpha_1^{h_1} \alpha_2^{h_2}.$$

De plus, on a

$$\tau \leq 4NMr^2 X^{M+N} \qquad \text{et} \qquad |A_{\lambda,h,a}| \leq \exp k_1 X^{M+N}.$$

Considérons le système linéaire homogène en $P(\lambda)$

$$\sum_{(\lambda)} P(\lambda) A_{\lambda,h,a} = 0,$$

$$0 \leq h_1 \leq \tau - 1, \qquad 0 \leq h_2 \leq d - 1,$$
$$1 \leq a_j \leq X^N, \qquad 1 \leq j \leq M.$$

On a ainsi à résoudre un système de $\tau\, dX^{MN} \leq 4NMr^2 dX^{MN+M+N}$ équations à 2^{N+1}. $NMr^2\, dX^{MN+M+N}$ inconnues. Comme $N \geq 3$, le lemme 4 montre qu'il existe une solution dans $\mathbf{Z}$ non triviale $P(\lambda)$, et, d'après (5.1), telle que l'on ait

$$|P(\lambda)| < \exp k_0 X^{M+N}, \tag{5.3}$$

où k_0 est une constante indépendante de X.

2° *Il existe des entiers* $b_1, \ldots, b_M$ *tels que, pour* X *assez grand, on ait*

$$1 \leq b_j \leq k_2 X^N, \quad 1 \leq j \leq M \qquad \text{et} \qquad F(b, y) \neq 0, \tag{5.7}$$

avec

$$k_2 = [2^{(N+2)/M}].$$

On pose $Q = 2^N X^{MN}$. Notons $\beta_1, \ldots, \beta_{4Q}$ (resp. $\omega_1, \ldots, \omega_Q$) les nombres $\sum_{j=1}^{M} b_j y_j$, $1 \leq b_j \leq k_2 X^N$ $\left(\text{resp. les nombres } \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i,\ 0 \leq \lambda_i \leq 2X^M - 1\right)$ qui sont deux à deux distincts puisque les nombres $y_1, \ldots, y_M$ (resp. $x_1, \ldots, x_N$) sont $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants.

Pour $\omega_l = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i$, on pose

$$q_l = \sum_{\lambda_{N+1}=0}^{\tau-1} \sum_{\lambda_{N+2}=0}^{d-1} P(\lambda) \alpha_1^{\lambda_{N+1}} \alpha_2^{\lambda_{N+2}}.$$

La transcendance de α_1 montre que l'un au moins des nombres q_l $(1 \leq l \leq Q)$ est non nul.

La fonction F, définie par (5.4), s'écrit alors

$$F(z) = \sum_{l=1}^{Q} q_l \, e^{\omega_l z}.$$

Soient $\Omega = 2NX^M \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$, $\rho = k_2 X^N$ et $\lambda = \frac{1}{2}$. Le nombre de zéros de la fonction F dans le disque $|z| \leq \rho$ est, d'après le lemme 3 du § 4, inférieur à

$$2Q + 4 \frac{\left(1 + Q^{\frac{1}{2}}\right)(1 + \Omega\rho)}{\operatorname{Log} Q} < 4Q.$$

Donc l'un des nombres $F(\beta_m) = F(b.y)$ est non nul.

3° *On a la majoration suivante :*

$$F(b.y) < \exp[-X^{MN} \operatorname{Log} X]. \tag{5.8}$$

La fonction F admet les zéros $a.y$ $(1 \leq a_j \leq X^N,\ 1 \leq j \leq M)$. Utilisons le principe du maximum sur le disque de rayon $R = X^{M+N}$ pour la fonction $\dfrac{F(z)}{\prod (z - a.y)}$.

Pour $|z| \leq R$, on a, d'après (5.2), (5.3), (5.4) et (5.7),

$$|F(z)| \leq \exp k_3 X^{2M+N} \qquad \text{et} \qquad |b.y - a.y| < 2k_2 X^N.$$

Or, pour $|z| = R$, on a

$$|z - a.y| \geq X^{M+N} - k_4 X^N.$$

D'où

$$\begin{aligned} |F(b.y)| &\leq \left[\prod_a |b.y - a.y|\right] \times \sup_{|z|=R} \left|\frac{F(z)}{\prod (z - a.y)}\right| \\ &\leq \exp\left[k_3 X^{2M+N} - X^{MN} \operatorname{Log} \frac{X^M - k_4}{2k_2}\right] \\ &\leq \exp[-X^{MN} \operatorname{Log} X]. \end{aligned}$$

D'où la relation (5.8).

4° *Le nombre α_1 vérifie les hypothèses du lemme fondamental.* On pose

$$q(\alpha_1, \alpha_2) = N_0^{2NMk_2 X^{M+N}} F(b.y).$$

Ainsi $q(\alpha_1, \alpha_2)$ est un élément non nul de $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_2]$, d'après (5.2), (5.4) et (5.7).

Prenons sa norme sur $\mathbf{Q}(\alpha_1)$: soit

$$P_X(\alpha_1) = N_{K/\mathbf{Q}(\alpha_1)}[q(\alpha_1, \alpha_2)].$$

Ainsi P_X est un polynôme non nul de $Z[\alpha_1]$, de hauteur inférieure à $\exp k_5 X^{M+N}$ et de degré inférieur à $k_5 X^{M+N}$. De plus, d'après (5.8), on a

$$|P_X(\alpha_1)| < \exp -\frac{1}{2} X^{MN} \operatorname{Log} X.$$

On pose

$$\sigma_1(X) = \sigma_2(X) = k_5 X^{M+N}; \qquad a_1(X) = a_2(X) = 2.$$

Ainsi on a

$$|P_X(\alpha_1)| < \exp\{-20\,\sigma_1(X)\,\sigma_2(X)\},$$

donc α_1 vérifie les conditions (3.2). On en déduit que α_1 doit être algébrique. Cette contradiction termine la démonstration.

6. Indépendance algébrique dans le cas où la dimension est supérieure à 1.

La méthode de GEL'FOND permettrait de démontrer qu'une famille de n nombres ($n > 2$) est algébriquement indépendante, si le critère de transcendance que nous venons de voir au paragraphe 3 pouvait se généraliser en un critère d'indépendance algébrique. Pour obtenir dans une certaine mesure les limites d'application de la méthode de GEL'FOND dans son stade actuel, nous allons donner une définition qui montrera quels résultats on peut espérer.

D'après le principe de Dirichlet [2], si $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ sont des nombres complexes algébriquement indépendants, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $H_0 = H_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \varepsilon)$ telle que, pour tout $(s+1)$-uple $H(d_1, \ldots, d_s)$ de nombres entiers positifs avec $H > H_0$, il existe un polynôme $P \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_s]$, de hauteur H et de degré d_i par rapport à X_i, tel que

$$|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)| < \exp -(1+\varepsilon) \operatorname{Log} H \prod_{i=1}^{s} d_i.$$

L'étude du cas $s = 1$ (lemme fondamental, § 3) et la définition du « type de transcendance » de LANG [9] justifient les définitions suivantes :

DÉFINITION 1. — *Soient s un nombre entier positif, s' un nombre réel. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ des nombres complexes. On dira que $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ vérifient $(\mathfrak{S}_{s'})$ si les conditions suivantes sont réalisées :*

Il existe $(s+1)$ fonctions $\sigma_0, \ldots, \sigma_s$ réelles de variable réelle x, strictement croissantes, qui tendent vers $+\infty$ avec x, et il existe un nombre $a_0 > 1$

tel que

$$\sigma_j(x) \leqq \sigma_0(x); \qquad \sigma_j(x+1) \leqq a_0 \sigma_j(x) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq j \leqq s \quad \text{et} \quad x > 0;$$

il existe un nombre entier N_0 positif et, pour tout $N > N_0$, un polynôme $P_N \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_s]$ non nul de hauteur H_N et de degré $d_{i,N}$ par rapport à X_i tels que, pour tout $N > N_0$, on ait

$$|P_N(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)| < \exp - k \left[\prod_{i=0}^{s} \sigma_i(N) \right]^{\frac{s'+1}{s+1}},$$

$$\operatorname{Log} H_N \leqq \sigma_0(N), \qquad d_{i,N} \leqq \sigma_i(N) \qquad (i = 1, \ldots, s),$$

où k est une constante ne dépendant que de a_0, s et s'.

Il est clair que, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ sont algébriquement dépendants, alors ils vérifient $(\mathfrak{C}_{s'})$ pour tout s'.

D'autre part, si $s' < s$, le principe de Dirichlet montre que $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ vérifient $(\mathfrak{C}_{s'})$, quels que soient les nombres complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.

DÉFINITION 2. — *Soient K un sous-corps de $\mathbf{C}$ de degré de transcendance $s \geqq 1$ sur $\mathbf{Q}$, et s' un nombre réel. On dira que K est un corps $\mathbf{Q}^{(s')}$ s'il existe des nombres complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ appartenant à K et ne vérifiant pas $(\mathfrak{C}_{s'})$.*

On dira que K est un corps $\mathbf{Q}^{(0)}$ si K est une extension algébrique de $\mathbf{Q}$.

Remarque 1. — Si K est un corps $\mathbf{Q}^{(s')}$ et si t est un nombre réel avec $t \geqq s' \geqq 1$, alors K est un corps $\mathbf{Q}^{(t)}$.

Remarque 2. — Si K est un corps $\mathbf{Q}^{(s')}$, le degré s de transcendance de K sur $\mathbf{Q}$ est inférieur ou égal à s'.

Remarque 3. — Si K est une extension de $\mathbf{Q}$ de type de transcendance τ (LANG [10], chap. V, § 2), alors K est un corps $\mathbf{Q}^{(\tau-1)}$.

Le lemme fondamental peut s'énoncer :

PROPOSITION. — *Un corps K est un corps $\mathbf{Q}^{(1)}$ si, et seulement si, K est une extension de $\mathbf{Q}$ de degré de transcendance inférieur ou égal à 1.*

On peut alors obtenir les théorèmes suivants :

THÉORÈME 2. — *Soient $x_1, \ldots, x_N$ (resp. $y_1, \ldots, y_M$) des nombres complexes $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants. Alors le corps obtenu en adjoignant à $\mathbf{Q}$ les MN nombres*

$$e^{x_i y_j} \quad (1 \leqq i \leqq N; \ 1 \leqq j \leqq M)$$

n'est pas inclus dans un corps $\mathbf{Q}^{(s)}$ pour $1 \leqq s \leqq \dfrac{MN}{M+N} - 1$.

Pour $s = 1$, d'après la proposition précédente et un théorème de LANG [(10], II, § 1, th. 1; RAMACHANDRA [12]), on retrouve le théorème 1.

THÉORÈME 3. — *Soient* $x_1, \ldots, x_N$ *(resp.* $y_1, \ldots, y_M$*) des nombres complexes* $\mathbf{Q}$*-linéairement indépendants, et* s *un nombre réel. Si* $1 \leq s \leq \frac{(M-1)N}{M+N}$, *alors les* $M(N+1)$ *nombres*

$$y_j, \ e^{x_i y_j} \quad (1 \leq i \leq N;\ 1 \leq j \leq M)$$

n'appartiennent pas tous à un même corps $\mathbf{Q}^{(s)}$.

Pour $s = 1$, le théorème 3 englobe un théorème de GEL'FOND ([5], chap. III, th. 1) et un théorème de ŠMELEV [15] en supprimant leurs hypothèses sur une mesure d'indépendance linéaire de $x_1, \ldots, x_N$ (3).

THÉORÈME 4. — *Soient* $x_1, \ldots, x_N$ *(resp.* $y_1, \ldots, y_M$*) des nombres complexes* $\mathbf{Q}$*-linérairement indépendants, et* s *un nombre réel. Si* $1 \leq s < \frac{MN}{M+N}$, *alors les* $MN + M + N$ *nombres*

$$x_i, \ y_j, \ e^{x_i y_j} \quad (1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq M)$$

n'appartiennent pas tous à un même corps $\mathbf{Q}^{(s)}$.

Pour $s = 1$, le théorème 4 permet de supprimer l'hypothèse du théorème 2 ([5], chap. III) de GEL'FOND sur l'indépendance linéaire de $x_1, \ldots, x_N$ (3).

Terminons par une application géométrique, analogue au corollaire 2 du théorème 2 de LANG ([9], chap. V, § 3) (dont nous adoptons les notations) :

THÉORÈME 5. — *Soient* s *un nombre réel,* $s \geq 1$, *et* K *un corps* $\mathbf{Q}^{(s)}$ *algébriquement clos. Soient* G *un groupe linéaire sur* $\mathbf{C}$, *et* $\varphi : \mathbf{C} \to G_{\mathbf{C}}$ *un sous-groupe à un paramètre de* G, *de dimension algébrique* d. *Soit* Γ *un sous-groupe de* $\mathbf{C}$, *contenant au moins* m *éléments* $\mathbf{Q}$*-linéairement indépendants, et tel que* $\varphi(\Gamma) \subset G_K$.

Alors $md < (s+1)(m+d)$.

De plus,

si $\Gamma \subset K$,	*alors*	$md < (s+1)(m+d-1)$;
si $\varphi'(0) \in G_K$,	*alors*	$md < (s+1)m + sd$;
si $\Gamma \subset K$ *et* $\varphi'(0) \in G_K$,	*alors*	$md \leq (s+1)m + s(d-1)$.

Le théorème 5 est équivalent aux théorèmes 2, 3 et 4.

---

(3) R. TIJDEMAN a également montré comment supprimer les hypothèses superflues de GEL'FOND et ŚMELEV (R. TIJDEMAN, *Op. cit.*, p. 146-162).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] DANCS (S.) and TURAN (P.). — On the distribution of values of a class of entire functions, I and II, *Publ. Math.*, Debrecen, t. 11, 1964, p. 257-272.

[2] FEL'DMAN (N. I.) and ŠIDLOVSKIJ (A. B.). — The development and present state of the theory of transcendental numbers [en russe], *Usp. Mat. Nauk SSSR*, t. 22, 1967, n° 3, p. 3-81; [en anglais] *Russian mathematical Surveys*, t. 22, 1967, n° 3, p. 1-79.

[3] GEL'FOND (A. O.). — Sur l'indépendance algébrique de puissances algébriques de nombres algébriques [en russe], *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, t. 64, 1949, p. 277-280; t. 67, 1949, p. 13-14.

[4] GEL'FOND (A. O.). — On the algebraic independence of transcendental numbers in certain classes [en russe], *Uspekhi mat. Nauk*, t. 4, 1949, n° 5, p. 14-48; [en anglais] in *Number theory and analysis.* — Providence, American mathematical Society, 1962 (*American mathematical Society Translations*, Series 1, vol. 2, p. 125-169).

[5] GEL'FOND (A. O.). — *Transcendental and algebraic numbers.* Translated from the 1rst (1952) russian edition. — New York, Dover Publications, 1960.

[6] GEL'FOND (A. O.). — *Calcul des différences finies.* Traduction de l'ouvrage publié à Moscou en 1959. — Paris, Dunod, 1963 (*Collection universitaire de Mathématiques*, 12).

[7] GEL'FOND (A. O.) et FEL'DMAN (N. I.). — Sur la mesure de la transcendance réciproque de certains nombres [en russe], *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, t. 14, 1950, p. 493-500.

[8] LANG (S.). — Report on diophantine approximations, *Bull. Soc. math. France*, t. 93, 1965, p. 177-192.

[9] LANG (S.). — Nombres transcendants, *Séminaire Bourbaki*, 18e année, 1965-1966, n° 305, 8 p.

[10] LANG (S.). — *Introduction to transcendental numbers.* — Reading, Addison Wesley publishing Company, 1966 (*Addison-Wesley Series in Mathematics*).

[11] MAHLER (K.). — On a class of entire functions, *Acta Math. Acad. Sc. Hungar.*, t. 18, 1967, p. 83-86.

[12] RAMACHANDRA (K.). — Contribution to the theory of transcendental numbers, I and II, *Acta Arithm.*, t. 14, 1967-1968, p. 65-88.

[13] SCHNEIDER (T). — *Einführung in die transzendenten Zahlen.* — Berlin, Springer, 1957; *Introduction aux nombres transcendants.* — Paris, Gauthier-Villars, 1959.

[14] ŠMELEV (A. A.). — Concerning algebraic independence of some transcendental numbers [en russe], *Mat. Zametki*, t. 3, 1968, p. 51-58; [en anglais], *Mathematical Notes*, t. 3, 1968, p. 31-35.

[15] ŠMELEV (A. A.). — On algebraic independence of some numbers [en russe], *Mat. Zametki*, t. 4, 1968, p. 525-532; [en anglais], *Mathematical Notes*, t. 4, 1969, p. 805-809.

[16] VAN DER POORTEN (A. J.). — A generalisation of Turan's main theorems to binomials and logarithms, *Bull. Austral. math. Soc.*, t. 2, 1970, p. 183-195.

[17] WALDSCHMIDT (M.). — Solution d'un problème de Schneider sur les nombres transcendants, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 271, 1970, série A, p. 697-700.

[18] WALDSCHMIDT (M.). — Amélioration d'un théorème de Lang sur l'indépendance algébrique d'exponentielles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 272, 1971, série A, p. 413-415.

(Texte définitif reçu le 5 mars 1971.)

Michel WALDSCHMIDT,
U. E. R. de Mathématiques et Informatique,
Université de Bordeaux I,
351 cours de la Libération, 33-Talence.