PIERRE DAZORD

Tores finslériens sans points conjugués

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 171-192
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__171_0>

Bull. Soc. math. France,
99, 1971, p. 171 à 192.

TORES FINSLÉRIENS SANS POINTS CONJUGUÉS

PAR

PIERRE DAZORD

[Lyon.]

Sommaire.

0. Introduction.

Le but de cet article est de démontrer dans le cas finslérien l'analogue du théorème riemannien suivant, dû à HOPF [9].

THÉORÈME DE HOPF. — *Les tores riemanniens à deux dimensions sans points conjugués sont isométriques à des tores riemanniens plats.*

Pour cela, on appellera tore finslérien plat (à deux dimensions) un tore dont la structure finslérienne est obtenue par passage au quotient d'une structure finslérienne de $\mathbf{R}^2$ invariante par translation.

Si on identifie l'espace tangent à $\mathbf{R}^2$, $T\mathbf{R}^2$, à $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$ une telle structure finslérienne est définie par une énergie :

$$E:\quad \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^+,\quad (x, v)\to E(v).$$

Le principal résultat prouvé est le suivant :

THÉORÈME. — *Les tores finslériens de Landsberg à deux dimensions sans points conjugués sont isométriques à des tores finslériens plats.*

Pour démontrer ce théorème, on donne une forme nouvelle en dimension 2 à la formule de Gauss-Bonnet en géométrie finslérienne, établie par A. Lichnerowicz [10]. Puis on démontre que, pour une variété finslérienne, de dimension $n \geqq 2$, (M, E), sans points conjugués, l'intégrale de la courbure de Ricci sur la variété $U(M)$ des vecteurs tangents d'énergie unité $[E(v) = 1]$, munie de la structure riemannienne canoniquement définie par (M, E), n'est nulle que si (M, E) est à courbure sectionnelle nulle. De cela, il résulte qu'une variété de Landsberg sans points conjugués, homéomorphe à un tore, est à courbure sectionnelle nulle. On introduit alors le scalaire principal J d'une variété finslérienne. On inclut à cet endroit quelques résultats déduits de l'utilisation de ce scalaire et de la formule de divergence d'Akbar-Zadeh [1].

Dans une dernière partie, on établit le théorème proprement dit, ce qui repose sur l'utilisation du scalaire J et les propriétés particulières des géodésiques des tores.

Certains de ces résultats (théorèmes 1, 3 et 4 ci-dessous) ont été annoncés dans une Note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* [6].

1. **Bref rappel de géométrie finslérienne** (*cf.* [5]).

Le fibré tangent d'une variété différentiable M (connexe, C^∞, paracompacte) sera noté $\pi : TM \to M$. $\pi_0 : \mathcal{T}M \to M$ désigne le sous-fibré des vecteurs tangents non nuls. Une carte locale de M [notée $x \to (x^i)$] définit canoniquement une carte locale de TM [notée $v \to (x^i, v^i)$].

Pour tout fibré $F \to M$, F_x désigne la fibre en x.

Définition. — *Une variété finslérienne est un couple (M, E) d'une variété différentiable et d'une application énergie $E : TM \to \mathbf{R}^+$, telle que :*

(i) *E est C^1 sur TM, C^∞ sur $\mathcal{T}M$.*

(ii) *E est positivement homogène de degré 2.*

(iii) *$\forall\, x \in M$, le tenseur $g_{ij}(v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial v^i \partial v^j}$ (tenseur sur $\pi_0^{-1} TM$) est défini positif.*

Remarques.

1° Si E est C^2, (M, E) est une variété riemannienne.

2° La géométrie finslérienne « est » l'étude des problèmes de calcul des variations réguliers positivement homogènes de degré 2. L'application $v \to E(v)^{1/2}$ de TM dans R sera notée L.

La structure finslérienne, donnée sur (M, E), définit donc une structure euclidienne g sur le fibré $p : \pi_0^{-1} TM \to \mathcal{T}M$. Le produit fibré sur M de deux vecteurs tangents à M, v et X, étant noté $v \times X$, on pose, pour tout couple $(X, Y) \in (T_x M)^2$,

$$g_v(X, Y) = g(v \times X, v \times Y).$$

Si on désigne par $\hat{\pi}$ le morphisme canonique :

$$\begin{array}{ccc} \pi_0^{-1} TM & \xrightarrow{\hat{\pi}} & TM \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathscr{C}M & \xrightarrow{\pi_0} & M \end{array}$$

ξ et η appartenant à $\pi_0^{-1} vTM$,

$$g(\xi, \eta) = g_{p(\xi)}(\hat{\pi}\xi, \hat{\pi}\eta).$$

On désigne par $U(M) \to M$ le fibré des vecteurs tangents d'énergie unité.

— A la structure finslérienne est associée canoniquement une gerbe G sur M au sens de [5]; G est une section du fibré $TTM \to TM$ pour sa structure naturelle de fibré tangent et pour la structure fibrée définie par π^T, où π^T est l'application linéaire tangente à π; G est C^1 sur TM et C^∞ sur $\mathscr{C}M$; enfin G est positivement homogène de degré 2.

— Deux variétés (M, E) et (M', E') sont isométriques par l'isométrie f si f est un difféomorphisme de M sur M' tel que $E' \circ f^T \equiv E$. Si G et G' sont les gerbes respectivement de (M, E) et (M', E'), $G' = (f^T)\, ^T G$.

— La structure finslérienne permet de définir canoniquement une scission $\beta : TTM \to \pi^{-1} TM$ (resp. $\gamma : \pi^{-1} TM \to TTM$) de la suite exacte de fibrés sur TM :

$$0 \to \pi^{-1} TM \xrightarrow{i} TTM \xrightarrow{j} \pi^{-1} TM \to 0,$$

où $Z \in T_v TM$, $jZ = v \times \pi^T Z$, β et γ sont C^∞ sur $\mathscr{C}M$ et C^0 sur TM. Enfin $G = \gamma \circ V$, où V désigne la section canonique du fibré $p : \pi^{-1} TM \to TM$, $v \to v \times v$.

— On désigne par D la loi de dérivation covariante dans $p : \pi_0^{-1} TM \to \mathscr{C}M$, associée à la connexion finslérienne d'Élie Cartan, et par R, P, Q respectivement le premier, le second et le troisième tenseur de courbure d'Élie Cartan. R, P et Q sont des éléments de

$$\pi_0^{-1} TM \otimes \bigotimes^3 \pi_0^{-1} T^* M,$$

où $T^* M \to M$ est le fibré dual de $TM \to M$.

— On appelle courbure sectionnelle en $v \in \mathcal{T}M$ du 2-plan P, contenant v, le scalaire

$$K_v(P) = -\frac{g(R(V,\, v\times X)\, V,\, v\times X)}{g(V,\, V)\, g(v\times X,\, v\times X) - g(V,\, v\times X)^2},$$

où X est n'importe quel vecteur de P non colinéaire à v. $K_v(P)$ ne dépend que de v et P. De plus, si λ est un réel positif, $K_{\lambda v}(P) = K_v(P)$.

On appelle courbure de Ricci, en $v \in \mathcal{T}M$, le scalaire

$$\mathrm{Ric}\, v = -\operatorname{Trace}\{X \to R(V,\, v\times X)\, V\}.$$

— A la connexion finslérienne est associé un transport par parallélisme le long des arcs C^1 à vitesse non nulle, i. e. si $f : I \to M$, où I est un intervalle de $\mathbf{R}$, f est C^1 et $df/dt \neq 0$ pour tout $t \in I$. Si $(a,\, b) \in I^2$, le transport par parallélisme $\tau^f_{a,b}$ est un isomorphisme de $T_{f(a)}M$ sur $T_{f(b)}M$ qui échange les structures euclidiennes de $T_{f(a)}M$ et $T_{f(b)}M$ relatives respectivement à $(df/dt)\,(a)$ et $(df/dt)\,(b)$. D_1 désignant la dérivation covariante relativement au champ canonique d/dt de $\mathbf{R}$, $X \in T_{f(\alpha)}M$, $\tau^f_{a,b}X = \xi(b)$, où $\xi : [a,\, b] \to TM$ est telle que $\pi_0\xi = f$, et

$$\begin{cases} D_1\left(\dfrac{df}{dt}\times\xi(t)\right) = 0, \\ \xi(a) = X. \end{cases}$$

Remarque. — Si f est une application d'un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, dans M, f^{-1} désignant l'application $t \to f(-t)$, on a en général $\tau^{f^{-1}}_{0,-t} \neq \tau^f_{0,t}$.

— Les géodésiques de $(M,\, E)$ sont les géodésiques de la gerbe G, et peuvent encore être définies comme les courbes autoparallèles de la connexion. G_t désignant le flot de G sur TM, l'unique géodésique maximale γ_v, telle que $(d/dt)\,\gamma_v(t)\,|_{t=0} = v$, est définie par

$$t \to \gamma_v(t) = \pi_0\, G_t v.$$

Soit Ω l'ouvert de TM formé des v tels que $G_1 v$ existe; l'application exponentielle de la gerbe $\exp : \Omega \to M$ est définie par $\exp v = \pi_0\, G_1 v$, exp est C^1 sur Ω, C^∞ sur $\Omega \cap \mathcal{T}M$ et, pour $t \geq 0$, $\gamma_v(t) \equiv \exp tv$. Les champs de Jacobi le long d'une géodésique γ_v sont les applications X à valeurs dans TM telles que $\pi_0 X = \gamma_v$, et

$$D_1 D_1 \xi = R(\mathfrak{p},\, \xi)\, \mathfrak{p},$$

où

$$\xi = \frac{d\gamma_v}{dt}\times X;$$

R est le premier tenseur de courbure de Cartan;

$\mathfrak{p} = V_0 \dfrac{d\gamma_v}{dt}$.

— A la connexion finslérienne est associé un « tenseur de torsion finslérienne », $T \in \pi^{-1} \circ TM \otimes \bigotimes^2 \pi_0^{-1} T^*M$. j désignant le morphisme de fibrés vectoriels canoniques $TTM \to \pi^{-1} PM$, on a, en posant J : $TTM \to PPM$, $J = i_0 j$, $(Z_1, Z_2) \in T_v \mathcal{C}M$,

$$(D_j)(Z_1, JZ_2) = T(jZ, jZ_2).$$

En coordonnées locales naturelles, $T_{ijk} = -\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}$.

On désigne par $S \in \pi_0^{-1} TM \otimes \bigotimes^2 \pi_0^{-1} T^* M$ le tenseur $S = D_G T$, et par $\overset{*}{T}$ l'élément de $\pi_0^{-1} TM$ défini par contraction à partir de T, $(\overset{*}{T})^i = g^{ij} T_{jr}^{\ r}$. On sait que $\overset{*}{T} = 0$ si, et seulement si, (M, E) est riemannienne (DIECKE). On a évidemment $g(V, \overset{*}{T}) = 0$.

Définition. — Une variété finslérienne est de Landsberg si $S = 0$.

La structure finslérienne permet de munir $\mathcal{C}M$ d'une structure riemannienne $\tilde{g}$:

$$(Z_1, Z_2) \in T_v \mathcal{C}M, \quad \tilde{g}(Z_1, Z_2) = g(jZ_1, jZ_2) + g(\beta Z_1, \beta Z_2).$$

On désigne par $(U(M), \bar{g})$ la structure de sous-variété riemannienne de $(\mathcal{C}M, \tilde{g})$ dont est naturellement munie $U(M)$.

$\mathcal{C}M$ [resp. $U(M)$] est munie, d'autre part, d'une structure symplectique (resp. cosymplectique) définie par une 2-forme dA (resp. une 1-forme A),

$$A(Z) = g(V, jZ).$$

Si σ (resp. σ_0) désigne la forme volume de $(\mathcal{C}M, \tilde{g})$ [resp. $U(M), g$] :

$$\sigma = \frac{(-1)^{(n(n-1))/2}}{n!} \Lambda^n dA \qquad \left[\text{resp.}\, \sigma_0 = \frac{(-1)^{(n(n-1))/2}}{(n-1)!} A \wedge \Lambda^{n-1} dA\right].$$

Enfin appelons chemin de M, toute application C^0 de l'intervalle $[0, 1]$ dans M continue, C^∞ par morceaux. Pour tout couple de points $(p, q) \in M^2$, on pose

$$d(p, q) = \inf_{C \in W} \int_0^1 L\left(\frac{dc}{dt}\right) dt,$$

où W est l'ensemble des chemins tels que $C(0) = p$, $C(1) = q$.

d a toutes les propriétés d'une distance sauf la symétrie. Par abus de langage, on appellera $d(p, q)$ « distance de p à q ». On définit une véritable distance sur M,

$$(p, q) \to |pq| = d(p, q) + d(p, q).$$

On peut montrer [3] que la topologie de M coïncide avec la topologie déduite de la distance $(p, q) \to |pq|$.

Pour les variétés finslériennes, on peut prouver un « théorème de Hopf-Rinow » (*cf.* [5]). En particulier, si M est compacte, $d(p, q)$ est réalisée par un arc géodésique joignant p à q.

2. Formule de Gauss-Bonnet.

THÉORÈME 1. — *Si (M, E) est une variété de Landsberg de dimension 2, orientée compacte (connexe), de caractéristique d'Euler-Poincaré, $\chi(M)$*

$$\int_{U(M)} \operatorname{Ric} v \,.\, \sigma_0 = 4\pi^2 \chi(M).$$

Démonstration. — On adapte la méthode de BERGER [2] en géométrie riemannienne. On montre d'abord le lemme suivant :

LEMME 1. — *Soit $v \in U(M)$, $\xi \in \pi_0^{-1} v TM$. Alors $\gamma(\xi)$ est tangent à $U(M)$. De plus, $i(\xi)$ est tangent à $U(M)$ si, et seulement si, $g(V, \xi) = 0$.*

On introduit pour toute variété finslérienne (M, E) orientée une $(n - 1)$ forme sur $U(M)$ ainsi définie :

1° $\omega(Z_1, \ldots, Z_{n-1}) = 0$, pour un i au moins, $\beta(Z_i) = 0$.

2° $\omega(Z_1, \ldots, Z_{n-1}) = 1$ si, pour tout j, $Z_j = i(\xi_j)$, où $g(V, \xi_j) = 0$; $g(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}$; $(v, \hat{\pi}\xi_1, \ldots, \hat{\pi}\xi_{n-1})$ forment un repère direct de M au point πv.

Il résulte de la condition 2° que $\omega \mid U_x(M)$ est la forme volume de $(U_x(M). \bar{g} \mid U_x(M))$.

Si (M, E) est une variété finslérienne de dimension 2, la courbure sectionnelle est une application K de $U(M)$ dans $\mathbf{R}$ et, pour tout $v \in U(M)$, $K(v) = \operatorname{Ric} v$.

LEMME 2. — *Si (M, E) est une variété finslérienne de dimension 2 orientée, $\omega \wedge d\omega = - K\sigma_0$.*

Démontration. — Soit $w \in T_v M$, tel que $g_v(v, w) = 0$, $g_v(v, w) = 0$, $g_v(w, w) = 1$, et (v, w) est un repère direct de M. Posons $G = \gamma(V)$,

$\eta = \gamma(v \times w)$, $\zeta = i(v \times w)$. (G, η, ζ) est un repère orthonormé de $(U(M), \overline{g})$. D'autre part, comme $\omega \circ \gamma = 0$:

$$\omega \wedge d\omega(G, \eta, \zeta) = d\omega(G, \eta),$$

soit

$$\omega \wedge d\omega(G, \eta, \zeta) = -\omega_0 i \beta[G, \eta].$$

Or $\beta[G, \eta] = -R(V, \hat{w})\, V$ où $\hat{w} = v \times w$.

Donc $\omega \wedge d\omega(G, \eta, \zeta) = -K(v)$, ce qui prouve le lemme puisque $\sigma_0(G, \eta, \zeta) = +1$.

— (S^n, g_0) désigne la sphère unité de $\mathbf{R}^{n+1}$ considérée comme sous-variété riemannienne de $\mathbf{R}^{n+1}$ avec sa structure riemannienne canonique.

DÉFINITION 1 [10]. — *Une variété finslérienne (M, E) est de Berwald-Cartan si son troisième tenseur de courbure de Cartan Q est identiquement nul.*

En particulier, toute variété finslérienne de dimension 2 est de Berwald-Cartan.

Pour les variétés de Berwald-Cartan, on prouve la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *Si (M, E) est une variété de Berwald-Cartan, alors, pour tout $x \in M$, $(U_x M, \overline{g} \mid U_x M)$ est isométrique à $S^{n-1}, g_0)$ où $n = \dim M \geqq 2$.*

Démonstration. — Plusieurs lemmes sont nécessaires.

LEMME 3. — *Si (M, E) est de Berwald-Cartan, et si la dimension n de M est supérieure ou égale à 3, $(U_x M, \overline{g} \mid U_x M)$ est isométrique à (S^{n-1}, g_0).*

En effet, si (M, E) est de Berwald-Cartan, la structure riemannienne, définie sur $\mathcal{C}_x M$: $(\mathcal{C}_x M, \tilde{g} \mid \mathcal{C}_x M)$, est à courbure sectionnelle nulle. Il résulte alors des formules de Gauss-Codazzi que la sous-variété riemannienne $(U_x M, \overline{g} \mid U_x M)$ est à courbure sectionnelle constante 1. Comme $n \geqq 3$, $U_x M$ est simplement connexe et donc, d'après un théorème d'Élie CARTAN (*cf.* [2] par exemple), $(U_x M, \overline{g} \mid U_x M)$ est isométrique à (S^{n-1}, g_0).

Le lemme suivant est trivial :

LEMME 4. — *Si (M, E) et (N, F) sont deux variétés de Berwald-Cartan, alors $(M \times N, E \times F)$ est de Berwald-Cartan.*

La proposition 1 sera démontrée quand n aura examiné le cas $n = 2$, ce qui est l'objet du lemme suivant :

LEMME 5. — *Si (M, E) est une variété de Berwald-Cartan de dimension 2, $(U_x M, \overline{g} \mid U_x M)$ est isométrique à (S^1, g_0).*

Démonstration. — Soit $\mathbf{R}$ la droite numérique avec sa structure riemannienne canonique. Il résulte du lemme 4 que la variété $M_1 = M \times \mathbf{R}$ est munie d'une structure de Berwald-Cartan et donc, si $x_1 \in M_1$, g_1 désignant le tenseur métrique de $\pi_0^{-1} TM_1 \to M_1$, $(U_{x_1} M_1, \bar{g}_1 \mid U_{x_1} M_1)$ est isométrique à (S^2, g_0). Soit ψ cette isométrie. Soit ∇ (resp. $\hat{\nabla}$) la connexion riemannienne de $(\mathcal{C}_x M, \bar{g} \mid \mathcal{C}_x M)$ (resp. $U_{x_1} M_1, \bar{g}_1 \mid U_{x_1} M_1$). $\nabla_\zeta \zeta = -(v \times v)$. Donc $\hat{\nabla}_\zeta \zeta = 0$. Il en résulte que, si $x_1 = (x, t)$, $U_x M$ est géodésique de $(U_{x_1} M_1 . \bar{g}_1 \mid U_{x_1} M_1)$. Donc $\psi(U_x M)$ est un grand cercle de (S^2, g_0), et on en déduit que $(U_x M, \bar{g} \mid U_x M)$ est isométrique à (S^1, g_0), ce qui prouve le lemme 5 et achève la démonstration de la proposition 1.

— On désigne par $s \in [0, 2\pi[$ l'arc de (S^1, g_0). (M, E) étant une variété finslérienne (de dimension 2) compacte, il existe un champ de vecteur $\overline{Y}$ de M n'ayant qu'un nombre fini de zéros. Soit

$$\dot{M} = \{ x \in M \mid \overline{Y}_{(x) \neq 0} \}.$$

On définit une section Y du fibré $U(\dot{M}) \to \dot{M}$ en posant, pour tout $x \in \dot{M}$,

$$Y(x) = \frac{\overline{Y}(x)}{(E(\overline{Y}(x)))^{1/2}}.$$

M étant orientée, il existe, pour tout $x \in \dot{M}$, une isométrie directe unique,

$$\varphi_x : \quad (S^1, g_0) \to (U_x(M), \bar{g} \mid U_x(M)),$$
$$s \to \varphi_x(s),$$

telle que $\varphi_x(0) = Y(x)$.

On désigne par φ l'application de $S' \times \dot{M}$ dans $U(\dot{M})$, définie par $\varphi(s, x) = \varphi_x(s)$, et, pour tout $s \in [0, 2\pi[$ par φ_s la section de $U(\dot{M}) \to \dot{M}$, $x \to \varphi(s, x)$:

$$\int_{U(M)} \omega \wedge d\omega = \int_{U(\dot{M})} \omega \wedge d\omega = \int_{S^1 \times \dot{M}} \varphi^*(\omega \wedge d\omega).$$

M étant de dimension 2, $\varphi^* \omega = \varphi_x^* \omega + \varphi_s^* \omega$, et φ_x étant une isométrie, $\varphi_x^* \omega = ds$. La 3-forme $\varphi_s^*(\omega \wedge d\omega)$, étant une 3-forme sur M, est nulle. La variété étant de Landsberg $\mathcal{L}(\rho)\omega = 0$ et donc

$$\varphi^*(\omega \wedge d\omega) = ds \wedge d\varphi_s^* \omega.$$

Donc

$$\int_{U(M)} \omega \wedge d\omega = \int_{S^1} ds \int_{\dot{M}} d\varphi_s^* \omega.$$

Or,

$$\int_{\dot{M}} \varphi_s^* d\omega = \int_{\varphi_s(M)} d\omega.$$

$\varphi_s(\dot{M})$ est une sous-variété de $U(M)$ qui peut être considérée comme une variété à bord, de bord $\partial\varphi_s(\dot{M}) = \sum_i a_i U_{m_i}(M)$, où $\{ m_i \} = M - \dot{M}$ et où a_i est l'indice de $\overline{Y}$ en m_i. Donc

$$\int_{\dot{M}} \varphi_s^* \, d\omega = \sum_i a_i \int_{U_{m_i}(M)} \omega,$$

or, $(U_{m_i}(M), \bar{g})$ est isométrique à (S^1, g^0), donc $\int_{U_m(M)} \omega = 2\pi$; comme

$$\sum_i a_i = \chi(M) \int_{U(M)} \omega \wedge d\omega = -4\pi^2 \chi(M),$$

donc

$$\int_{U(M)} \operatorname{Ric}(v)\, \sigma_0 = 4\pi^2 \chi(M).$$

C. Q. F. D.

Cette formule donne une nouvelle expression dans le cas $S = 0$ de la formule d'A. Lichnerowicz [10], dont elle peut se déduire en remarquant que $d\omega$ est précisément la forme de Chern restreinte à $U(M)$, et que toute variété finslérienne de dimension 2 est de Berwald-Cartan.

Les variétés de Berwald-Cartan sont telles que les volumes des fibres $(U_x(M), \bar{g} \mid U_x(M))$ sont tous égaux au volume de la sphère S^{n-1} considérée comme sphère unité dans $\mathbf{R}^{n-1}$, où $n = \dim M$. Pour ces variétés, il est donc naturel de définir le volume par

$$\operatorname{Vol}(M, E) = \frac{1}{\mathcal{V}_{n-1}} \int_{U(M)} \sigma_0,$$

où $\mathcal{V}_{n-1}$ est le volume de (S^{n-1}, g_0). En particulier, pour les variétés finslériennes de dimension 2 compactes, on pose

$$\operatorname{Vol}(M, E) = \frac{1}{2\pi} \int_{U(M)} \sigma_0.$$

Définition. — *On dira que, sur une variété finslérienne compacte, la distance de deux points conjugués est toujours supérieure ou égale à un scalaire δ si, pour tout point $x \in M$, et tout arc géodésique $\gamma : \mathbf{R}^+ \to M$, $\gamma(0) = x$, le premier point conjugué y de x sur γ est tel que $d(x, y) \geq \delta$.*

Remarque. — Ceci équivaut à dire que l'application exponentielle de la gerbe (*cf.* [5]) est de rang maximal, en tout point $x \in M$, sur $B_x(\delta) = \{ v \in T_x M \mid L(v) < \delta \}$. De plus, M étant compacte, il existe toujours un tel $\delta > 0$. Enfin, si on change E en $\rho^2 E$ (ρ constante strictement positive), δ est changé en $\rho\delta$.

Dans [5], on établit le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit* (M, E) *une variété finslérienne de dimension* n *compacte connexe, telle que la distance de deux points conjugués soit toujours supérieure ou égale à* δ. *Le volume* $\mathcal{V}$ *de* $(U(M), \overline{g})$ *est tel que*

$$\mathcal{V} \geqq \frac{\delta^2}{\pi^2(n-1)} \int_{U(M)} \mathrm{Ric}(v)\, \sigma_0,$$

et l'égalité n'est atteinte que si la variété est à courbure sectionnelle constante $\frac{\pi^2}{\delta^2}$.

Du théorème 1 et du théorème 2, on déduit alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. — *Soit* (S^2, E) *une structure de Landsberg sur la sphère, telle que la distance de deux points conjugués soit supérieure ou égale à* π, *alors*

$$\mathrm{Vol}(S^2, E) \geqq 4\pi,$$

et l'égalité n'a lieu que si (S^2, E) *est isométrique à* (S^2, g_0).

3. Variétés finslériennes compactes sans points conjugués.

THÉORÈME 3. — *Si* (M, E) *est une variété finslérienne compacte, de dimension* n, *sans points conjugués :*

$$\int_{U(M)} \mathrm{Ric}\, v\sigma_0 \leqq 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{U(M)} \mathrm{Ric}\, v\sigma_0 = 0$$

si, et seulement si, (M, E) *est à courbure sectionnelle nulle.*

Démonstration. — La première partie du résultat se déduit immédiatement du théorème 2. La démonstration va reposer sur l'utilisation de l'équation de Riccati, ce qui est l'idée de HOPF [9] en géométrie riemannienne de dimension 2 et sur les techniques de comparaisons de [8] adaptées au cas finslérien.

— M étant compacte, les géodésiques sont définies sur R. M étant sans points conjugués, pour tout couple de réels distincts (t_0, t_1), les champs de Jacobi le long d'une géodésique γ sont déterminés par leur valeur en t_0 et en t_1. Pour tout $v \in U(M)$, pour tout $w \in TM$, et tout s réel non nul, on désigne par

$$t \to h_s(v, t, w)$$

l'unique champ de Jacobi le long de la géodésique γ tangente à l'origine à v, défini par

$$\begin{cases} h_s(v, 0, w) = w, \\ h_s(v, s, w) = 0. \end{cases}$$

L'application $(s, t, v, w) \to h_s(v, t, w)$ est C^∞. De plus, pour tout t compris entre o et s, s exclus, $w \to h_s(v, t, w)$ est un isomorphisme linéaire de $T_{\gamma(0)}M$ sur $T_{\gamma(t)}M$.

— Dans ce qui suit, le transport par parallélisme le long de γ de $T_{\gamma(0)}M$ sur $T_{\gamma(t)}M$, $\tau^{\gamma}_{0,t}$ sera noté τ_t. Pour tout t compris entre o et s, s exclus, on définit un isomorphisme linéaire de $T_{\gamma(0)}M$, $U_s(v, t)$, en posant

$$T_{\gamma(0)}M \ni w \to U_s(v, t)\, w = \tau_t^{-1} h_s(v, t, w) \in T_{\gamma(0)}M.$$

Soit B le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ formé des couples (s, t) tels que t est compris entre o et s, s exclus. Posons $\mathcal{L}(TM) = TM \times_M T^*M$.

On a construit un morphisme C^∞ de fibrés vectoriels sur M :

$$\begin{aligned} B \times U(M) &\to \mathcal{L}(TM), \\ (s, t, v) &\to U_s(v, t). \end{aligned}$$

Posons

$$\eta_s(v, t, w) = G_t v \times h_s(v, t, w).$$

$t \to h_s(v, t, w)$, étant un champ de Jacobi, est solution de l'équation

$$D_1 D_1 \eta = R(\mathfrak{p}, \eta)\, \mathfrak{p},$$

et donc $U_s(v, t)$ est solution de l'équation de Jacobi dans $\mathcal{L}(T_{\gamma(0)}M)$:

$$\ddot{U} + \mathfrak{A} \circ U = 0 \tag{1}$$

(les points désignant les dérivations par rapport à t), $\mathfrak{A}$ étant l'endomorphisme de $T_{\gamma(0)}M$, défini pour tout t par

$$\mathfrak{A}(w) = -\tau_t \hat{\pi} \{ R(\mathfrak{p}, G_t v \times \tau_t w)\, \mathfrak{p} \}.$$

De plus, $U_s(v, 0)$ est l'identité de $T_{\gamma(0)}M$ et $U_s(v, t)$ se prolonge continûment par o pour $t = s$.

Pour t compris entre o et s, $t \neq s$, $U_s(v, t)$ est inversible, et on peut donc définir un endomorphisme de $T_{\gamma(0)}M$, $V_s(t, v)$, en posant

$$V_s(t, v) = \dot{U}_s(v, t) \circ \overset{-1}{U}_s(v, t),$$

endomorphisme qui est solution de l'équation de Riccati dans $\mathcal{L}(T_{\gamma(0)}M)$:

$$\dot{V} + V^2 + \mathfrak{A} = 0. \tag{2}$$

Soient $w_i i = 1, 2$ deux vecteurs de $T_{\gamma(0)}M$, et soient

$$Y_i: \quad t \to Y_i(t) = h_s(v, t, w_i), \; \eta_i = G_t v \times Y_i.$$

De l'identité $g(D_1\eta_1, \eta_2) - g(D_1\eta_2, \eta_1) = 0$, on déduit :

$$g_v(V_s\tau_t^{-1} Y_1, \tau_t^{-1} Y_2) - g_v(V_s\tau_t^{-1} Y_2, \tau_t^{-1} Y_1) = 0,$$

ce qui prouve que V_s est autoadjoint pour le produit scalaire g_v. Donc :

PROPOSITION 1. — *Si $U_s(v, t)$ est une solution de* (1) *telle que $U_s(v, s) = 0$, $V_s(t, v)$, défini pour t compris entre* 0 *et s, s exclus, est solution de* (2) *autoadjointe pour g_v.*

— Pour s' compris entre 0 et s, $s' \neq s$, posons

$$\hat{w} = \tau_{s-s'} U_s(v, s - s')\, w.$$

Les champs de Jacobi Y et $\hat{Y}$, définis par

$$Y(t) = \tau_t U_s(v, t)\, w \qquad \text{et} \qquad \hat{Y}(t) = \tau_{s-s', t}\, U_{s'}(G_{s-s'} v, t - s + s')\, \hat{w}$$

coïncident pour les valeurs $t = s - s'$ et $t = s$; donc $Y \equiv \hat{Y}$. Il en résulte que

$$(3) \left\{\begin{array}{l} \qquad V_s(t, v) = \tau_t^{-1} V_{s-t}(0, G_t v)\, \tau_t \\ \text{et en particulier} \\ \qquad \mathrm{Trace}\ V_s(t, v) = \mathrm{Trace}\ V_{s-t}(0, G_t v) \\ \qquad \mathrm{Trace}\ V_s^2(t, v) = \mathrm{Trace}\ V_{s-t}^2(0, G_t v) \\ \text{pour } t \text{ compris entre } 0 \text{ et } s,\ s \text{ exclus.} \end{array}\right.$$

Admettons, ce qui sera prouvé plus loin, qu'il existe une solution V de l'équation de Riccati, définie sur $[0, +\infty)$, autoadjointe pour g_v et telle que

$$V(t, v) = \lim_{s \to +\infty} V_s(t, v).$$

Alors

(i) $$\dot{V} + V^2 + \mathcal{A} = 0;$$

(ii) $$\mathrm{Trace}\ V(1, v) = \mathrm{Trace}\ V(0, G_1 v).$$

De (i), on déduit

$$\mathrm{Trace}\ \dot{V} + \mathrm{Trace}\ V^2 + \mathrm{Ric}\, G_t v = 0.$$

Soit en sommant sur $[0, 1]$, compte tenu de (ii) :

$$\text{Trace } V(0, G_1 v) - \text{Trace } V(0, v) + \int_0^1 \text{Trace } V^2(t, v)\, dt = -\int_0^1 \text{Ric}\, G_t v\, dt.$$

Admettons (cf. *infra*) que les différentes fonctions de v qui interviennent sont intégrables sur $U(M)$. Compte tenu de l'invariance de σ_0 par G, on peut écrire :

$$\int_{U(M)} \int_0^1 \text{Trace } V^2(t, v)\, dt = -\int_{U(M)} \text{Ric}\, v \sigma_0.$$

V étant autoadjoint pour le produit scalaire g_v, $\int_{U(M)} \text{Ric}\, v\sigma_0 \geqq 0$, et l'égalité n'a lieu que si Trace $V^2(t, v) \equiv 0$, et donc $V(t, v) = 0$. Compte tenu de l'équation de Riccati, cela implique $\mathfrak{A} = 0$, ce qui équivaut à $K_v(P) \equiv 0$.

C. Q. F. D.

Démonstration de l'existence de V. — L'existence de

$$V(t, v) = \lim_{s \to +\infty} V(t, v)$$

se ramène, d'après (3), à l'existence de la limite de $V_s(0, v)$ quand $s \to +\infty$. L'existence de V étant assurée, il en résulte alors que :

1° V est définie sur $[0, +\infty]$,

2° V est limite uniforme au sens de la convergence compacte sur $\mathbf{R}^+$ des $V_s(t, v)$ quand $s \to +\infty$, et est solution de l'équation de Riccati. V sera alors autoadjoint pour g_v si, et seulement si, $V(0, v)$ est autoadjoint pour g_v puisque l'équation de Riccati est invariante par adjonction.

L'existence de V sera donc assurée si on prouve l'existence de $V(0, v) = \lim_{s \to +\infty} V_s(0, v)$ autoadjoint pour g_v.

Soit ψ_s la forme quadratique sur $T_{\gamma(0)}M$, définie par

$$\psi_s(w_1, w_2) = g_v(V_s(0, v)\, w_1, w_2).$$

Il suffit de prouver l'existence d'une forme quadratique ψ sur $T_{\gamma(0)}M$ limite de ψ_s quand $s \to +\infty$.

LEMME 1. — *Pour tout $w \in T_{\gamma(0)}M$, $s \to \psi_s(w)$ est croissante.*

Démonstration. — Soient $Y_{s'}$ le champ de Jacobi le long de $\gamma \mid [0, s']$, $Y_{s'}(t) = h_{s'}(v, t, w)$, et Z le champ de Jacobi brisé le long de $\gamma \mid [0, s']$

ainsi défini :

$$\begin{cases} t \in [o, s], & Z(t) = h_s(v, t, w), \\ t \in [s, s'], & Z(t) = o, \end{cases}$$

où $o < s < s'$.

Comme les champs Z et Y_s, ont mêmes valeurs pour $t = o$ et $t = s'$, et que γ est sans points conjugués :

$$E''_{\gamma_{s'}}(Z) \geqq E''_{\gamma_{s'}}(Y_{s'}),$$

où $E''_{\gamma_{s'}}$ désigne la forme de Morse (variation seconde) de $\gamma \mid [o, s']$.

Posons

$$\xi = \frac{d\gamma}{dt} \times Z, \qquad \eta_{s'} = \frac{d\gamma}{dt} \times Y_{s'}.$$

Comme $Y_{s'}$ est un champ de Jacobi,

$$E''_{\gamma_{s'}}(Y_{s'}) = - g(D_1 \eta_{s'}, (o), \eta_{s'}(o)).$$

Soit

$$E'_{\gamma_{s'}}(Y_{s'}) = - g_v(V_{s'}(o, v)\, w, w) = - \psi_{s'}(w).$$

Comme $Z \mid [s, s'] \equiv o$,

$$E''_{\gamma_{s'}}(Z) = E''_{\gamma_s}(Z) = - g(D_1 \xi(o), \xi(o)).$$

Soit $E''_{\gamma_{s'}}(Z) = - \psi_s(w)$. D'où le lemme 1.

— Remarquons que M étant compacte, il existe une constante $c > o$ telle que $K_v(P) \geqq - c^2$ pour tout 2-plan P et tout $v \in \mathcal{C}M$, $v \subset P$.

LEMME 2. — *Pour tout* $w \in T_{\gamma(o)}M$,

$$- \frac{c}{\operatorname{th} cs}\, g_v(w, w) \leqq \psi_s(w) \leqq c g_v(w, w).$$

Démonstration. — Soit (M_1, g_1) une variété riemannienne complète de dimension n à courbure sectionnelle constante $-c^2$. Soient $x_1 \in M_1$, et u un isomorphisme euclidien de $(T_{\gamma(o)}M, g_v)$ sur $(T_{x_1}M_1, g_1)$. Dans ce qui suit, on adapte au cas finslérien une méthode de comparaison de [8].

Soient $s > o$, $\tilde{\gamma}$ la géodésique de (M_1, g_1) issue de $u(v)$, et $\tilde{Y}_s$ le champ de Jacobi le long de $\tilde{\gamma}$, tel que $\tilde{Y}(o) = u(w)$ $\tilde{Y}(s) = o$. ∇ désignant la loi de dérivation covariante dans $TM_1 \to M_1$ définie par la connexion riemannienne,

$$\nabla_1 \tilde{Y}_s = - c^2 \tilde{Y}_s, \qquad \text{où} \quad \nabla_1 = \nabla_{\frac{d}{dt}},$$

ceci entraîne $\tilde{Y}_s(t) = \dfrac{\operatorname{sh} C(s-t)}{\operatorname{sh} Cs} \tau_t u(w)$ où, par abus de notation, τ_t désigne $\tau_{\tilde{\gamma}_{0,t}}$.

Donc $E''_{\tilde{\gamma}_s}(Y_s) = c g_v(w, w) \coth cs$, où $E''_{\tilde{\gamma}_s}$ désigne la forme Morse relative à $\tilde{\gamma} \mid [0, s]$.

Soit φ l'application associant à tout champ de vecteurs $\tilde{Z}$ le long de $\tilde{\gamma}$ le champ de vecteur le long de $\gamma \varphi \tilde{Z}$, défini par

$$\varphi \tilde{Z}(t) = \tau_t \circ u \circ \tau_t^{-1} \tilde{Z}(t).$$

On vérifie aisément que :

$$1^{\text{o}} \qquad g_1(\tilde{Z}, \tilde{Z})(t) = g_{G_t v}(\varphi \tilde{Z}, \varphi \tilde{Z}),$$

$$2^{\text{o}} \qquad D_1 \tilde{\xi}(t) = G_t v \times \varphi \nabla_1 Z(t),$$

où $\tilde{\xi}(t) = G_t v \times \varphi \tilde{Z}(t)$. Posons $\tilde{\eta}(t) = G_t v \times \tilde{Y}(t)$,

$$\begin{aligned} E''_{\tilde{\gamma}_s}(\tilde{Y}) &= \int_0^s \{ g_1(\nabla_1 \tilde{Y}_s, \nabla_1 \tilde{Y}_s) + c^2 g_1(\tilde{Y}_s, \tilde{Y}_s) \} \, dt \\ &= \int_0^s \{ g(D_1 \tilde{\eta}, D_1 \tilde{\eta}) + c^2 g(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}) \} \, dt. \end{aligned}$$

La courbure sectionnelle de (M, E) étant minorée par $-c^2$,

$$g(R(\mathfrak{p}, \tilde{\eta}) \mathfrak{p}, \tilde{\eta}) \leqq c^2 g(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}),$$

Donc $E''_{\tilde{\gamma}_s}(\tilde{Y}_s) \geqq E''_{\gamma_s}(\varphi \tilde{Y}_s)$; or $\varphi \tilde{Y}_s$ est un champ de vecteur le long de γ, ayant mêmes valeurs pour $t = 0$ et $t = s$ que le champ de Jacobi, $Y_s = h_s(v, t, w)$. Comme (M, E) est sans points conjugués :

$$E''_{\gamma_s}(\varphi \tilde{Y}) \geqq E''_{\gamma_s}(Y_s) = -\psi_s(w).$$

Or $E''_{\tilde{\gamma}_s}(\tilde{Y}) = c g_v(w, w) \coth cs$. Donc $\psi_s(w) \geqq -c g_v(w, w) \coth cs$.

Pour obtenir l'autre partie de l'inégalité, on considère un réel $a > 0$ et le champ de Jacobi brisé Z le long de $\gamma \mid [a, s]$ ainsi défini :

$$\begin{cases} t \in [a, 0], & Z(t) = h_a(v, t, w). \\ t \in [0, s], & Z(t) = h_s(v, t, w). \end{cases}$$

Comme $\gamma \mid [a, s]$ est sans points conjugués, $E''_{\gamma \mid [a, s]}(Z) \geqq 0$. Soit $\psi_a(w) - \psi_s(w) \geqq 0$.

Soient alors Y_a le champ de Jacobi le long de $\gamma\,|\,[a, 0]$, défini par $Y_a(t) = h_a(v, t, w)$ et $\tilde{Y}_a$ le champ de Jacobi le long de $\tilde{\gamma}\,|\,[a, 0]$ tel que $\tilde{Y}_a(a) = 0$, $\tilde{Y}_a(0) = u(w)$,

$$E''_{\tilde{\gamma}_a}(\tilde{Y}_a) = -cg_v(w, w) \coth ca.$$

Par la même méthode que précédemment, on prouve que

$$E''_{\tilde{\gamma}_a}(\tilde{Y}_a) \geqq E''_{\gamma_a}(\varphi \tilde{Y}_a) \geqq E''_{\gamma_a}(Y_a) = \psi_a(w).$$

Donc

$$\psi_s(w) \leqq \psi_a(w) \leqq -cg_v(w, w) \coth ca.$$

Ceci étant vrai pour tout $a < 0$, on en déduit :

$$\psi_s(w) \leqq cg_v(w, w).$$

C. Q. F. D.

— L'existence de $V(0, v)$, et donc de $V(t, v)$, découle alors des lemmes 1 et 2. Posons $\psi(w) = g_v(V(0, v)\,w, w)$. Il résulte du lemme 2 que $|\,\psi(w)\,| \leqq cg_v(w, w)$.

Questions d'intégrabilité. — Soit $(v, e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base orthonormée de $(T_{\gamma(0)}M, g_v)$:

$$\text{Trace } V_s(0, v) = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_s(e).$$

Donc

$$\text{Trace } V_s(0, v) \leqq c(n-1).$$

$v \to \text{Trace } V(0, v)$ étant limite simple de la famille croissante de fonctions continues $(v \to \text{Trace } V_s(0, v))_s$, uniformément bornée par la fonction constante $c(n-1)$, est intégrable.

D'autre part, $(t \to V_s(t, v))_s$ converge uniformément au sens de la convergence compacte vers $t \to V(t, v)$. Donc

$$\int_0^1 \text{Trace } V^2(t, v)\, dt = \lim_{s \to +\infty} \int_0^1 \text{Trace } V_s^2(t, v)\, dt.$$

Or

$$\text{Trace } V_s^2(t, v) = \text{Trace } V_{s-t}^2(0, G_t v) \geqq 0.$$

Donc

$$0 \leqq \int_0^1 \text{Trace } V^2(t, v)\, dt \leqq c^2(n-1).$$

$v \to \int_0^1 \text{Trace } V^2(t, v)\, dt$, étant limite simple de fonctions continues uniformément bornées par $c^2(n-1)$, est intégrable.

Ceci achève la démonstration du théorème 3.

Des théorèmes 1 et 3, il résulte alors le théorème suivant [6].

THÉORÈME 4. — *Si (M, E) est une variété de Landsberg sans points conjugués, homéomorphe au tore à 2 dimensions T^2, alors la courbure sectionnelle K de M est identiquement nulle, et donc $R \equiv 0$.*

En effet, $\int_{U(M)} \mathrm{Ric}\, v . \sigma_0 = 4\pi^2 \chi(M) = 0$, car M est homéomorphe à T^2.

4. Scalaire principal.

Dans ce paragraphe, on désigne, pour tout $v \in \mathscr{C}M$, par $X(v)$ l'élément de $\pi_0^{-1} TM$ défini par $X(v) = -L(v) \overset{*}{T}(v)$. En coordonnées locales,

$$X^i = \frac{1}{2} g^{ik} L(v) \frac{\partial}{\partial v^k} \log g, \qquad \text{où} \quad g = \text{dét}\, g_{ij}.$$

On suppose dorénavant la variété finslérienne (M, E) de dimension 2 orientable, et on choisit une orientation de M. On désigne par (v, w) un repère orthonormé de $T_{\pi v} M$ pour g_v. $v \to v \times w$ définit une section globale de $\pi_0^{-1} TM \mid UM \to UM$.

DÉFINITION 1. — *On appelle scalaire principal de la variété finslérienne (M, E), le scalaire $v \to J(v)$ défini par $X(v) = J(v)(v \times w)$.*

Remarque. — Si $J \equiv 0$, alors $\overset{*}{T} \equiv 0$, et donc (M, E) est une variété riemannienne. $\mathscr{L}(G) J \equiv 0$ caractérise les variétés de Landsberg.

— (M, E) étant orientée, on obtient une base orthonormale directe de $(U(M), \bar{g})$ en tout point v, en considérant les champs de vecteurs G, $\gamma(v \times w) = \eta$, $c(v \times w) = \zeta$.

La démonstration des formules suivantes, dues à E. CARTAN [3], est classique (*cf.* [11] par exemple) :

PROPOSITION 1. — *K désignant la courbure sectionnelle de (M, E),*

$$(1) \qquad [G, \eta] = K\zeta,$$

$$(2) \qquad [G, \zeta] = -\eta,$$

$$(3) \qquad [\eta, \zeta] = G + J\eta + \mathscr{L}(G) J . \zeta,$$

$$(4) \qquad \mathscr{L}(\zeta) K + JK + \mathscr{L}(G) \mathscr{L}(G) J = 0.$$

(4) représente l'identité de Jacobi écrite pour G, η, ζ, compte tenu de (1), (2) et (3).

Pour une variété finslérienne de dimension 2, orientée compacte, la formule de divergence d'Akbar-Zadeh [1] s'écrit, pour tout $Y : \mathcal{C}M \to \pi_0^{-1}\, TM$:

$$\int_{U(M)} \{ \operatorname{div} Y - \mathcal{L}(G)\, J \,.\, g(Y, v \times w) \}\, \sigma_0 \equiv 0.$$

Il en résulte alors :

Proposition 2. — *Pour toute application* $\varphi : U(M) \to \mathbf{R}$,

(*a*)
$$\int_{U(M)} \mathcal{L}(G)\, \varphi\sigma_0 = 0$$

(*b*)
$$\int_{U(M)} \mathcal{L}(\eta)\, \varphi\sigma_0 = \int_{U(M)} \varphi\, \mathcal{L}(G)\, J\,.\,\sigma_0.$$

La démonstration résulte de la considération des sections $\varphi\, V$ et $\varphi\,(v \times w)$ de $\pi_0^{-1}\, TM \to \mathcal{C}M$.

Appliquant la proposition au scalaire principal J, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1. — $\displaystyle\int_{U(M)} \mathcal{L}(G)\, J\sigma_0 = 0 = \int_{U(M)} \mathcal{L}(\eta)\, J\sigma_0.$

De plus, en utilisant la formule (4) de la proposition, on prouve le résultat suivant.

Proposition 3. — *Si* (M, E) *est une variété finslérienne de dimension* 2 *compacte orientée, de courbure sectionnelle* K,

(*a*) *si* $K = 1$,

$$\int_{U(M)} J\sigma_0 = 0; \qquad \int_{U(M)} J^2\sigma_0 = \int_{U(M)} (\mathcal{L}(G)\, J)^2\sigma_0$$

et

$$\int_{U(M)} \mathcal{L}(\zeta)\, J\sigma_0 = -\int_{U(M)} (\mathcal{L}(G)\, J)^2\sigma_0.$$

(*b*) *Si* $K = 0$,

$$\mathcal{L}(G)\, J = 0.$$

Pour les variétés compactes à courbure constante négative, on prouve la proposition suivante :

Proposition 4. — *Si* (M, E) *est une variété finslérienne de dimension* 2 *compacte à courbure sectionnelle constante* -1, (M, E) *est riemannienne.*

Démonstration de la proposition 3 (*b*). — K étant nul, $[G, \eta] = 0$. Donc

$$\mathcal{L}(G)\,\mathcal{L}(\eta)\,J = \mathcal{L}(\eta)\,\mathcal{L}(G)\,J,$$

ce qui entraîne, compte tenu de la proposition 2,

$$\int_{U(M)} \mathcal{L}(\eta)\,\mathcal{L}(G)\,J\sigma_0 = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\int_{U(M)} (\mathcal{L}(G)\,J)^2\sigma_0 = 0,$$

ce qui entraîne $\mathcal{L}(G)\,J = 0$.

Démonstration de la proposition 4. — On travaille sur le revêtement orientable $\hat{M}$. Pour tout couple φ, ψ, de fonctions sur $U(\hat{M})$,

$$\int_{U(\hat{M})} \mathcal{L}(G)\,(\varphi\psi)\,\sigma_0 = 0,$$

et donc

$$\int_{U(\hat{M})} \varphi\,\mathcal{L}(G)\,\psi\sigma_0 = \int_{U(\hat{M})} \psi\,\mathcal{L}(G)\,\varphi\sigma_0.$$

Prenant $\varphi = \mathcal{L}(G)\,J$, $\psi = J$, et tenant compte de ce que (4) s'écrit alors $\mathcal{L}(G)\,\mathcal{L}(G)\,J = J$, on obtient

$$\int_{U(\hat{M})} (\mathcal{L}(G)\,J)^2\sigma_0 = -\int_{U(M)} J^2\sigma_0$$

et donc $J \equiv 0$, ce qui entraîne que $\hat{M}$ et donc M est riemannienne.

5. Tores finslériens sans points conjugués.

D'après le théorème 4, si (M, E) est une variété finslérienne homéomorphe à un tore, et sans points conjugués, telle que $\mathcal{L}(G)\,J = 0$, $K \equiv 0$.

Comme la courbure sectionnelle de (M, E) est nulle, $[G, \eta] = 0$, et donc $\mathcal{L}(G)\,\mathcal{L}(\eta)\,J = 0$, ce qui peut encore s'écrire :

$$\mathcal{L}(G)\,\mathcal{L}(G)\,\mathcal{L}(\zeta)\,J = 0, \qquad \text{car} \quad \mathcal{L}(\eta)\,J = -\mathcal{L}(G)\,(\zeta)\,J,$$

ce qui entraîne que

$$\mathcal{L}(\zeta)\,J(G_s v) = \mathcal{L}(\zeta)\,J(v) + s\,\mathcal{L}(G)\,\mathcal{L}(\zeta)\,J(v).$$

Donc le long d'une géodésique périodique $\mathcal{L}(G)\,\mathcal{L}(\zeta)\,J \equiv 0$.

LEMME 1. — *Soit (T^2, E) un tore finslérien sans points conjugués. Alors, pour tout $x \in T^2$, l'ensemble des $v \in U_x(T^2)$, qui sont tangents à des géodésiques périodiques, est dense dans $U_x(T^2)$.*

Démonstration. — Soit $(\mathbf{R}^2, E)$ le revêtement finslérien de (T^2, E), et soient (A_{pn}) $((p, n) \in Z \times Z)$ les sommets du réseau de T^2 dans $\mathbf{R}^2$. $U_0(\mathbf{R}^2)$ sera noté U_0.

U_0 est difféomorphe à S^1 et donc orienté, ce qui donne un sens à la notation $v_1 < v < v_2$ où les v_i et v sont des éléments de U_0. Si l'ensemble des $v \in U_0$, qui sont tangents à des géodésiques passant par un point du réseau différent de o, n'est pas partout dense dans U_0, il existe un élément de U_0 qui n'est pas point d'accumulation de cet ensemble, et donc il existe v_1 et v_2 appartenant à U_0, vecteurs tangents en o à des géodésiques passant par un point du réseau différent de o et tel que, pour tout v, $v_1 < v < v_2$, la géodésique γ_v, issue de v, ne passe par aucun point du réseau distinct de o. γ_{v_1} passe par $A_{p_1 n_1} \neq$ o, et γ_{v_2} par $A_{p_2 n_2} \neq$ o. Donc γ_{v_1} (resp. γ_{v_2}) passe par $A_{q p_1 p_2, n_1 p_2 q}$ (resp. $A_{q p_1 p_2, n_2 p_1 q}$) pour tout q entier. Or K étant nul, deux géodésiques issues de o ne se recoupent pas. Comme pour tout $v \times v_1 < v < v_2$, γ_v ne passe par aucun sommet du réseau distinct de o,

$$| n_1 p_2 q - n_2 p_1 q | \leqq 1.$$

Ceci étant vrai pour tout $q \in Z$, $n_1 p_2 = n_2 p_1$, et donc γ_{v_1} et γ_{v_2} passent par le point $A_{p_1 p_2, n_1 p_2}$ qui est distinct de o si $p_2 \neq$ o. Si $p_2 =$ o, alors γ_{v_1} et γ_{v_2} passent par le point $A_{0, n_1 n_2}$. Donc, dans les deux cas, γ_{v_1} et γ_{v_2} se recoupent, ce qui est absurde et démontre le lemme, les géodésiques périodiques de T^2 se relevant en géodésiques joignant des points du réseau dans $\mathbf{R}^2$.

Soit alors $x \in T^2$, $\mathcal{L}(G)\,\mathcal{L}(\zeta)\,J$ étant nul sur l'ensemble des $v \in U_x(T^2)$, tels que γ_v soit périodique, est donc nul sur $U_x(T^2)$. Donc $\mathcal{L}(G)\,\mathcal{L}(\zeta)\,J =$ o, ce qui équivaut à $\mathcal{L}(\eta)\,J \equiv$ o.

Les conditions $\mathcal{L}(G)\,J = \text{o} = \mathcal{L}(\eta)\,J$ peuvent encore s'exprimer ainsi : pour tout $Y \in \pi_0^{-1}\,TM$, $D_{\gamma Y}T =$ o.

LEMME 2. — *Soit (M, E) une variété finslérienne de dimension n telle que, pour tout $Y \in \pi_0^{-1}\,TM$, $D_{\gamma Y}T =$ o. Alors la gerbe finslérienne de (M, E) est C^∞ sur TM.*

Démonstration. — P désignant le deuxième tenseur de courbure de Cartan,

$$\begin{aligned} g(P(X_1, X_2)X_3, X_4) = {} & g\big((D_{\gamma X_4} P)(X_1, X_2), X_3\big) \\ & - g((D_{\gamma X_3} T)(X_1, X_2), X_4) + g(T(S(X_3, X_2), X_1), X_4) \\ & - g(T(S(X_4, X_2), X_1), X_3). \end{aligned}$$

Comme $S = D_G T = 0$ et $D_{YY} T = 0$, P est nul, ce qui se traduit, dans ce cas (*cf.* [1]), par

$$\frac{\partial \overset{\star}{\Gamma}{}^m_{ij}}{\partial v^k} = 0,$$

où $\overset{\star}{\Gamma}{}^m_{ij}$ désigne le premier groupe de symboles de Christoffel de la connexion finslérienne rapportée à la base (dx^i, β^j). Il en résulte que G est C^∞ sur TM.

Remarque. — On peut prouver que, réciproquement, si G est C^∞ sur TM, alors $D_{Y Y} T = 0$ pour tout $Y \in \pi_0^{-1} TM$.

Il résulte du lemme 2 que la gerbe d'un tore finslérien, sans points conjugués, est C^∞. Il en est donc de même pour la gerbe G du revêtement finslérien de (T^2, E) : $(R^2, \tilde{E})$.

LEMME 3. — *Soit* $(\mathbf{R}^n, \tilde{E})$ *une structure finslérienne sur* $\mathbf{R}^n (n \geqq 2)$ *telle que :*

(1) $\mathbf{R}^n$ *est complet pour la métrique associée à la structure finslérienne.*

(2) *la gerbe* $\tilde{G}$ *de* $\mathbf{R}^n$ *est* C^∞ *sur* $T\mathbf{R}^n$.

(3) *la courbure sectionnelle* K *est identiquement nulle.*

Alors $(\mathbf{R}^n, \tilde{E})$ *est isométrique à* $(\mathbf{R}^n, E_0)$, *où* E_0 *est invariant par les translations de* $\mathbf{R}^n$.

Démonstration. — Soit $x \in \mathbf{R}^n$. Des conditions (1) et (2), il résulte ([5] et [7]) que $\exp_x$ est définie sur $T_x\mathbf{R}^n$ et C^∞. On peut donc munir $T_x\mathbf{R}^n$ d'une structure finslérienne $(T_x\mathbf{R}^n, \exp_x^\star \tilde{E})$ qui vérifie les conditions (1), (2) et (3) et qui est telle que les géodésiques issues de 0 sont des droites. Les champs de Jacobi X le long d'une géodésique $t \to tv$ de $(T_x\mathbf{R}^n, \exp_x^\star \tilde{E})$, nuls pour $t = 0$, sont donc de la forme tv_1, où $v_1 \in T_x\mathbf{R}^n$, et $v \times v_1 = D_1 \xi(0)$, où $\xi = tv \times X(t)$. Or la courbure sectionnelle étant nulle, $D_1 D_1 \xi = 0$, ce qui implique $X(t) = t\tau_1 v_1$, soit $\tau_t v_1 = v_1$. Le transport par parallélisme le long des géodésiques $t \to tv$ est donc le parallélisme usuel. Dans les coordonnées (y^i), relatives à une base de $T_x\mathbf{R}^n$, ceci s'écrit :

$$\overset{\star}{\Gamma}{}^i_{jk}(tv)\, v^j \equiv 0, \qquad t \in \mathbf{R},$$

où $\overset{\star}{\Gamma}{}^i_{jk}$ est le premier groupe de symboles de Christoffel de la connexion finslérienne de $(T_x\mathbf{R}^n, \exp_x^\star \tilde{E})$ dans la base (dy^i, β^j).

Or des conditions (2) et (3), il résulte (*cf.* [4] ou [11]) qu'il existe, pour tout $y \in T_x\mathbf{R}^n$, un difféomorphisme local φ_y tel que

$$\frac{\partial^2 \varphi_y^k}{\partial y^i \partial y^j} + \frac{\partial \varphi_y^k}{\partial y_r} \overset{\star}{\Gamma}{}^r_{ij} = 0,$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial^2 \varphi_y^k}{\partial y^i \partial y^j}(y)\, y^i \equiv 0,$$

donc que $y \to \varphi^k(y)$ est positivement homogène de degré 1, et donc que $\overset{*}{\Gamma}{}^r_{ij}(y)$ est positivement homogène de degré -1 en y.

Il en résulte que $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}(y) = 0$, et donc que toutes les géodésiques de $(T_x\mathbf{R}^n, \exp_x^*\tilde{E})$ sont des droites, ce qui entraîne que $\exp_x^*\tilde{E}$ est invariant par les translations de $T_x\mathbf{R}^n$; le lemme 3 est donc prouvé.

Des lemmes 1, 2 et 3, il résulte que le revêtement finslérien universel de (T^2, E) est isométrique à $(\mathbf{R}^2, E_0)$ ce qui entraîne que (T^2, E) est isométrique à un tore finslérien plat.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AKBAR-ZADEH (H.). — Les espaces de Finsler et certaines de leurs généralisations, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3e Série, t. 80, 1963, p. 1-79 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1961).

[2] BERGER (Marcel). — *Lectures on geodesics in riemannian geometry.* — Bombay, Tata Institute, 1965 (*Tata Institute of fundamental Research. Lectures on Mathematics*, 33).

[3] CARTAN (Élie). — Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés, *Mathematica*, Cluj, t. 4, 1930, p. 114-136.

[4] CARTAN (Élie). — *Les espaces de Finsler.* — Paris, Hermann, 1934 (*Act. scient. et ind.*, 79; *Exposés de Géométrie*, 2).

[5] DAZORD (Pierre). — *Propriétés globales des géodésiques des espaces de Finsler* (*Thèse Sc. math. Lyon*, 1969) (*).

[6] DAZORD (Pierre). — Sur la formule de Gauss-Bonnet en géométrie finslérienne, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, 1970, Série A, p. 1241-1243.

[7] DAZORD (Pierre). — *Remarques sur le théorème de Hopf-Rinow et sur les variétés finslériennes à gerbe C^∞* (à paraître).

[8] GROMOLL (D.), KLINGENBERG (W.), MEYER (W.). — *Riemannsche Geometrie im Grossen.* — Berlin, Springer Verlag, 1968 (*Lecture Notes in Mathematics*, 55).

[9] HOPF (Eberhard). — Closed surfaces without conjugate points, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 34, 1948, p. 47-51.

[10] LICHNEROWICZ (André). — Sur une extension de la formule d'Allendoerfer-Weil à certaines variétés finslériennes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 223, 1946, p. 12-14.

[11] RUND (Hanno). — *The differential geometry of Finsler spaces.* — Berlin, Springer-Verlag, 1959 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 101).

(Texte reçu le 15 décembre 1970.)

Pierre DAZORD,
Faculté des Sciences de Lyon,
Mathématiques,
43, boulevard du 11 novembre 1918,
69-Villeurbanne.

(*) Dans cette note l'hypothèse « de Landsberg » a été omise pour les théorèmes 1 et 3.