

# BULLETIN DE LA S. M. F.

JOSEPH LE POTIER

## **Une propriété topologique des espaces $q$ -convexes**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 98 (1970), p. 319-328

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1970\\_\\_98\\_\\_319\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__319_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## UNE PROPRIÉTÉ TOPOLOGIQUE DES ESPACES $q$ -CONVEXES

PAR

JOSEPH LE POTIER.

(Poitiers).

### Introduction.

Tous les espaces analytiques seront supposés *complexes, dénombrables à l'infini et réduits*.

On connaît, depuis G. SORANI [8], le résultat suivant, qui concerne l'homologie des variétés analytiques  $q$ -convexes :

**THÉORÈME 1.** — *Soit  $X$  une variété analytique complexe, de dimension complexe  $n$ ,  $q$ -convexe. Alors  $H_{n+i}(X, \mathbf{Z})$  est de type fini dès que  $i > q$ . Si de plus,  $X$  est  $q$ -complète,  $X$  a le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension  $\leq n + q$ . Il en résulte en particulier que*

$$H_{n+i}(X, \mathbf{Z}) = 0 \quad \text{pour } i > q$$

et

$$H_{n+q}(X, \mathbf{Z}) \text{ est libre.}$$

La démonstration, qui fait appel à la théorie des points critiques des fonctions différentiables de Marston Morse, ne se généralise évidemment pas aux espaces analytiques  $q$ -convexes. Cependant, dans le cas où  $q = 0$ , R. NARASIMHAN a montré le résultat suivant :

**THÉORÈME 2** [5]. — *Soit  $X$  un espace de Stein de dimension complexe  $n$ . Alors  $H_{n+i}(X, \mathbf{Z}) = 0$  pour  $i > 0$ , et  $H_n(X, \mathbf{Z})$  est sans torsion.*

Nous nous proposons de généraliser le théorème 1 aux espaces analytiques. Sauf pour le cas  $q = 0$  (propos. II.1), les résultats obtenus (propos. III.2) sont très incomplets puisqu'ils ne tiennent pas compte de la torsion.

### I. Définitions et Rappels.

Soit  $X$  un espace analytique complexe. Une fonction  $\varphi : X \rightarrow \mathbf{R}$  est dite *indéfiniment dérivable* si, pour tout point  $x \in X$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$ , un isomorphisme  $\tau : U \rightarrow V$  de  $U$  sur un sous-espace analytique d'un ouvert  $V$  de  $\mathbf{C}^N$  et une application  $\psi : V \rightarrow \mathbf{R}$  indéfiniment dérivable telle que

$$\psi \circ \tau = \varphi | U.$$

Une telle fonction est dite *q-convexe* si on peut choisir, dans la définition précédente, la fonction  $\psi$  telle que la forme de Levi

$$\mathcal{L}(\psi, x) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(x) dz_i d\bar{z}_j$$

ait, pour tout  $x \in V$ ,  $n - q$  valeurs propres strictement positives.

Un espace analytique  $X$  est dit *q-convexe* s'il existe un compact  $K$  et une fonction  $\varphi$ , continue sur  $X$  et *q-convexe* sur  $X - K$ , telle que, pour tout réel  $c$ ,

$$X_c = \{x \in X, \varphi(x) < c\}$$

soit relativement compact dans  $X$ . Si on peut choisir  $K = \emptyset$ , on dit que  $X$  est *q-complet*.

Un espace analytique  $X$  est dit *cohomologiquement q-convexe* (resp. *cohomologiquement q-complet*) si, pour tout faisceau analytique cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $X$ , on a, pour  $i > q$ ,

$$\dim_{\mathbf{C}} H^i(X, \mathcal{F}) < \infty \quad [\text{resp. } H^i(X, \mathcal{F}) = 0].$$

La proposition bien connue qui suit, due à A. ANDREOTTI et H. GRAUERT, est un des principaux résultats de [1].

PROPOSITION I.1. — *Tout espace q-convexe (resp. q-complet) est cohomologiquement q-convexe (resp. q-complet).*

Dans le cas particulier où  $q = 0$ , on a le résultat plus précis suivant [6] :

PROPOSITION I.2. — *Soit X un espace analytique.*

(a) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *X est 0-complet;*
- (ii) *X est 0-cohomologiquement complet;*
- (iii) *X est un espace de Stein.*

(b) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *X est 0-convexe;*
- (ii) *X est 0-cohomologiquement convexe;*
- (iii) *X est « modification propre » d'espace de Stein par éclatement d'un nombre fini de points.*

La dernière assertion signifie qu'il existe un morphisme propre surjectif  $\pi$  de  $X$  sur un espace de Stein  $Y$ , et des points  $y_1, \dots, y_k$  de  $Y$  en nombre fini tels que, pour tout  $y \in Y - \{y_1, \dots, y_k\}$ ,  $\pi^{-1}(y)$  soit réduit à un point.

PROPOSITION I.3. — *Tout espace analytique de dimension complexe  $n$  est cohomologiquement  $n$ -complet.*

Ceci est un résultat dû à REIFFEN [7]. Il n'est pas évident qu'un espace analytique  $X$  de dimension complexe  $n$  soit  $n$ -complet. C'est vrai lorsque  $X$  est lisse; c'est encore vrai, mais déjà moins évident, lorsque l'ensemble singulier de  $X$  est de dimension 0 [10].

REMARQUE I.4. — Une variété analytique compacte de dimension  $n$  ne peut pas être  $q$ -complète pour  $q < n$ . Ceci résulte par exemple du principe du maximum. Ce résultat reste vrai pour les espaces (voir Remarque III.3).

## II. Homologie des espaces 0-convexes.

La proposition suivante est un complément au théorème 2.

PROPOSITION II.1. — *Soit  $X$  un espace analytique 0-convexe, de dimension complexe  $n$ . Alors  $H_{n+i}(X, \mathbf{Z})$  est de type fini dès que  $i > 0$ .*

Démonstration. — En vertu de la proposition I.2,  $X$  est « modification propre » d'un espace de Stein  $Y$  par éclatement d'un nombre fini de points. Soit  $\pi : X \rightarrow Y$  un morphisme réalisant la modification; l'ensemble  $S$  des points  $x \in X$ , où  $\pi^{-1}\pi(x) \neq \{x\}$ , est alors un sous-ensemble analytique compact de  $X$ , et  $T = \pi(S)$  n'a qu'un nombre fini de points.

Montrons d'abord que le morphisme  $(X, S) \rightarrow (Y, T)$  induit un isomorphisme en homologie. On sait que  $X$  et  $S$  sont des polyèdres, par conséquent A. N. R. (absolute neighborhood retract). On a donc (voir [4], chap. 27, ou encore [5])

$$H_k(X, S) = \lim_{\leftarrow} H_k(X, U)$$

la limite projective étant prise pour  $U$  parcourant un système fondamental de voisinages de  $S$ . Mais la projection  $\pi$  étant propre, donc fermée, les voisinages de  $S$  de la forme  $\pi^{-1}(V)$ , où  $V$  est un voisinage de  $T$ , forment un système fondamental de voisinage de  $S$ . On a donc

$$H_k(X, S) = \lim_{\leftarrow} H_k(X, \pi^{-1}(V)).$$

$V$  voisinage de  $T$

On a de la même façon

$$H_k(Y, T) = \lim_{\leftarrow} H_k(Y, V).$$

$V$  voisinage de  $T$

Il suffit donc de montrer que si  $V$  est un voisinage de  $T$ , le morphisme  $(X, \pi^{-1}(V)) \rightarrow (Y, V)$  induit un isomorphisme en homologie. Mais ceci résulte du théorème d'excision, et du fait que  $\pi$  induit un isomorphisme :  $X - S \rightarrow Y - T$ .

On peut toujours supposer  $n > 0$ . On a la suite exacte

$$H_k(Y, \mathbf{Z}) \rightarrow H_k(Y, T; \mathbf{Z}) \rightarrow H_{k-1}(T, \mathbf{Z}).$$

On a évidemment  $H_{k-1}(T, \mathbf{Z}) = 0$  pour  $k > 1$ ; il résulte du théorème 2 que l'on a alors

$$H_k(Y, T; \mathbf{Z}) = 0 \quad \text{pour } k > \dim_{\mathbf{C}} Y \text{ et } k > 1,$$

et comme  $n \geq \dim_{\mathbf{C}} Y$ , on obtient  $H_k(X, S; \mathbf{Z}) = 0$  dès que  $k > n$ .

La suite exacte d'homologie montre alors que les homomorphismes canoniques

$$H_k(S, \mathbf{Z}) \rightarrow H_k(X, \mathbf{Z})$$

sont des isomorphismes pour  $k > n$ .  $S$  étant un ensemble analytique compact, ceci démontre la proposition II.1.

**III. Homologie des espaces analytiques  $q$ -cohomologiquement convexes.**

Soit  $X$  un espace analytique de faisceau structural  $\mathcal{O}_X$ . On note  $\Omega_X^k$  le faisceau des  $k$ -formes différentielles holomorphes. Rappelons que si  $X$  est un modèle dans un ouvert  $U$  de  $\mathbf{C}^m$ , défini par un idéal  $\mathcal{J}$ , on a par définition :

$$\Omega_X^k = \Omega_U^k / d\mathcal{J} \wedge \Omega_U^{k-1} + \mathcal{J} \Omega_U^k.$$

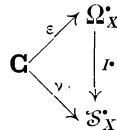
Si  $X$  est quelconque, on peut définir  $\Omega_X^k$  par recollement.

Il est évident que  $\Omega_X^k$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent. Comme dans le cadre habituel, on a une différentielle  $d : \Omega_X^k \rightarrow \Omega_X^{k+1}$  qui vérifie  $d^2 = 0$ . On note  $\Omega_X^\bullet$  le complexe ainsi obtenu. En outre, on a une augmentation canonique  $\mathbf{C} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega_X^0$ . En général,  $\mathbf{C} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega_X^\bullet$  n'est pas une résolution de  $\mathbf{C}$ ; de plus, si  $X$  est de dimension complexe  $n$ , on peut avoir  $\Omega_X^k \neq 0$  pour  $k > n$ .

Rappelons maintenant les résultats de T. BLOOM et M. HERRERA. Ces derniers ont construit [2] :

1° une résolution  $\mathbf{C} \rightarrow \mathcal{S}_X^\bullet$  de  $\mathbf{C}$  ( $\mathcal{S}_X^k$  est le faisceau des cochaînes semi-analytiques de degré  $k$ );

2° un morphisme  $\Gamma : \Omega_X^\bullet \rightarrow \mathcal{S}_X^\bullet$  (morphisme d'intégration) tel que le diagramme



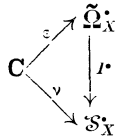
soit commutatif.

De plus, lorsque  $X$  est de dimension complexe  $n$ , on a  $I^k = 0$  pour  $k > n$ .

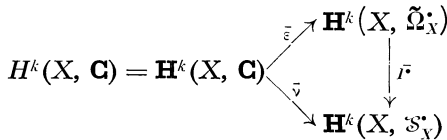
Soit  $\tilde{\Omega}_X^\bullet$  le complexe défini par

$$\tilde{\Omega}_X^k = \begin{cases} \Omega_X^k & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

et de différentielle évidente. On a encore un diagramme commutatif :



Appliquons à ce diagramme le foncteur hypercohomologie  $\mathbf{H}^k(X, \cdot)$  [c'est par définition le  $k^{\text{ième}}$  foncteur hyperdérivé du foncteur section  $\Gamma(X, \cdot)$ ]. On obtient un diagramme commutatif :



PROPOSITION III.1. — Dans les notations ci-dessus, l'application  $\bar{\varepsilon} : H^k(X, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{H}^k(X, \tilde{\Omega}_X^\bullet)$  possède un inverse à gauche canonique; de plus, si  $X$  est de dimension complexe  $n$ , et si  $S$  est l'ensemble singulier de  $X$ , c'est un isomorphisme pour  $k > n + 2 \dim_{\mathbf{C}} S + 1$  (avec la convention  $\dim_{\mathbf{C}} S = -\infty$  lorsque  $S$  est vide).

Démonstration. —  $\mathcal{S}_X^\bullet$  étant une résolution de  $\mathbf{C}$ ,  $\bar{\nu}$  est un isomorphisme;  $\bar{\varepsilon}$  a donc pour inverse à gauche  $\eta = (\bar{\nu})^{-1} \bar{I}^\bullet$ .

La deuxième partie de la proposition fait appel aux suites spectrales. On sait qu'il existe un foncteur spectral dont le terme  $E_2$  est donné par

$$E_2^{k,l} = H^k(X, \mathcal{H}^l(\cdot)),$$

et qui a pour aboutissement l'hypercohomologie  $\mathbf{H}^{k+l}(X, \cdot)$ .  $\mathcal{H}^l$  désigne ici le foncteur «  $l^{\text{ième}}$  faisceau de cohomologie ».

Considérons le morphisme  $E_\infty^{k,l}(\varepsilon)$ .

(a) Si  $l > 0$ . — On a alors  $E_2^{k,l}(\mathbf{C}) = 0$ . D'autre part, le faisceau  $\mathcal{H}^l(\tilde{\Omega}^\bullet)$  a son support contenu dans  $S$ ; il en résulte que  $H^k(X, \mathcal{H}^l(\tilde{\Omega}^\bullet)) = 0$  pour  $k > 2 \dim_{\mathbf{C}} S$ . On a donc  $E_2^{k,l}(\tilde{\Omega}^\bullet) = 0$  pour  $k + l > n + 2 \dim_{\mathbf{C}} S$ .

(b) Si  $l = 0$ . — On a alors une suite exacte de faisceaux sur  $X$  :

$$0 \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{H}^0(\tilde{\Omega}^\bullet) \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0,$$

qui donne naissance à la suite exacte de cohomologie :

$$H^{k-1}(X, \mathfrak{Q}) \rightarrow H^k(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{E_2^{k,0}(\varepsilon)} H^k(X, \mathfrak{H}^0(\tilde{\Omega}^*)) \rightarrow H^k(X, \mathfrak{Q}),$$

$\mathfrak{Q}$  ayant son support dans  $S$ , on obtient que  $E_2^{k,0}(\varepsilon)$  est un isomorphisme pour  $k > 2 \dim_{\mathbf{C}} S + 1$ .

Mais il résulte de ce qui a été dit au (a) que dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_2^{k,0}(\mathbf{C}) & \xrightarrow{E_2^{k,0}(\varepsilon)} & E_2^{k,0}(\tilde{\Omega}^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{\infty}^{k,0}(\mathbf{C}) & \xrightarrow{E_{\infty}^{k,0}(\varepsilon)} & E_{\infty}^{k,0}(\tilde{\Omega}^*) \end{array}$$

les flèches verticales sont des isomorphismes, pourvu que

$$k > n + 2 \dim_{\mathbf{C}} S + 1.$$

Dans les deux cas  $E_{\infty}^{k,l}(\varepsilon)$  est un isomorphisme pour

$$k + l > n + 2 \dim_{\mathbf{C}} S + 1.$$

Il est alors clair que  $\bar{\varepsilon} : H^k(X, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{H}^k(X, \tilde{\Omega}_X^*)$  est un isomorphisme si  $k > n + 2 \dim_{\mathbf{C}} S + 1$ . Ceci démontre la proposition.

**PROPOSITION III. 2.** — *Soit  $X$  un espace analytique de dimension complexe  $n$ , cohomologiquement  $q$ -convexe (resp.  $q$ -complet). Alors, pour  $i > q$ ,*

$$\dim_{\mathbf{C}} H_{n+i}(X, \mathbf{C}) < \infty \quad [\text{resp. } H_{n+i}(X, \mathbf{C}) = 0].$$

*Démonstration.* — En vertu de la proposition III.1 et du théorème des coefficients universels, il suffit de montrer que

$$\dim_{\mathbf{C}} H^{n+i}(X, \tilde{\Omega}^*) < \infty \quad [\text{resp. } \mathbf{H}^{n+i}(X, \tilde{\Omega}^*) = 0].$$

On sait qu'il existe une suite spectrale, dont le terme  $E_2$  est donné par

$$E_2^{k,l} = H^k(H^l(X, \tilde{\Omega}^*)),$$

et qui a pour aboutissement  $\mathbf{H}^{k+l}(X, \tilde{\Omega}^*)$ .

Les faisceaux  $\Omega^k$  étant des  $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents, il résulte de la définition que si  $X$  est cohomologiquement  $q$ -complet,  $H^l(X, \Omega^k) = 0$  pour  $l > q$ , d'où

$$E_2^{k,l} = 0 \quad \text{pour } k + l > n + q$$

et

$$\mathbf{H}^r(X, \tilde{\Omega}^*) = 0 \quad \text{pour } r > n + q.$$

De même, si  $X$  est cohomologiquement  $q$ -convexe,  $\dim_{\mathbf{C}} E_2^{k,l} < \infty$  pour  $k+l > n+q$ ; on a alors le même résultat pour  $E_{\infty}^{k,l}$ , d'où il s'ensuit que

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^r(X, \tilde{\Omega}^r) < \infty \quad \text{pour } r > n+q.$$

REMARQUE III.3. — *Un espace analytique compact de dimension complexe  $n$  ne peut être cohomologiquement  $q$ -complet pour  $q < n$ .*

En effet, soit  $S$  l'ensemble singulier de  $X$ . Si  $X$  est cohomologiquement  $q$ -complet, il en est de même de  $S$ ; si  $q < n$ , il résulte alors, de la proposition III.2 et du fait que  $\dim_{\mathbf{C}} S \leq n-1$ , que l'on a

$$H_{2n}(X, \mathbf{C}) = 0 \quad \text{et} \quad H_{2n-1}(S, \mathbf{C}) = 0.$$

Mais si  $X$  est compact, il en est de même de  $S$ , et on a la suite exacte d'homologie

$$H_{2n}(X, \mathbf{C}) \rightarrow H_{2n}^{\Phi}(X-S, \mathbf{C}) \rightarrow H_{2n-1}(S, \mathbf{C}),$$

où  $H_{2n}^{\Phi}(X-S, \mathbf{C})$  désigne le groupe d'homologie de Borel-Moore de dimension  $2n$ , à support dans la famille  $\Phi$  de tous les fermés de  $X-S$ . On obtient donc

$$H_{2n}^{\Phi}(X-S, \mathbf{C}) = 0,$$

ce qui est absurde, puisque  $X-S$  étant une variété orientable ce groupe devrait contenir la classe fondamentale  $[X-S]$ .

La suite spectrale, utilisée dans la démonstration de la proposition III.2, permet encore d'obtenir le résultat suivant :

PROPOSITION III.4. — *Soit  $X$  un espace analytique de dimension complexe  $n$ , d'ensemble singulier  $S$ . Il existe un homomorphisme canonique*

$$\theta^{n,q} : H^q(X, \Omega^n) \rightarrow H^{n+q}(X, \mathbf{C}),$$

tel que la suite

$$H^q(X, \Omega^{n-1}) \xrightarrow{\delta} H^q(X, \Omega^n) \xrightarrow{\theta^{n,q}} H^{n+q}(X, \mathbf{C}),$$

où  $\delta$  est induit par la différentielle extérieure, soit une  $0$ -suite, et possédant les propriétés suivantes :

(a) si  $X$  est cohomologiquement  $q$ -complet (resp.  $q$ -convexe), alors  $\theta^{n,q}$  est surjectif (resp.  $\dim_{\mathbf{C}} \text{coker } \theta^{n,q} < \infty$ );

(b) si, de plus,  $2 \dim_{\mathbf{C}} S + 1 < q$ , le complexe

$$H^q(X, \Omega^{n-1}) \rightarrow H^q(X, \Omega^n) \rightarrow H^{n+q}(X, \mathbf{C}) \rightarrow 0$$

est exact (resp. à ses groupes de cohomologie de dimension finie).



*Démonstration.* — On a, dans la suite spectrale de la proposition III.2,

$$E_2^{n,q} = \text{coker}(H^q(X, \Omega^{n-1}) \rightarrow H^q(X, \Omega^n));$$

de plus, il existe un homomorphisme canonique

$$\rho^{n,q} : E_2^{n,q} \rightarrow \mathbf{H}^{n+q}(X, \tilde{\Omega}^{\cdot}).$$

L'homomorphisme  $\theta^{n,q}$  s'obtient en composant

$$H^q(X, \Omega^n) \rightarrow E_2^{n,q} \rightarrow \mathbf{H}^{n+q}(X, \tilde{\Omega}^{\cdot}) \xrightarrow{\eta} \mathbf{H}^{n+q}(X, \mathbf{C}),$$

où  $\eta$  désigne l'inverse à gauche de  $\bar{\varepsilon}$ . En vertu de la proposition III.1, il suffit de démontrer que  $-\rho^{n,q}$  est un isomorphisme dans le cas où  $X$  est cohomologiquement  $q$ -complet. Mais ceci résulte du fait que dans la suite spectrale précédente :

$$E_{\infty}^{n,q} \simeq E_2^{n,q} \quad \text{et} \quad E_2^{k, n+q-k} = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq n;$$

—  $\rho^{n,q}$  est un homomorphisme de noyau et conoyau de dimension finie dans le cas où  $X$  est cohomologiquement  $q$ -convexe. Ceci résulte du fait que l'on a alors dans la suite spectrale

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbf{C}} E_2^{k, n+q-k} &< \infty \quad \text{pour} \quad k \neq n, \\ \dim_{\mathbf{C}} \text{Ker}(E_2^{n,q} \rightarrow E_{\infty}^{n,q}) &< \infty, \end{aligned}$$

la dernière propriété étant une conséquence du fait que

$$\dim_{\mathbf{C}} E_2^{k,l} < \infty \quad \text{pour} \quad k+l = n-1, \quad l > q.$$

REMARQUE III.5. — L'homomorphisme  $\theta^{n,q}$  peut encore s'obtenir de la manière suivante : soit  $Z^n = \text{Ker}(\mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^{n+1})$ .  $I^n$  induit un homomorphisme de faisceaux :  $\Omega^n \rightarrow Z^n$ . D'autre part,  $\mathcal{S}^{\cdot}$  étant une résolution de  $\mathbf{C}$ , on a un homomorphisme canonique

$$H^q(X, Z^n) \rightarrow H^{n+q}(X, \mathbf{C}).$$

$\theta^{n,q}$  est alors l'homomorphisme composé

$$H^q(X, \Omega^n) \rightarrow H^q(X, Z^n) \rightarrow H^{n+q}(X, \mathbf{C}).$$

Ceci résulte de la définition de  $\theta^{n,q}$ , de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, \Omega^n) & \longrightarrow & H^q(X, Z^n) \\ \downarrow \rho' & & \downarrow \sigma' \\ \mathbf{H}^{n+q}(X, \tilde{\Omega}^{\cdot}) & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & \mathbf{H}^{n+q}(X, \mathcal{S}^{\cdot}) \\ & \searrow & \swarrow \bar{\nu}^{-1} \\ & & H^{n+q}(X, \mathbf{C}) \end{array}$$

et du fait que  $\bar{\nu}^{-1} \circ \sigma'$  s'identifie à l'homomorphisme canonique

$$H^q(X, Z^n) \rightarrow H^{n+q}(X, \mathbf{C})$$

(propriété bien connue utilisant le fait que  $S$  est résolution de  $\mathbf{C}$ ).

Dans le cas particulier où  $q > 2 \dim S + 1$ ,  $\theta^{n,q}$  peut encore s'obtenir en regardant les suites exactes de cohomologie associées aux courtes suites exactes :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{C}^i \rightarrow \Omega^i \rightarrow \mathcal{B}^{i+1} \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \mathcal{B}^i \rightarrow \mathcal{C}^i \rightarrow \mathcal{H}\mathcal{C}^i \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{C}^i = \text{Ker}(\Omega^i \rightarrow \Omega^{i+1})$  et  $\mathcal{B}^i = \text{Im}(\Omega^{i-1} \rightarrow \Omega^i)$ .

REMARQUE III.6. — Si  $S = \emptyset$ ,  $X$  est alors une variété de dimension complexe  $n$ . Soient  $\mathcal{E}^r(X)$  l'espace des formes différentielles  $C^\infty$  de degré  $r$ , et  $\Omega^{k,l}(X)$  l'espace des formes différentielles de type  $(k, l)$ .  $\theta^{n,q}$  est alors isomorphe (modulo de Rham) à l'homomorphisme :

$$H^q(\Omega^{n,\cdot}(X)) \rightarrow H^{n+q}(\mathcal{E}^\cdot(X))$$

induit par l'inclusion  $\Omega^{n,\cdot}(X) \rightarrow \mathcal{E}^{n+\cdot}(X)$ .

La proposition III.4 contient donc le résultat de G. SORANI [9] selon lequel toute forme différentielle  $d$ -fermée de degré  $n + q$  est cohomologue à une forme différentielle  $d^n$ -fermée de type  $(n, q)$ , pourvu que la variété  $X$  soit  $q$ -complète.

Après rédaction de cet article nous apprenons que A. FERRARI a annoncé, dans [3], qu'il avait obtenu notre proposition III.2, en utilisant aussi les résultats de T. BLOOM et M. HERRERA, et les suites spectrales.

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] ANDREOTTI (A.) et GRAUERT (H.). — Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 193-259.
- [2] BLOOM (T.) and HERRERA (M.). — De Rham cohomology of an analytic space, *Invent. Math.*, Berlin, t. 7, 1969, p. 275-296.
- [3] FERRARI (A.). — Cohomology and holomorphic differential forms on complex analytic spaces, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, t. 24, 1970, p. 65-77.
- [4] GREENBERG (M.). — *Lectures on algebraic topology*. — New York, Amsterdam W. A. Benjamin, 1967 (*Mathematics Lecture Notes*).
- [5] NARASIMHAN (R.). — On the homology groups of Stein spaces, *Invent. Math.*, Berlin, t. 2, 1967, p. 377-385.
- [6] NARASIMHAN (R.). — The Levi problem for complex spaces, *Math. Annalen*, t. 142, 1961, p. 355-365; t. 146, 1962, p. 195-216.

- [7] REIFFEN (H. J.). — Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen mit kompakten Träger, *Math. Annalen*, t. 164, 1966, p. 272-279.
- [8] SORANI (G.). — Omologia degli spazi  $q$ -pseudoconvessi, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, t. 16, 1962, p. 299-304.
- [9] SORANI (G.). — Homologie des  $q$ -paires de Runge, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, t. 17, 1963, p. 319-332.
- [10] VILLANI (V.). — Su alcune proprietà coomologiche dei fasci coerenti su uno spazio complesso, *Rend. Sem. mat. Univ. Padova*, t. 35, 1964, p. 47-55.

(Texte reçu le 25 juin 1970.)

Joseph LE POTIER,  
Faculté des Sciences,  
40, avenue du Recteur Pineau,  
86-Poitiers.

---