

# BULLETIN DE LA S. M. F.

J. PELLAUMAIL

## Sur la dérivation d'une mesure vectorielle

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 98 (1970), p. 359-368

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1970\\_\\_98\\_\\_359\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__359_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LA DÉRIVATION D'UNE MESURE VECTORIELLE

PAR

JEAN PELLAUMAIL,

Maître-Assistant, Département de Mathématiques,  
Institut National des Sciences Appliquées de Rennes.

---

### Introduction.

Dans toute cette étude, on considère un espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  (avec  $\mu$   $\sigma$ -finie), un espace vectoriel  $V$  en dualité avec  $V'$ , et une fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathcal{F}$ , à valeurs dans  $V$ ,  $\sigma$ -additive pour la topologie  $\sigma(V, V')$ , et dominée par  $\mu$ .

Au paragraphe A, en utilisant la propriété de « *lifting* » (cf. [5]), on introduit une base de dérivation privilégiée : relativement à cette base de dérivation, la convergence presque-partout des dérivants est remplacée par la convergence partout dans certains théorèmes classiques où  $\mu$  est supposée finie.

Au paragraphe B, on étudie le cas où les « *mesures scalaires* » associées à  $\varphi$  ont des densités bornées. Le lemme élémentaire B.1 introduit l'une des idées directrices de l'étude, à savoir : A tout  $\varepsilon$  positif, on associe une partition  $\alpha$  telle que, pour toute partition plus fine  $\beta$ , on ait  $|D_\alpha - D_\beta| \leq \varepsilon$  (en désignant par  $D_\alpha$  le dérivant associé à la partition  $\alpha$ ).

L'utilisation de ce lemme et de la base de dérivation définie au paragraphe A permet de préciser le théorème 7 de [6], et d'en simplifier la démonstration.

Dans toute la suite, on suppose que  $V$  est un espace de Banach et que  $\varphi$  est fortement  $\sigma$ -additive.

Au paragraphe C, on étudie le comportement des dérivants quand la variation totale de  $\varphi$  n'est pas  $\sigma$ -finie. L'idée du lemme C.3 est analogue à celle du lemme B.1 quand on se place au voisinage de l'infini : A tout entier  $p$ , on associe une partition  $\alpha$  telle que, pour toute partition plus fine  $\beta$ , on ait  $|D_\beta| \geq p$ .

De plus, un contre-exemple simple montre que, même si  $V$  est réflexif séparable, la variation totale de  $\varphi$  peut ne pas être  $\sigma$ -finie, ce qui différencie le cas d'un espace vectoriel de dimension infinie du cas d'un espace vectoriel de dimension finie.

Enfin, au paragraphe D, on étudie l'existence, ou l'absence, de « *densité faible* » : on montre surtout qu'il n'y a pas de densité faible si la variation totale n'est pas  $\sigma$ -finie, résultat que laissait espérer le paragraphe C.

Le théorème D.4 reprend les résultats qui précèdent quand  $V$  est un espace de Banach. Essentiellement, ce théorème exprime que l'espace initial  $\Omega$  se décompose en deux parties :

— une partie  $K$  où « rien ne marche », c'est-à-dire que la variation totale n'est pas  $\sigma$ -finie, qu'il n'y a pas de densité faible, et que la norme des dérivants (associés à une base de dérivation privilégiée) converge presque-partout vers l'infini;

— une partie  $(\Omega \setminus K)$  où « tout marche bien », c'est-à-dire que la variation totale est  $\sigma$ -finie, qu'il existe une densité faible, et que les dérivants (associés à une base de dérivation privilégiée) convergent faiblement presque-partout vers cette densité faible. Si  $V$  est réflexif, cette densité faible est aussi une densité forte.

## A. Notations et choix d'une base de dérivation.

A.1. *Notations.* — Dans ce travail, on utilisera les définitions et les notations de [6]. Plus précisément, on considérera :

(a) un espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , la mesure étant supposée positive et  $\sigma$ -finie;

(b) un espace localement convexe  $V$  en dualité avec  $V'$  (cf. [1]);

(c) une fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathcal{F}$ , à valeurs dans  $V$ ,  $\sigma$ -additive pour la topologie  $\sigma(V, V')$  et dominée par  $\mu$ , c'est-à-dire que, si  $A$  appartient à  $\mathcal{F}$  et si  $\mu(A) = 0$ , alors  $\varphi(A) = 0$ .

A.2. — « *Relèvement* ». — Soit  $(\Omega_n)_{n > 0}$  une partition de  $\Omega$  telle que, pour tout  $n$ ,  $\Omega_n$  appartient à  $\mathcal{F}$  et  $\mu(\Omega_n) < +\infty$ ; soit  $\mathcal{F}_n$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{F}$  contenus dans  $\Omega_n$ . D'après [5], on sait que, quel que soit  $n$ , il existe un anneau  $\mathcal{A}_n$  satisfaisant aux conditions suivantes :

(i)  $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{F}_n$ ;

(ii)  $\Omega_n$  appartient à  $\mathcal{A}_n$ ;

(iii) si  $A$  appartient à  $\mathcal{A}_n$  et si  $\mu(A) = 0$ , alors  $A = \emptyset$ ;

(iv) si  $B$  appartient à  $\mathcal{F}_n$ , il existe  $B'$  appartenant à  $\mathcal{A}_n$  tel que  $\mu(B \Delta B') = 0$  (en désignant par  $\Delta$  la différence symétrique). On désignera par  $\mathcal{A}$  l'anneau engendré par la réunion des  $\mathcal{A}_n$ .

A.3. *Base de dérivation « privilégiée »*. — On désignera par  $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$  la famille des partitions dénombrables de  $\Omega$ , partitions constituées d'éléments de  $\mathcal{A}$ ; une telle base de dérivation sera appelée base de dérivation privilégiée (associée à l'anneau  $\mathcal{A}$ ). Sur  $I$ , on introduit la relation d'ordre filtrante :

$\alpha \leq \beta$  si et seulement si  $\mathcal{F}_\alpha$  plus fine que  $\mathcal{F}_\beta$ .

A.4. *Dérivants*. — Étant donné  $\alpha$  appartenant à  $I$ , on pose

$$D_\alpha^z(\omega) = \sum_{F \in \mathcal{F}_\alpha} l_F(\omega) \times (\varphi(F)/\mu(F)) \quad [\text{on note que } \mu(F) \neq 0].$$

**B. Cas où les dérivants prennent leurs valeurs dans une partie faiblement bornée et faiblement complète.**

B.1. LEMME. — Soit  $m$  une mesure réelle définie sur  $\mathcal{F}$  et admettant, par rapport à  $\mu$ , une densité  $\mu$ -essentiellement bornée; alors, pour tout  $\varepsilon$  positif, il existe  $\alpha$  élément de  $I$  tel que

$$\alpha \geq \beta \quad \text{implique} \quad |D_\alpha^m(\omega) - D_\beta^m(\omega)| \leq \varepsilon.$$

*Preuve.* — Notons, d'abord, que ce lemme est très voisin du lemme VI.8.3 de [4]. Soit  $f$  une fonction bornée définie sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $\mathbf{R}$  telle que  $m = \int f.d\mu$ . Étant donné  $\Omega_n$  (cf. A.2 ci-dessus),  $\varepsilon$  positif et  $p$  appartenant à  $\mathbf{Z}$ , soit  $A(n, \varepsilon, p)$  le domaine de  $\Omega_n$  où l'on a

$$p \cdot \varepsilon \leq f \leq (p + 1) \cdot \varepsilon.$$

Soit, alors,  $A'(n, \varepsilon, p)$  l'élément de  $\mathcal{A}_n$  tel que

$$\mu[A(n, \varepsilon, p) \Delta A'(n, \varepsilon, p)] = 0.$$

La famille  $(A'(n, \varepsilon, p))_{n > 0, p \in \mathbf{Z}}$  est un élément  $\alpha$  de  $I$  qui satisfait à la condition du lemme.

B.2. THÉORÈME. — On suppose qu'il existe une partie  $H$  de  $V$  bornée et complète pour la topologie  $\sigma(V, V')$  telle que, pour tout élément  $A$  de  $\mathcal{F}$ ,  $\varphi(A)/\mu(A)$  appartienne à  $H$ . Alors,

1°  $\varphi$  admet une densité faible  $f$  relativement à  $\mu$  (cf. [6]);

2° Pour toute base privilégiée, les dérivants  $(D_\alpha^z)_{\alpha \in I}$  convergent, suivant  $I$ , faiblement uniformément vers  $f$ .

*Preuve.* — D'après le théorème de Radon-Nikodym, les hypothèses du théorème B.2 impliquent que, pour tout  $y$  appartenant à  $V'$ , la mesure scalaire  $\langle \varphi, y \rangle$  admet, par rapport à  $\mu$ , une densité  $\mu$ -essentiellement

bornée. Le lemme B.1 exprime alors que la famille des dérivants  $(D_\alpha)_{\alpha \in I}$  est faiblement uniformément de Cauchy. On en déduit le théorème B.2 puisque  $H$  est une partie complète.

**B.3. Exemple.** — Dans [3], DINCULEANU démontre, entre autres, un théorème de Radon-Nikodym où la mesure est à valeurs dans un espace d'opérateurs (cf. théorème 1 de [3]). On peut noter que ce résultat est un cas particulier du théorème B.2. Utilisons les notations de [3], c'est-à-dire :  $\mathfrak{B}$  est un anneau de parties de  $T$ ,  $E$  et  $F$  sont deux espaces de Banach,  $Z$  est un sous-espace du dual fort  $F'$  de  $F$ ,  $Z'$  est le dual fort de  $Z$ , et  $m$  est une fonction  $\sigma$ -additive, définie sur  $\mathfrak{B}$  et à valeurs dans  $\mathcal{L}(E, F)$  dont la variation totale  $\mu$  est finie.

On se propose de prouver qu'il existe une application  $U_m$  de  $T$  dans  $\mathcal{L}(E, Z')$  telle que, si  $x$  appartient à  $E$ , si  $z$  appartient à  $Z$ , et si  $A$  appartient à  $\mathfrak{B}$ , on a

$$\langle m(A).x, z \rangle = \int_A \langle U_m(t).x, z \rangle d\mu(t)$$

(résultat de la 3<sup>1</sup>e ligne de la page 186 de [3]).

*Preuve.* — On décompose la démonstration en deux parties.

(a) Désignons par  $h$  l'application canonique de  $\mathcal{L}(E, F)$  dans  $\mathcal{L}(E, Z')$ , définie par  $\langle ux, z \rangle = \langle h(u)x, z \rangle$  pour  $x$  appartenant à  $E$ ,  $z$  appartenant à  $Z$ , et  $u$  appartenant à  $\mathcal{L}(E, F)$ . Cette application a une norme inférieure ou égale à 1. La fonction  $h \circ m$  est donc une mesure vectorielle définie sur  $\mathfrak{B}$ , à valeurs dans  $\mathcal{L}(E, Z')$ , et de variation totale inférieure ou égale à  $\mu$ . On pose  $\varphi = h \circ m$ .

(b) On désigne par topologie  $\mathfrak{T}$  sur  $V = \mathcal{L}(E, Z')$  la topologie de la convergence simple sur  $E$ ,  $Z'$  étant muni de la topologie faible  $\sigma(Z', Z)$ . On désigne par  $V'$  le dual de  $V$  pour la topologie  $\mathfrak{T}$ . D'après [1] (§ 2, cor. 3), la boule unité de  $\mathcal{L}(E, Z')$  est relativement compacte pour la topologie  $\mathfrak{T}$ . On peut donc appliquer le théorème B.2 ci-dessus en posant  $T = \Omega$ ,  $\mathfrak{F} = \delta$ -anneau engendré par  $\mathfrak{B}$ , et  $U_m = \varphi$  ( $m$  se prolonge évidemment à  $\mathfrak{F}$  puisque la variation totale de  $m$  est finie).

(c) Notons que, dans le cas de [3], la norme de  $h$  est égale à 1 (cf. haut de la page 183), donc la norme de  $U_m$  est égale à 1.

**B.4. Remarques sur l'hypothèse « complet ».** — Dans ce paragraphe, on suppose que  $\varphi/\mu(\mathfrak{A})$  est contenu dans une partie  $H$  bornée pour la topologie  $\sigma(V, V')$ . Pour pouvoir appliquer le théorème B.2, il suffit que l'adhérence  $\overline{H}$  de  $H$  soit complète. Notamment :

(a) Si  $V$  est le dual  $W'$  d'un espace tonnelé séparé, on sait que  $V = W'$  est quasi-complet pour la topologie  $\sigma(V, W)$ , donc  $\overline{H}$  est complet;

(b) Si  $V$  est un espace tonnelé, désignons par  $V'$  son dual, et  $V''$  son bidual;  $V$  peut être considéré comme plongé dans  $V''$ , donc  $\varphi$  peut être considérée comme une fonction à valeurs dans  $V''$ . D'après B. 2 et B. 4 (a), il existe donc une densité à valeurs dans  $V''$ , densité pour la topologie  $\sigma(V'', V')$ .

**C. Étude des dérivants si  $V$  est un espace de Banach.**

C. 1. *Hypothèses et notations.* — Dans tout ce paragraphe C, on conserve les hypothèses indiquées en A. 1, et on suppose, de plus, que  $V$  est un espace de Banach et que  $\varphi$  est fortement  $\sigma$ -additive, ce qui équivaut (cf. [6]) à prendre pour  $V'$  le dual de  $V$  dans l'hypothèse A. 1 (c). La norme dans  $V$  sera notée  $|\cdot|$ .

Notons que le fait de supposer l'existence de  $\mu$  ne restreint en rien la généralité de  $\varphi$  à cause du lemme fondamental IV. 10.5 de [4].

On désigne par  $v(A)$  la variation totale de  $\varphi$  sur  $A$  ( $A$  étant un élément de  $\mathcal{F}$ ). On désigne par  $\mathcal{S}$  la famille des éléments  $S$  de  $\mathcal{F}$  tels que : si  $B$  appartient à  $\mathcal{F}$  et si  $B$  est contenu dans  $S$ , alors  $v(B)$  est, soit nulle, soit infinie. On vérifie que  $\mathcal{S}$  est stable pour la réunion dénombrable et que, si  $S$  appartient à  $\mathcal{S}$ , si  $A$  appartient à  $\mathcal{F}$ , et si  $A$  est contenu dans  $S$ , alors  $A$  appartient à  $\mathcal{S}$ .

C. 2. LEMME. — *Il existe un élément  $K$  de  $\mathcal{S}$  tel que la variation totale de  $\varphi$  soit  $\sigma$ -finie sur  $(\Omega \setminus K)$ .*

*Preuve.* — Supposons  $\mu$  finie (cf. lemme IV. 10.5 de [4]). Soit  $a$  la borne supérieure des  $\mu(A)$  pour tous les éléments  $A$  de  $\mathcal{F}$  tels que  $v(A) < +\infty$ . Soit  $(A_n)_{n>0}$  une suite d'éléments  $A_n$  de  $\mathcal{F}$  telle que :

- d'une part, pour tout  $n$ ,  $v(A_n) < +\infty$ ;
- d'autre part,  $a = \sup_{n>0} \mu(A_n)$ .

Il suffit, alors, de prendre pour  $K$  le complémentaire de la réunion des ensembles  $A_n$ .

Sur  $(\Omega \setminus K)$ , on connaît le comportement des dérivants (cf. B. 2 ci-dessus). On va donc, maintenant, étudier le comportement des dérivants sur  $K$ .

C. 3. LEMME (fondamental). — *Quel que soit l'élément  $S$  de  $\mathcal{S}$  et quel que soit l'entier positif  $p$ , il existe une partition dénombrable  $(S_n)_{n>0}$  de  $S$  telle que :  $D$  contenu dans  $S_n$  et  $\mu(D) \neq 0$  implique  $|\varphi(D)/\mu(D)| \geq p$ .*

*Preuve.* — Pour alléger l'écriture, on dira qu'un élément  $A$  de  $\mathcal{F}$  satisfait à la condition  $p^*$  s'il existe une partition  $(A_n)_{n>0}$  de  $A$  telle que :  $D$  contenu dans  $A_n$  et  $\mu(D) \neq 0$  implique  $|\varphi(D)/\mu(D)| \geq p$ .

On considère, alors, un entier positif  $p$ , un élément  $S$  de  $\mathcal{S}$  et une partition  $(R_n)_{n>0}$  de  $S$  telle que, pour tout  $n$ ,  $\mu(R_n)$  soit finie. Soit  $\mathcal{R}_n$  la

famille des éléments de  $\mathcal{F}$  contenus dans  $R_n$  et satisfaisant à la condition  $p^*$ . Soit  $a_n$  la borne supérieure des  $\mu(A)$  pour tous les éléments  $A$  de  $\mathcal{R}_n$ , et soit  $(R_{n,k})_{k>0}$  une suite d'éléments disjoints de  $\mathcal{R}_n$  telle que

$$a_n = \sup_{k>0} \mu \left[ \bigcup_{j<k} R_{n,j} \right].$$

Soit

$$B = R_{n,0} = R_n \setminus \bigcup_{k>0} R_{n,k}.$$

On va d'abord prouver que  $\mu(B) = 0$ . Pour cela, raisonnons par l'absurde. On suppose donc  $\mu(B) \neq 0$ , ce qui implique  $v(B) \neq 0$ . Il existe donc une partition finie  $(B_k)_{k \in K}$  de  $B$  telle que :

$$\sum_{k \in K} |\varphi(B_k)| \geq 2p \sum_{k \in K} \mu(B_k) = 2p \cdot \mu(B).$$

donc il existe un élément  $k_0$  de  $K$  tel que  $\mu(B_{k_0}) \neq 0$  et  $|\varphi(B_{k_0})| \geq 2p \cdot \mu(B_{k_0})$ . Étant donné le vecteur  $x = \varphi(B_{k_0})$ , d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un élément  $y$  du dual  $V'$  de  $V$  tel que  $|y| = 1$  et  $\langle x, y \rangle = |x|$ . Soit  $f$  la densité, relativement à  $\mu$ , de la mesure réelle  $\langle \varphi, y \rangle$ . Par construction, on a

$$\langle \varphi(B_{k_0}), y \rangle = |\varphi(B_{k_0})| \geq 2p \cdot \mu(B_{k_0}),$$

donc le domaine  $Q$ , où  $f$  est supérieur ou égal à  $p$ , à une mesure  $\mu(Q)$  non nulle. Mais, pour tout élément  $D$  de  $\mathcal{F}$  contenu dans  $Q$ , on a  $|\varphi(D)|/\mu(D) \geq p$ , ce qui contredit la définition de  $a_n$ .

On en déduit, alors, que  $(R_{n,k})_{n>0, k>0}$  constitue une partition de  $S$  qui satisfait à la condition du lemme.

C.4. THÉORÈME. (*Etude des dérivants sur  $K$* ). — Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré, la mesure  $\mu$  étant positive et  $\sigma$ -finie. Soit  $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in I}$  une base de dérivation privilégiée (cf. A.3 ci-dessus). Soit  $V$  un espace de Banach et soit  $\varphi$  une application de  $\mathcal{F}$  dans  $V$  fortement  $\sigma$ -additive et dominée par  $\mu$ . Soit  $K$  un élément de  $\mathcal{F}$  tel que, pour tout élément  $A$  de  $\mathcal{F}$  contenu dans  $K$ , la variation totale  $v(A)$  de  $\varphi$  sur  $A$  est, soit nulle, soit infinie. Alors, il existe un élément  $K'$  de  $\mathcal{F}$  tel que  $\mu(K') = v(K') = 0$  et tel que la famille  $|D_x^\varphi|$  converge, suivant  $I$ , vers  $+\infty$  sur  $(K \setminus K')$ .

*Preuve.* — On désigne par  $\mathfrak{A}$  et par  $(\Omega_n)_{n>0}$  l'anneau et la partition associés à la base de dérivation privilégiée considérée (cf. A.3 ci-dessus). Pour alléger l'écriture, on suppose que  $K$  est contenu dans l'un des  $\Omega_n$ .

A tout entier  $p$ , associons une partition  $(K_n'')_{n>0}$  de  $K$  telle que  $D$  contenu dans  $K_n''$ ,  $D$  élément de  $\mathcal{F}$  et  $\mu(D) \neq 0$  implique  $|\varphi(D)|/\mu(D) \geq p$  (cf. C.3 ci-dessus). Étant donné  $K_n''$ , soit  $K_n'''$  l'élément de  $\mathfrak{A}$  tel que

$\mu(K'_n \Delta K''_n) = 0$ . Posons

$$K' = \bigcup_{n>0, p>0} (K''_n \setminus K'_n).$$

On a  $\mu(K') = 0$ . Soient un entier  $p$  et un élément  $\omega$  de  $(K \setminus K')$ . Il existe  $n_0$  tel que  $\omega$  appartienne à  $K''_{n_0}$ . Soit  $\alpha$  la partition  $\{K''_{n_0}, (\Omega_{n_0} \setminus K''_{n_0}), (\Omega_k)_{k \neq n_0}\}$  : pour toute partition  $\beta$  plus fine que  $\alpha$ , on aura  $|D_{\beta}^{\omega}(\omega)| \geq p$ .

C. Q. F. D.

C.5. *Contre-exemples.* — On désigne par  $c_0$  l'espace de Banach des suites  $(x_n)_{n>0}$  de réels convergeant vers zéro muni de la norme

$$\|x\|^{\infty} = \sup_{n>0} |x_n| \quad (\text{cf. [4]}).$$

Notons que  $c_0$  et son dual fort  $l_1$  sont séparables.

(a) *Premier contre-exemple :* Le but du contre-exemple qui suit est de montrer que la variation totale peut être  $\sigma$ -finie sans être finie; la question se pose, car, si  $V$  est de dimension finie, alors la variation totale est finie puisque  $\varphi$  est  $\sigma$ -additive.

On prend  $\Omega = \mathbf{N}$  et  $V = c_0$ ; on prend pour  $\mathcal{F}$  la tribu des parties de  $\mathbf{N}$ ; enfin, on pose

$$\varphi(\{n\}) = \frac{1}{n} (\delta_{n,p})_{p>0}$$

avec

$$\delta_{n,p} = 1 \quad \text{si } n = p \quad \text{et} \quad \delta_{n,p} = 0 \quad \text{si } n \neq p.$$

On vérifie facilement que  $\varphi$  est  $\sigma$ -additive de variation totale  $\sigma$ -finie, mais non finie.

(b) *Deuxième contre-exemple :* Son but est de montrer que l'ensemble  $K$  du lemme C.2 ou du théorème C.4 n'est pas nécessairement de mesure nulle,  $\varphi$  étant à valeurs dans un espace réflexif séparable (1).

On pose  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F}$  = tribu des boréliens de  $\Omega$ , et  $\mu$  = mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{F}$ . Soit  $V = L^2(\mu)$  (espace de Hilbert séparable), et soit  $\varphi$  l'application de  $\mathcal{F}$  dans  $V$  définie par  $\varphi(A) = \mathbf{1}_A$ .

Alors,  $\varphi$  est une application fortement  $\sigma$ -additive de  $\mathcal{F}$  dans  $V$  dominée par  $\mu$ . De plus, si  $A$  appartient à  $\mathcal{F}$  et si  $\mu(A) \neq 0$ , il existe  $B$  et  $C$  éléments de  $\mathcal{F}$  tels que

$$B \cap C = \emptyset, \quad A = B \cup C \quad \text{et} \quad \mu(B) = \mu(C),$$

ce qui implique

$$|\varphi(B)| + |\varphi(C)| = \sqrt{2} \cdot |\varphi(A)|.$$

On en déduit facilement que la variation totale de  $\varphi$  est infinie sur tout borélien  $D$  de mesure  $\mu(D)$  non nulle.

---

(1) Ce contre-exemple m'a été signalé par G. CHOQUET.



### D. Étude des densités si $V$ est un espace de Banach.

D.1. *Hypothèses et notations.* — Dans tout ce paragraphe D, en plus des hypothèses indiquées en A.1, on suppose que  $V$  est un dual  $W'$  d'espace de Banach  $W$ , et que  $\varphi$  est fortement  $\sigma$ -additive. Les normes dans  $W$  et  $W'$  seront notées  $|\cdot|$ . Remarquons que, si  $V$  est un espace de Banach quelconque, tout ce qui suit s'applique à condition de considérer  $V$  comme « plongé » dans son bidual  $V''$ .

On conserve les notations indiquées en C.1.

D.2. LEMME (topologique). — Soit  $H$  une partie séparable du dual  $W'$  d'un espace de Banach  $W$  : alors, il existe une famille dénombrable  $(z_n)_{n>0}$  d'éléments de la boule unité de  $W$  telle que, pour tout élément  $y$  de  $H$ , on ait

$$|y| = \sup_{n>0} |\langle z_n, y \rangle|.$$

*Preuve.* — Soit  $(y_n)_{n>0}$  une suite d'éléments de la boule unité de  $H$ , dense dans cette boule. Étant donnés deux entiers  $n$  et  $k$ , soit  $x_{n,k}$  un élément de la boule unité de  $W$  tel que  $|\langle y_n, x_{n,k} \rangle| \geq 1 - 1/k$ . La famille dénombrable  $(x_{n,k})_{n>0, k>0}$  satisfait aux conditions du lemme.

D.3. LEMME. — En plus des hypothèses indiquées en D.1, on suppose qu'il existe une densité faible de  $\varphi$  relativement à la dualité  $(W', W)$ , c'est-à-dire une application  $f$  de  $\Omega$  dans  $W'$  telle que, pour tout élément  $x$  de  $W$ , et pour tout élément  $A$  de  $\mathcal{F}$ , on ait

$$\langle \varphi(A), x \rangle = \int_A \langle f, x \rangle \cdot d\mu.$$

Soit  $\mathcal{A}$  une tribu à base dénombrable contenue dans  $\mathcal{F}$  : alors, il existe une tribu  $\mathcal{G}$  telle que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  et telle que, relativement à  $\mathcal{G}$ ,  $\varphi$  a une variation totale  $\sigma$ -finie.

*Preuve.* — Soit  $(C_k)_{k>0}$  une partition de  $\Omega$  (constituée d'éléments de  $\mathcal{F}$ ) telle que, pour tout  $k$ ,  $\mu(C_k) < +\infty$ .

On désigne par  $\mathcal{G}_1$  la tribu engendrée par  $\mathcal{A}$  et la partition ci-dessus. On construit  $\mathcal{G}_n$  par récurrence de la façon suivante :

Étant donnée  $\mathcal{G}_n$  tribu à base dénombrable, soit  $K_n$  le sous-espace vectoriel de  $W'$  fortement fermé engendré par  $\varphi(\mathcal{G}_n)$  (qui est donc séparable). D'après le lemme D.2, il existe une suite  $(z_{n,k})_{k>0}$  ( $n$  fixé) telle que, pour tout  $k$ ,

$$|z_{n,k}| = 1 \quad \text{et} \quad |y| = \sup_{k>0} |\langle z_{n,k}, y \rangle|.$$

Soit  $\mathcal{G}_{n+1}$  la tribu qui contient  $\mathcal{G}_n$  et qui rend mesurable toutes les « projections »  $\langle f, z_{n,k} \rangle$  pour  $n$  fixé et  $k$  positif (la tribu  $\mathcal{G}_{n+1}$  est à base dénombrable puisque la tribu des boréliens de  $\mathbf{R}$  est à base dénombrable).

On désigne, alors, par  $\mathcal{G}$  la tribu engendrée par la réunion des  $\mathcal{G}_n$  (pour  $n$  positif), et par  $K$  le sous-espace vectoriel de  $W'$  fortement fermé engendré par la réunion des  $K_n$  (pour  $n$  positif).

Soit  $A_{n,k}^p$  l'ensemble des éléments  $\omega$  de  $\Omega$  tels que  $[\langle f(\omega), z_{n,k} \rangle] \leq p$ . Posons alors

$$A^p = \bigcap_{n>0, k>0} A_{n,k}^p \quad (\text{ce qui définit un élément de } \mathcal{G}).$$

$$\Omega = \bigcup_{p>0} A^p$$

et, si  $B$  appartient à  $\mathcal{F}$  et est contenu dans  $A^p$ , la variation totale de  $\varphi$  sur  $B$ , variation relativement à la tribu  $\mathcal{G}$ , est inférieure ou égale à  $[p \cdot \mu(B)]$ , donc la variation totale de  $\varphi$  est  $\sigma$ -finie relativement à la tribu  $\mathcal{G}$ .

D.4. THÉORÈME. — Soit  $W'$  un dual d'espace de Banach  $W$ , soit  $\Omega$  un ensemble et soit  $\mathcal{F}$  une tribu de parties de  $\Omega$ ; soit  $\varphi$  une application de  $\mathcal{F}$  dans  $W'$  fortement  $\sigma$ -additive. Alors, il existe un élément  $K$  de  $\mathcal{F}$  tel que, quelle que soit la mesure  $\mu$  positive  $\sigma$ -finie dominant  $\varphi$  et quelle que soit la famille  $(D_\alpha)_{\alpha \in I}$  des dérivants associés à une base privilégiée (cf. A.3 ci-dessus), on a :

— d'une part, sur  $(\Omega \setminus K)$  :

(a) la variation totale de  $\varphi$  est  $\sigma$ -finie,

(b) sauf sur un ensemble de mesure  $\mu$ -nulle,  $D_\alpha$  converge, suivant  $I$ , uniformément pour  $\sigma(W', W)$ , vers une densité faible, pour la dualité  $(W', W)$ , de  $\varphi$  relativement à  $\mu$ ;

— d'autre part :

(a)  $K$  appartient à  $\mathcal{S}$  (cf. C.1),

(b) sur  $K$ , la famille  $|D_\alpha|$  converge, suivant  $I$ ,  $\mu$ -presque partout vers  $+\infty$ ,

(c) sur tout élément  $S$  de  $\mathcal{F}$  contenu dans  $K$  tel que  $\mu(S) \neq 0$ ,  $\varphi$  n'admet pas de densité faible relativement à  $\mu$ .

La première partie de ce théorème découle de C.2 et B.2 et le (b) de la deuxième partie se déduit de C.4. Soit, alors, un élément  $S$  de  $\mathcal{F}$  comme indiqué au (c); à tout entier positif  $p$ , on associe une partition  $(S'_n)_{n>0}$  de  $S$  comme indiqué en C.3; on désigne par  $\mathcal{H}$  la tribu engendrée par la famille  $(S'_n)_{n>0, p>0}$ ; le lemme D.3 montre alors qu'on ne peut pas avoir de densité faible, puisque la variation de  $\varphi$  relativement à toute tribu contenant  $\mathcal{H}$  est, par construction de  $\mathcal{H}$ , non  $\sigma$ -finie.

D.5. COROLLAIRE. — Si  $W$  est un espace réflexif,  $\varphi$  admet une densité faible si et seulement si  $\varphi$  admet une densité forte.

Preuve. — Il suffit d'utiliser le théorème 11 de [6] (voir aussi le théorème 7 de [2]).

## BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BOURBAKI (Nicolas). — *Espaces vectoriels topologiques*, chap. 3-5. — Paris, Hermann, 1955, (*Act. Scient. et ind.*, 1229; *Bourbaki*, 18).
- [2] CHATTERJI (S. D.). — Martingale convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces, *Math. Scand.*, Kobenhavn, t. 22, 1968, p. 21-41.
- [3] DINCULEANU (N.). — Integral representation of vector measures and linear operations, *Studia Math.*, Warszawa, t. 25, 1965, p. 181-205.
- [4] DUNFORD (Nelson) and SCHWARTZ (Jacob I.). — *Linear operators*, Part. I : *General theory*. 2nd edition. — New York, Interscience Publishers, 1967 (*Pure and applied mathematics. Interscience*, 7).
- [5] IONESCU-TULCEA (Alexandra and Cassius). — On the lifting property, I., *J. math. Anal. and Appl.*, t. 3, 1961, p. 537-546.
- [6] MÉTIVIER (Michel). — Martingales à valeurs vectorielles. Applications à la dérivation des mesures vectorielles. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 17, 1967, fasc. 2, p. 175-208.

(Texte reçu le 26 juin 1970.)

Jean PELLAUMAIL,  
M. Ass. I.N.S.A.,  
Avenue des Buttes de Goësmes,  
35-Rennes.

---