BULLETIN DE LA S. M. F.

J.-L. CHABERT

Anneaux de 'polynômes à valeurs entières' et anneaux de Fatou

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 273-283
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__273_0>

Bull. Soc. math. France,
99, 1971, p. 273 à 283.

ANNEAUX DE « POLYNÔMES À VALEURS ENTIÈRES » ET ANNEAUX DE FATOU

PAR

JEAN-LUC CHABERT.

RÉSUMÉ. — Étude, dans le cas où A est un anneau de valuation de corps des fractions K, de l'anneau B des polynômes de $K[X]$ qui sur A prennent leurs valeurs dans A et, en particulier, détermination des idéaux premiers de B. Lorsque K est un corps local, B fournit un exemple non classique d'anneau complètement intégralement clos, qui n'est pas intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1; en outre, B étant alors un anneau de Fatou, il répond à deux questions de BENZAGHOU.

Tous les anneaux considérés seront commutatifs et unitaires.

Étant donné un corps de nombres K, PÓLYA [7] et OSTROWSKI [6] appellent « polynômes à valeurs entières » les polynômes de $K[X]$ qui, pour tout entier de K, ont pour valeur un entier de K. Cette notion peut se généraliser au cas d'un anneau intègre quelconque : étant donné un anneau intègre A de corps des fractions K, notons B l'anneau des polynômes de $K[X]$ qui, pour tout élément de A, sont à valeurs dans A.

Certaines propriétés de A se transfèrent à B; ainsi, nous savons que :

— *Si A est intégralement clos, B aussi (cf.* [3]).

— *Si A est complètement intégralement clos, B aussi* ([4]).

— *Si A est de Fatou, B aussi* ([4]).

RAPPEL. — A est dit de Fatou ([1]) lorsque, pour toute fraction rationnelle P/Q de $K(T)$, normalisée par les conditions suivantes :

(i) $d^oP < d^oQ$,

(ii) $Q(0) = 1$,

(iii) P et Q sont premiers entre eux dans $K[T]$,

si le développement en série formelle de P/Q en T est à coefficients dans A, alors P et Q sont à coefficients dans A.

Pour voir que, si A est de Fatou, B aussi, il suffit de remarquer que :

(i) Un polynôme de $K[X]$ qui prend ses valeurs dans A pour tout élément de A, sauf peut-être un nombre fini, appartient à B (*cf.* [3], lemme) et

(ii) Si $P(X)(T)/Q(X)(T)$ est une fraction rationnelle normalisée de $K(X)(T)$, alors $P(a)(T)/Q(a)(T)$ est une fraction rationnelle normalisée de $K(T)$ pour tout élément de A sauf peut-être un nombre fini ([5]).

La suite d'implications

(A est un anneau de Krull)

$\Rightarrow$ (A est intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1)

$\Rightarrow$ (A est un anneau de Fatou)

$\Rightarrow$ (A est complètement intégralement clos)

$\Rightarrow$ (A est intégralement clos)

incite à étudier si la propriété d'être de Krull ou d'être intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 est conservée par le passage de A à B. Pour faire cette étude, nous allons voir ce qu'il en est dans le cas des anneaux de valuation de hauteur 1.

Or, nous savons que, *si A est un anneau de valuation, pour que $B = A[X]$, il faut et il suffit que le corps résiduel soit infini ou bien que le groupe des valeurs soit dense* (*cf.* [3]). D'autre part, si A est un anneau de Krull, alors $A[X]$ aussi et, si A est intersection d'anneaux de valuation (discrète) de hauteur 1, alors $A[X]$ aussi (*cf.* [8], IV). D'où l'étude suivante :

Étude de l'anneau B dans le cas où A est l'anneau d'une valuation discrète v, de hauteur 1 et de corps résiduel fini. — Notons K le corps des fractions de A, $\hat{K}$ le complété de K pour v, $\hat{v}$ le prolongement de v à $\hat{K}$ et $\hat{A}$ l'anneau de $\hat{v}$.

PROPOSITION 1. — *Les idéaux premiers non nuls de B sont de l'une des deux formes suivantes :*

(i) $\mathfrak{p}_P = \{ Q(X) \in B \mid Q = P.R$ *où* $R \in K[X] \}$ *où P est un polynôme non constant, irréductible et primitif de $A[X]$ (déterminé à un élément de A^* près).*

(ii) $\mathfrak{M}_x = \{ Q(X) \in B \mid \hat{v}(Q(x)) > 0 \}$ *où x est un élément quelconque de $\hat{A}$ (uniquement déterminé).*

De plus :

(*a*) *Pour que $\mathfrak{p}_P$ soit inclus dans $\mathfrak{M}_x$, il faut et il suffit que $P(x) = 0$.*

(*b*) *Pout tout $x \in \hat{A}$, $\mathfrak{M}_x$ est maximal et son corps résiduel est isomorphe à celui de v.*

(c) *Si P n'a pas de racine dans $\hat{A}$, $\mathfrak{p}_P$ est maximal et son corps résiduel est isomorphe à $K[X]/(P)$.*

(d) *Si P a une racine dans $\hat{A}$, $B/\mathfrak{p}_P$ est un anneau semi-local contenant la fermeture intégrale de A dans $K[X]/(P)$.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de B.

Premier cas : $\mathfrak{p} \cap A = (0)$. — La localisation, par $A - \{0\}$, fournit une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de B dont l'intersection avec A est (0) sur l'ensemble des idéaux premiers de $K[X]$, et l'intersection avec B fournit la bijection réciproque. Soit P un polynôme de $A[X]$ tel que $P.K[X]$ soit l'image de $\mathfrak{p}$ par la localisation. P est un polynôme non constant et irréductible dans $K[X]$; on peut le supposer en outre irréductible et primitif dans $A[X]$. On a bien

$$\mathfrak{p} = P.K[X] \cap B = \mathfrak{p}_P.$$

Notons que ces idéaux premiers sont tous de hauteur 1.

Pour étudier le cas où $\mathfrak{p} \cap A$ est l'idéal maximal de A, nous utiliserons les deux lemmes techniques qui suivent. Choisissons une uniformisante π de A, et notons n le cardinal du corps résiduel $A/\pi A$.

LEMME 1. — *Soit $(a_r)_{r \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de A telle que, quels que soient les entiers k et t, les éléments a_r, pour $kn^t \leqq r < (k+1)\,n^t$, forment un système de représentants de A* modulo π^t. *Alors le A-module B admet pour base la famille des polynômes $Q_m(X)$ suivants, où $m \in \mathbf{N}$: $Q_0(X) = 1$ et, pour $m \geqq 1$,*

$$Q_m(X) = \pi^{-u(m)} \prod_{0 \leqq r \leqq m-1} (X - a_r), \qquad \text{où} \qquad u(m) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{m}{n^s}\right].$$

$\left[\frac{m}{n^s}\right]$ signifie « partie entière de $\frac{m}{n^s}$ ». Cet énoncé peut se tirer de [6]. D'ailleurs, la vérification est facile. Tout polynôme $Q(X)$ de B s'écrit sous la forme $\sum_{m=0}^{s} p_m Q_m(X)$, où les p_m appartiennent à K, puisque les polynômes $Q_m(X)$ forment une base du K-espace vectoriel $K[X]$. En remplaçant X successivement par $a_0, a_1, \ldots, a_s$, et en utilisant le fait qu'alors chacune des valeurs de Q est dans A, on voit que chaque p_m est en fait dans A.

REMARQUE 1. — Étant donné un système de représentants $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ du corps résiduel, on obtient une suite (a_r), satisfaisant à l'hypothèse du lemme 1, en posant $a_r = a_{r_0} + a_{r_1}\pi + \ldots + a_{r_k}\pi^k$, où $r_k \ldots r_1 r_0$ est l'écriture de l'entier r en base n.

LEMME 2. — *Soient t un entier positif et $(a'_r)_{0 \leq r < n^t}$ un système de représentants de A modulo π^t. Posons*

$$Q'_{n^t}(X) = \pi^{-u(n^t)} \prod_{0 \leq r < n^t} (X - a'_r).$$

Pour tout élément x de $\hat{A}$, on a

$$\hat{v}(Q'_{n^t}(x)) = -t + \sup_{0 \leq r < n^t} \hat{v}(x - a'_r).$$

Soit s l'unique indice tel que $x \equiv a'_s \bmod \pi^t$; alors s est l'unique indice tel que $\hat{v}(x - a'_s) = \sup \hat{v}(x - a'_r)$; pour $r \neq s$, on a $\hat{v}(x - a'_r) = v(a'_s - a'_r)$; or $\sum_{r \neq s} v(a'_s - a'_r) = u(n^t) - t$ par un calcul simple où l'on groupe les $v(a'_s - a'_r)$ ayant une valeur donnée; d'où notre assertion.

Deuxième cas : $\mathfrak{p} \cap A = \pi A$. — Soit $t \in \mathbf{N}$. Considérons l'égalité

$$\pi Q_{n^{t+1}}(X) = \prod_{0 \leq k < n} \pi^{-u(n^t)} \prod_{kn^t \leq r < (k+1)n^t} (X - a_r).$$

Comme $Q_{n^{t+1}}(X) \in B$, $\pi Q_{n^{t+1}}(X) \in \pi B \subset \mathfrak{p}$, et il existe $k_t \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que le polynôme

$$R_{n^t}(X) = \pi^{-u(n^t)} \prod_{k_t n^t \leq r < (k_t+1)n^t} (X - a_r)$$

appartienne à $\mathfrak{p}$. On recommence en décomposant $R_{n^t}(X)$ en n facteurs, et on obtient un entier $k_{t-1} \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que

$$R_{n^{t-1}}(X) = \pi^{-u(n^{t-1})} \prod_{k_t n^t + k_{t-1} n^{t-1} \leq r < k_t n^t + (k_{t-1}+1) n^{t-1}} (X - a_r)$$

appartienne à $\mathfrak{p}$. Ainsi de suite jusqu'à $R_1(X)$, que l'on notera $X - b_t$.

Le lemme 1 montre alors qu'on peut définir des polynômes $R_m(X)$ pour $0 \leq m < n^t$ et $m \neq n^s$ de façon à ce que les polynômes $(R_m(X))_{0 \leq m \leq n^t}$ forment une base du A-module des polynômes de B de degré inférieur ou égal à n^t et que, pour $n^s \leq m < n^{s+1}$, $R_m(X)$ soit divisible par $R_{n^s}(X)$ dans B.

Soit $Q(X)$ un polynôme quelconque de B de degré inférieur ou égal à n^t. On a

$$Q(X) = Q(b_t) + \sum_{m=1}^{n^t} q_m R_m(X) \quad \text{où} \quad q_m \in A.$$

Du fait que, pour $m \geqq 1$, $R_m(X) \in \mathfrak{p}$ et que $\mathfrak{p} \cap A = \pi A$, on déduit :

($\bigstar$) Pour que $Q(X)$ appartienne à $\mathfrak{p}$, il faut et il suffit que $Q(b_t)$ appartienne à πA.

Soit t' un entier supérieur à t. On obtient, par la méthode précédente, un polynôme de degré 1 appartenant à $\mathfrak{p}$ que l'on notera $X - b_{t'}$. Soit s un entier inférieur ou égal à t tel que $v(b_{t'} - b_t) \geqq s$ (0 par exemple). Puisque $R_{n^s}(X) \in \mathfrak{p}$, $R_{n^s}(b_{t'}) \in \pi A$ et, comme les a_r intervenant dans $R_{n^s}(X)$ forment un système de représentants de A modulo π^s, le lemme 2 montre que $\sup_r v(b_{t'} - a_r) \geqq s + 1$. Or, b_t est l'un de ces a_r, et $v(b_{t'} - b_t) \geqq s + 1$. D'où, finalement, $v(b_{t'} - b_t) \geqq t + 1$ et, ainsi, la suite des b_t, pour $t \in \mathbf{N}$, définit un élément x de $\hat{A}$.

Étant donné $Q(X) \in B$, pour t assez grand, $Q(X)$ appartient à $\mathfrak{p}$ est équivalent à $v(Q(b_t)) > 0$, et $v(Q(b_t)) > 0$ est équivalent à $\hat{v}(Q(x)) > 0$. Donc $\mathfrak{p}$ est égal à $\mathfrak{P}_x$.

Soient x et x' deux éléments distincts de $\hat{A}$. Posons $\hat{v}(x - x') = t$. Choisissons a_0 de façon que $\hat{v}(a_0 - x) > t$. Le lemme 2 montre que $\hat{v}(Q_{n^t}(x)) > 0$ tandis que $\hat{v}(Q_{n^t}(x')) = 0$. Donc $\mathfrak{P}_x$ est distinct de $\mathfrak{P}_{x'}$.

Il est clair que l'idéal $\mathfrak{p}_P$ est inclus dans l'idéal $\mathfrak{P}_x$ lorsque $P(x) = 0$. Inversement, si $P(x)$ n'est pas nul, construisons un polynôme de $\mathfrak{p}_P$ qui n'appartient pas à $\mathfrak{P}_x$. Posons $\hat{v}(P(x)) = t$; choisissons a_0 de façon que $\hat{v}(a_0 - x) > t$, alors $v(P(a_0)) = t$. Posons $R(X) = \frac{1}{X - a_0} \cdot Q_{n^t}(X)$. Montrons que le polynôme $R(X)\,P(X)$ répond à la question. Soit $a \in \hat{A}$. Si $\hat{v}(a - a_0) \leqq t$, alors $\hat{v}(a - a_0) \leqq \hat{v}(P(a))$ et donc $R(a)\,P(a) \in \hat{A}$. Si $\hat{v}(a - a_0) > t$, alors, d'après le lemme 2, $\hat{v}(R(a)) = -t$, et donc $\hat{v}(R(a)\,P(a)) = 0$. En particulier, $R(X)\,P(X)$ appartient à B, donc à $\mathfrak{p}_P$ tandis que $v(R(x)\,P(x)) = 0$.

Montrons que $B/\mathfrak{P}_x$ est isomorphe à $A/\pi A$. Soient $Q(X) \in B$, et t tel que $d^\circ Q < n^t$. On a vu ($\bigstar$) qu'il existe $b_t \in A$ tel que $Q(X) \equiv Q(b_t)$ modulo $\mathfrak{P}_x$. Comme $Q(b_t) \in A$, l'application composée $A \to B \to B/\mathfrak{P}_x$ est surjective, d'où notre assertion, car $A \cap \mathfrak{P}_x = \pi A$.

Quant aux idéaux premiers $\mathfrak{p}_P$, on a

$$P.K[X] \cap B = \mathfrak{p}_P \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{p}_P \cap A[X] = P.A[X].$$

Donc les homomorphismes canoniques suivants sont des injections : $A[X]/(P) \to B/\mathfrak{p}_P \to K[X]/(P)$. Si $P(X)$ n'a pas de racines dans $\hat{A}$, $\mathfrak{p}_P$ est maximal, car il n'est contenu dans aucun $\mathfrak{P}_x$; comme $K[X]/(P)$ est le corps des fractions de $A[X]/(P)$, on a l'isomorphisme $B/\mathfrak{p}_P \simeq K[X]/(P)$. D'où (*c*). Enfin, pour prouver l'assertion (*d*) nous utiliserons la proposition 2.

REMARQUE 2. — Pour que l'idéal $\mathfrak{p}_P$ soit monogène engendré par P, il faut et il suffit que l'image de P dans $(A/\pi A)[X]$ n'ait pas de racine dans $A/\pi A$. Cette dernière assertion signifie encore que, pour tout $a \in A$, $P(a)$ est inversible dans A. Supposons-la réalisée; soit $Q = P.R \in \mathfrak{p}_P$ où $R \in K[X]$; $Q(a) \in A$ et $P(a) \in A^*$ impliquent $R(a) \in A$, et donc $R \in B$. Inversement, supposons qu'il existe $a \in A$ tel que $v(P(a)) > 0$; soient $a_1, \ldots, a_{n-1}$ des éléments de A tels que $(a, a_1, \ldots, a_{n-1})$ forment un système de représentants de A modulo π; le polynôme $Q = P.R$, où $R = \frac{1}{\pi}(X - a_1)\ldots(X - a_{n-1})$ appartient à $\mathfrak{p}_P$, alors que R n'appartient pas à B.

REMARQUE 3. — Relation entre les idéaux premiers de $A[X]$ et ceux de B :

— l'idéal (P) de $A[X]$, où P est un polynôme non constant, irréductible et primitif de $A[X]$, est dominé par $\mathfrak{p}_P$ seulement;

— l'idéal (π) de $A[X]$ est perdu dans B;

— l'idéal (π, F) de $A[X]$, où l'image $\overline{F}$ de F dans $(A/\pi A)[X]$ est irréductible, est :

1° perdu dans B si $d^\circ \overline{F} > 1$;

2° dominé par les $\mathfrak{P}_x$, tels que $x \equiv a \pmod{\pi \hat{A}}$, si

$$F \equiv X - a \pmod{\pi A} \qquad (a \in A).$$

PROPOSITION 2. — *Les valuations de $K(X)$ dont l'anneau contient B sont de l'un des deux types suivants :*

(i) *La valuation P-adique de $K(X)$, où P est un polynôme non constant, irréductible et primitif de $A[X]$ (déterminé à un élément de A^* près).*

(ii) *La valuation w_x de $K(X)$ à valeurs dans le produit lexicographique $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, définie par : pour tout $R(X) \in K[X] - \{0\}$, $w_x(R(X)) = (r_x, \hat{v}(R_1(x)))$ avec $R(X) = (X - x)^{r_x}.R_1(X)$, $R_1(X) \in \hat{K}[X]$ et $R_1(x) \neq 0$, et où x est un élément quelconque de $\hat{A}$ (uniquement déterminé).*

Démonstration. — Soit w une valuation de $K(X)$ dont l'anneau contient B. En particulier, l'anneau de w contient A, donc, ou bien il contient K (et $K[X]$) et alors w est de la forme (i), ou bien w prolonge v. Supposons donc que w prolonge v. Supposons aussi, pour l'instant, que A soit complet. L'idéal premier de la valuation w a pour intersection avec B un idéal premier contenant πA, donc de la forme $\mathfrak{P}_x$, où $x \in A$ (proposition 1). Pour tout $Q(X) \in B$, on a donc : $w(Q(X)) > 0$ équivaut à $v(Q(x)) > 0$.

Soit t un entier. Considérons les polynômes $Q'_m(X)$ formés avec la suite $a'_r = a_r + x - a_{n^t-1}$. On a

$$Q'_{n^t}(X) = \pi^{-u(n^t)} \prod_{0 \leq r < n^t} (X - a'_r) = Q'_{n^t-1}(X) . \pi^{-t} . (X - x).$$

$Q'_{n^t}(x) = 0$, donc $w\,(Q'_{n^t}(x)) > 0$, et $v(Q'_{n^t-1}(x)) = 0$, donc $w\,(Q'_{n^t-1}(x)) = 0$; d'où $w\,(X - x) > tw\,(\pi)$ pour tout entier t. Ceci prouve que la valuation w est de hauteur au moins 2. Or, d'après [2] (VI), la hauteur de la valuation w ne peut être que 1 ou 2 et, si elle est égale à 2, alors le groupe des valeurs de w est isomorphe au produit lexicographique $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Soit $P(X) \in A[X]$ tel que $P\,(x) \neq 0$. On a

$$P(X) = P(x) + (X - x)\,Q(X) \qquad \text{où} \quad Q(X) \in A[X],$$

et comme $w((X - x)\,Q(X)) \geq w(X - x) > v(P(x)) . w(\pi) = w(P(x))$, $w(P(X))$ est égal à $v(P(x))\,w(\pi)$. Soit $R(X) \in K(X)$:

$$R(X) = (X - x)^{r_x}(P_1(X)/P_2(X)),$$

où $P_1(X)$ et $P_2(X)$ appartiennent à $A[X]$ et $P_1(x)$ et $P_2(x)$ ne sont pas nuls, d'où

$$w(R(X)) = r_x w(X - x) + (v(P_1(x)) - v(P_2(x)))\,w(\pi)$$

et par suite :

$$w(K(X) - \{0\}) = w(X - x)\,\mathbf{Z} + w(\pi)\,\mathbf{Z}.$$

On doit donc avoir $w(\pi) = (0, 1)$ et $w(X - x) = (1, 0)$, et w est bien de la forme w_x.

Revenons au cas général, soit w une valuation de $K\,(X)$ prolongeant v et dont l'anneau contient B. Soit $\hat{w}$ un prolongement de w à $\hat{K}\,(X)$, la restriction de $\hat{w}$ à $\hat{K}$ prolonge v, c'est donc $\hat{v}$. Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{s} p_i X^i$ un polynôme de $\hat{B} = \{\, R(X) \in \hat{K}[X] \mid R\,(\hat{A}) \subset \hat{A} \,\}$ et soit

$$Q(X) = \sum_{i=0}^{s} q_i X^i \in K[X]$$

tel que $\hat{v}(p_i - q_i) \geq 0$ pour tout i. Comme $P(X) \in \hat{B}$, $Q(X) \in B$, et donc $w(Q(X)) \geq 0$, d'où $\hat{w}(P\,(X)) \geq 0$. Ainsi, $\hat{w}$ est une valuation de $\hat{K}(X)$ prolongeant $\hat{v}$ et dont l'anneau contient $\hat{B}$. D'après ce qui précède, $\hat{w}$ correspond à un élément x de $\hat{A}$ et sa restriction w à $K(X)$ est bien de la forme w_x. La proposition 2 est démontrée.

Revenons à l'assertion (*d*) de la proposition 1. Étant donné $x \in \hat{A}$, notons W_x l'anneau de la valuation w_x; alors les seuls anneaux de valuation de $K(X)$ contenant $B_{\mathfrak{P}_x}$ sont W_x et $K[X]_{(P)}$ si $P(x) = 0$; de plus, $K[X]_{(P)}$ contient W_x. D'après le rappel du début, A étant intégralement clos, B et $B_{\mathfrak{P}_x}$ sont intégralement clos, donc intersection des anneaux de valuation de $K(X)$ qui les contiennent. Ainsi, $B_{\mathfrak{P}_x} = W_x$.

Soit P un polynôme irréductible de $A[X]$ admettant des racines x_i $(i = 1, \ldots, s)$ dans $\hat{A}$. On a des isomorphismes canoniques :

$$(B/\mathfrak{p}_P)_{(\mathfrak{P}_{x_i}/\mathfrak{p}_P)} \xrightarrow{\sim} (B)_{\mathfrak{P}_{x_i}}/(\mathfrak{p}_P)_{\mathfrak{P}_{x_i}} \xrightarrow{\sim} W_{x_i}/P \,.\, W_{x_i}.$$

Considérons la suite d'homomorphismes :

$$A \to A[X]/(P) \to B/\mathfrak{p}_P \to (B/\mathfrak{p}_P)_{(\mathfrak{P}_{x_i}/\mathfrak{p}_P)} \xrightarrow{\sim} W_{x_i}/P \,.\, W_{x_i}$$
$$\to K[X]_{(P)}/P \,.\, K[X]_{(P)} \xrightarrow{\sim} K[X]/(P) \xrightarrow{\psi_i} \hat{K}.$$

ψ_i est l'injection qui envoit la classe de X sur x_i, les autres homomorphismes sont des injections ou des isomorphismes canoniques, et l'homomorphisme composé de $B/\mathfrak{p}_P$ dans $K[X]/(P)$ est l'injection canonique déjà rencontrée; elle ne dépend pas de i. Posons $A_{x_i} = \psi_i^{-1}(\hat{A})$. Il apparaît que $W_{x_i}/P \,.\, W_{x_i}$ est isomorphisme à A_{x_i}. Ainsi, $B/\mathfrak{p}_P$ qui est égal à l'intersection de ses localisés en les idéaux maximaux est isomorphe à l'intersection des anneaux de valuation A_{x_i}. Il contient donc en particulier la fermeture intégrale de A dans $K[X]/(P)$.

Notons que w_x est de hauteur 1 si, et seulement si, x est transcendant sur K. D'où une conséquence simple de la proposition 2 :

PROPOSITION 3. — *Pour que B soit intersection d'anneaux de valuation (discrète) de hauteur 1, il faut et il suffit que $\hat{K}$ soit une extension transcendante de K. De plus, B n'est jamais un anneau de Krull.*

Démonstration. — Notons χ l'ensemble des éléments de $\hat{A}$ transcendants sur K. Si χ n'est pas vide, alors χ est à la fois dense dans $\hat{A}$ et adhérent à A (pour la topologie induite par $\hat{v}$); d'où, étant donné $Q(X) \in K[X]$, pour tout $a \in A$, il existe $x \in \chi$ (et, inversement, pour tout $x \in \chi$, il existe $a \in A$) tel que $\hat{v}(Q(x) - Q(a)) \geq 0$, donc tel que $(Q(X) \in W_x)$

soit équivalent à $(Q(a) \in A)$. On en déduit :

$$B = \left(\bigcap_{x \in \chi} W_w \right) \cap K[X].$$

Inversement, supposons que $B = \bigcap_{w \in \mathfrak{W}} W_w$, où les $w \in \mathfrak{W}$ sont des valuations de hauteur 1 de $K(X)$, et les W_w les anneaux correspondants. Si toutes les valuations w étaient du type (i) de la proposition 2, alors $\bigcap_{w \in \mathfrak{W}} W_w$ contiendrait $K[X]$ qui contient strictement B, ce qui serait contraire à l'hypothèse; donc il existe $x \in \chi$ tel que $w_x \in \mathfrak{W}$, et donc $\hat{K}$ est transcendant sur K.

Enfin, si B était un anneau de Krull, dans la famille de ses valuations essentielles, il ne devrait y avoir qu'un nombre fini (mais non nul) de valuation w_x ($x = x_i$ pour $i = \{1, \ldots, r\}$), car, pour tout $x \in \chi$, $w_x(\pi) = 1$. Soit $s = \sup_{1 \leq i \leq r} \hat{v}(x_i)$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, soit $b_i \in A$ tel que $\hat{v}(b_i - x_i) > sr$, d'où $v(b_i) \leq s$. Soit

$$P(X) = \pi^{-(sr+1)} \prod_{i=1}^{r} (X - b_i) \in K[X].$$

On a, pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $w_{x_i}(P(X)) = \hat{v}(P(x_i)) \geq 0$ alors que $v(P(0)) < 0$. Donc B ne peut être un anneau de Krull.

Remarque 4. — On peut prouver que la condition de la proposition 3 est nécessaire, sans utiliser la proposition 2. En effet, soit w une valuation de hauteur 1 de $K(X)$ prolongeant v et dont l'anneau contient B. $w(Q_n(X)) \geq 0$ implique qu'il existe $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $w(X - a_i) > 0$. Supposons que $i = 0$ et que $t - 1 < w(X) \leq t$ où $t \in \mathbf{N}$. $w(Q_{n^t}(X)) \geq 0$ implique $w(X) \geq t$. D'où, $w(X) \in \mathbf{N}$; de même, pour tout $r \in \mathbf{N}$, $w(X - a_r) \in \mathbf{N}$. Si X n'est pas adhérent à A pour la topologie induite par w, l'ensemble des $w(X - a_r)$ est majoré; posons

$$s - 1 = \sup_r w(X - a_r) = w(X - a_{r_0}) \qquad \text{et} \qquad Y = X - a_{r_0};$$

mais alors $w(Q_{n^s}(Y)) = -1$. D'où, X est adhérent à A, donc A est dense dans $A[X]$, K est dense dans $K(X)$, $K(X)$ s'injecte dans $\hat{K}$, et $\hat{K}$ est transcendant sur K.

Corollaire 1. — *Pour tout corps de nombres K d'anneaux d'entiers A, l'anneau des polynômes à valeurs entières est intersection d'anneaux de valuation discrète de hauteur* 1, *mais n'est pas un anneau de Krull.*

Démonstration. — Pour tout anneau intègre A, notons ici $A[X]_{\text{sub}}$ l'anneau $\{ Q(X) \in K[X] \mid Q(A) \subset A \}$, où K désigne le corps des fractions de A. D'après [3], *si* (S_i) *est une famille de parties multiplicatives de* A *telles que* $A = \bigcap_i S_i^{-1} A$, *alors*

$$A[X]_{\text{sub}} = \bigcap_i (S_i^{-1} A) [X]_{\text{sub}}.$$

Or, l'anneau des entiers d'un corps de nombres K est un anneau de Dedekind dont les localisés en les idéaux maximaux sont des anneaux de valuation discrète, de hauteur 1, de corps résiduel fini, et telle que le complété de K correspondant soit transcendant sur K. D'où la première assertion.

D'autre part, d'après [3], *si* A *est noethérien, pour toute partie multiplicative* S *de* A, *on a l'égalité*

$$S^{-1}(A[X]_{\text{sub}}) = (S^{-1} A) [X]_{\text{sub}}.$$

Ainsi, $A[X]_{\text{sub}}$ ne peut être de Krull, sinon il en serait de même de ses localisés. Notons en outre qu'il ne peut être noethérien, sinon étant intégralement clos, il serait de Krull.

COROLLAIRE 2. — *Pour tout corps local* K *d'anneau de valuation* A, *l'anneau des polynômes à coefficients dans* K *qui, sur* A, *prennent leurs valeurs dans* A, *est un anneau de Fatou (donc complètement intégralement clos) qui n'est pas intersection d'anneaux de valuation de hauteur* 1.

On appelle corps local, un corps muni d'une valuation discrète, de hauteur 1, de corps résiduel fini, pour laquelle il est complet. Ceci répond à un problème de BENZAGHOU [1] : la classe des anneaux de Fatou est-elle distincte de la classe des anneaux intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 ?

REMARQUE 5. — Ce même anneau répond à une autre question de BENZAGHOU concernant toujours les anneaux de Fatou : la propriété de Fatou passe-t-elle au localisé ? La réponse est non :

On a vu que le localisé de B en $\mathfrak{P}_x$ est un anneau de valuation W_x qui est de hauteur 2 si, par exemple, x appartient à A; ce n'est donc pas un anneau de Fatou. Notons que B est aussi un exemple d'anneau complètement intégralement clos dont certains localisés ne sont pas complètement intégralement clos.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BENZAGHOU (B.). — Algèbres de Hadamard, *Bull. Soc. math. France*, t. 98, 1970, p. 209-252 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1969).

[2] BOURBAKI (N.). — *Algèbre commutative*, chap. 1-7. — Paris, Hermann, 1961-1965 (*Act. scient. et ind.*, 1290, 1293, 1308, 1314; *Bourbaki*, 27, 28, 30, 31).

[3] CAHEN (P.-J.) et CHABERT (J.-L.). — Coefficients et valeurs d'un polynôme, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 95, 1971, p. 295-304.

[4] CAHEN (P.-J.) et CHABERT (J.-L.). — *Corps henséliens. Coefficients et valeurs d'un polynôme*, Thèse 3e cycle, Paris, 1970.

[5] CAHEN (P.-J.). — Transfert de la propriété de Fatou aux anneaux de polynômes, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 94, 1970, p. 81-83.

[6] OSTROWSKI (A.). — Ueber ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern, *J. für reine und angew. Math.*, t. 149, 1919, p. 117-124.

[7] POLYA (G.). — Ueber ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern, *J. für reine und angew. Math.*, t. 149, 1919, p. 97-116.

[8] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). — *Commutative algebra*. Vol. 1 and 2. — Princeton, D. Van Nostrand Company, 1958-1960 (*The University Series in higher Mathematics*).

(Texte reçu le 29 janvier 1971.)

Jean-Luc CHABERT,
10, Villa des Gobelins,
75-Paris 13.