H. SEYDI

Anneaux henséliens et conditions de chaînes. III

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 329-336
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__329_0>

Bull. Soc. math. France,
98, 1970, p. 329 à 336.

ANNEAUX HENSÉLIENS ET CONDITIONS DE CHAÎNES, III

PAR

Hamet SEYDI.

Résumé. — Cet article fait suite à deux articles antérieurs. L'étude de la deuxième condition des chaînes d'un anneau local intègre A peut se faire uniquement en regardant les clôtures intégrales des anneaux quotients intègres de A.

Enfin, les chaînes d'idéaux premiers dans un anneau A et dans l'anneau quotient A/tA (où t est un élément régulier et A est local et noethérien) sont comparées

Introduction.

On se propose dans cet article d'améliorer certains résultats et certaines hypothèses de [6]. Les résultats établis ici permettent de voir plus clairement pourquoi un anneau local noethérien hensélien caténaire est universellement caténaire. On sait qu'il existe des anneaux locaux noethériens intègres, de dimension 2, à fibres formelles géométriquement régulières, qui ne sont pas universellement caténaires. En tenant compte de ([6], 1.1), on en conclut qu'il existe des anneaux locaux noethériens intègres, de dimension 3, à fibres formelles géométriquement régulières, qui ne sont pas caténaires. Par contre, tout anneau local hensélien noethérien, à fibres formelles géométriquement normales, est universellement caténaire. Il est même plausible que tout anneau local nœthérien hensélien soit caténaire. Si des résultats avancés devaient mettre en défaut cette conjecture, ce serait probablement à partir de la dimension 3.

I. A propos de la deuxième condition des chaînes.

Dans [6], nous avons montré que, pour les anneaux noethériens, notre définition de la deuxième condition des chaînes est équivalente à celle de Nagata. En fait, même pour les anneaux, non nécessairement noethériens de dimension finie, les deux définitions sont équivalentes. On a la proposition suivante :

Théorème (I.1). — *Soit A un anneau intègre (non nécessairement noethérien) de dimension finie. Alors A satisfait à la deuxième condition des chaînes si, et seulement si, toute A-algèbre entière intègre B, contenant A, satisfait à la première condition des chaînes.*

Preuve. — Soient A' une A-algèbre entière intègre, et a_i, $i \in I$, des éléments qui engendrent A' comme A-module. Pour tout indice $i \in I$, soit T_i une indéterminée, et soit $f_i(T_i)$ un polynôme unitaire à coefficients dans A annulé par a_i. Alors

$$B' = A[T_i]_{i \in I}/(f_i(T_i))_{i \in I}$$

est un A-module plat et l'on a un homomorphisme surjectif $B' \to A'$ d'anneaux. Puisque B' est une A-algèbre sans torsion, on en conclut que B' est caténaire et équidimensionnel, et tous ses idéaux maximaux ont même hauteur d'après l'hypothèse faite. Donc A' est caténaire. D'autre part, puisque B' est caténaire et équidimensionnel de dimension finie, l'anneau A', qui est un quotient intègre de B', est nécessairement équidimensionnel. D'où la conclusion, puisque l'hypothèse faite est évidemment nécessaire.

Remarque (I.2). — *Il convient de remarquer qu'il n'est pas évident qu'un anneau quotient intègre d'un anneau caténaire de dimension infinie soit équidimensionnel.* Nous pensons même que ce doit être faux.

Pour les anneaux de valuation de dimension arbitraire, le théorème (I.1) est cependant vrai. Nous avons même le résultat suivant :

Théorème (I.3). — *Tout anneau de valuation caténaire satisfait à la deuxième condition des chaînes.*

Preuve. — Puisqu'un anneau quotient intègre d'un anneau de valuation A est un anneau de valuation, donc est intégralement clos, on en conclut que tous les idéaux maximaux d'une A-algèbre entière intègre ont même hauteur d'après le deuxième théorème de Cohen-Seidenberg. Il nous suffit donc de prouver le théorème suivant :

Théorème (I.3.1). — *Soient A un anneau de valuation, B une A-algèbre entière contenant A, $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{p}'$ deux idéaux premiers de B', et*

$$\mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{q}', \qquad \mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{p}'.$$

Alors, pour toute chaîne d'idéaux premiers

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}_s = \mathfrak{p},$$

il existe une chaîne d'idéaux premiers

$$\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}'_0 \subset \mathfrak{q}'_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}'_s = \mathfrak{p}', \qquad \textit{avec} \quad \mathfrak{q}'_i \cap A = \mathfrak{q}_i, \quad \forall\, i, \quad 0 \leqq i \leqq s.$$

En particulier, si A est caténaire, B est aussi caténaire.

Preuve. — L'anneau $A/\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation, donc est intégralement clos. Donc l'assertion découle du deuxième théorème de Cohen-Seidenberg.

C. Q. F. D.

II. Conditions de chaînes et clôture intégrale.

Dans ce chapitre, nous voulons montrer que pour vérifier la deuxième condition des chaînes pour un anneau A, il suffit de vérifier la première condition des chaînes pour les A-algèbres entières intègres, B, telles que B et l'image de A dans B aient même corps des fractions (du moins si A est de dimension finie). NAGATA avait d'ailleurs pressenti ce fait ([4], prop. 1 *a* et 1 *b*). Mais ses démonstrations ne nous paraissent pas complètes.

Pour cela, nous introduirons les deux conditions suivantes de NAGATA :

CONDITION (C'). — *A est un anneau intègre et toute A-algèbre finie monogène contenue dans le corps des fractions de A satisfait à la première condition des chaînes.*

CONDITION (C''). — *A est un anneau intègre et sa clôture intégrale satisfait à la première condition des chaînes.*

THÉORÈME (II.1). — *Soit A un anneau local noethérien intègre. Les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

1° *A est universellement caténaire;*

2° *Tout anneau quotient intègre de A satisfait à la condition* (C').

Preuve. — Puisque A est noethérien, sa clôture intégrale est un anneau semi-local ([3], 33.10, p. 118), on en conclut que A satisfait à la condition (C''); pour les mêmes raisons, tout anneau quotient intègre de A satisfait à la conditon C''. Il nous suffit donc de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME (II.2). — *Soit A un anneau intègre de dimension finie. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

1° *A satisfait à la deuxième condition des chaînes;*

2° *Tout anneau quotient intègre de A satisfait à la condition* (C'').

Preuve. — Il est clair que 1° implique 2°. Montrons maintenant que 2° implique 1°. On raisonnera par récurrence sur $n = \dim A$. L'assertion est triviale si $n \leqq 1$. Supposons donc $n \geqq 2$. Il est facile de voir qu'on peut se ramener au cas où A est local.

Soit A_H le henselisé de A, et soit P' un idéal premier de hauteur 1 de A_H. Posons $P = P' \cap A$. Alors P est de hauteur 1 et, d'après l'hypothèse de récurrence, A_H/P' est caténaire et de dimension $n-1$. Puisque cela est vrai pour tout idéal premier de hauteur 1 de A_H, on en conclut que A_H est caténaire et équidimensionnel.

Soit Q un idéal premier minimal de A_H, et posons $R = A_H/Q$.

Soient R' la clôture intégrale de R, et P' un idéal premier de hauteur 1 de R. Posons $P = P' \cap A$. Il est facile de voir que A_P satisfait à la condition (C''), donc puisque $R'_{P'}$ est un anneau de fractions d'une A-algèbre entière intègre contenant A, on en conclut que

$$\dim(A_P) = \dim(R'_{P'}) = 1.$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à A/P, l'anneau R'/P, est caténaire et de dimension $n-1$. Puisque cela est vrai pour tout idéal premier de hauteur 1 de R', on en conclut que R' satisfait à la première condition des chaînes. On en conclut donc, par récurrence sur n, que R satisfait à l'hypothèse 2° de (II.2). D'autre part, d'après ([6], 1.3), on sait qu'il suffit de vérifier que tous les anneaux $R' = A_H/Q$, où R parcourt l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A_H, satisfont à la deuxième condition des chaînes. On est donc ramené au cas où A est hensélien. Soit donc B un anneau intègre contenant A, et entier sur A. Considérons $0 = Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_s$ une chaîne saturée d'idéaux premiers de B. Posons

$$P_i = Q_i \cap A \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq i \leqq s.$$

Puisque B est local, on en conclut que

$$\dim(B/Q_{s-1}) = 1 = \dim(A/P_{s-1}).$$

D'autre part, $A_{P_{s-1}}$ satisfait à la condition (C''), donc $\dim(A_{P_{s-1}}) = s-1$, d'après l'hypothèse de récurrence, puisque $A_{P_{s-1}}$ satisfait à l'hypothèse 2° de (II.2). Donc $s = \dim(A)$ puisque A est caténaire, d'où la conclusion.

REMARQUE (II.2.1). — *En raisonnant par récurrence sur* $n = \dim(A)$, *on voit facilement que* (II.1) *est une conséquence de* ([6], 1.15). *D'ailleurs, pour les anneaux noethériens,* (II.1) *est un cas particulier du théorème suivant :*

THÉORÈME (II.2.2). — *Soit A un anneau local noethérien intègre. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *A est universellement caténaire;*

2° *Pour tout anneau quotient intègre B de A, et tout idéal maximal M' de la clôture intégrale B' de B, on a l'égalité*

$$\dim(B'_{M'}) = \dim(B)$$

et A est caténaire.

Preuve. — On raisonne par récurrence sur $n = \dim(A)$. L'assertion est triviale si $n \leqq 1$. Supposons donc $n \geqq 2$. Donc, pour tout idéal premier de hauteur 1 de A, l'anneau A/P est universellement caténaire. On voit donc que toutes les conditions d'application de ([6], 1.15) sont remplies, d'où la conclusion.

COROLLAIRE (II.2.3). — *Tout anneau local hensélien caténaire normal de dimension* $\leqq 3$ (*non nécessairement noethérien*) *satisfait à la deuxième condition des chaînes.*

Preuve. — Un tel anneau satisfait à l'hypothèse 2° de (II.2), d'où la conclusion.

COROLLAIRE (II.2.4). — *Tout anneau local hensélien noethérien factoriel, de dimension* 3, *est universellement caténaire.*

Preuve. — Soit A un tel anneau, et soit P un idéal premier de hauteur 1 de A. Puisque P est principal, $\dim(A/P) = 2$, donc A/P est caténaire. Puisque cela est vrai pour tout idéal premier de hauteur 1 de A, on en conclut que A est caténaire.

C. Q. F. D.

On a même :

PROPOSITION (II.3). — *Tout anneau factoriel de dimension* 3 *est caténaire.*

III. Conditions de chaînes et Multiplicité.

Dans ce chapitre, nous voulons montrer que, moyennant des hypothèses de finitude, un anneau local A, de multiplicité 1, universellement caténaire, est régulier. Nous énonçons le principal résultat :

THÉORÈME (III.1). — *Soit A un anneau local noethérien universellement japonais. On suppose que :*

(i) *A est universellement caténaire et équidimensionnel;*

(ii) *A est de multiplicité* 1.

Alors si B désigne l'un des anneaux A ou $\hat{A}$, l'anneau B_{red} quotient de B par son nilradical est régulier, et B vérifie (R_0) ([2], 5.8.2).

En particulier, A est universellement caténaire, et les fibres formelles de A vérifient S_1 ([2], 5.7.2).

Preuve. — Puisque A est équidimensionnel et de multiplicité 1, on en conclut, d'après ([3], 23.5, p. 76), que A_{red} est intègre et de multiplicité 1, et que A vérifie (R_0). Il nous suffit donc de prouver que A_{red} est régulier. Nous pouvons donc supposer que A est intègre. Nous raisonnerons par récurrence sur $n = \dim(A)$. L'assertion étant vraie pour $n \leqq 1$, nous pouvons supposer $n \geqq 2$. On peut supposer que le corps résiduel de A est infini, en remplaçant A par son henselisé strict, alors A contient un élément superficiel a ([3], 22.3, p. 73). Alors $C = A/aA$ est de multiplicité 1, et $\dim(C) = n - 1$ (*cf.* [3], 24.2, p. 77). Puisque A est caténaire, on en conclut que C est équidimensionnel. En appliquant ([3], 23.5, p, 76) à C, on en conclut que aA n'a qu'un seul idéal premier minimal P, et que $aA_P = PA_P$ et A/P est de multiplicité 1. D'après l'hypothèse de récurrence, A/P est un anneau local régulier. Donc $P = aA$ d'après le lemme de Hironaka ([3], 36.9, p. 134). On en conclut donc que A est un anneau local régulier

C. Q. F. D.

THÉORÈME (III.2). — *Soit A un anneau local noethérien. On suppose que :*

(i) *A est universellement caténaire et équidimensionnel, et* $(A_{\text{red}})^{\wedge}$ *vérifie* S_1 ;

(ii) *A est de multiplicité* 1.

Alors si B désigne l'un des anneaux A ou $\hat{A}$, l'anneau B_{red} est régulier, et B vérifie (R_0).

En particulier, les fibres formelles de A vérifient S_1.

Preuve. — D'après ([3], 23.5, p. 76), A_{red} est de multiplicité 1. D'autre part, $(A_{\text{red}})^{\wedge}$ est équidimensionnel, donc, d'après le théorème de Samuel-Nagata ([3], 40, 6, p. 157), A_{red} est un anneau local régulier. De plus, puisque A est de multiplicité 1, il vérifie (R_0), d'où la conclusion.

C. Q. F. D.

THÉORÈME (III.3). — *Soit A un anneau local noethérien. On suppose que :*

(i) *A est universellement japonais et de multiplicité* 1 ;

(ii) *A est universellement caténaire et équidimensionnel.*

Alors si B désigne l'un des anneaux A ou $\hat{A}$, B_{red} est un anneau local régulier, et B vérifie (R_0).

Preuve. — Puisque A est universellement japonais, $(A_{\text{red}})^{\wedge}$ est réduit. Donc (II.3) est un cas particulier de (II.2).

C. Q. F. D.

On peut donc énoncer le théorème de Samuel-Nagata sous la forme suivante :

THÉORÈME (III.4). — *Soit A un anneau local noethérien de multiplicité* 1 *qui vérifie l'une des deux propriétés suivantes :*

(i) *A est universellement caténaire, universellement japonais, équidimensionnel, et vérifie* (S_1).

(ii) *$\hat{A}$ est équidimensionnel et vérifie* (S_1).

Alors A est un anneau local régulier.

Preuve. — Dans les deux cas, A vérifie S_1 et R_0, donc A est réduit. Donc A est un anneau local régulier, d'après (III.1), (III.2) et (III.3).

C. Q. F. D.

IV. Relations entre les conditions de chaînes dans un anneau local noethérien A et dans un anneau quotient A/tA.

PROPOSITION (IV.1). — *Soient A un anneau local noethérien universellement japonais, t un élément régulier appartenant à l'idéal maximal de A. Si l'anneau A/tA est réduit, équidimensionnel et universellement caténaire, l'anneau A possède ces trois propriétés.*

Preuve. — Soit $\hat{A}$ le complété de A, alors $\hat{A}/t\hat{A}$ est le complété de A/tA. Donc $\hat{A}/t\hat{A}$ est équidimensionnel et réduit puisque A/tA est universellement japonais et universellement caténaire, et en plus est réduit. Donc, d'après ([2], 5.12.5) appliqué pour $k = 0$, on en conclut que $\hat{A}$ est réduit et équidimensionnel, d'où la conclusion.

REMARQUE (IV.2). — *Si dans l'énoncé de* (IV.1), *on ne suppose pas que A/tA est réduit, il peut se faire que A ne soit pas universellement caténaire.*

Par exemple, soit A un anneau local noethérien intègre de dimension 2 à fibres formelles géométriquement régulières qui n'est pas universellement caténaire (*cf.* [2], 18.7.7). En particulier, A n'est pas un anneau de Cohen-Macaulay. Donc pour tout élément régulier t, appartenant à l'idéal maximal de A, A/tA ne vérifie pas (S_1), et *a fortiori* n'est pas réduit. D'autre part, A/tA est universellement caténaire et équidimensionnel. Mais A n'est pas universellement caténaire.

Cependant on peut remplacer la condition « A/tA est réduit » par « A/tA vérifie (S_1) » et, d'après la remarque faite plus haut, on ne peut pas supprimer cette hypothèse. On peut donc énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION (IV.3). — *Soient A un anneau local noethérien universellement japonais, et t un élément régulier appartenant à l'idéal maximal de A. Si A/tA est universellement caténaire, équidimensionnel et vérifie (S_1), l'anneau A possède ces trois propriétés.*

Preuve. — D'après les hypothèses faites, $\hat{A}/t\hat{A}$ est équidimensionnel et vérifie (S_1), il en est donc de même de $\hat{A}$ d'après ([2], 5.12.2).

REMARQUE (IV.4). — *On peut, dans* (IV.3), *remplacer la condition « A est universellement caténaire » par la condition « $\hat{A}/t\hat{A}$ vérifie (S_1) ».*

Il est à noter que le fait qu'un anneau local noethérien vérifie (S_1) n'implique pas que son complété vérifie (S_1) même si A est un anneau local noethérien intègre, strictement hensélien de dimension 2, à corps résiduel algébriquement clos qui vérifie (R_1) (*cf.* [1]).

Errata. — Dans la démonstration de ([6], 1.3, ligne 21), l'isomorphisme $R_H \cong R \otimes_A A_H$ n'est pas exact. Mais cela n'altère nullement la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Ferrand (D.) et Raynaud(M.). — Fibres formelles d'un anneau local noethérien (à paraître aux *Annales de l'Éc. Norm. Sup.*).

[2] Grothendieck (A.) et Dieudonné (J.). — *Éléments de Géométrie algébrique*. Chap. IV : *Étude locale des schémas.* — Paris, Presses universitaires de France, 1964 et 1967 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 24 et 32).

[3] Nagata (M.). — *Local rings.* — New York, Interscience Publishers, 1962 (*Interscience Tracts in pure and applied Mathematics*, 13).

[4] Nagata (M). — On the chain problem of prime ideals, *Nagoya math. J.*, t. 10, 1956, p. 51-64.

[5] Nagata (M.). — The theory of multiplicity in general local rings, Proceeding of the International symposium on algebraic number theory [1955, Tokyo-Nikko], p. 191-226. — Tokyo, Science Council of Japan, 1956.

[6] Seydi (H.). — Anneaux henséliens et conditions de chaînes, I., *Bull. Soc. math. France*, t. 98, 1970, p. 9-31.

[7] Seydi (H.). — Anneaux henséliens et conditions de chaînes, II : La formule des dimensions, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, 1970, série A, p. 696-698.

[8] Zarisk (O.) and Samuel (P.). — *Commutative algebra*. Vol. 1 and 2. — Princeton, New-York, D. Van Nostrand Company, 1960 (*The University Series of higher Mathematics*).

(Texte reçu le 10 juin 1970.)

Hamet Seydi,
Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre et Marie Curie,
75-Paris 5e.