BULLETIN DE LA S. M. F.

G. MAURY

# La condition « intégralement clos » dans quelques structures algébriques. II

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 98 (1970), p. 369-399
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__369_0>

*Bull. Soc. math. France,*
98, 1970, p. 369 à 399.

# LA CONDITION « INTÉGRALEMENT CLOS » DANS QUELQUES STRUCTURES ALGÉBRIQUES II

PAR

GUY MAURY.

(Lyon).

Cet article se compose de cinq parties. Il fait suite au Mémoire [15]. *La condition « intégralement clos » dans quelques structures algébriques,* dont les résultats du chapitre III sont utilisés dans les parties III, IV et V du présent travail. Nous faisons agir en même temps que la théorie, déjà ancienne, des ordres maximaux réguliers au sens d'ASANO ([1], [2]), des méthodes récentes de théorie des anneaux : C'est ainsi que nous considérons, dans les parties I et II de cet article, des localisations au sens de GABRIEL, en particulier des localisations plates, d'un anneau noethérien $\mathcal{O}$, sans diviseurs de zéro. ordre maximal régulier de son corps des fractions $K$; de même, dans la partie IV, nous utilisons la puissance symbolique $n$-ième d'un idéal premier, introduite récemment par GOLDIE [8].

La première partie définit et caractérise les localisations bilatères de $\mathcal{O}$. Signalons le résultat suivant, obtenu grâce à un résultat récent de HACQUE [9] : Si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal régulier, noethérien, sans diviseurs de zéro, ordre maximal de son corps des fractions $K$, dont tous les idéaux premiers non nuls sont maximaux, tout sous-anneau $B$ de $K$ contenant $\mathcal{O}$ est plat en tant que $\mathcal{O}$-module à gauche et en tant que $\mathcal{O}$-module à droite.

La deuxième partie, assez maigre, étudie les suranneaux plats d'un ordre maximal $\mathcal{O}$ contenus dans $K$.

La troisième partie caractérise, parmi les anneaux, noethériens, sans diviseurs de zéro, ordres maximaux réguliers de leurs corps de fractions, ceux qui sont à idéaux (à gauche, à droite) tous bilatères. Il existe de tels anneaux qui ne sont pas commutatifs.

La quatrième partie constitue un essai pour étendre au cas non commutatif la caractérisation de MORI-YOSIDA ([21], [26]), appelée caractérisation (C) en [15], des domaines d'intégrité, noethériens, intégralement clos. En réalité, nous ne parvenons à généraliser la caractérisation (C) que pour les seuls ordres maximaux, noethériens, sans diviseurs de zéro, dont tous les idéaux (à gauche, à droite) sont bilatères. Cependant quelques résultats sont obtenus sous des hypothèses plus générales.

La cinquième partie établit principalement que la localisation $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, associée à un idéal premier $\mathfrak{P}$ minimal non nul d'un ordre maximal régulier, noethérien, sans diviseurs de zéro, est un anneau de fraction classique selon un sous-demi-groupe $\mathcal{C}'$ défini à partir de $\mathfrak{P}$, sous une certaine condition (H).

Si on applique au cas commutatif les résultats obtenus dans les cinq parties, on retrouve des résultats connus.

## I

I.1. LEMME. — *Soit $\mathcal{F}'$ une famille non vide d'idéaux bilatères non nuls d'un anneau unitaire, noethérien à gauche $\mathcal{O}$ telle que* ($\mathfrak{u}\in\mathcal{F}'$, $\mathfrak{u}'\in\mathcal{F}'$) *entraîne* ($\mathfrak{u}\mathfrak{u}'\in\mathcal{F}'$). *La famille $\mathcal{F}$ de tous les idéaux à gauche de $\mathcal{O}$, qui contiennent un idéal bilatère appartenant à $\mathcal{F}'$, est topologisante et idempotente* ([4], exercices, p. 157 et suiv.).

*Démonstration.* — ($F\in\mathcal{F}$, $F\subseteq G$) entraîne ($G\in\mathcal{F}$); et ($F\in\mathcal{F}$, $F'\in\mathcal{F}$) entraîne ($F\cap F'\in\mathcal{F}$). On peut écrire par ailleurs :

$$(F\in\mathcal{F},\ \forall\, a\in\mathcal{O},\ \exists\, \mathfrak{u}\in\mathcal{F}' \text{ tel que } \mathfrak{u}\subseteq F)\Rightarrow(\mathfrak{u}a\subseteq\mathfrak{u}\subseteq F \text{ et } F\,{}^{\bullet}\!.\, a\in\mathcal{F}).$$

Soit enfin un idéal à gauche $I$ de $\mathcal{O}$, soit $F\in\mathcal{F}$, démontrons :

$$(\forall\, a\in F,\ I\,{}^{\bullet}\!.\, a\in\mathcal{F})\Rightarrow(I\in\mathcal{F}).$$

On a $F=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{O}a_i$; il existe $\mathfrak{u}_i\in\mathcal{F}'$ tel que $\mathfrak{u}_i a_i=\mathfrak{u}_i\mathcal{O}a_i\subseteq I$, $i=1, \ldots, n$. Posons $\mathfrak{u}=\mathfrak{u}_1. \ldots . \mathfrak{u}_n$, on a $\mathfrak{u}\in\mathcal{F}'$ et $\mathfrak{u}F\subseteq I$. Soit $\mathfrak{u}'\in\mathcal{F}'$ tel que $\mathfrak{u}'\subseteq F$, on peut écrire $\mathfrak{u}\mathfrak{u}'\subseteq I$, ce qui prouve $I\in\mathcal{F}$.

I.2. *Définition.*— Une famille $\mathcal{F}$ qui satisfait aux conditions du lemme I.1 est dite *bilatère.* La famille $\mathcal{F}'$ correspondante est dite une *base de $\mathcal{F}$.*

I.3. LEMME. — *Soit $\mathcal{F}$ une famille bilatère. Soit $\mathcal{F}'$ une base de $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ le localisé de $\mathcal{O}$ selon $\mathcal{F}$* ([4], exercices, p. 157 et suiv.), *$\mathcal{O}$ désignant un anneau unitaire, noethérien, sans diviseurs de zéro, dont $K$ désigne le corps des fractions* [7]. *On a*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}}=\{x\in K\mid \exists\, F\in\mathcal{F},\ Fx\subseteq\mathcal{O}\}=\{x\in K\mid \exists\, \mathfrak{u}\in\mathcal{F}',\ \mathfrak{u}x\subseteq\mathcal{O}\}.$$

*Démonstration.* — En effet, comme $\mathcal{O}$ n'a pas de diviseurs de zéro, $\mathcal{F}\mathcal{O}=\{x\in\mathcal{O}\mid\mathcal{O}\,{}^{\bullet}\!.\, x\in\mathcal{F}\}=0$. On sait qu'alors $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est l'enveloppe

$\mathcal{F}$-injective [24] de $\mathcal{O}$. Comme $K$ est une enveloppe injective de $\mathcal{O}$, considérée comme $\mathcal{O}$-module à gauche (appliquer l'exercice 22 de [4], p. 162, au cas où la famille $\mathcal{F}$ considérée dans cet exercice est la famille des idéaux à gauche essentiels $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{O}$. Le corps des fractions $K$ de $\mathcal{O}$ est alors isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_0}$ qui est l'enveloppe injective du $\mathcal{O}$-module à gauche $\mathcal{O}$). On montre alors que l'enveloppe $\mathcal{F}$-injective de $\mathcal{O}$, comprise dans $K$, est alors définie par

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}} = \{ x \in K \mid \exists\, F \in \mathcal{F} \text{ tel que } Fx \subseteq \mathcal{O} \}.$$

I.4. *Définition.* — Une localisation $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, associée à une famille bilatère $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}$, sera dite une *localisation bilatère*. Si $\mathcal{F}'$ désigne une base de $\mathcal{F}$, on notera aussi $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ au lieu de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$.

I.4 *bis. Exemples de localisations bilatères.*

1° Soit, dans cet exemple, comme dans le suivant, $\mathcal{O}$ un anneau noethérien, sans diviseurs de zéro, unitaire, de corps des fractions $K$. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\mathcal{O}$. Soit $\mathcal{F}'_{\mathfrak{P}}$ la famille des idéaux bilatères $\mathcal{O}s\mathcal{O}$, $s \notin \mathfrak{P}$. Soit $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$ la famille des idéaux à gauche de $\mathcal{O}$ contenant un idéal bilatère $\mathcal{O}s\mathcal{O}$, $s \notin \mathfrak{P}$; $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}$ sera noté aussi $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ (la famille $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$ est une famille bilatère). D'après (I.3), on a

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} = \{ x \in K \mid \exists\, s \notin \mathfrak{P},\ s\mathcal{O}x \subseteq \mathcal{O} \}.$$

2° Soit $p$ une famille d'idéaux premiers $\mathfrak{P}_i$, $i \in I$, de $\mathcal{O}$. Soit $\mathcal{F}'_p$ la famille des idéaux bilatères de $\mathcal{O}$ qui contiennent, pour tout $i$, $i \in I$, un élément $s_i$, $s_i \notin \mathfrak{P}_i$. Le produit de deux idéaux de $\mathcal{F}'_p$, $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{u}'$, est un idéal de $\mathcal{F}'_p$. Soit $\mathcal{F}_p$ la famille des idéaux à gauche de $\mathcal{O}$, qui contiennent un idéal de $\mathcal{F}'_p$, $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_p}$, sera notée $\mathcal{O}_p$ et, d'après le lemme I.3, on peut écrire

$$\mathcal{O}_p = \{ x \in K \mid \exists\, \mathfrak{u} \in \mathcal{F}'_p,\ \mathfrak{u}x \subseteq \mathcal{O} \}.$$

I.5. THÉORÈME. — *Si l'ensemble $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ désignant une famille bilatère, possède un sous-ensemble cofinal constitué d'idéaux à gauche projectifs de l'anneau $\mathcal{O}$ unitaire, sans diviseurs de zéro, noethérien, l'inclusion canonique $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est un épimorphisme d'anneaux plats* (*à gauche*). *En particulier, si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal régulier de son corps des fractions $K$* [1], *dont tous les idéaux premiers non nuls sont maximaux, toute localisation bilatère de $\mathcal{O}$, est plate* (*à gauche*).

*Démonstration.* — La première partie résulte d'un résultat de M. HACQUE ([9], corollaire 3.7, p. 111). La seconde partie résulte du fait que, dans un ordre maximal régulier, noethérien, sans diviseurs de zéro, de son corps des fractions $K$, dont tous les idéaux premiers non nuls sont maximaux, tout idéal bilatère de $\mathcal{O}$ est projectif de type fini en tant qu'idéal à gauche (et d'ailleurs aussi en tant qu'idéal à droite) : en effet, tout idéal bilatère de $\mathcal{O}$ est maximal dans sa classe modulo l'équivalence $\mathcal{R}$ de Artin [1], donc inversible, et on utilise alors le lemme 1.2 de Robson [23].

I.5 *bis*. *Exemples de localisation bilatère plate.*

1° Soit $\mathcal{O}$ un anneau unitaire, noethérien, sans diviseurs de zéro, $\mathfrak{P}$ désignant un idéal premier de $\mathcal{O}$. Supposons, de plus, que tous les idéaux (à gauche, à droite) de $\mathcal{O}$ sont bilatères. Les idéaux $\mathcal{O}s$, $s \notin \mathfrak{P}$, sont libres en tant que $\mathcal{O}$-module à gauche, et forment un système cofinal de $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$ : le théorème I.5 prouve que l'inclusion canonique $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}}$ est un épimorphisme plat d'anneau (à gauche).

2° Si maintenant $\mathcal{O}$ n'est pas à idéaux (à gauche, à droite) tous bilatères, mais si $S = \mathcal{O} - \mathfrak{P}$ vérifie la condition suivante : $\forall s \in S$, $\exists s' \in S$ tel que $\mathcal{O}s \supseteq s'\mathcal{O}$, un système cofinal d'idéaux à gauche de $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$ est constitué par les idéaux à gauche libres $\mathcal{O}s$, $s \in S$, et $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ est plat (en tant que $\mathcal{O}$-module à droite).

I.6. — Dans toute la suite de cette première partie, nous allons supposer que $\mathcal{O}$ est un anneau noethérien, sans diviseurs de zéro, ordre maximal régulier de son corps des fractions $K$ [1]. Nous nous proposons d'étudier les localisations bilatères de $\mathcal{O}$. Pour cela, nous nous inspirons directement d'une méthode mise en œuvre par Asano [2] pour l'étude de $\mathcal{O}'_{\mathfrak{P}}$, $\mathfrak{P}$ désignant une famille d'idéaux premiers minimaux non nuls du demi-groupe $\mathcal{O}'$, ordre maximal régulier d'un demi-groupe $S$.

Soit donc le treillis multiplicatif $\mathfrak{Z}$ des $\mathcal{O}$-idéaux (bilatères) de $\mathcal{O}$ [2]. Considérons l'application qui, à $\mathfrak{a} \in \mathfrak{Z}$, fait correspondre

$$\mathfrak{a}' = \mathcal{O} \cdot\!\!. (\mathcal{O} .\!\!\cdot \mathfrak{a}) = \mathcal{O} .\!\!\cdot (\mathcal{O} \cdot\!\!. \mathfrak{a}),$$

le plus grand $\mathcal{O}$-idéal (bilatère) de la classe de $\mathfrak{a}$ modulo l'équivalence d'Artin $\mathcal{R}$. Les $\mathcal{O}$-idéaux $\mathfrak{a}'$ seront appelés les $c$-idéaux ($\mathcal{O}$-idéaux clos). Si l'on définit, dans l'ensemble des $c$-idéaux, une multiplication $\mathfrak{a}'.\mathfrak{b}' = (\mathfrak{a}'\mathfrak{b}')'$, il est bien connu que les $c$-idéaux forment un groupe [2]. Rappelons que, pour un $\mathcal{O}$-idéal $\mathfrak{a}$, on pose $\mathfrak{a}^{-1} = \mathcal{O} \cdot\!\!. \mathfrak{a} = \mathcal{O} .\!\!\cdot \mathfrak{a}$, et que l'on a $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$ et

$$\mathfrak{a}'.\mathfrak{a}'^{-1} = \mathfrak{a}'^{-1}.\mathfrak{a}' = \mathcal{O}, \qquad \text{avec} \quad \mathfrak{a}'^{-1} = (\mathfrak{a}^{-1})'.$$

I.6 *bis*. Lemme. — *On a la condition de chaîne ascendante pour les $c$-idéaux contenus dans un $c$-idéal fixé $\mathfrak{c}$.*

*Démonstration.* — Soit $N$ un ensemble de $c$-idéaux contenus dans $\mathfrak{c}$. Soit $\mathfrak{a} \in N$, on a alors $\mathfrak{c}^{-1}.\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}$. Il existe donc un $c$-idéal maximal $\mathfrak{b}$ dans l'ensemble $\{\mathfrak{c}^{-1}.\mathfrak{a},\ \mathfrak{a} \in N\}$. On a alors

$$\mathfrak{c}.\mathfrak{b} = \mathfrak{c}.\mathfrak{c}^{-1}.\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0$$

en posant $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}^{-1}.\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_0 \in N$, et $\mathfrak{a}_0$ est visiblement maximal dans $N$.

I.7. Lemme. — *Si* $\mathfrak{a}$ *est un* $\mathcal{O}$-*idéal, il existe des éléments* $c_1, \ldots, c_n$ *dans* $\mathfrak{a}$, *tels que* $\mathfrak{a}'$ *est un c-idéal engendré par* $c_1, \ldots, c_n$ :

$$\mathfrak{a}' = (c_1, \ldots, c_n)' = (\mathcal{O}c_1\mathcal{O}, \ldots, \mathcal{O}c_n\mathcal{O})' = \left(\sum_1^n (c_i)\right)',$$

$(a) = \mathcal{O}a\mathcal{O}$ *désignant le* $\mathcal{O}$-*idéal engendré par* $a$ ([1], th. 1.5), *noté aussi* $(\mathcal{O}a\mathcal{O})$.

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que

$$\mathcal{O}a\mathcal{O} = \left\{\sum_1^n \lambda_i a \mu_i,\ n \in N,\ \lambda_i,\ \mu_i \in \mathcal{O}\right\}$$

est un $\mathcal{O}$-idéal, car $\mathcal{O}$ est un ordre régulier ([1], th. 1.5). Soient $c_1, \ldots, c_m$, $m$ éléments non nuls de $\mathfrak{a}$. S'il existe $c_{m+1} \notin (c_1, \ldots, c_m)$, alors nous formons $(c_1, \ldots, c_m, c_{m+1})' \subseteq \mathfrak{a}'$. En utilisant le lemme I.6 *bis*, on voit qu'il existe $n$ tel que $(c_1, \ldots, c_n)' \supseteq \mathfrak{a}$, donc $(c_1, \ldots, c_n)' = \mathfrak{a}'$.

I.8. *Définition.* — Soit $A$ un $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-bimodule non nul, sous-bimodule de $K$. La réunion ensembliste de tous les $c$-idéaux engendrés par un nombre fini d'éléments de $A$ s'appelle la *clôture de* $A$, et se note $\overline{A}$. Si l'on a $\overline{A} = A$, $A$ est dit *clos*.

I.8 *bis. Remarque.* — Il résulte du lemme I.7 que la clôture $\overline{\mathfrak{a}}$ d'un $\mathcal{O}$-idéal est $\mathfrak{a}'$.

I.9. Proposition. — $\overline{A}$ *est un* $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-*bimodule, sous-bimodule de* $K$, *et l'on a* :

1° $A \subseteq \overline{A}$;

2° $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

3° $A \subseteq B$ *implique* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;

4° $\overline{A}\,\overline{B} \subseteq \overline{AB}$ $\Big($*par* $AB$, *on entend l'ensemble des sommes finies* $\sum a_i b_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$, *lorsque* $A$ *et* $B$ *sont des sous*-$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-*bimodules de* $K\Big)$.

*Démonstration.* — Soient $x$ et $y$ appartenant à $\overline{A}$, il existe des éléments de $A$, $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_l$ appartenant à $A$, tels que $x \in \overline{\sum_1^n (a_i)}$, $y \in \overline{\sum_{n+1}^l (a_i)}$, donc tels que

$$x + y \in \overline{\overline{\sum_1^n (a_i)} + \overline{\sum_{n+1}^l (a_i)}} = \overline{\sum_1^l (a_i)}$$

(propriété de la fermeture $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}' = \overline{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{a}$ $\mathcal{O}$-idéal, *voir* [2]). De façon immédiate, on établit, pour $x \in \overline{A}$, $a \in A$, $xa \in \overline{A}$, $ax \in \overline{A}$. Ainsi $\overline{A}$ est $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-sous-bimodule de $K$. Les relations 1° et 3° sont évidentes. Soit $a$ un élément non nul de $\overline{\overline{A}}$, il existe un $c$-idéal $(a_1, \ldots, a_r)'$ contenant $a$, $a_i \in \overline{A}$, $i = 1, \ldots, r$. Il existe $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_{s_i}})$ contenant $a_i$, avec $b_{i_j} \in A$, $j = 1, \ldots, s_i$, $i = 1, \ldots, r$. Soit $b_1, \ldots, b_n$ l'ensemble de tous les $b_{i_j}$, Alors on peut écrire $a_i \in (b_1, \ldots, b_n)'$, $i = 1, \ldots, r$ et $(b_1, \ldots, b_n)' \subseteq \overline{A}$, donc

$$\overline{\sum_1^r (a_i)} \subseteq \overline{(b_1, \ldots, b_n)} = (b_1, \ldots, b_n)' \subseteq \overline{A}$$

et $a \in \overline{A}$. On en déduit $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Soient maintenant $A$ et $B$ deux $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-sous-bimodules de $K$ non nuls. Soient $a \in \overline{A}$, $a \neq 0$, $b \in \overline{B}$, $b \neq 0$, il existe $a_1, \ldots, a_r \in A$ et $b_1, \ldots, b_s \in B$ tels que $a \in (a_1, \ldots, a_r)'$ et $b \in (b_1, \ldots, b_s)'$; on a donc

$$\begin{aligned} ab &\in (a_1, \ldots, a_r)' . (b_1, \ldots, b_s)' \\ &= \overline{\sum_1^r (a_i)} . \overline{\sum_1^s (b_j)} = \overline{\left[\sum_1^r (a_i)\right]\left[\sum_1^s (b_j)\right]} = (c_1, \ldots, c_t)', \end{aligned}$$

où $c_i$ appartient à $\left[\sum_1^r (a_i)\right]\left[\sum_1^s (b_j)\right] \subseteq AB$ pour $i = 1, \ldots, t$. On en déduit $ab \in \overline{AB}$. Toute somme finie d'éléments de la forme $ab$ est donc dans $\overline{AB}$ qui est un $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-sous-bimodule de $K$, et $\overline{A}\,\overline{B} \subseteq \overline{AB}$.

I.10. Lemme. — *Soient $A$, $B$, deux $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-sous-bimodules de $K$ non nuls. Soit $M$ un sous-ensemble de $K$ tel que $AM \subseteq B$, alors $\overline{A}M \subseteq \overline{B}$. En particulier, si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des $\mathcal{O}$-idéaux :*

$$\mathfrak{a}M \subseteq \mathfrak{b} \Rightarrow \overline{\mathfrak{a}}M \subseteq \overline{\mathfrak{b}}$$

*(on note $AM = \{ am \mid a \in A, m \in M \}$ lorsque $M$ n'est pas un sous-$\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-bimodule de $K$).*

*Démonstration.* — Lorsque $M$ est nul, le lemme est évident. Lorsque $M$ est non nul, $(\mathcal{O}M\mathcal{O})$ est un $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-sous-bimodule de $K$, en notant

$$(\mathcal{O}M\mathcal{O}) = \left\{ \sum_1^n \lambda_i m_i \mu_i,\ n \in N,\ \lambda_i,\ \mu_i \in \mathcal{O},\ m_i \in M \right\} :$$

$$\overline{A}M \subseteq \overline{A}(\overline{\mathcal{O}M\mathcal{O}}) \subseteq \overline{A(\mathcal{O}M\mathcal{O})} \subseteq \overline{B}.$$

I.11. LEMME. — *Soient* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *des c-idéaux. Soit* $\mathfrak{a}M\subseteq\mathfrak{b}$, *on a* $(\mathfrak{c}.\mathfrak{a})M\subseteq\mathfrak{c}.\mathfrak{b}$. *En particulier,* $c\in K$, $\mathfrak{a}c\subseteq\mathfrak{b}\Rightarrow c\in\mathfrak{a}^{-1}.\mathfrak{b}$.

*Démonstration.* — Puisque $(\mathfrak{c}\mathfrak{a})M\subseteq\mathfrak{c}\mathfrak{b}$, on peut écrire $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}M\subseteq\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}$, c'est-à-dire $(\mathfrak{c}.\mathfrak{a})M\subseteq\mathfrak{c}.\mathfrak{b}$.

I.12. *Définition.* — Soit $\mathfrak{a}$ un $c$-idéal. Soit $\mathcal{F}$ une famille bilatère d'idéaux à gauche de $\mathcal{O}$ de base $\mathcal{F}'$. Soit $\mathcal{G}$ la famille bilatère d'idéaux à droite de base $\mathcal{F}'$. Posons

$$\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}=\mathfrak{a}_{\mathcal{F}'}=\{x\in K\mid\exists\,\mathfrak{u}\in\mathcal{F}',\ \mathfrak{u}x\subseteq\mathfrak{a}\},$$
$$_{\mathcal{G}}\mathfrak{a}={}_{\mathcal{F}'}\mathfrak{a}=\{x\in K\mid\exists\,\mathfrak{u}\in\mathcal{F}',\ x\mathfrak{u}\subseteq\mathfrak{a}\}.$$

I.12 *bis. Remarque.* — $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ est la réunion ensembliste des $\mathfrak{u}^{-1}.\mathfrak{a}$ lorsque $\mathfrak{u}$ parcourt $\mathcal{F}'$ : en effet, de $\mathfrak{u}x\subseteq\mathfrak{a}$, $\mathfrak{u}\in\mathcal{F}'$, résulte d'après (I.10) et (I.11), $x\in\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{a}$. Réciproquement, de $x\in\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{a}$ résulte $(x)\in\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{a}$, donc $\bar{\mathfrak{u}}(x)\subseteq\bar{\mathfrak{u}}.(\bar{x})\subseteq\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{u}x\subseteq\mathfrak{a}$. Mais $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ est un $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-sous-bimodule de $K$ : soient $x$ et $y$ appartenant à $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$, il existe $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$ appartenant à $\mathcal{F}'$ tels que $\mathfrak{u}x\subseteq\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{u}'y\subseteq\mathfrak{a}$, donc

$$\mathfrak{u}\mathfrak{u}'(x+y)\subseteq\mathfrak{u}x+\mathfrak{u}'y\subseteq\mathfrak{a},\qquad\text{avec}\quad\mathfrak{u}\mathfrak{u}'\in\mathcal{F}'.$$

On voit donc que $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ est aussi la somme des $\mathcal{O}$-idéaux $\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{a}$ lorsque $\mathfrak{u}$ parcourt $\mathcal{F}'$.

I.13. LEMME. — *Si* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *sont des c-idéaux tels que* $\mathfrak{a}x\subseteq\mathfrak{b}$, *alors on a* $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}x\subseteq\mathfrak{b}_{\mathcal{F}}$.

*Démonstration.* — De $\mathfrak{a}x\subseteq\mathfrak{b}$ résulte $(\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{a})x\subseteq\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{b}$, d'après (I.11), et

$$\bigcup[(\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{a})x]=\left[\bigcup\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{a}\right]x\subseteq\bigcup(\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{b}),$$

donc $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}x\subseteq\mathfrak{b}_{\mathcal{F}}$.

I.14. LEMME. — $_{\mathcal{F}'}\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_{\mathcal{F}'}$, *pour tout c-idéal* $\mathfrak{a}$.

*Démonstration.* — On sait que $\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{a}=\mathfrak{a}.\bar{\mathfrak{u}}^{-1}$, et par suite $_{\mathcal{F}'}\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_{\mathcal{F}'}$.

I.14 *bis.* LEMME. — $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ *est un* $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$*-idéal.*

*Démonstration.* — Compte tenu de la remarque I.12 *bis,* il suffit de démontrer que si $\lambda\in K$, $\lambda\neq 0$ est tel que $\mathfrak{a}\lambda\subseteq\mathcal{O}$, on en déduit $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}\lambda\subseteq\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. Or ceci résulte du lemme I.13. De même, $\mu\in K$, $\mu\neq 0$, $\mu\mathfrak{a}\subseteq\mathcal{O}$ entraîne $\mu({}_{\mathcal{F}'}\mathfrak{a})\subseteq{}_{\mathcal{F}'}\mathcal{O}$, donc $\mu\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}\subseteq\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$.

I.15. LEMME. — $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ *est un ordre régulier de K.*

*Démonstration.* — Pour tout $x\in K$, il existe un élément non nul $\alpha\in\mathcal{O}$, tel que $(\mathcal{O}\alpha\mathcal{O})x\subseteq\mathcal{O}$, donc

$$\alpha\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}x\subseteq{}_{\mathcal{F}'}\overline{(\mathcal{O}\alpha\mathcal{O})}x=\overline{(\mathcal{O}\alpha\mathcal{O})}_{\mathcal{F}'}x:$$

en effet, pour $z\in\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, il existe $\mathfrak{u}\in\mathcal{F}'$ tel que $z\mathfrak{u}\subseteq\mathcal{O}$, donc

$$\alpha z\mathfrak{u}\subseteq\alpha\mathcal{O}\subseteq\overline{\mathcal{O}\alpha\mathcal{O}},$$
$$\alpha z\in{}_{\mathcal{F}'}\overline{(\mathcal{O}\alpha\mathcal{O})}=\overline{(\mathcal{O}\alpha\mathcal{O})}_{\mathcal{F}'}$$

et

$$\alpha\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}\subseteq\overline{(\mathcal{O}\alpha\mathcal{O})}_{\mathcal{F}'},\qquad \alpha\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}x\subseteq\overline{(\mathcal{O}\alpha\mathcal{O})}_{\mathcal{F}'}x\subseteq\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}\quad\text{(lemme I.13)}.$$

De même, il existe $\beta\in\mathcal{O}$ tel que $x\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\beta\subseteq\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$.

I.16. Lemme. — *Si $\mathfrak{a}$ est un c-idéal, alors $\overline{\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}}=\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$.*

*Démonstration.* — Soit $a$ un élément de $\overline{\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}}$. Il existe des éléments en nombre fini $a_1, \ldots, a_r$ tels que $a\in(a_1, \ldots, a_r)'$, $a_i\in\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$, $i=1, \ldots, r$. Il existe des $\mathfrak{u}_i\in\mathcal{F}'$, $i=1, \ldots, r$ tels que $\mathfrak{u}_i a_i\in\mathfrak{a}$. Si l'on pose $\mathfrak{u}=\prod_1^r\mathfrak{u}_i$, on a $\mathfrak{u}\in\mathcal{F}'$ et $\mathfrak{u}a_i\subseteq\mathfrak{u}_i a_i\subseteq\mathfrak{a}$, donc $a_i\in\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$. On a donc

$$a\in\overline{\sum_1^r(a_i)}\subseteq\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}_{\mathcal{F}},$$

et $\overline{\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}}=\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$.

I.17. Lemme. — *Si $\mathfrak{a}$ est un c-idéal, alors*

$$\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}=\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\mathfrak{a}}=\overline{\mathfrak{a}\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}=\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\mathfrak{a}\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}.$$

*Démonstration.* — On peut écrire

$$\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}=\sum_{\mathfrak{u}\in\mathcal{F}'}(\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{a})\subseteq\overline{\sum_{\mathfrak{u}\in\mathcal{F}'}(\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{a})}=\overline{\sum_{\mathfrak{u}\in\mathcal{F}'}\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{a}}.$$

Or on a $\bar{\mathfrak{u}}^{-1}\subseteq\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, $\forall\,\mathfrak{u}\in\mathcal{F}'$, donc $\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{a}\subseteq\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\mathfrak{a}$ et

$$\sum_{\mathfrak{u}\in\mathcal{F}'}\bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\mathfrak{a}\subseteq\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\mathfrak{a}\qquad\text{et}\qquad\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}\subseteq\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\mathfrak{a}}\subseteq\overline{\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}}=\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}.$$

Ainsi on a

$$\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}=\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\mathfrak{a}}=\overline{\mathfrak{a}\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}=\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\mathfrak{a}\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}\left(\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}=\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}\mathcal{O}_{\mathcal{F}}=\overline{\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\mathfrak{a}}\,\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}}=\overline{(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\mathfrak{a})\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}=\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\mathfrak{a}\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}\right).$$

I.18. Théorème. — *La clôture $\overline{\mathfrak{A}}$ d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$-idéal $\mathfrak{A}$ est aussi un $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$-idéal.*

*Démonstration.* — Soit $a$ un élément de $\overline{\mathfrak{A}}$, et soit $c$ un élément de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. Il existe un $c$-idéal $(a_1, \ldots, a_r)'$ contenant $a$, $a_i\in\mathfrak{A}$, $i=1, \ldots, r$ et

$\bar{\mathfrak{u}}^{-1}$ contenant $c$, $\mathfrak{u} \in \mathcal{F}'$. On peut écrire alors

$$ca \in \bar{\mathfrak{u}}^{-1}.(a_1, \ldots, a_r)' = \bar{\mathfrak{u}}^{-1}\overline{\left[\sum_1^r (a_i)\right]} \subseteq \overline{\sum_1^r \mathfrak{u}^{-1}(a_i)}$$
$$= (b_1, \ldots, b_s)' \quad (\text{lemme I.7}),$$

$b_j \in \sum_1^r \bar{\mathfrak{u}}^{-1}(a_i)$, $j = 1, \ldots, s$. On a donc $b_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, \ldots, s$. On a donc $ca \in \bar{\mathfrak{A}}$, et de même $ac \in \bar{\mathfrak{A}}$. Puisqu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\mathfrak{A}\lambda \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, on en déduit, lemme I.10, $\bar{\mathfrak{A}}\lambda \subseteq \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$.

I.19. Théorème. — *Si $\mathfrak{A}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$-idéal contenu dans $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, alors $\mathfrak{a} = \mathfrak{A} \cap \mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-idéal, et $\bar{\mathfrak{A}} = (\bar{\mathfrak{a}})_{\mathcal{F}}$.*

*Démonstration.* — De $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{a}$, on déduit $\mathfrak{A} \supseteq \bar{\mathfrak{u}}^{-1}\mathfrak{a}$ et $\bar{\mathfrak{A}} \supseteq \bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathfrak{A}} \supseteq \bar{\mathfrak{a}}_{\mathcal{F}}$. Soit $a$ un élément de $\bar{\mathfrak{A}}$. On a $a \in (a_1, \ldots, a_r)'$, $a_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, \ldots, r$. Il existe $\mathfrak{u} \in \mathcal{F}'$ tel que $\mathfrak{u}a_i \subseteq \mathcal{O}$, et de plus $\mathfrak{u}a_i \subseteq \mathfrak{A}$, donc $\mathfrak{u}a_i \subseteq \mathfrak{a}$, $i = 1, \ldots, r$, donc $a_i \in \bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\bar{\mathfrak{a}}$, donc

$$a \in \overline{\sum_1^r (a_i)} \subseteq \bar{\mathfrak{u}}^{-1}.\bar{\mathfrak{a}} \subseteq \bar{\mathfrak{a}}_{\mathcal{F}},$$

et $\bar{\mathfrak{A}} \subseteq \bar{\mathfrak{a}}_{\mathcal{F}}$.

I.20. Corollaire. — *Si $\mathfrak{A}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$-idéal clos dans $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ $(\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A})$, alors il existe un c-idéal $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$.*

I.21. Théorème. — *Les $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$-idéaux clos $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... forment un groupe $G_{\mathcal{F}}$ par rapport au produit $\mathfrak{A}.\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$; le groupe $G_{\mathcal{F}}$ est homomorphe au groupe $G$ de tous les c-idéaux.*

*Démonstration.* — Nous allons montrer que

$$\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}.\mathfrak{b}_{\mathcal{F}} = \overline{\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}\mathfrak{b}_{\mathcal{F}}} = (\mathfrak{a}.\mathfrak{b})_{\mathcal{F}}.$$

On a

$$\overline{\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}\mathfrak{b}_{\mathcal{F}}} = \overline{\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{b}\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}} = \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} = \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} = \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\mathfrak{a}.\mathfrak{b})\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} = (\mathfrak{a}.\mathfrak{b})_{\mathcal{F}}.$$

L'application $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ est un homomorphisme de $G$ dans $G_{\mathcal{F}}$. Si $\mathfrak{A}$ est contenu dans $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, il existe un $c$-idéal $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$. Si $\mathfrak{B}$ n'est pas contenu dans $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, il existe $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ tel que $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}.\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ [on a $\lambda \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, $\lambda \neq 0$ avec $\lambda\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, donc

$$(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\lambda\mathcal{O}_{\mathcal{F}})\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}, \qquad \overline{(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\lambda\mathcal{O}_{\mathcal{F}})}\bar{\mathfrak{B}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \qquad \text{et} \qquad \overline{(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\lambda\mathcal{O}_{\mathcal{F}})} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}},$$

donc $\overline{(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}\lambda\mathcal{O}_{\mathcal{F}})} = \mathfrak{a}_{\mathcal{F}}]$. On a donc $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}.\mathcal{B} = \mathfrak{b}_{\mathcal{F}}$, $\mathfrak{b}$ désignant un $c$-idéal, et

$$(\mathfrak{a}^{-1})_{\mathcal{F}}.\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}.\mathcal{B} = \mathcal{B} = (\mathfrak{a}^{-1})_{\mathcal{F}}.\mathfrak{b}_{\mathcal{F}} = (\mathfrak{a}^{-1}.\mathfrak{b})_{\mathcal{F}} :$$

tout élément de $G_{\mathcal{F}}$ est image d'un élément de $G$.

I.22. Théorème. — *$\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est un ordre maximal régulier de $K$.*

*Démonstration.* — Soit $L$ le demi-groupe ordonné en treillis des $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$-idéaux. L'élément unité de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est un idempotent maximal de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ car $\mathcal{C}^2 \leqq \mathcal{C} \Rightarrow \overline{\mathcal{C}}^2 \leqq \overline{\mathcal{C}}$ et $\overline{\mathcal{C}}^{-1}.\overline{\mathcal{C}}^2 \leqq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ et $\overline{\mathcal{C}} \leqq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, d'où $\mathcal{C} \leqq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. On applique alors successivement les théorèmes (2.8), (2.7) et (2.2) de [2] : l'ordre à droite (et l'ordre à gauche) d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$-idéal est $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ ce qui prouve que $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est un ordre maximal de $K$ d'ailleurs régulier.

I.23. Proposition. — *Soit* $\mathfrak{a}$ *un $c$-idéal contenu dans $\mathcal{O}$. Alors on a* $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ *si et seulement si* $\mathfrak{a}$ *contient un $\mathcal{O}$-idéal,* $\mathfrak{u}$, *appartenant à $\mathcal{F}'$.*

*Démonstration.* — De $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{u}$, $\mathfrak{u} \in \mathcal{F}'$, on déduit $\mathfrak{a}^{-1} \subseteq \overline{\mathfrak{u}}^{-1} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}\mathfrak{a} \supseteq \overline{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}} = \mathcal{O}$ et $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, donc $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. Réciproquement, soit $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, alors 1 appartient à $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$, $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1$ est contenu dans $\mathfrak{a}$ pour un certain $\mathfrak{u} \in \mathcal{F}'$.

I.24. *Définition.* — Un sous-anneau $S$ de $K$ sera dit un *$\mathcal{O}$-anneau* s'il contient $\mathcal{O}$, et s'il est clos en tant que $\mathcal{O}$-$\mathcal{O}$-sous-bimodule de $K$.

I.24 *bis*. *Remarque.* — Un sous-anneau $S$ de $K$ est un $\mathcal{O}$-anneau si et seulement si, pour toute famille finie d'éléments de $S$, $c_1, \ldots, c_n$, le $c$-idéal engendré par $1, c_1, c_2, \ldots, c_n$, est contenu dans $S$. Par exemple, $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est un $\mathcal{O}$-anneau pour une famille bilatère $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}$.

I.24 *ter*. Lemme. — *Soit $S$ un $\mathcal{O}$-anneau. Si $S$ n'est pas contenu dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, $\mathfrak{P}$ premier minimal non nul de $\mathcal{O}$, $S$ contient $\mathfrak{P}^{-1}$.*

*Démonstration.* — Soit $c$ un élément de $S$ n'appartenant pas à $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ : $\forall s \in S_1 = \mathcal{O} - \mathfrak{P}$, $s\mathcal{O}c \not\subseteq \mathcal{O}$; on a $(1, c)' \supseteq \mathcal{O}$ et $[(1, c)']^{-1} \subseteq \mathcal{O}$. Supposons qu'il existe $s \in S_1$ tel que $s \in [(1, c)']^{-1} = \mathfrak{u}$. On en déduirait

$$[[(1, c)']^{-1}]^{-1} = (1, c)',$$

$\mathfrak{u}^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ et $c \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, contrairement à l'hypothèse. On a donc $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{P}$ et $S \supseteq (1, c)' \supseteq \mathfrak{P}^{-1}$.

I.25. Théorème. — *Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier minimal de $\mathcal{O}$; $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ est un $\mathcal{O}$-anneau maximal de $K$, et tout $\mathcal{O}$-anneau non égal à $K$ est contenu dans un tel $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$.*

*Démonstration.* — Soit $S \supseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ et $S \neq K$, $S$ désignant un $\mathcal{O}$-anneau de $K$. D'après le lemme I.24, $S$ contient $\mathfrak{P}^{-1}$, donc $S$ contient $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}\mathfrak{P}^{-1}$, et $\overline{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}\mathfrak{P}^{-1}} = (\mathfrak{P}^{-1})_{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^{-1}$, car $S$ est clos. De ce fait, $S$ contient toutes les puissances de $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$. Or $\mathfrak{P}$ étant premier minimal, les seuls $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$-idéaux clos sont les puissances de $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$ [se servir de (I.21) et de (I.23)]. Par ailleurs, tout élément de $K$ est contenu dans un $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$-idéal, donc appartient à $S$. Tout $\mathcal{O}$-anneau $S$ de $K$, $S \neq K$, est contenu dans un certain $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, $\mathfrak{P}$ idéal non nul premier minimal de $\mathcal{O}$, car, sinon, d'après lel emme I.24, $S$ contient tous les $\mathfrak{P}^{-1}$, donc tous les $\mathcal{O}$-idéaux, et on a $S = K$, contrairement à $S \neq K$.

I.26. Théorème. — *Un $\mathcal{O}$-anneau $S$ distincts de $K$ coïncide avec un $\mathcal{O}_P$, $P$ désignant une famille d'idéaux premiers minimaux non nuls de $\mathcal{O}$.*

*Démonstration.* — Soit $P$ l'ensemble de tous les $\mathfrak{P}$ premiers minimaux non nuls de $\mathcal{O}$ tels que $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} \supseteq S$. Démontrons que $\mathcal{O}_P = S$. Si $S$ est distinct de $\mathcal{O}_P$ il existe un élément $a$, contenu dans $\mathcal{O}_P$ et non dans $S$. On a $\mathcal{O}_P \supseteq (1,\ a)' \supseteq \mathcal{O}$ et $[(1,\ a)']^{-1} \subseteq \mathcal{O}$. Soit donc $[(1,\ a)]^{-1} = \mathfrak{a}_1\ \ldots\ \mathfrak{a}_r$ une décomposition en facteurs premiers de $[(1,\ a)']^{-1}$. Puisque

$$(1,\ a)' = \mathfrak{a}_1^{-1} \ldots \mathfrak{a}_r^{-1}$$

n'est pas contenu dans $S$, il existe un $\mathfrak{a}_i^{-1}$, par exemple $\mathfrak{a}_1^{-1}$, non contenu dans $S$. Puisque $\mathfrak{a}_1^{-1}$ est contenu dans $(1,\ a)'$, donc dans $\mathcal{O}_P$, donc dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, $\mathfrak{P} \in P$, on déduit de $\mathfrak{a}_1^{-1} \nsubseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{a}_1}$ que $\mathfrak{a}_1$ n'appartient pas à $P$. On a donc $S \nsubseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{a}_1}$ et, d'après le lemme (I.24 *ter*), $S \supseteq \mathfrak{a}_1^{-1}$, et il y a contradiction. On a donc $\mathcal{O}_P \subseteq S$.

Par ailleurs, $\mathcal{O}_P$ contient $S$ : soit $x \in S$, il existe pour chaque $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} \in P$, un élément $s_{\mathfrak{P}} \nsubseteq \mathfrak{P}$ tel que $s_{\mathfrak{P}}\mathcal{O}x \subseteq \mathcal{O}$ et $s_{\mathfrak{P}} \in \mathcal{O}$, donc, en posant

$$\mathfrak{u} = \sum_{\mathfrak{P} \in P} \mathcal{O}s_{\mathfrak{P}}\mathcal{O}, \qquad \mathfrak{u}x \subseteq \mathcal{O} \qquad \text{et} \qquad x \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}.$$

On a donc $\mathcal{O}_P = S$. Remarquons que l'on a $\mathcal{O}_P = \bigcap_{\mathfrak{P} \in P} \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$.

I.27. Corollaire. — *Les localisations bilatères de $\mathcal{O}$ distinctes de $K$ sont les anneaux $\bigcap_{\mathfrak{P} \in P} \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, où $P$ est une famille quelconque non vide d'idéaux premiers de $\mathcal{O}$, non nuls, minimaux. Ce sont des ordres maximaux réguliers de $K$.*

I.28. *Remarque.* — Rien dans ce qui précède d'affirmer ne permet qu'une localisation bilatère $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{O}$ est noethérienne comme $\mathcal{O}$. Ce problème est lié à la platitude de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ en tant que $\mathcal{O}$-module à droite et $\mathcal{O}$-module à gauche.

I.29. Théorème. — *Si tous les idéaux premiers de $\mathcal{O}$ sont maximaux, $\mathcal{O}$ désignant, rappelons)-le, un anneau noethérien, sans diviseurs de zéro, ordre maximal régulier de son corps des fractions $K$, tout sous-anneau $S$ de $K$ contenant $\mathcal{O}$ est une localisation bilatère plate des deux côtés de $\mathcal{O}$.*

*Démonstration.* — On sait en effet ([1]), th. 3.12 et 3.13) que tout sous-anneau $S$ de $K$ contenant $\mathcal{O}$ coïncide avec un $\mathcal{O}_p$. Par application du théorème I.5, on obtient le résultat.

I.30. *Remarque.* — Sous les hypothèses du théorème précédent, en utilisant Silver [25], on s'aperçoit que, si $\mathfrak{X}$ désigne un idéal à gauche de $\mathcal{O}_p$, on a, en posant $\mathfrak{a} = \mathfrak{X} \cap \mathcal{O}$, $\mathfrak{X} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}\mathfrak{a}$. Mais ce résultat était déjà connu par Asano ([1], lemme 3, p. 116).

## II

Dans cette partie, $\mathcal{O}$ est un anneau, noethérien, sans diviseurs de zéro, ordre maximal (non nécessairement régulier) de son corps des fractions K. Soit $B$ un sous-anneau de $K$, tel que $\mathcal{O} \subseteq B \subseteq K$, tel que $B$ soit plat en tant que $\mathcal{O}$-module à droite et en tant que $\mathcal{O}$-module à gauche. L'anneau $B$ est-il un ordre maximal de $K$?

II.1. Lemme. — *Sous les hypothèses énoncées ci-dessus, l'injection canonique $\alpha : \mathcal{O} \to B$ est un épimorphisme d'anneau.*

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

II.2. Lemme. — *On garde les hypothèses énoncées ci-dessus. Soit $\mathfrak{b}$ un idéal bilatère de $B$. On a*

$$\mathfrak{b} .\cdot \mathfrak{b} = \{x \in K \mid \mathfrak{b}x \subseteq \mathfrak{b}\} = B$$

*et*

$$\mathfrak{b} \cdot. \mathfrak{b} = \{x \in K \mid x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}\} = B.$$

*Démonstration.* — D'après un résultat de Silver ([25], prop. 1.6, p. 48), on a

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}} B = B \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a}, \qquad \text{avec} \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathcal{O}.$$

D'après un lemme de Harada, ([10], lemme 1, p. 62), on a $\mathfrak{b} .\cdot \mathfrak{b} = \operatorname{Hom}_B^l(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$, en identifiant $x \in K$ au morphisme qui à $b \in B$ fait correspondre $bx$, et de même $\mathfrak{b} \cdot. \mathfrak{b} = \operatorname{Hom}_B^r(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$.

Or, d'après Bourbaki ([5], prop. 1, p. 106), il existe un $Z$-isomorphisme entre $\operatorname{Hom}_B^r(\mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}} B, B \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a})$ et $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}^r(\mathfrak{a}, \operatorname{Hom}_B^r, B \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a})]$ : cet isomorphisme associe à $h \in \operatorname{Hom}_B^r(B \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a}, B \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a})$ l'application linéaire $h'$ de $\mathfrak{a}$ dans $\operatorname{Hom}_B^r(B, B \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a}) = B \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a}$, qui, à $x \in \mathfrak{a}$, associe, $\forall y \in B$, $h'(x)\, y = hxy$ (on identifie $\mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}} B$ à $\mathfrak{a}B$, et $B \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a}$ à $B\mathfrak{a}$), donc $h'(x) = hx$.

Par ailleurs, d'après BOURBAKI ([4], prop. 10, p. 38), il existe un $\mathfrak{Z}$-isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}''(\mathfrak{a}, B\otimes_{\mathcal{O}}\mathfrak{a})$ et $B\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}''(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ qui à $h'$, application de $\mathfrak{a}$ dans $B\otimes_{\mathcal{O}}\mathfrak{a}$, associe $y\otimes u$, $y\in B$, $u\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}''(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ tel que $\forall\, x\in\mathfrak{a}$,

$$h'(x) = y\otimes u(x) = y\otimes ux,$$

donc $hx = yux$ et $h = yu$. Ainsi $B\otimes_{\mathcal{O}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}''(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_B''(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$, et $\mathcal{O}$ étant un ordre maximal de $K$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}''(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\cdot\!.\,\mathfrak{a} = \mathcal{O} \qquad \text{et} \qquad B = \mathrm{Hom}_B''(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}\cdot\!.\,\mathfrak{b}.$$

On obtient de même $\mathfrak{b}.\!\cdot\mathfrak{b} = B$.

II.3. PROPOSITION. — *Soit $\mathcal{O}$ un anneau sans diviseurs de zéro, ordre maximal de son corps des fractions $K$. Soit $B$ un sous-anneau de $K$ contenant $\mathcal{O}$, plat en tant que $\mathcal{O}$-module à droite et en tant que $\mathcal{O}$-module à gauche, dont tous les idéaux (à droite, à gauche) sont bilatères, alors $B$ est un anneau noethérien, sans diviseurs de zéro, ordre maximal de $K$.*

*Démonstration.* — Le fait que $B$ est noethérien résulte de l'article [25] (prop. 1.6, p. 46). Soit $\mathfrak{b}$ un $B$-idéal ,il existe $\lambda\in B$ tel que $\mathfrak{b}\lambda\subseteq B$, donc il existe un idéal $\mathfrak{b}'$ de $B$ tel que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'\lambda^{-1}$. On a alors

$$\mathfrak{b}'\cdot\!.\,\mathfrak{b}' = \{x\in K \mid x\mathfrak{b}'\subseteq\mathfrak{b}'\} = \mathfrak{b}\cdot\!.\,\mathfrak{b}.$$

En appliquant le lemme II.2, on prouve $\mathfrak{b}'\cdot\!.\,\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}\cdot\!.\,\mathfrak{b} = B$. On démontrerait de même $\mathfrak{b}\,.\!\cdot\mathfrak{b} = B$. Ainsi $B$ est un ordre maximal de $K$.

*Remarque.* — Le résultat précédent appliqué au cas où $\mathcal{O}$ est commutatif (donc aussi $B$) redonne un résultat de J. MAROT [14].

## III

Nous nous proposons dans cette partie de caractériser parmi les anneaux $R'$, noethériens, sans diviseurs de zéro, à élément unité, ordres maximaux réguliers de leur corps des fractions $K$, ceux dont tous les idéaux (à gauche, à droite) sont bilatères.

Dans toute cette partie, sauf au théorème III.14, $R$ désigne un anneau, unitaire, noethérien, sans diviseurs de zéro, ordre maximal régulier de son corps des fractions $K$, vérifiant la condition (C) suivante :

(C) : *Pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{P}$ de $R$ (non nul), tout idéal à gauche $\mathfrak{P}$-primaire (et tout idéal à droite $\mathfrak{P}$-primaire) est contenu dans $\mathfrak{P}$.*

La condition (C) est en particulier vérifiée lorsque tout idéal à gauche (et tout idéal à droite), $\mathfrak{P}$-primaire, est bilatère. Nous utiliserons le théorème suivant ([15], p. 96, th. 2.8) :

III.1. THÈORÈME 0. — *Soit $R'$ un ordre maximal régulier, noethérien, sans diviseurs de zéro. Soit $a$, $a \neq 0$, $a \in R'$, $a$ non inversible dans $R'$, $R'a$ (respectivement $aR'$) est intersection d'idéaux à gauche (respectivement d'idéaux à droite) primaires (au sens de* LESIEUR *et* CROISOT [12] *dont les radicaux sont des idéaux premiers bilatères minimaux non nuls de $R'$.*

Dans toute la suite de cette troisième partie, nous dirons *idéal* pour *idéal bilatère.* Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $R$, et soit $S = R - \mathfrak{P}$.

Rappelons que si $I$ désigne un idéal à gauche $\mathfrak{Q}$-primaire, $\mathfrak{Q}$ désignant un idéal premier, il existe un entier naturel $p$ tel que $\mathfrak{Q}^p \subseteq I$ (*cf.* [12], propriété 5.5, propriété 5.6, th. 5.1) et si $\mathfrak{Q}$ est premier minimal, la condition (C) entraîne $I \subseteq \mathfrak{Q}$.

III.2. THÉORÈME. — *$R$ vérifiant les hypothèses précisées ci-dessus, avec les notations précédentes, $S$ est un sous-demi-groupe multiplicatif de $R$, et $R$ vérifie la condition de Ore des deux côtés par rapport à $S$. De plus, pour tout $s \in S$, il existe $s' \in S$, $s'' \in S$, tels que $Rs \supseteq s'R$ et $sR \supseteq Rs''$.*

*Démonstration.* — Soient $s$ et $s'$ deux éléments de $S$; nous allons établir que $ss'$ appartient à $S$. Supposons le contraire. Appliquons le théorème 0 :

$$Rs = \bigcap_{i=1}^{n} X_i, \quad X_i \text{ idéal à gauche } \mathfrak{P}_i'\text{-primaires}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$s'R = \bigcap_{i=1}^{n'} X_i', \quad X_i' \text{ idéal à droite } \mathfrak{P}_i'\text{-primaires}, \qquad i = 1, \ldots, n'.$$

Il existe des entiers $p_i$ et $p_j'$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n'$, tels que

$$\left(\prod_{i=1}^{i=n} \mathfrak{P}_i^{p_i}\right) \times \left(\prod_{j=1}^{j=n'} \mathfrak{P}_j'^{p_j'}\right) \subseteq \text{idéal engendré par } Rss'R \subseteq \mathfrak{P}.$$

On en déduit que l'un des $\mathfrak{P}_j'$ ou que l'un des $\mathfrak{P}_i$ est compris dans $\mathfrak{P}$. Mais ceci entraîne que $s$ ou $s'$ appartient à $\mathfrak{P}$, contrairement à l'hypothèse [on se sert de la condition (C)]. Ceci étant, montrons que, pour tout $s$ appartenant à $S$, il existe un $s'$ appartenant à $S$, tel que $Rs \supseteq s'R$ : on a établi plus haut $\prod_{i=1}^{i=n} \mathfrak{P}_i^{p_i} \subseteq Rs$. Supposons que $\prod_{i=1}^{i=n} \mathfrak{P}_i^{p_i}$ appartienne à $\mathfrak{P}$, on en déduirait que l'un des $\mathfrak{P}_i$ au moins serait contenu dans $\mathfrak{P}$, donc aussi $Rs$ contenu dans $X_i$, donc dans $\mathfrak{P}_i$ [condition (C)]. Il existe donc $s'$, $s' \in S$, tel que

$$s'R \in \prod_{i=1}^{i=n} \mathfrak{P}_i^{p_i} \subseteq Rs.$$

On démontrerait de même que, pour tout $s$ appartenant à $S$, il existe $s''$ appartenant à $S$ tel que $sR \supseteq Rs''$.

Il est facile de démontrer pour terminer que $R$ vérifie la condition de Ore des deux côtés par rapport à $S$.

III.3. Corollaire. — *Si $M$ est un idéal à gauche de $R$, on a*

$$M_{\mathfrak{P}} = \{ x \in K \mid \exists\, s \in S,\ sRx \subseteq M \} = \{ x \in K \mid \exists\, s' \in S,\ s'x \in M \} = (R_{\mathfrak{P}})\, M,$$

*et $M_{\mathfrak{P}}$ est un idéal à gauche de l'anneau $R_{\mathfrak{P}}$.*

*Si $M'$ est un idéal à droite de $R$, on a*

$${}_{\mathfrak{P}}M' = \{ x \in K \mid \exists\, s \in S,\ xRs \subseteq M' \} = \{ x \in K \mid \exists\, s' \in S,\ xs' \in M \} = M'({}_{\mathfrak{P}}R),$$

*et ${}_{\mathfrak{P}}M'$ est un idéal à droite de l'anneau $R_{\mathfrak{P}} = {}_{\mathfrak{P}}R$, noté aussi $R_S$.*

*Démonstration.* — Facile, la démonstration est laissée aux soins du lecteur : on remarquera que les notations sont en accord avec celles introduites à la première partie. Les anneaux $R_{\mathfrak{P}}$ et ${}_{\mathfrak{P}}R$ coïncident ici avec l'anneau de fractions $R_S$ de $R$ selon $S$, la condition de Ore des deux côtés par rapport à $S$ étant vérifiée.

III.4. Proposition. — *$R_S$ est un ordre maximal régulier.*

*Démonstration.* — La proposition se déduit immédiatement du théorème I.22.

Dans toute la suite, nous supposerons que $\mathfrak{P}$ est un idéal premier minimal non nul de $R$.

III.5. Lemme. — *Soit $M = \bigcap_{i=1}^{i=n} X_i$, $i = 1, \ldots, n$, $X_i$ et $M$ désignant des idéaux à gauche. On a $M_{\mathfrak{P}} = \bigcap_{i=1}^{i=n} (X_i)_{\mathfrak{P}}$. Si, de plus, $X_i$ est $\mathfrak{P}_i$-primaire avec $\mathfrak{P}_i \not\subseteq \mathfrak{P}$, on a $(X_i)_{\mathfrak{P}} = R_{\mathfrak{P}}$.*

*Démonstration.* — De $M \subseteq X_i$ résulte $M_{\mathfrak{P}} \subseteq (X_i)_{\mathfrak{P}}$ pour $i = 1, \ldots, n$, donc $M_{\mathfrak{P}} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (X_i)_{\mathfrak{P}}$. Soit maintenant $x \in \bigcap_{i=1}^{i=n} (X_i)_{\mathfrak{P}}$ pour chaque $i = 1, \ldots, n$, il existe $s_i \in S$ tel que $s_i x \in X_i$. Il est facile d'établir par récurrence sur $n$ grâce à la condition de Ore à gauche selon $S$, l'existence d'éléments $\alpha_i$ appartenant à $S$ et tels que

$$\gamma = \alpha_1 s_1 = \ldots = \alpha_n s_n, \qquad \text{avec} \quad \gamma \in S.$$

On en déduit $\gamma x \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, donc $\gamma x \in \bigcap_{i=1}^{i=n} X_i$ et $x \in M_{\mathfrak{P}}$. La deuxième partie du lemme est établie au lemme II.2, page 98 de ma thèse [15].

III.6. Lemme. — *Si* $\mathfrak{a}$ *est un idéal de* $R$, *maximal dans sa classe, modulo l'équivalence d'Artin* $\mathcal{A}$, *on a*

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{P}} = {}_{\mathfrak{P}}\mathfrak{a} = R_S = \mathfrak{a} R_S;$$

*en particulier, on a* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} = {}_{\mathfrak{P}}\mathfrak{P}$.

*Démonstration.* — Il suffit d'appliquer le corollaire III.3 et le lemme I.14, puis de remarquer que $\mathfrak{P}$ étant premier minimal (non nul) de $R$ est maximal dans sa classe modulo $\mathcal{A}$ ([15], chap. III, th. II.5 et lemme II.1).

III.7. Lemme. — $\forall\, a \in R,\ R_S a = (Ra)_{\mathfrak{P}}$.

*Démonstration.* — On utilise le corollaire III.3 en faisant $M = Ra$; $M_{\mathfrak{P}} = R_S a$ fournit le résultat.

III.8. Lemme. — *Pour* $n = 1, 2, \ldots, (\mathfrak{P}^n)_{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^n = ({}_{\mathfrak{P}}\mathfrak{P})^n = {}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{P}^n)$.

*Démonstration.* — On a $(\mathfrak{P}^n)_{\mathfrak{P}} = R_S \mathfrak{P}^n$ et $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^n = (R_S \mathfrak{P})^n$. Soit $x_i \in R_S \mathfrak{P} = \mathfrak{P} R_S$ pour $i = 1, \ldots, n$, et considérons $\prod_{i=1}^{i=n} x_i$. On a $x_i = s_i^{-1} p_i = p'_i s_i'^{-1}$ avec $p_i$ et $p'_i$ appartenant à $\mathfrak{P}$, et $s_i$, $s'_i$ appartenant à $S$. On peut écrire

$$x_1 x_2 = p'_1 s_1'^{-1} s_2^{-1} p_2 = p_1 \tau^{-1} p_2, \qquad \text{avec} \quad \tau = s_2 s'_1 \in S.$$

Or $\tau^{-1} p_2$ s'écrit à son tour $p'' \tau'^{-1}$, $\tau' \in S$, $p'' \in \mathfrak{P}$ et $x_1 x_2 = p_1 p'' \tau'^{-1}$. On peut appliquer ce raisonnement à $x_1 x_2 x_3, \ldots, x_1 x_2 \ldots x_n$. On obtient finalement $x_1 x_2 \ldots x_n = p_1 p''_2 \ldots p''_n \gamma^{-1}$ avec $\gamma \in S$, $p_1, p''_2, \ldots, p''_n$ appartenant à $\mathfrak{P}$. On a donc $x_1 \ldots x_n \gamma \in \mathfrak{P}^n$, donc $x_1 \ldots x_n \in \mathfrak{P}^n R_S$. L'inclusion $\mathfrak{P}^n R_S \subseteq (\mathfrak{P} R_S)^n$ est immédiate. On a donc

$$\mathfrak{P}^n R_S = (\mathfrak{P} R_S)^n = (R_S \mathfrak{P})^n = R_S \mathfrak{P}^n.$$

III.9. Proposition. — $R_S$ *est un anneau noethérien;* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$ *est son plus grand idéal à gauche et aussi son plus grand idéal à droite. Les seuls idéaux premiers de* $R_S$ *sont* (0) *et* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$. *Il y a une correspondance entre les idéaux à gauche propres (à droite propres) de* $R_S$ *et les idéaux à gauche (à droite) ne rencontrant pas* $S$ :

$$I, \text{ idéal à gauche de } R_S \to I' = I \cap R,$$
$$I', \text{ idéal à gauche de } R \to I = R_S I'.$$

*De plus,* $I$ *désignant un idéal à gauche de* $R_S$, *on a* $I = R_S(I \cap R)$.

*Démonstration.* — Nous nous contenterons de démontrer que $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$ est le plus grand idéal à gauche et le plus grand idéal à droite de $R_S$ et que c'est avec (o) le seul idéal premier de $R_S$, le reste de l'énoncé étant facile à établir. Soit $I$ un idéal à gauche de $R_S$, $I \neq R_S$, $I' = I \cap R$ ne rencontre pas $S$, donc est inclus dans $\mathfrak{P}$, et on a

$$I = R_S I' \subseteq R_S \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}.$$

Comme $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} = {}_{\mathfrak{P}}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$ est aussi le plus grand idéal à droite de $R_S$. Soit $\mathfrak{Q}$ un idéal premier non nul de $R_S$, donc contenu dans $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$. On veut démontrer $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$. Soit $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q} \cap R$, $o \subseteq \mathfrak{Q}' \subseteq \mathfrak{P}$. Démontrons que $\mathfrak{Q}'$ est complètement premier dans $R$ ($ab \in \mathfrak{Q}'$, $a \in R$, $b \in R$ entraîne « $a$ ou $b$ appartient à $\mathfrak{Q}'$ »). On peut supposer d'entrée que $a$ et $b$ n'appartiennent pas à $S$, car si l'un d'eux, par exemple $a$, appartient à $S$, de $ab \subseteq \mathfrak{Q}'$, on déduit $b \in \mathfrak{Q}$, donc $b \in \mathfrak{Q}'$. Supposons donc que $a$ et $b$ appartiennent à $\mathfrak{P}$, et qu'ils n'appartiennent pas à $\mathfrak{Q}'$; de $ab \subseteq \mathfrak{Q}'$, on déduit $R_S ab \subseteq \mathfrak{Q}$, donc $(R_S a)\, b \subseteq \mathfrak{Q}$, et $(Ra)_{\mathfrak{P}}\, b \subseteq \mathfrak{Q}$ (lemme III.7). D'après le théorème 0, on peut écrire $Ra = \bigcap_{i=1}^{i=n} X_i$, $X_i\,\mathfrak{P}_i$-primaire, $i = 1, \ldots, n$, et d'après le lemme III.5, $(Ra)_{\mathfrak{P}} = \bigcap_{i=1}^{i=n} (X_i)_{\mathfrak{P}}$; puisque l'on suppose $a \in \mathfrak{P}$, l'un des $\mathfrak{P}_i$, par exemple $\mathfrak{P}_1$, est égal à $\mathfrak{P}$.

D'après le lemme III.5, on a $(X_1)_{\mathfrak{P}} = (Ra)_{\mathfrak{P}}$. Comme pour un certain entier naturel $p_1$, on a $\mathfrak{P}^{p_1} \subseteq X_1$, on a $(\mathfrak{P}^{p_1})_{\mathfrak{P}} \subseteq (X_1)_{\mathfrak{P}}$, et d'après le lemme III.8, $(\mathfrak{P}^{p_1})_{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^{p_1} \subseteq (X_1)_{\mathfrak{P}}$. Si l'on avait $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^{p_1} \subseteq \mathfrak{Q}$, on déduirait $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$, c'est-à-dire ce que nous voulons établir. Supposons donc $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^{p_1} \not\subseteq \mathfrak{Q}$ : il existe alors $a'$, $a' \notin \mathfrak{Q}$, $a' \in (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^{p_1}$, donc $a' R_S \in (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^{p_1} \subseteq (X_1)_{\mathfrak{P}}$. On a donc

$$a' R_S b \subseteq (Ra)_{\mathfrak{P}} b \subseteq \mathfrak{Q},$$

avec $a'$ et $b$ n'appartenant pas à $\mathfrak{Q}$ : il y a une contradiction. Finalement $\mathfrak{Q}'$ est complètement premier dans $R$. Il est donc égal à $\mathfrak{P}$, et $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$.

III.9 *bis*. Lemme. — *Soit $X$ un idéal à gauche $\mathfrak{P}$-primaire de $R$, $\mathfrak{P}$ désignant, rappelons-le, un idéal premier minimal non nul de $R$, on a*

$$X = (R_S X) \cap R.$$

*Démonstration.* — Elle a été faite sous des hypothèses plus générales au lemme II.2, page 98, de ma thèse [15].

III.10. Proposition. — *Soit $T$ un idéal non nul de $R_S$, $R_S/T$ est un anneau à idéaux à gauche et à idéaux à droite, tous principaux.*

*Démonstration.* — JACOBSON a démontré (*cf.* [11], th. 24, p. 128 et 129) que si $L$ est un ordre maximal régulier, noethérien à gauche, vérifiant la condition de chaîne descendante affaiblie (c'est-à-dire que toute chaîne descendante d'idéaux à gauche de $L$ contenant un idéal à gauche donné non nul s'arrête au bout d'un nombre fini d'idéaux à gauche), pour tout idéal non nul $T$ de $L$, $L/T$ a tous ses idéaux à gauche principaux et tous ses idéaux à droite principaux. Or $R_S$ est un ordre maximal régulier noethérien, sans diviseurs de zéro, ne possédant qu'un seul idéal premier non nul $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$, qui est d'ailleurs le plus grand idéal à gauche et le plus grand idéal à droite de $R_S$. On sait qu'il vérifie alors la condition de chaîne descendante affaiblie pour les idéaux à gauche (*cf.* [1], th. 2.16) et on peut appliquer le théorème de Jacobson à $R_S$.

III.11. LEMME. — *Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier minimal non nul d'un ordre $R$ maximal régulier de son corps des fractions $K$ (on suppose toujours $R$ unitaire, noethérien, sans diviseurs de zéro). On a* $\bigcap_{1}^{\infty} \mathfrak{P}^n = 0$ (ASANO).

*Démonstration.* — Soit $K = \bigcap_{n=1}^{n=\infty} \mathfrak{P}^n$. Si $K$ est non nul, désignons par $\overline{\mathfrak{a}}$ la classe de l'idéal $\mathfrak{a}$ de $R$, modulo l'équivalence d'Artin $\mathcal{R}$. On a $\overline{K} \neq \overline{R}$, car $\overline{K} = \overline{R}$ entraînerait $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{R}$, ce qui est impossible (*cf.* [15], lemme II.1, p. 97). On pourrait alors écrire $\overline{K} = \overline{\mathfrak{Q}}_1^{p_1} \ldots \overline{\mathfrak{Q}}_r^{p_r} \subseteq \overline{\mathfrak{P}}$, et $\overline{\mathfrak{Q}}_1 = \overline{\mathfrak{P}}$ par exemple, $\overline{\mathfrak{Q}}_i$ et $\overline{\mathfrak{P}}$ étant des éléments premiers dans l'ensemble des classes ([15], th. II.5, p. 93). Comme on a $\overline{K} \subseteq \overline{\mathfrak{P}}^n$ pour tout entier naturel $n$, on peut écrire

$$\overline{\mathfrak{P}}^{p_1+1} \supseteq \overline{\mathfrak{P}}^{p_1} . \overline{\mathfrak{Q}}^{p_2} \ldots \overline{\mathfrak{Q}}_r^{p_r} \quad \text{et} \quad \overline{\mathfrak{P}} \supseteq \overline{\mathfrak{Q}}_2^{p_2} \ldots \overline{\mathfrak{Q}}_r^{p_r},$$

donc $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{Q}}_j$ pour un $j$, $2 \leq j \leq r$. Or ceci est impossible car on peut supposer $\overline{\mathfrak{Q}}_i \neq \overline{\mathfrak{Q}}_j$ pour $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, r$. Il y a contradiction, et $K = 0$.

III.12. THÉORÈME. — *Les seuls idéaux à gauche (respectivement à droite) non nuls de $R_S$ sont les $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ : ainsi tous les idéaux (à gauche, à droite) de $R_S$ sont bilatères. Enfin, il existe un élément $a$, $a \in R_S$, tel que $R_S a^n = a^n R_S = \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}^n$, $n = 1, 2, \ldots$.*

*Démonstration.* — D'après la proposition III.10, $\overline{R}_S = R_S/\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}^2$ est un anneau à idéaux (à gauche, à droite) tous principaux, et $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}^2 = \overline{R}_S \overline{a}$, $\overline{a} \in \overline{R}_S$. On a donc $R_S a + \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}^2 = \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$ et, d'après le lemme de Nakayama $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} = R_S a$. Soit $I$ un idéal à gauche propre non nul de $R_S$, $I$ contient $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}^n$ pour un certain $n$, puisque, pour $i \in I$, $i \neq 0$, $R_S i$ est $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$-primaire (théorème 0 et proposition III.9). On a donc $I/\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}^{n+1} = \tilde{R}_S\tilde{a}'$ en posant $\tilde{R}_S = R_S/\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}^{n+1}$, $a'$ désignant un élément convenable de $I$. On peut écrire successivement

$$I = R_S a' + \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}^{n+1} = R_S a' + \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}.\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}^{n} \subseteq R_S a' + \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} I \subseteq I,$$

donc $I = R_S a' + \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} I$, et, d'après le lemme de Nakayama, $I = R_S a'$. Mais $a'$, appartenant à $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$, s'écrit $a_1 a = a'$, et il est facile alors de prouver que $I = R_S a^r$ pour un entier naturel $r$. En particulier, on a $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}^{r} = R_S a^p \subseteq \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}^{p}$; si l'on avait $p > r$, on en déduirait $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}^{r} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}^{p}$, mais cela entraînerait $\bigcap_{1}^{\infty} \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}^{n} \neq 0$ contrairement au lemme III.11. On a donc $p \leqq r$, et ceci entraîne $p = r$ (raisonnement par récurrence sur $p$, pour $p = 1$, on a évidemment $r = 1$). Le théorème s'en déduit alors facilement.

III.13. Théorème. — *Tout idéal (à gauche, à droite) de $R$ est bilatère.*

*Démonstration.* — Considérons un idéal à gauche $X$, $\mathfrak{P}$-primaire, $\mathfrak{P}$ premier minimal non nul. D'après le lemme III.9 *bis*, $X = R_S X \cap R$. D'après le théorème III.12, $R_S X$ est un idéal bilatère de $R_S$, donc $X$ est un idéal de $R$. Soit alors $Ra = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$, $a \in R$, $a \neq 0$, une représentation de $Ra$ comme intersection d'idéaux à gauche $\mathfrak{P}_i$-primaires, $\mathfrak{P}_i$ premier minimal, $i = 1, \ldots, n$ (théorème 0). Chaque $X_i$ est bilatère et, par suite, $Ra$ est bilatère. On démontrerait de même que $aR$ est bilatère, et par suite, tout idéal d'un côté de $R$ est bilatère.

III.14. Théorème. — *Soit $R$ un ordre maximal régulier, noethérien, sans diviseurs de zéro (ordre maximal de son corps des fractions $K$). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Tout idéal d'un côté (à gauche, à droite) est bilatère.*

(2) *Tout idéal d'un côté $\mathfrak{P}$-primaire, $\mathfrak{P}$ premier minimal non nul, est contenu dans $\mathfrak{P}$.*

(3) *Pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{P}$ de $R$, soit $S = R - \mathfrak{P}$. Pour tout $s$ appartenant à $S$, il existe $s'$ et $s''$ appartenant à $S$, tels que $Rs \supseteq s'R$ et $sR \supseteq Rs''$.*

(4) *Tout idéal à gauche principal (resp. à droite principal) est contenu dans chacun des idéaux premiers qui lui sont associés.*

*Démonstration.*

(1) $\Rightarrow$ (2) : si $X$ est un idéal à gauche par exemple, $\mathfrak{P}$-primaire, $\mathfrak{P}$ premier minimal non nul, on a $X^{\cdot}.R \subseteq \mathfrak{P}$. En particulier, si $X$ est bilatère, on a $X^{\cdot}.R = X$, et $X$ est compris dans $\mathfrak{P}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : *voir* le théorème III.2.

(3) $\Rightarrow$ (1) : les résultats obtenus après le théorème III.2 sont valables sous la condition (3), remplaçant (2).

(2) $\Rightarrow$ (4) : immédiat par application du théorème 0.

(4) $\Rightarrow$ (1) : le théorème III.2 et toute la suite sont valables sous l'hypothèse (4), remplaçant (2).

III.15. *Exemple d'ordres maximaux réguliers, noethériens, sans diviseurs de zéro, à idéaux (à gauche, à droite) tous bilatères, non commutatifs* :

Soit $\mathcal{O}$ un domaine d'intégrité, local régulier complet de dimension 1, et soit $L$ son corps des fractions. Soit $\Delta$ un corps gauche, algèbre centrale simple de rang fini sur $L$. Si $\Lambda$ est un ordre maximal de $\Delta$ (au sens de [3]), alors $\Lambda$ est sans diviseurs de zéro, noethérien, à idéaux (à gauche, à droite) tous bilatères ([3], corollaire, p. 14, et th. 3.11, p. 13, et DEURING [6], th. 12, p. 100).

## IV

Le but de cette partie est d'examiner si la caractérisation de MORI-YOSIDA ([21], [26]), des domaines d'intégrité, noethérien, intégralement clos (appelée caractérisation (C) en [15]) s'étend au cas non commutatif.

Rappelons cette caractérisation :

Soit $R'$ un domaine d'intégrité, noethérien. Pour que $R'$ soit intégralement clos dans son corps des fractions, il faut et il suffit que, pour tout idéal principal non nul $R'a$, et pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$, associé à $R'a$, il n'y ait pas d'idéaux $\mathfrak{P}$-primaires entre $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^{(2)}$.

Dans la suite, $R$ désigne un anneau non nécessairement commutatif, noethérien, sans diviseurs de zéro, dont le corps des fractions est noté $K$. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $R$, on note $\mathfrak{P}^{(n)}$ la $n$-ième puissance symbolique de $\mathfrak{P}$, introduite par GOLDIE [8].

IV.1. LEMME. — *Si $R$ est de plus un ordre maximal régulier de $K$, et si $\mathfrak{P}$ désigne un idéal premier non nul minimal de $R$, on a* $\bigcap_1^\infty \mathfrak{P}^{(n)} = 0$, *et $\mathfrak{P}^{(n)}$ est le plus grand idéal de la classe de $\mathfrak{P}^n$* modulo *l'équivalence d'Artin $\mathcal{R}$.*

*Démonstration.* — Soit $\mathcal{C} = \{ c \in R \mid cx \in \mathfrak{P}, x \in R \Rightarrow x \in \mathfrak{P} \}$. Soient $\mathcal{F}$ la famille des idéaux à droite $F$ de $R$ tels que, $\forall\, a \in R$, $F .\!\cdot a \between \mathcal{C}$, et $\mathcal{G}$ la famille des idéaux à gauche $G$ de $R$ tels que, $\forall\, a \in R$, $G \cdot\!. \, a \between \mathcal{C}$. On sait, d'après GOLDIE ([8], prop. 3.3) qu'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{G}$ tels que

$G\mathfrak{P}^{(n)}F \subseteq \mathfrak{P}\mathfrak{P}^{(n-1)}$. Si l'on désigne par $G'$ et $F'$ les idéaux (bilatères) engendrés par $G$ et $F$ respectivement, on a, $\mathfrak{P}^{(n)}$ étant bilatère,

$$G'\mathfrak{P}^{(n)}F' = G\mathfrak{P}^{(n)}F \subseteq \mathfrak{P}\mathfrak{P}^{(n-1)};$$

supposons $\mathfrak{P}^{(n-1)} = \mathfrak{P}^{(n)}$. Passons aux classes modulo $\mathcal{R}$. Désignons par $\overline{G'}$, ... le plus grand idéal de la classe de $G'$, .... Notons $\overline{G'G''} = \overline{G'}.\overline{G''}$, $G''$ désignant un idéal de $R$. Il vient

$$\overline{G'}.\overline{\mathfrak{P}^{(n)}}.\overline{F'} \subseteq \overline{\mathfrak{P}}.\overline{\mathfrak{P}^{(n-1)}} = \overline{\mathfrak{P}}.\overline{\mathfrak{P}^{(n)}}.$$

On peut simplifier par $\overline{\mathfrak{P}^{(n)}}$ puisque l'on est dans un groupe commutatif, et l'on peut écrire :

$$G'F' \subseteq \overline{G'F'} = \overline{G'}.\overline{F'} \subseteq \overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P},$$

car $\mathfrak{P}$ est maximum dans sa classe. Or $G'$ et $F'$ contiennent des éléments $c$ et $c'$ appartenant à $\mathcal{C}$, donc $cRc' \subseteq \mathfrak{P}$ avec $c$ et $c'$ n'appartenant pas à $\mathfrak{P}$. On tombe sur une contradiction. On ne peut donc avoir $\mathfrak{P}^{(n)} = \mathfrak{P}^{(n')}$ avec $n \neq n'$. On sait, d'après GOLDIE ([8], th. 4.3) que $\mathfrak{P}^{(n)}$ est $\mathfrak{P}$-primaire des deux côtés, $n = 1, 2, \ldots$. Les idéaux $\mathfrak{P}^{(k)}$ sont donc les plus grands idéaux de leur classe $\overline{\mathfrak{P}^{(k)}}$ modulo $\mathcal{R}$, $k = 1, 2, \ldots$. Les classes $\overline{\mathfrak{P}^{(k)}}$, $k = 1, 2, \ldots$ sont des éléments $\overline{\mathfrak{P}}$-primaires contenant $\overline{\mathfrak{P}^{n}}$ (*cf.* [15], th. II.6, p. 94, et lemme II.1) : ce sont des classes parmi les $\overline{\mathfrak{P}^{k}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Comme les classes $\overline{\mathfrak{P}^{(k)}}$, $k = 1, \ldots, n$, sont distinçtes, on a l'égalité $\overline{\mathfrak{P}^{(k)}} = \overline{\mathfrak{P}^{k}}$, et $\mathfrak{P}^{(k)}$ est élément maximum de la classe $\overline{\mathfrak{P}}^{k} = \overline{\mathfrak{P}^{k}}$, $k = 1, \ldots, n$.

On montre alors en remplaçant $\mathfrak{P}^{n}$ par $\mathfrak{P}^{(n)}$, comme au lemme III.11, que l'on a $\bigcap_{1}^{\infty} \mathfrak{P}^{(n)} = 0$.

IV.2. THÉORÈME. — *Pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$, associé à $Ra$ ou à $aR$, $a \neq 0$, $a \in R$, il n'y a pas d'idéal $\mathfrak{P}$-primaire strictement compris entre $\mathfrak{P}^{(2)}$ et $\mathfrak{P}$. De façon générale, les seuls idéaux $\mathfrak{P}$-primaires entre $\mathfrak{P}^{n}$ et $\mathfrak{P}$ sont $\mathfrak{P}^{(n)}, \mathfrak{P}^{(n-1)}, \ldots, \mathfrak{P}$. On a $\bigcap_{1}^{\infty} \mathfrak{P}^{(n)} = 0$.*

*Démonstration.* — Rappelons que les idéaux $\mathfrak{P}$-primaires sont maximaux dans leur classe modulo $\mathcal{R}$, et celles-ci sont distinctes de la classe de $R$, car $\mathfrak{P}$ est premier minimal (théorème 0). La classe d'un idéal $\mathfrak{P}$-primaire contenant $\mathfrak{P}^{n}$ est donc de la forme $\overline{\mathfrak{P}^{k}}$ pour un $k$, $1 \leq k \leq n$. Un idéal $\mathfrak{P}$-primaire contenant $\mathfrak{P}^{n}$ est donc élément maximal de la classe $\overline{\mathfrak{P}^{k}}$ pour un certain $k$, $1 \leq k \leq n$; c'est donc $\mathfrak{P}^{(k)}$ (lemme IV.1).

IV.3. — Nous ne savons pas actuellement si la réciproque du théorème précédent est vraie en général. Le but de ce qui suit est d'établir cette réciproque en supposant de plus que $R$ est un anneau à idéaux (à droite, à gauche) tous bilatères; de façon précise, nous établirons ce qui suit : Si $R$ est un anneau unitaire noethérien, sans diviseurs de zéro, dont tous les idéaux (à gauche, à droite) sont bilatères, si, pour tout idéal principal $Ra$, $a \neq 0$, $a \in R$, et si, pour tout idéal premier associé à $Ra$, $\mathfrak{P}$, il n'y a pas d'idéaux $\mathfrak{P}$-primaires entre $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^{(2)}$, et si l'on a $\bigcap_1^\infty \mathfrak{P}^{(n)} = 0$, $R$ est un ordre maximal régulier de son corps des fractions $K$.

Dans toute la suite, $R$, outre les hypothèses précisées au début de la partie IV, est un anneau à idéaux (à droite, à gauche) tous bilatères. Dans tout ce qui suit, $\mathfrak{P}$ désigne un idéal premier de $R$ tel que $\bigcap_1^\infty \mathfrak{P}^{(n)} = 0$.

IV.4. Lemme. — *Avec les hypothèses pour $R$ et $\mathfrak{P}$ précisées en* IV.3, *on peut écrire, en posant $S = R - \mathfrak{P}$ :*

$$\forall\, a \in R, \quad \forall\, s \in S, \quad \exists\, s_2 \in S, \quad \exists\, s_1 \in S, \qquad \textit{avec} \quad as = s_2 a \quad \textit{et} \quad sa = as_1.$$

*Démonstration.* — A cause de l'égalité $Ra = aR$, on a toujours $sa = as_1$, $s_1 \in R$. Il faut démontrer que $s_1$ appartient à $S$. Si $a$ appartient à $S$, $as_1$ appartient à $S$, donc aussi $s_1$. Soit $a$ appartenant à $\mathfrak{P}$, si $a$ est nul, on peut prendre $s_1 = 1$, si $a$ est non nul, il existe $n$ tel que $a$ appartient à $\mathfrak{P}^{(n)}$ et tel que $a$ n'appartient pas à $\mathfrak{P}^{(n+1)}$ $\left(\text{sans quoi } a \text{ appartiendrait à } \bigcap_1^\infty \mathfrak{P}^{(n)} \text{ et serait nul}\right)$. Supposons $s_1 \in \mathfrak{P}$, alors $sa$ appartiendrait à $\mathfrak{P}^{(n)}\mathfrak{P}$, donc $a$ appartiendrait à $\mathfrak{P}^{(n+1)}$, contrairement à l'hypothèse [on remarquera que dans le cas particulier envisagé ici, la définition de $\mathfrak{P}^{(n)}$ s'obtient ainsi par récurrence : $\mathfrak{P}^{(1)} = \mathfrak{P}$; si $\mathfrak{P}^{(n-1)}$ est défini, on a

$$\mathfrak{P}^{(n)} = \{\, x \in R,\ \exists\, s \in S,\ \exists\, s' \in S,$$

tels que $sxs' \in \mathfrak{P}^{(n-1)}\mathfrak{P}$ (ou $sxs' \in \mathfrak{P}\,.\,\mathfrak{P}^{(n-1)}$)].

IV.5. Lemme. — *$R_S$ a tous ses idéaux à gauche et tous ses idéaux à droite bilatères ($R_S$ désigne l'anneau de fractions de $R$ selon $S$).*

*Démonstration.* — $R$ ayant tous ses idéaux (à gauche, à droite) bilatères, il est immédiat que l'anneau de fractions de $R$ selon $S$ existe. Notons-le $R_S$. Soit $x \in R_S$, il faut démontrer $R_S x = x R_S$. Posons $x = as^{-1}$, $s \in S$, $a \in R$, donc

$$\begin{aligned} xR_S = as^{-1}R_S = aR_S &= \{\, aR\tau^{-1},\ \tau \in S \,\} \\ &= \{\, Ra\tau^{-1},\ \tau \in S \,\} = \{\, R\tau'^{-1}a,\ \tau' \in S \,\}, \end{aligned}$$

en posant $a\tau = \tau' a$ (lemme IV.4), et $xR_S = aR_S = R_S a = R_S x$.

IV.6. LEMME. — *Soit $R'$ un sous-anneau de $K$, corps des fractions de $R$, contenant $R$; on a $R'_S = {}_SR'$.*

*Démonstration.* — Posons

$$R'_S = \{ x \in K \mid \exists\, s \in S,\ sRx \subseteq R' \} \qquad \text{et} \qquad {}_SR' = \{ x \in K \mid \exists s \in S,\ xRs \subseteq R' \}.$$

Comme $Rs = sR$, on a

$$R'_S = \{ x \in K \mid \exists\, s \in S,\ sx \in R' \} \qquad \text{et} \qquad {}_SR' = \{ x \in K \mid \exists\, s \in S,\ xs \in R' \}.$$

Soit $a$, $b$, $\in R$, $b \neq 0$ et $ab^{-1} \in K$; d'après le lemme IV.4, $s$ étant donné dans $S$, on peut trouver $s'$ et $s''$ dans $S$ tels que $sa = as'$ et $bs' = s''b$. On a donc $sab^{-1} = as'b^{-1} = ab^{-1}s''$, et $sab^{-1} \in R'$ équivaut à $ab^{-1}s'' \in R'$, d'où $R'_S = {}_SR'$.

IV.7. LEMME. — *Un idéal $\mathfrak{Q}$ de $R$ est $\mathfrak{P}$-primaire à gauche si et seulement si :*

(H 1) *il existe $n \in N$ tel que $\mathfrak{P}^n \subseteq \mathfrak{Q}$;*

(H 2) *$xa \subseteq \mathfrak{Q}$ et $x \notin \mathfrak{Q}$ entraîne $a \in \mathfrak{P}$.*

*Démonstration.* — On sait que $\mathfrak{Q}$ est $\mathfrak{P}$-primaire à gauche [12] si :

1° il existe $n \in N$ tel que $\mathfrak{P}^n \subseteq \mathfrak{Q}$;

2° $X\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{Q}$, $X \nsubseteq \mathfrak{Q}$ entraîne $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}$, $X$ et $\mathfrak{A}$ désignant des idéaux de $R$.

Si la condition (H 2) est vérifiée, $X\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{Q}$, $X \nsubseteq \mathfrak{Q}$, entraîne l'existence de $x \in X$, $x \notin \mathfrak{Q}$ tel que l'on ait, $\forall\, a \in \mathfrak{A}$, $xa \in \mathfrak{Q}$, donc $a \in \mathfrak{P}$ et $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}$ : $\mathfrak{Q}$ est donc $\mathfrak{P}$-primaire à gauche. Réciproquement, si $\mathfrak{Q}$ est $\mathfrak{P}$-primaire à gauche, soit $x \notin \mathfrak{Q}$ et $xa \in \mathfrak{Q}$ alors on a $RxaR \subseteq \mathfrak{Q}$, $(Rx)\ (aR) \subseteq \mathfrak{Q}$ avec $Rx \nsubseteq \mathfrak{Q}$, donc $aR \subseteq \mathfrak{P}$ et $a \in \mathfrak{P}$.

IV.8. LEMME. — *L'intersection d'un idéal premier (respectivement primaire à gauche) de $R_S$ avec $R$ est un idéal premier (respectivement primaire à gauche) de $R$.*

*Démonstration.* — Soit $\mathfrak{Q}'$ un idéal $\mathfrak{P}'$-primaire de $R_S$, $\mathfrak{P}'$ idéal premier de $R_S$. Soit $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}' \cap R$; $\mathfrak{P}_1$ est premier, car $ab \in \mathfrak{P}_1$, $a \in R$, $b \in R$, entraîne $ab \in \mathfrak{P}'$, donc $a$ ou $b \in \mathfrak{P}'$, donc $a$ ou $b \in \mathfrak{P}_1$. Soit $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}' \cap R$. Considérons $a$, $b \in R$, et $ab \in \mathfrak{Q}_1$, $a \notin \mathfrak{Q}_1$; on déduit $ab \in \mathfrak{Q}'$, $a \notin \mathfrak{Q}'$, donc $b \in \mathfrak{P}'$, donc $b \in \mathfrak{P}_1$. Par ailleurs, $\mathfrak{P}'^n \subseteq \mathfrak{Q}'$ entraîne

$$\mathfrak{P}'^n \cap R \subseteq \mathfrak{Q}_1 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{P}_1^n = (\mathfrak{P}' \cap R)^n \subseteq \mathfrak{P}'^n \cap R \subseteq \mathfrak{Q}_1.$$

D'après le lemme IV.7, $\mathfrak{Q}_1$ est $\mathfrak{P}_1$-primaire à gauche.

IV.9. Lemme. — *Soit* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} = R_S\mathfrak{P} = \mathfrak{P}R_S$. *L'idéal* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$ *est le plus grand idéal de* $R_S$, *et tout idéal contenant* $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^2$ *est* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$*-primaire à gauche.*

*Démonstration.* — L'ensemble des éléments de la forme $s^{-1}p$, $p \in \mathfrak{P}$, $s \in S$, forme un idéal de $R_S$. Tout élément de $R_S$ non contenu dans cet idéal est de la forme $s^{-1}s'$, $s \in S$, $s' \in S$, donc est inversible dans $R_S$. Ainsi, tout idéal propre de $R_S$ est contenu dans cet idéal, égal d'ailleurs à $R_S\mathfrak{P} = \mathfrak{P}R_S$. Remarquons que $R_S$ est noethérien (car tout idéal $I$ de $R_S$ s'écrit $R_S I'$ avec $I' = I \cap R$). Soit $I$ un idéal contenant $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^2$, et soit $\mathfrak{Q}$ un idéal premier associé à $I$. On a $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^2 \subseteq I \subseteq \mathfrak{Q}$ ($I$ est bilatère), donc $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$. Le seul idéal premier associé à $I$ est $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$. Par ailleurs, $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$ est le seul résiduel à gauche propre premier de $I$ [12], car $I \cdot . Y = \mathfrak{A}$ avec $Y \nsubseteq I$ entraîne $\mathfrak{A}Y \subseteq I$, et $I$ étant bilatère $\mathfrak{A} \supseteq I \supseteq (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^2$, donc $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$, et $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$ est idéal premier minimum contenant $I$ de sorte que $I$ est $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$-primaire ([12], th. 5.1).

IV.10. Proposition. — *Soit $R$ un anneau vérifiant les conditions du début de ce paragraphe [noethérien, unitaire, sans diviseurs de zéro, dont tous les idéaux (à gauche, à droite) sont bilatères]. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $R$ tel que* $\bigcap_1^\infty \mathfrak{P}^{(n)} = 0$ *et tel qu'il n'y ait pas d'idéaux $\mathfrak{P}$-primaires entre $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^{(2)}$. Soit $S = R - \mathfrak{P}$. Pour $n = 1, 2, \ldots$, on peut trouver un élément $a$ de $R$ indépendant de $n$, tel que $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^n = R_S a^n = a^n R_S$, et $\mathfrak{P}$ est un idéal premier non nul minimal de $R$. Les idéaux propres de $R_S$ sont $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^n$, $n = 1, 2, \ldots$.*

*Démonstration.* — On a $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^2 \neq \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$, sinon on aurait

$$\bigcap_1^\infty (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^n \neq 0, \qquad \text{d'où} \qquad \bigcap_1^\infty (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^n \cap R \neq 0.$$

Or on a, d'après Goldie [8], $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^n \cap R = \mathfrak{P}^{(n)}$, l'anneau local associé par Goldie à $\mathfrak{P}$ étant ici $R_S$. On aurait donc $\bigcap_1^\infty \mathfrak{P}^{(n)} \neq 0$, contrairement à l'hypothèse. Soit alors $a \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$ et $a \notin (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^2$ et $I = (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^2 + R_S a$; $I$ est $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$-primaire à gauche (lemme IV.9). D'après le lemme IV.8, $I \cap R$ est $\mathfrak{P}$-primaire à gauche, contenant $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^2 \cap R = \mathfrak{P}^{(2)}$; on a donc, soit $I \cap R = \mathfrak{P}$, soit $I \cap R = \mathfrak{P}^{(2)}$, et $I = R_S\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$ ou $I = R_S\mathfrak{P}^{(2)} = (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^2$ [8]. Mais ceci entraîne $I = \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$, car $a \notin (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^2$. Ainsi on a $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} = (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^2 + R_S a$, d'où l'on déduit, d'après le lemme de Nakayama (cas non commutatif), $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} = R_S a$, et de même $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} = aR_S$, et, pour

$$n = 1, 2, \ldots, (\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^n = a^n R_S = R_S a^n.$$

Tout idéal de $R_S$ est un $(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})^n$, $n = 1, 2, \ldots$. En effet, soit $I$ un idéal de $R_S$ engendré par $a_i$, $i = 1, \ldots, r$; on a $a_i = \alpha_i a^{r_i}$, $\alpha_i \notin \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$. Soit $r_1 = \inf(r_1, \ldots, r_n)$, on a

$$I = (R_S \alpha_1 + R_S \alpha_2 a^{r_2 - r_1} + \ldots + R_S \alpha_n a^{r_n - r_1}) a^{r_1},$$

et $\alpha_1$ est inversible dans $R_S$, donc $I = R_S a^{r_1}$; $R_S$ ne contient qu'un seul idéal premier non nul; soit $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$ un idéal premier non nul de $R$, $\mathfrak{Q} R_S = R_S \mathfrak{Q}$ serait premier dans $R_S$ [tout élément de $\mathfrak{Q} R_S$ s'écrit $qs^{-1}$, $q \in \mathfrak{Q}$, $s \in S$. Alors $as^{-1} bs'^{-1} \in \mathfrak{Q} R_S$ et $a \notin \mathfrak{Q}$, $b \notin \mathfrak{Q}$ entraînent $as^{-1} b \in \mathfrak{Q} R_S$, et, si l'on a $s^{-1} b = b\tau^{-1}$, $\tau \in S$, on peut écrire $ab \in \mathfrak{Q} R_S \cap R$,

$$ab = q_1 s_1^{-1} = r \in R, \qquad q_1 = rs_1 \in \mathfrak{Q}, \qquad s_1 \in S,$$

donc $r \in \mathfrak{Q}$ et $ab \in \mathfrak{Q}$, $a \notin \mathfrak{Q}$, $b \notin \mathfrak{Q}$ contrairement à l'hypothèse $\mathfrak{Q}$ premier]. Dès lors, $\mathfrak{Q} R_S = \mathfrak{P} R_S$, et ceci entraîne $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}$.

IV.11. Proposition. — *Avec les hypothèses de la proposition précédente, $R_S$ est un ordre maximal du corps des fractions $K$ de $R$.*

*Démonstration.* — Cela résulte d'un résultat d'Asano ([1], th. 2.9), compte tenu que tout $R_S$-idéal est inversible. Démontrons ce dernier point. Soit $T$ un $R_S$-idéal, il existe $\lambda \in R_S$ tel que $\lambda T \subseteq R_S$, $\lambda T$ est visiblement un idéal à droite de $R_S$, donc bilatère (lemme IV.5), donc

$$\lambda T = R_S x = x R_S, \qquad x \in R, \qquad x \neq 0 \quad \text{(prop. IV.10)}.$$

On a donc $T = \lambda^{-1} x R_S$; posons $T^* = R_S x^{-1} \lambda$; il est facile de vérifier que $T^*$ est un $R_S$-idéal, et on a

$$T^* T = (R_S x^{-1} \lambda)(\lambda^{-1} x R_S) = R_S$$

et

$$T T^* = (\lambda^{-1} x R_S)(R_S x^{-1} \lambda) = \lambda^{-1} x R_S x^{-1} \lambda = \lambda^{-1} R_S \lambda = R_S.$$

L'ordre $R_S$ de $K$ est par ailleurs régulier puisqu'il a tous ses idéaux (à gauche, à droite) bilatères.

IV.12. Théorème. — *Soit $R$ un anneau, noethérien, unitaire, sans diviseurs de zéro, dont le corps des fractions est noté $K$, et dont tous les idéaux (à gauche, à droite) sont bilatères. Une condition nécessaire et suffisante pour que $R$ soit un ordre maximal de $K$ est que, pour tout idéal principal $Ra$, $a \neq 0$, $a \in R$ et pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ associé à $Ra$, il n'y ait pas d'idéaux $\mathfrak{P}$-primaires strictement compris entre $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^{(2)}$, et que l'on ait* $\bigcap_{1}^{\infty} \mathfrak{P}^{(n)} = 0$.

*Démonstration.* — La condition énoncée est bien *nécessaire* d'après le théorème IV.2. Démontrons qu'elle est *suffisante*. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier associé à $Ra$, $a\in R$, $a\neq 0$. D'après les propositions IV.10 et IV.11, pour $S=R-\mathfrak{P}$, $R_S$ est un ordre maximal de $K$, et $\mathfrak{P}$ est un idéal premier minimal. Soit $Ra=\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ une décomposition en idéaux tertiaires [12], $X_i$ étant $\mathfrak{P}_i$-tertiaire, $i=1, \ldots, n$. Démontrons que $X_i$ est $\mathfrak{P}_i$-primaire, $i=1, \ldots, n$. D'abord $\mathfrak{P}_i$ est premier non nul minimal, et $R_{\mathfrak{P}_i}$ est un ordre maximal dont tous les idéaux sont primaires, en particulier, $(X_i)_{\mathfrak{P}_i}$ est primaire, donc aussi $(X_i)_{\mathfrak{P}_i}\cap R$ (lemme IV.8). Il suffit de prouver alors que $(X_i)_{\mathfrak{P}_i}\cap R=X_i$. Soit $x\in(X_i)_{\mathfrak{P}_i}\cap R$, il existe $s\notin\mathfrak{P}_i$ tel que $sRx\subseteq X_i$ et, $X_i$ étant $\mathfrak{P}_i$-tertiaire, on a $x\in X_i$ ([13], définition 2.1). Ainsi tout idéal principal non nul est intersection d'idéaux $\mathfrak{P}_i$-primaires, $i=1, \ldots, n$, dont les radicaux $\mathfrak{P}_i$ sont des idéaux premiers non nuls minimaux (condition ($C_2$) du théorème (II.9), p. 98 de ma thèse [15]). Par ailleurs, tout idéal premier minimal $\mathfrak{Q}$ de $R$ est idéal premier associé à $Ra$, pour $a\in\mathfrak{Q}$, $a\neq 0$. En effet, de $Ra=\bigcap_{i=1}^{n} X_i$, $X_i$ étant $\mathfrak{P}_i$-primaire, $i=1, \ldots, n$, on déduit $\prod_{i=1}^{n}\mathfrak{P}_i^{\rho_i}\subseteq Ra\subseteq\mathfrak{Q}$, donc $\mathfrak{P}_i=\mathfrak{Q}$ pour un $i$, $1\leqq i\leqq n$ : Donc, pour tout $\mathfrak{P}$ premier minimal, $S=R-\mathfrak{P}$, $R_S$ est un ordre maximal de $K$ (condition ($C_3$) du théorème (II.9) de ma thèse [15]). Enfin, pour tout ordre $R'$ dans $K$ contenant $R$, et pour $S=R-\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}$ premier minimal, on a $R'_{\mathfrak{P}}={}_{\mathfrak{P}}R'=R'_S={}_SR'$ avec les notations du lemme IV.6 et en utilisant ce lemme (condition ($C_1$) du théorème (II.9) de ma thèse [15]). D'après le théorème (II.9) de ma thèse [15], on peut affirmer que $R$ est un ordre maximal de $K$.

Les principaux résultats des parties II, III et IV ont été résumés dans une Note aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris [18].

## V

Dans toute cette partie, $\mathcal{O}$ désignera un anneau noethérien sans diviseurs de zéro, ordre maximal régulier de son corps des fractions $K$. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier minimal non nul de $\mathcal{O}$. On posera $S=\mathcal{O}-\mathfrak{P}$,

$\mathcal{C}(\mathfrak{P})=\{c\in S$, tel que $cx\in\mathfrak{P}$ et $x\in\mathcal{O}\Rightarrow x\in\mathfrak{P}$.
$\quad=\{c\in S$, tel que $zc\in\mathfrak{P}$ et $z\in\mathcal{O}\Rightarrow z\in\mathfrak{P}\}$ (*cf.* [8] au bas de la page 91),
$\mathcal{C}'(\mathfrak{P})=\{c\in S$, tel que $c^{-1}\in\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}={}_{\mathfrak{P}}\mathcal{O}\}$.

Il est facile de voir que « $c\in\mathcal{C}'(\mathfrak{P})$ » équivaut à chacune des deux assertions suivantes : « il existe $s\in S$ tel que $s\mathcal{O}\subseteq\mathcal{O}c$ » ou « il existe $s'\in S$ tel que $\mathcal{O}s'\subseteq c\mathcal{O}$ ».

Il est facile de vérifier que l'on a toujours $\mathcal{C}'(\mathfrak{P}) \subseteq \mathcal{C}(\mathfrak{P})$.

Lorsque $\mathcal{O}$ a tous ses idéaux premiers non nuls maximaux (en tant qu'idéaux bilatères), nous dirons, comme G. O. MICHLER [20], que $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano.

V.1. PROPOSITION. — *$\mathcal{C}'(\mathfrak{P})$ est l'ensemble des éléments $c$, $c \in S$, tels que $\mathcal{O}c$ n'admet pas $\mathfrak{P}$ comme idéal premier associé. C'est aussi l'ensemble des éléments $c$, $c \in S$ tels que $c\mathcal{O}$ n'admet pas $\mathfrak{P}$ comme idéal premier associé. Si, pour tout $\mathfrak{P}$ idéal premier minimal non nul de $\mathcal{O}$ on a $S = \mathcal{C}'(\mathfrak{P})$, alors $\mathcal{O}$ a tous ses idéaux à gauche et tous ses idéaux à droite bilatères.*

*Démonstration.* — Soit $X = \mathcal{O}c$ pour un élément $c$ non nul et non inversible de $\mathcal{O}$. Posons $\mathfrak{A} = X^{\cdot}.\,\mathcal{O} = \{x \in X \mid x\mathcal{O} \subseteq X\}$; $\mathfrak{A}$ est le plus grand idéal bilatère contenu dans $X$ (il n'est pas nul, car $X$ est régulier). Comme $X$ est maximum dans sa classe modulo l'équivalence d'Artin, il en est de même de $\mathfrak{A}$. Soient donc $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ les idéaux premiers associés à $\mathcal{O}c = X$; on a, $p_i$ désignant des entiers naturels convenables, $i = 1, \ldots, n$ :

$$\prod_{i=1}^{i=n} \mathfrak{P}_i^{p_i} \subseteq X \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=1}^{i=n} \mathfrak{P}_i^{p_i} \subseteq \mathfrak{A}.$$

Ainsi, si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier associé à $\mathfrak{A}$, il contient $\mathfrak{A}$, car $\mathfrak{A}$ est bilatère, et l'on a, pour un certain $i$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_i$ puisque $\mathfrak{P}$ est minimal non nul. Réciproquement, si $\mathfrak{P}_i$ est un idéal premier associé à $X$, donc minimal non nul (III.1), on a

$$X = \mathcal{O}c = \bigcap_{i=1}^{i=n} X_i, \qquad X_i\ \mathfrak{P}_i\text{-primaire}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

et

$$\mathfrak{P}_i \supseteq X_i^{\cdot}.\,\mathcal{O} \supseteq X^{\cdot}.\,\mathcal{O} = \mathfrak{A} \qquad ([12], \text{th. } 5.1).$$

Si $\mathfrak{P}'_1, \ldots, \mathfrak{P}'_r$ sont les idéaux premiers associés à $\mathfrak{A}$, on a

$$\mathfrak{P}_i \supseteq \mathfrak{A} \supseteq \prod_{i=1}^{i=r} \mathfrak{P}'^{\,p'_j}_j$$

pour des entiers $p'_j$ convenables, $j = 1, \ldots, r$. On en déduit $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}'_j$ pour un certain $j$, $j = 1, \ldots, r$. Il résulte de là que $\mathfrak{A}$ et $X$ ont les mêmes idéaux premiers associés.

Supposons que, pour $c \in S$, il existe $s \in S$ tel que $s\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}c$. Alors on a $\mathfrak{A} \supseteq \mathcal{O}s\mathcal{O}$ et $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{P}$. Ceci prouve que $\mathfrak{P}$ n'est pas idéal premier associé à $\mathfrak{A}$, donc à $\mathcal{O}c$. Réciproquement, si l'on a $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{P}$, il existe $s$, $s \in S$, tel que $s\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{O}c$, et, comme « $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{P}$ » est équivalent à « $\mathfrak{P}$ n'est pas idéal premier associé à $\mathfrak{A}$, donc à $\mathcal{O}c$ », on a le résultat annoncé.

Supposons pour terminer que l'on ait $S = \mathcal{C}'(\mathfrak{P})$ pour tout idéal premier non nul minimal $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}$ avec $S = \mathcal{O} - \mathfrak{P}$. Pour tout $s$, $s \in S$, il existe $s'$, $s''$ appartenant à $S$ tels que $s'\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}s$ et $\mathcal{O}s'' \subseteq s\mathcal{O}$. On en déduit la dernière assertion de l'énoncé par application du théorème III.14.

Dans la suite de ce paragraphe, nous supposerons que $\mathcal{O}$ vérifie la condition (H) suivante :

Condition (H) : *Pour tout idéal premier non nul $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}$, $\mathfrak{P}' \cap \mathcal{C}'$ $(\mathfrak{P})$ est non vide pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{P}'$ distinct de $\mathfrak{P}$.*

La condition (H) est vérifiée par deux classes importantes d'ordres maximaux introduites dans la littérature :

(*a*) Si $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano, pour tout idéal $\mathfrak{P}$ premier non nul minimal de $\mathcal{O}$, on a $\mathcal{C}'(\mathfrak{P}) = \mathcal{C}(\mathfrak{P})$. Cela résulte du théorème (2.14) de Michler [20] suivant lequel $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ est un anneau de fractions classique des deux côtés de $\mathcal{O}$ selon $\mathcal{C}(\mathfrak{P})$. Soit alors $\mathfrak{P}'$ un idéal premier non nul minimal, non nul distinct de $\mathfrak{P}$; de $\mathfrak{P}' + \mathfrak{P} = \mathcal{O}$ résulte que

$$\mathfrak{P}' \cap \mathcal{C}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}' \cap \mathcal{C}'(\mathfrak{P})$$

est non vide.

(*b*) Soit $R$ un domaine d'intégrité noethérien intégralement clos, et soit $K$ son corps des fractions. Soit $\Sigma$ une $K$-algèbre centrale simple de dimension finie sur $K$; supposons que $\Sigma$ est un corps gauche. Un $R$-ordre $\Lambda$ de $\Sigma$ est un sous-anneau de $\Sigma$ contenant $R$ qui est de type fini en tant que $R$-module et telle que $K\Lambda = \Sigma$. Un $R$-ordre de $\Sigma$, qui n'est contenu dans aucun $R$-ordre différent de $\Sigma$, est dit *maximal*; c'est alors un ordre maximal de $\Sigma$ au sens d'Asano, c'est-à-dire au sens où nous l'entendons dans cet article. Alors un R-ordre maximal $\Lambda$ vérifie toutes nos hypothèses : c'est un ordre maximal noethérien, sans diviseurs de zéro, de son corps des fractions $\Sigma$, et on peut démontrer qu'il est régulier. Or Riley [19] a démontré que si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier minimal non nul de $\Lambda$, $\mathfrak{P} \cap R = \overline{\mathfrak{P}}$ est un idéal premier minimal de $R$ non nul, et que si $\mathfrak{P}'$ idéal premier non nul minimal de $\Lambda$ est distinct de $\mathfrak{P}$, on a $\overline{\mathfrak{P}} \neq \overline{\mathfrak{P}}'$; par suite, il existe $c$, $c \notin \overline{\mathfrak{P}}$, $c \in \overline{\mathfrak{P}}'$ tel que $\Lambda c = c\Lambda$, et l'on a $c \in \mathcal{C}'(\mathfrak{P}) \cap \mathfrak{P}'$.

V.2. Proposition. — *$\mathcal{C}'(\mathfrak{P})$ est un sous-demi-groupe de $\mathcal{O}$, et, lorsque $\mathcal{O}$ vérifie la condition* (H), *pour tout idéal premier minimal non nul de $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ est un anneau de fractions des deux côtés selon $\mathcal{C}'(\mathfrak{P})$. $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ est plat en tant que $\mathcal{O}$-module à gauche et en tant que $\mathcal{O}$-module à droite.*

*Démonstration.* — Soient $c$, $c'$ appartenant à $\mathcal{C}'(\mathfrak{P})$; il existe $s$ et $s'$ appartenant à $S$ tels que $s\mathcal{O}c^{-1} \subseteq \mathcal{O}$ et $s'\mathcal{O}c'^{-1} \subseteq \mathcal{O}$, donc $s\mathcal{O}(s'\mathcal{O}c'^{-1})c^{-1}$ est compris dans $\mathcal{O}$ et, si $\tau$ appartient à $s\mathcal{O}s' \cap S$, on a $\tau\mathcal{O}(cc')^{-1} \subseteq \mathcal{O}$, ce qui prouve que $cc'$ appartient à $\mathcal{C}'(\mathfrak{P})$. Soit maintenant $x$, $x \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$; il existe

$s$, $s \in S$ tel que $\mathcal{O} s \mathcal{O} x \subseteq \mathcal{O}$, donc $\overline{\mathcal{O} s \mathcal{O}} x \subseteq \mathcal{O}$. Montrons que $\overline{\mathcal{O} s \mathcal{O}}$ coupe $\mathcal{C}'(\mathfrak{P})$. C'est évident si $\overline{\mathcal{O} s \mathcal{O}} = \mathcal{O}$. Supposons $\overline{\mathcal{O} s \mathcal{O}} \neq \mathcal{O}$. Il existe des idéaux premiers minimaux $\mathfrak{P}_i$, $i = 1, \ldots, r$, non nuls de $\mathcal{O}$, et des entiers naturels $p_i$, $i = 1, \ldots, r$, tels que $\prod_{i=1}^{i=r} \mathfrak{P}_i^{p_i} \subseteq \overline{\mathcal{O} s \mathcal{O}}$. Aucun des $\mathfrak{P}_i$ n'est égal à $\mathfrak{P}$. Si l'on prend $c_i$, $c_i \in \mathcal{C}'(\mathfrak{P}) \cap \mathfrak{P}_i$, $i = 1, \ldots, r$, on a $c = \prod_{i=1}^{i=r} c_i^{p_i} \in \mathcal{C}'(P) \cap \overline{\mathcal{O} s \mathcal{O}}$ et $cx \in \mathcal{O}$, donc $x = c^{-1} a$, $a \in \mathcal{O}$, $c \in \mathcal{C}'(\mathfrak{P})$. Ainsi $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ est un suranneau de $\mathcal{O}$ ayant la même unité que $\mathcal{O}$, tous les éléments de $\mathcal{C}'(\mathfrak{P})$ sont inversibles dans $\mathcal{O}$, et tout élément $x$ de $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ s'écrit $c^{-1} a$, $c \in \mathcal{C}'(\mathfrak{P})$, $a \in \mathcal{O}$. Ceci prouve que $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ est un anneau de fractions à gauche de $\mathcal{O}$ selon $\mathcal{C}'(\mathfrak{P})$. Il est d'ailleurs, puisque l'on a $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} = {}_{\mathfrak{P}}\mathcal{O}$, anneau de fractions des deux côtés de $\mathcal{O}$ selon $\mathcal{C}'(\mathfrak{P})$; $\mathcal{O}$ vérifie alors la condition de Ore des deux côtés par rapport à $\mathcal{C}'(\mathfrak{P})$. La famille $\mathcal{F}$ des idéaux à gauche de $\mathcal{O}$ qui coupent $\mathcal{C}'(\mathfrak{P})$ est topologisante et idempotente. Comme un système cofinal est constitué par les idéaux à gauche libres $\mathcal{O} c$, $c \in \mathcal{C}'(\mathfrak{P})$, le localisé de Gabriel $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est un $\mathcal{O}$-module à gauche plat ([9], corollaire 3.7). D'après Bourbaki ([9], p. 163, exercice 22), $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ sont des anneaux isomorphes. Ainsi $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ est plat en tant que $\mathcal{O}$-module à gauche (et en tant que $\mathcal{O}$-module à droite).

Nous désignons dans la suite par $L(\mathfrak{P})$ l'anneau local associé à $\mathfrak{P}$ par Goldie [8], c'est-à-dire le sous-anneau de $K$ engendré par $\mathcal{O}$ et les éléments $c$, $c \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$ [on rappelle que l'on a ici $\bigcap_{1}^{\infty} \mathfrak{P}^{(n)} = 0$ (IV.1)].

V.3. Proposition. — *Sous l'hypothèse* (H), *une condition nécessaire pour que l'on ait* $L(\mathfrak{P}) = \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ *est que* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$ *soit le plus grand idéal bilatère de* $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$.

*Démonstration.* — La condition est évidemment nécessaire, car si l'on a $L(\mathfrak{P}) = \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P} \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ est le plus grand idéal de $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ [8]. Or on a vu (I.17] que $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} = \overline{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P} \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}}$ et $\overline{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P} \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}} \supseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P} \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$. On a donc $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P} \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, et $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$ est le plus grand idéal de $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$. Réciproquement, si $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$ est le plus grand idéal de $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ est un ordre d'Asano régulier, noethérien, dont $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$ est le radical de Jacobson de $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ ([20], lemme 2.9), donc un anneau quasi-local au sens de Michler ([10], p. 422). En appliquant le lemme (2.10) de Michler [20], on obtient $L(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}) = \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, en notant $L(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}})$ le localisé de Goldie de $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ selon $\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$ [8]. On va en déduire le résultat : Soit

$$\mathcal{C}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}) = \{ v \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}} \mid \text{tel que } x \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}} \text{ et } vx \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} \Rightarrow x \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} \}.$$

Soit $x \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, et $c \in \mathcal{C}(\mathfrak{P})$ avec $cx \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$. Il existe $\overline{B} \not\subseteq \mathfrak{P}$, $\overline{B}$ idéal de $\mathcal{O}$ maximal dans sa classe modulo l'équivalence d'Artin, tel que $cx\overline{B} \subseteq \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}} \cap \mathcal{O} = \mathfrak{P}$.

On a $x\overline{B} \subseteq \mathfrak{P}$ et $x \in \overline{\mathfrak{P}\overline{B}^{-1}} \subseteq \mathfrak{P}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}$. On a donc

$$c \in \mathcal{C}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}(\mathfrak{P}) \subseteq \mathcal{C}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}).$$

Comme $\mathcal{O}$ est compris dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, on a

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} \subseteq L(\mathfrak{P}) \subseteq L(\mathfrak{P}_{\mathfrak{P}}) = \mathcal{O}_{\mathfrak{P}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{O}_{\mathfrak{P}} = L(\mathfrak{P}).$$

Remarquons que l'on a alors $\mathcal{C}'(\mathfrak{P}) = \mathcal{C}(\mathfrak{P})$.

*Remarque.* — Si $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano dont tous les idéaux premiers non nuls sont complètement premiers, $\mathcal{O}$ est un anneau dont tous les idéaux à gauche et tous les idéaux à droite sont bilatères : en effet pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ non nul de $\mathcal{O}$, on a $L(\mathfrak{P}) = \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, donc, $\mathcal{C}'(\mathfrak{P}) = \mathcal{C}(\mathfrak{P}) = S$, et l'on utilise la dernière assertion de la proposition V.1.

Je voudrais pour terminer, signaler un travail ([16], [22]), qui peut entrer dans le cadre de cet article, que nous avons fait E. Oudin et moi-même, sur les *Gerbiers commutatifs résidués, à élément unité, intégralement clos* : on connaît trois conditions nécessaires et suffisantes distinctes pour que le gerbier des idéaux fractionnaires d'un domaine d'intégrité noethérien soit intégralement clos. Ces caractérisations sont appelées caractérisations A, B, C en [15]. Ces conditions se formulent pour un gerbier $D$ commutatif à élément unité résidué, noethérien, ordonné en treillis, mais elles ne sont plus équivalentes. La Note [16] étudie leur implication et introduit, étant donné un sous-demi-groupe $S$, contenant l'unité de $D$, un gerbier $D_S$, dit quotient de $D$ selon $S$. Les résultats des parties I et V du présent article ont été résumés dans une Note aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris [19].

## BIBLIOGRAPHIE.


[1] Asano (Keizō). — Zur Arithmetik in Schiefringen, I., *Osaka math. J.*, t. 1, 1949, p. 98-134.

[2] Asano (Keizō) and Murata (Kentaro). — Arithmetical ideal theory in semigroups, *J. Inst. Polytech. Osaka Univ*, Series A, t. 4, 1953, p. 9-33.

[3] Auslander (Maurice) and Goldman (Oscar). — Maximal orders, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 97, 1960, p. 1-24.

[4] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre commutative.* Chap. 1-2. — Paris, Hermann, 1961 (*Act. scient. et ind.*, 1290; *Bourbaki*, 27).

[5] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre.* Chap. 2, 3e édition. — Paris, Hermann, 1962 (*Act. scient. et ind.*, 1236; *Bourbaki*, 6).

[6] Deuring (Max). — *Algebren.* 2te Auflage. — Berlin, Springer-Verlag, 1968 (*Ergebnisse der Mathematik*, 41).

[7] Goldie (A. W.). — The structure of prime rings with ascending chain conditions, *Proc. London math. Soc.*, Series 3, t. 8, 1958, p. 589-608.

[8] Goldie (A. W.). — Localization in non-commutative noetherian rings, *J. of Algebra*, t. 5, 1967, p. 89-105.

[9] Hacque (Michel). — Localisations exactes et localisations plates, *Publ. Dép. Math., Lyon*, t. 6, 1969, fasc. 2, p. 97-117.

[10] Harada (Manabu). — On generalization of Asano's maximal orders in a ring, *Osaka J. Math.*, t. 1, 1964, p. 61-68.

[11] Jacobson (Nathan). — *Theory of rings*. — New York, American mathematical Society, 1943 (*Mathematical Surveys*, 2).

[12] Lesieur (Léonce, et Croisot (Robert). — Théorie noethérienne des anneaux des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, I, *Colloque d'Algèbre supérieure* [1956. Bruxelles], p. 79-121. — Paris, Gauthier-Villars; Louvain, Ceuterick, 1957 (*Centre belge de Recherches mathématiques*).

[13] Lesieur (Léonce) et Croisot (Robert). — Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, II., *Math. Annalen*, t. 134, 1958, p. 458-476.

[14] Marot (Jean). — Une propriété des sur-anneaux plats d'un anneau, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 265, 1967, Série A, p. 8-10.

[15] Maury (Guy). — La condition « intégralement clos » dans quelques structures algébriques, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 3e série, t. 78, 1961, p. 31-100 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1960).

[16] Maury (Guy) et Oudin (Emmanuel). — Gerbier résidué intégralement clos, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 264, 1967, Série A, p. 170-172.

[17] Maury (Guy). — Remarques sur les ordres maximaux, noethériens, sans diviseurs de zéro, *Séminaire Dubreil-Pisot : Théorie des nombres*, 22e année, 1968-1969, n° 8, 12 p.

[18] Maury (Guy). — Caractérisation des ordres maximaux, noethériens, sans diviseurs de zéro, dont tous les idéaux (à gauche, à droite) sont bilatères, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 269, 1969, Série A, p. 993-996.

[19] Maury (Guy). — Localisations bilatères dans les ordres maximaux, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, 1970, Série A, p. 1144-1146.

[20] Michler (G. O.). — Asano orders, *Proc. London math. Soc.*, Series 3, t. 19, 1969, p. 421-443.

[21] Mori (S.) und Dodo (T.). — Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit in Integritätsbereichen, *J. Sc. Hiroshima Univ.*, Series A, t. 7, 1937, p. 15-27.

[22] Oudin (Emmanuel). — Demi-groupes commutatifs réticulés résidués intégralement clos, *Publ. Dép. Math., Lyon*, t. 5, 1968, fasc. 1, p. 83-112.

[23] Robson (J. C.). — Non-commutative Dedekind rings, *J. of Algebra*, t. 9 1968, p. 249-265.

[24] Sanderson (D. E.). — A generalization of divisibility and injectivity in modules, *Canad. math. Bull.*, t. 8, 1965, p. 505-513.

[25] Silver (L.). — Non-commutative localizations and applications, *J. of Algebra*, t. 7, 1967, p. 44-76.

[26] Yoshida (Michio) and Sakuma (Motoyoshi). — On integrally closed noetherian rings, *J. Sc. Hiroshima Univ.*, Series A, t. 17, 1954, p. 311-315.

(Manuscrit reçu le 15 janvier 1970,
complété le 10 avril 1970 pour la partie V.)

Guy Maury,
Prof. Fac. Sc. Lyon,
49, rue Duguesclin,
69-Lyon 06.