

BULLETIN DE LA S. M. F.

D. LEHMANN

**(Co)-homologies généralisées des espaces
 $K(\Pi, 1)$ et des formes sphériques**

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 305-318

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__305_0

© Bulletin de la S. M. F., 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

(CO)-HOMOLOGIES GÉNÉRALISÉES
DES ESPACES $K(\Pi, 1)$ ET DES FORMES SPHÉRIQUES

PAR

DANIEL LEHMANN.

(Lille).

1. Introduction.

Soient Π un groupe fini d'ordre k , et h^* (resp. h_*) une théorie réduite de cohomologie (resp. d'homologie) généralisée définie pour les CW-complexes à squelettes finis.

Appelons \hat{k} -torsion d'un groupe abélien Λ , l'ensemble des éléments $\lambda \in \Lambda$ annihilés par une puissance de k (i. e. tels qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $k^n \cdot \lambda = 0$). C'est aussi le noyau de l'homomorphisme $\lambda \rightarrow \lambda \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{1}$ de Λ dans $\Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[1/k]$ (où $\mathbf{Z}[1/k]$ désigne le sous-anneau de \mathbf{Q} formé des nombres rationnels de la forme m/k^n , avec $m \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$).

LEMME (A). — Soit X un CW-complexe fini sur lequel Π opère librement, et soit $p : X \rightarrow X/\Pi$ la projection canonique.

L'application naturelle

$$\begin{aligned} p^* &: h^*(X/\Pi) \otimes \mathbf{Z}[1/k] \rightarrow h^*(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k] \\ (\text{resp. } p_* &: h_*(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k] \rightarrow h_*(X/\Pi) \otimes \mathbf{Z}[1/k]) \end{aligned}$$

est alors injective (resp. surjective), et identifie

$$\begin{aligned} h^*(X/\Pi) \otimes \mathbf{Z}[1/k] &\text{ à } (h^*(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k])^{\Pi} \\ (\text{resp. } h_*(X/\Pi) \otimes \mathbf{Z}[1/k] &\text{ à } (h_*(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k])_{\Pi}, \end{aligned}$$

$h(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k]$ étant muni de la structure naturelle de Π -module, associée à l'action de Π sur X .

Rappelons en effet [10] qu'il existe une suite spectrale « des revêtements »

$$E_2^{p,q}(X, \Pi, h^*) = H^p(\Pi, h_+^q(X)) \Rightarrow h_+^{p+q}(X/\Pi)$$

[resp. $E_{p,\sigma}^2(X, \Pi, h_*) = H^p(\Pi, h_+^q(X)) \Rightarrow h_+^{p+q}(X/\Pi)$],

où h_+^* (resp. h_*^*) désigne la théorie libre associée à h^* (resp. h_*), et où $h_+^*(X)$ [resp. $h_*^*(X)$] est muni de la structure naturelle de Π -module associée à l'action de Π sur X .

Puisque $\mathbf{Z}[1/k]$ est sans torsion, $\bar{h} = h \otimes \mathbf{Z}[1/k]$ est encore une théorie généralisée. Par ailleurs, $H^p(\Pi, \bar{h}_+^q(X))$ est un $\mathbf{Z}[1/k]$ -module, annulé par k pour $p > 0$; on en déduit

$$E_2^{p,q}(X, \Pi, \bar{h}^*) = 0, \quad \forall p > 0$$

et, par conséquent,

$$\bar{h}_+^p(X/\Pi) \cong E_2^{0,p}(X, \Pi, \bar{h}^*) = (\bar{h}_+^p(X))^{\Pi}.$$

On vérifie, d'autre part, que l'identification de $\bar{h}_+^p(X/\Pi)$ au sous-groupe des éléments de $\bar{h}_+^p(X)$, invariants par Π , n'est rien d'autre que l'application naturelle induite par p^* .

La démonstration en homologie est analogue.

COROLLAIRE (A₁).

- (i) $\text{Ker}(h^*(X/\Pi) \rightarrow h^*(X))$
[resp. $\text{Coker}(h_*(X) \rightarrow h_*(X/\Pi))$]

ne contient que de la \hat{k} -torsion;

- (ii) si $h^i(X) = 0$ [resp. $h_i(X) = 0$],
 $h^i(X/\Pi)$ [resp. $h_i(X/\Pi)$] ne contient que de la \hat{k} -torsion;

- (iii) si Π opère trivialement sur $h^i(X)$ (resp. $h_i(X)$),

$$p^* : h^i(X/\Pi) \otimes \mathbf{Z}[1/k] \rightarrow h^i(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k]$$

(resp. $p_* : h_i(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k] \rightarrow h_i(X/\Pi) \otimes \mathbf{Z}[1/k]$)

est un isomorphisme.

Soit, en effet, N^* le noyau de $h_+^*(X/\Pi) \rightarrow h_+^*(X)$ [qui est le même que celui de $h^*(X/\Pi) \rightarrow h^*(X)$]. Puisque $\mathbf{Z}[1/k]$ est sans torsion, on déduit du lemme (A) que

$$N^* \otimes \mathbf{Z}[1/k] = 0.$$

C'est dire que N^* ne contient que de la \hat{k} -torsion, d'où la partie (i) (la démonstration en homologie est analogue). Les parties (ii) et (iii) sont des trivialisés.

COROLLAIRE (A₂). — Soit $B_{\Pi} = K(\Pi, 1)$ un CW-complexe à squelettes finis, classifiant pour le groupe Π .

Supposons que la théorie h vérifie l'axiome d'additivité infinie de MILNOR [8] (ce qui est, par exemple, le cas de toutes les théories représentables).

Alors,

— en homologie :

$h_*(B_{\Pi})$ ne contient que de la \hat{k} -torsion;

— en cohomologie :

s'il existe une suite $\Phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$\lim_{\leftarrow r} h^{\Phi(r)-1}(B_{\Pi})_{\Phi(r)} = 0,$$

la torsion de $h^q(B_{\Pi})$ est alors de type \hat{k} .

D'après MILNOR [8], on a en effet, pour toute suite

$$X_i \subset X_{i+1} \subset \dots \subset X = \lim_r X_r$$

de cofibrations entre CW-complexes, une suite exacte

$$0 \rightarrow \lim_{\leftarrow r} h^{q-1}(X_r) \rightarrow h^q(X) \rightarrow \lim_{\leftarrow r} h^q(X_r) \rightarrow 0$$

$$\left[\text{resp. un isomorphisme } \lim_{\rightarrow r} h_q(X_r) \xrightarrow{\cong} h_q(X) \right].$$

Notant alors $(E_{\Pi})_{\Phi(r)} \xrightarrow{p_r} (B_{\Pi})_{\Phi(r)}$ et $E_{\Pi} \xrightarrow{p} B_{\Pi}$ les revêtements universels de $(B_{\Pi})_{\Phi(r)}$ et B_{Π} , on obtient

$$\lim_{\leftarrow r} h^q(E_{\Pi})_{\Phi(r)} = 0 \quad \left[\text{resp. } \lim_{\rightarrow r} h_q(E_{\Pi})_{\Phi(r)} = 0 \right],$$

puisque $h(E_{\Pi}) = 0$ (E_{Π} est contractile, et la théorie h est réduite). On en déduit, puisque le foncteur \lim est exact à gauche, que les suites exactes

$$0 \rightarrow \text{Ker}(p_{\Phi(r)})^* \rightarrow h^*(B_{\Pi})_{\Phi(r)} \rightarrow h^*(E_{\Pi})_{\Phi(r)}$$

donnent lieu à un isomorphisme par passage à la limite projective :

$$\lim_{\leftarrow r} \text{Ker}(p_{\Phi(r)})^* \xrightarrow{\cong} \lim_{\leftarrow r} h^*(B_{\Pi})_{\Phi(r)}.$$

[En homologie, on obtient de même, puisque le foncteur \lim est exact,

un isomorphisme

$$\lim_{\rightarrow r} h_*(B_{\Pi})_{\Phi(r)} \xrightarrow{\cong} \lim_{\rightarrow r} \text{Coker}(p_{\Phi(r)})_*].$$

On en déduit une suite exacte :

$$0 \rightarrow \lim_{\leftarrow r} h^{q-1}(B_{\Pi})_{\Phi(r)} \rightarrow h^q(B_{\Pi}) \rightarrow \lim_{\leftarrow r} \text{Ker}(p_{\Phi(r)})^q \rightarrow 0$$

$$\left[\text{resp. un isomorphisme } \lim_{\leftarrow r} \text{Coker}(p_{\Phi(r)}) \xrightarrow{\cong} h_*(B_{\Pi}) \right].$$

Le corollaire (A₂) en découle, puisque la limite projective [resp. inductive] d'une suite $\dots \rightarrow \Lambda_i \rightarrow \Lambda_{i+1} \rightarrow \dots$ de groupes abéliens est un sous-groupe [resp. un quotient] du produit direct $\prod_r \Lambda_r$ [resp. de la somme directe $\bigoplus_r \Lambda_r$], et que chacun des groupes $\Lambda_r = \text{Ker}(p_{\Phi(r)})^q$ [resp. $\text{Coker}(p_{\Phi(r)})^q$] ne contient que de la \hat{k} -torsion, en vertu du corollaire (A₁).

LEMME (B). — Soit $X_{2n+1}(\Pi)$ un CW-complexe fini, de dimension $2n+1$, Π -classifiant pour les CW-complexes de dimension $\leq 2n$.

La suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch (cf. [4])

$$H(X_{2n+1}(\Pi), h(S^0)) \Rightarrow h(X_{2n+1}(\Pi))$$

est triviale (i. e. a toutes ses différentielles nulles) sous les hypothèses suivantes :

- (i) $H^{2i+1}(\Pi, h^*(S^0)) = 0, \forall i = 0, \dots, n-1$
[resp. $H_{2i}(\Pi, h_*(S^0)) = 0, \forall i = 1, \dots, n$];
- (ii) $H^{2i}(\Pi, h^{\text{impair}}(S^0)) = 0, \forall i = 1, \dots, n$
[resp. $H_{2i+1}(\Pi, h_{\text{impair}}(S^0)) = 0, \forall i = 0, \dots, n-1$];
- (iii) $H^{2n+1}((B_{\Pi})_{2n+1}, h^{\text{impair}}(S^0))$ n'admet éventuellement des éléments de torsion que d'ordre premier avec k
[resp. $H_{2n+1}((B_{\Pi})_{2n+1}, h_{\text{impair}}(S^0))$ n'a que des éléments de torsion, et tous d'ordre premier avec k].

Faisons d'abord la démonstration en cohomologie. Supposons avoir déjà démontré que

$$E_2^{p,q} = E_r^{p,q}, \quad \forall p, q.$$

Montrons que la différentielle $d_r: E_2^{p,q} \rightarrow E_2^{p+r, q-r+1}$ est toujours nulle. Rappelons d'abord que

$$H^p(X_{2n+1}(\Pi), \Lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \leq 0 \text{ ou } p \geq 2n+2, \\ H^p(\Pi, \Lambda) & \text{pour } 1 \leq p \leq 2n. \end{cases}$$

On déduit des hypothèses (i) et (ii) du lemme que $E_2^{p,q}$ ne peut être $\neq 0$ que sous l'une des deux hypothèses

$$2 \leq p \text{ pair } \leq 2n \text{ et } q \text{ pair}$$

ou

$$p = 2n+1.$$

Supposons que $E_2^{p,q}$ satisfasse à la première hypothèse et que $p + r < 2n + 1$. On a alors $E_2^{p+r, q-r+1} = 0$ car, de deux choses l'une, ou bien r est pair, auquel cas $q - r + 1$ est impair, ou bien r est impair, auquel cas $p + r$ est impair. Si, maintenant, $p + r = 2n + 1$, $E_2^{p,q}$ satisfaisant toujours à la première hypothèse, r est nécessairement impair, donc $q - r + 1$ est pair; en vertu de l'hypothèse (iii) du théorème,

$$d_{\text{impair}} = E_2^{\text{pair, pair}} \rightarrow E_2^{2n+1, \text{pair}}$$

est encore nulle, car $E_2^{p,q}$ ne contient que de la k -torsion, alors que $E_2^{2n+1, \text{pair}}$ ne contient, comme torsion, que des éléments d'ordre premier avec k . Ainsi, on a toujours $d_r = 0$, donc $E_{r+1} = E_r = E_2$. D'où $E_\infty = E_2$.

En homologie, on démontrerait de même, grâce aux hypothèses (i) et (ii), que l'on a toujours

$$E_{p,q}^3 = 0 \quad \text{ou} \quad E_{p-r, q+r-1}^2 = 0,$$

sauf pour $p = 2n + 1$, q impair et r pair. Mais alors

$$d_{\text{pair}} = E_{2n+1, \text{impair}}^2 \rightarrow E_{\text{impair, pair}}^2$$

est encore nulle, car $E_{\text{impair, pair}}^2$ ne contient que de la k -torsion, tandis que $E_{2n+1, \text{impair}}^2$ ne contient que de la torsion, et d'ordre premier avec k [hypothèse (iii)]. D'où le lemme.

Remarque. — Si Π opère librement sur une sphère homotopique S^{2n+1} , et si $X_{2n+1}(\Pi) = S^{2n+1}/\Pi$, la cohomologie de Π est alors périodique. En particulier, les groupes $H^{2i+1}(\Pi, \mathbf{Z})$ [resp. $H_{2i}(\Pi, \mathbf{Z})$, $i > 0$] sont nuls.

COROLLAIRE (B₁). — *Sous les hypothèses du lemme (B), et pour une filtration convenable de $h^*(X_{2n+1}(\Pi))$ [resp. $h_*(X_{2n+1}(\Pi))$], on a alors*

$$G_* h^{2s}(X_{2n+1}(\Pi)) = \bigoplus_{i=1}^n H^{2i}(\Pi, h^{2(s-i)}(S^0)) \oplus H^{2n+1}(X_{2n+1}(\Pi), h^{2(s-n)-1}(S^0)),$$

$$h^{2s+1}(X_{2n+1}(\Pi)) = H^{2n+1}(X_{2n+1}(\Pi), h^{2(s-n)}(S^0))$$

[resp.

$$G_* h_{2s+1}(X_{2n+1}(\Pi)) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} H_{2i+1}(\Pi, h_{2(s-i)}(S^0)) \oplus H_{2n+1}(X_{2n+1}(\Pi), h_{2(s-n)}(S^0)),$$

$$h_{2s}(X_{2n+1}(\Pi)) = H_{2n+1}(X_{2n+1}(\Pi), h_{2(s-n)-1}(S^0)) \Big],$$

G_* signifiant « gradué associé ».

Ce corollaire résulte immédiatement de l'égalité

$$E_2 = E_\infty \quad [\text{resp. } E^2 = E^\infty].$$

COROLLAIRE (B₂). — Si, en plus des hypothèses du lemme (B)

$$H^{2n+1}(X_{2n+1}(\mathbb{I}); h^{2(s-n)-1}(S^0)) = 0$$

$$[\text{resp. } H_{2n+1}(X_{2n+1}(\mathbb{I}); h_{2(s-n)}(S^0)) = 0],$$

le groupe $h^{2s}(X_{2n+1}(\mathbb{I}))$ [resp. $h_{2s+1}(X_{2n+1}(\mathbb{I}))$]

(i) est d'ordre $\prod_{i=1}^n \text{ordre } H^{2i}(\mathbb{I}; h^{2(s-i)}(S^0))$

[resp. $\prod_{i=0}^{n-1} \text{ordre } H_{2i+1}(\mathbb{I}; h_{2(s-i)}(S^0))$];

(ii) est annulé par $(k_s)^{n'_s}$, où k'_s désigne le plus petit diviseur de k annihilant chacun des groupes $H^{2i}(\mathbb{I}, h^{2(s-i)}(S^0))$ pour $i = 1, \dots, n$ [resp. $H_{2i+1}(\mathbb{I}, h_{2(s-i)}(S^0))$ pour $i = 0, \dots, n-1$], et où n'_s désigne le nombre de ceux de ces groupes qui ne sont pas nuls.

Ce corollaire est une conséquence immédiate de (B₁) et du fait que chacun des groupes $H^i(\mathbb{I}, \Lambda)$ [resp. $H_i(\mathbb{I}, \Lambda)$] ($i > 0$, Λ groupe abélien) est annulé par k .

Remarque. — Le corollaire (B₂) implique en particulier que $h^{2s}(X_{2n+1}(\mathbb{I}))$ [resp. $h_{2s+1}(X_{2n+1}(\mathbb{I}))$] ne contient que de la \hat{k} torsion; il exprime en fait un résultat plus précis.

La suite de cet article est consacrée à quelques applications des résultats ci-dessus, dont l'essentiel a été résumé dans deux Notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris [6].

2. Classes (co)-caractéristiques généralisées.

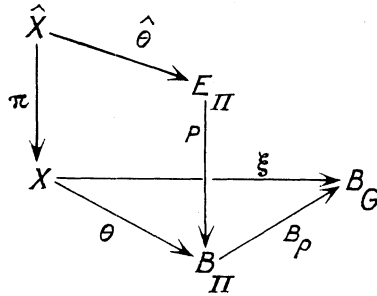
Soient G un groupe topologique, et $P \rightarrow X$ un fibré de groupe structural G , d'application classifiante $\xi : X \rightarrow B_G$.

Les éléments de $\text{Im}(\xi^* : h^*(B_G) \rightarrow h^*(X))$ [resp. $\text{Coim}(\xi_* : h_*(X) \rightarrow h_*(B_G))$], s'appellent les classes *caractéristiques* [resp. *(co)-caractéristiques*] de P en théorie h .

Le fibré P est dit \mathbb{I} -*plat* s'il existe un revêtement principal $\hat{X} \xrightarrow{\pi} X$ de groupe structural \mathbb{I} , et un morphisme $\rho : \mathbb{I} \rightarrow G$ tel que $G \times_{\rho} \hat{X} \rightarrow X$ soit isomorphe au G -fibré principal associé à P . Il revient au même de dire que ξ est homotope à $B_{\rho} \cdot \theta$, où $\theta : X \rightarrow B_{\mathbb{I}}$ est une application classifiante de \hat{X} , et où $B_{\rho} : B_{\mathbb{I}} \rightarrow B_G$ est l'application (définie à homotopie près) induite par ρ .

PROPOSITION. — Si G le fibré principal associé à P est $G \times_{\rho} \hat{X}$ (notations ci-dessus), l'image réciproque $\pi^{-1}(P)$ de P par l'application $\pi : \hat{X} \rightarrow X$ est triviale.

En effet, l'application classifiante de $\pi^{-1}(P)$ est $\xi \circ \pi$; puisque $\xi \circ \pi$ est homotope à $B_\rho \circ p \cdot \theta$ et que E_{II} est contractile, $\xi \circ \pi$ est homotope à θ , d'où la proposition.



On dira, plus généralement, que P est *pseudo-II-plat* s'il existe un revêtement principal $\hat{X} \xrightarrow{\pi} X$ de groupe structural Π , tel que $\pi^{-1}(P)$ soit trivial [il suffit pour cela que l'application classifiante ξ de P se factorise à travers B_{II} sous la forme $\xi = u \cdot \theta$, où $u : B_{II} \rightarrow B_G$ n'est plus nécessairement de la forme B_ρ].

THÉORÈME 1. — Soit P un fibré pseudo-II-plat. Les classes caractéristiques (resp. co-caractéristiques) de P en théorie h^* (resp. h_*) :

- (i) sont annulées par une puissance de k , si X a le type d'homotopie d'un polyèdre fini (et même par k en cohomologie ou homologie ordinaire);
- (ii) sont annulées par $(k_s)^{n_s}$ en degré $2s$ (resp. $2s + 1$), et sont nulles en degré $2s + 1$ (resp. $2s$), sous les hypothèses et avec les notations du corollaire (B₂), si X a le type d'homotopie d'un polyèdre fini, et si, de plus, l'application classifiante ξ se factorise à travers B_{II} [ou plus généralement un espace de la forme $X_{2n+1}(\Pi)$];
- (iii) sont annulées par une puissance de k , en homologie uniquement, si X a le type d'homotopie d'un CW-complexe à squelettes finis, si ξ se factorise à travers B_{II} , et si h_* vérifie l'axiome d'additivité infinie de Milnor.

Soit, en effet, $\hat{X} \xrightarrow{\pi} X$ un revêtement principal de groupe Π tel que $\pi^{-1}(P)$ soit trivial : $\xi \circ \pi$ est alors homotope à θ . On en déduit que $\text{Im } \xi_*^*$ est inclus dans $\text{Ker } \pi^*$ (resp. $\text{Coim } \xi_*^*$ est un quotient de $\text{Coker } \pi_*$). Compte tenu du corollaire (A₁), la partie (i) du théorème en résulte.

Les parties (ii) et (iii) résultent respectivement de ce que ξ se factorise à travers $X_{2n+1}(\Pi)$ (resp. B_{II}), et du corollaire (B₂) [resp. (A₂)].

3. K-théorie des espaces S^{2n+1}/Π .

THÉORÈME 2. — Supposons avoir muni B_{II} d'une structure de CW-complexe, n'ayant qu'un nombre fini de cellules en chaque dimension.

Si $H^{2i+1}(\Pi, \mathbf{Z}) = 0, \forall i (i \geq n), \widetilde{KU}^0((B_{\Pi})_{2n+1})$ ne contient alors que de la \hat{k} -torsion.

Sous l'hypothèse du théorème, KAMBER et TONDEUR ont en effet démontré que tout fibré vectoriel complexe de base $(B_{\Pi})_{2n+1}$ est stablement isomorphe à un fibré Π -plat ([5], p. 27). Remarquant que la classe stable d'un fibré vectoriel complexe est une classe caractéristique de ce fibré en \widetilde{KU} -théorie, il suffit d'appliquer le théorème 1 [partie (i)] pour en déduire le théorème 2.

THÉORÈME 3 (cf. [5], p. 29). — Les hypothèses du lemme (B) sont vérifiées en \widetilde{KU} -théorie pourvu que $H^{\text{impair}}(\Pi, \mathbf{Z}) = 0$ (ce qui est en particulier le cas pour tous les groupes Π à cohomologie périodique, i. e. opérant librement sur une sphère homotopique), et que $H^{2n+1}(X_{2n+1}(\Pi), \mathbf{Z})$ ne contienne pas de torsion, sauf éventuellement d'ordre premier avec k .

On a alors, en particulier :

$$(k'_0)^{n'_0} \cdot \widetilde{KU}^0(X_{2n+1}(\Pi)) = 0$$

(où k'_0 divise k , et $n'_0 \leq n$),

$$\widetilde{KU}^1(X_{2n+1}(\Pi)) = H^{2n+1}(X_{2n+1}(\Pi), \mathbf{Z}),$$

et $\widetilde{KU}^0(X_{2n+1}(\Pi))$ est d'ordre $\prod_{i=1}^n$ ordre $H^{2i}(\Pi, \mathbf{Z})$.

Il est immédiat de vérifier que l'on peut appliquer le lemme (B). J'ignore s'il existe des groupes finis Π vérifiant $H^{\text{impair}}(\Pi, \mathbf{Z}) = 0$, qui ne soient pas à cohomologie périodique (*).

THÉORÈME 4. — Soit $\sigma : \Pi \rightarrow SO(2n + 2)$ un Π -module tel que, par σ , Π opère librement sur S^{2n+1} . Les hypothèses du lemme (B) sont alors toujours vérifiées pour $X_{2n+1}(\Pi) = S^{2n+1}/\sigma$ en théorie $\widetilde{KO} \otimes \mathbf{Z}[1/2]$, et même en théorie \widetilde{KO} si l'ordre k de Π est impair. En particulier :

$$G_* \widetilde{KO}^{2s}(S^{2n+1}/\sigma) \otimes \mathbf{Z}[1/2] = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq n \\ s-i \text{ pair}}} H^{2i}(\Pi, \mathbf{Z}[1/2]),$$

$$\widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n+1}/\sigma) \otimes \mathbf{Z}[1/2] = \begin{cases} 0 & \text{si } (s-n) \text{ est impair,} \\ \mathbf{Z}[1/2] & \text{si } (s-n) \text{ est pair.} \end{cases}$$

Si Π est d'ordre impair, on a aussi

$$G_* \widetilde{KO}^{2s}(S^{2n+1}/\sigma) = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq n \\ s-i \text{ pair}}} H^{2i}(\Pi, \mathbf{Z}) \oplus \Lambda_{s,n}$$

où

$$\Lambda_{s,n} = \begin{cases} 0 & n-s \not\equiv 0 \pmod{4}, \\ \mathbf{Z}_2 & n-s \equiv 0 \pmod{4}, \end{cases}$$

$$\widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n+1}/\sigma) = \begin{cases} 0 & n-s \equiv 3 \pmod{4}, \\ \mathbf{Z}_2 & n-s \equiv 1 \pmod{4}, \\ \mathbf{Z} & n-s \text{ pair.} \end{cases}$$

Remarque. — Si la représentation σ est spinorielle [i. e. se factorise à travers Spin $(2n + 2)$], et si $n \not\equiv 0 \pmod{4}$, tout fibré vectoriel réel de base S^{2n+1}/σ est stablement plat (cf. [7]).

Le théorème 4 se démontre aisément, compte tenu du groupe des coefficients donné par le tableau suivant :

$-i \equiv \text{mod } 8$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\widetilde{KO}^i(S^0)$	\mathbf{Z}	\mathbf{Z}_2	\mathbf{Z}_2	0	\mathbf{Z}	0	0	0	\mathbf{Z}
$\widetilde{KO}^i(S^0) \otimes \mathbf{Z}[1/2]$	$\mathbf{Z}[1/2]$	0	0	0	$\mathbf{Z}[1/2]$	0	0	0	$\mathbf{Z}[1/2]$

Le soin d'appliquer le corollaire (B₂) à cette situation est laissé au lecteur.

THÉORÈME 5. — Soit $\sigma : \Pi \rightarrow \text{So}(2n + 2)$ un Π -module faisant opérer Π librement sur S^{2n+1} . La classe stable du fibré tangent $T(S^{2n+1}/\sigma)$ est annulée dans $\widetilde{KO}^0(S^{2n+1}/\sigma)$,

- par $k^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ si k est impair,
- par $k^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times 2^r$ si k est pair, où k' est le plus grand diviseur impair de k , et r un entier ≥ 0 .

On a en effet :

$$T(S^{2n+1}/\sigma) \oplus \theta^1 = E_\sigma,$$

où $\theta^1 = R \times (S^{2n+1}/\sigma) \rightarrow S^{2n+1}/\sigma$ est le fibré trivial de dimension 1, et où $E_\sigma \rightarrow S^{2n+1}/\sigma$ désigne le fibré vectoriel réel de dimension $2n + 2$ associé par σ au revêtement universel $S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}/\sigma$. [La démonstration est une généralisation immédiate de celle, classique, relative à l'espace projectif réel.] En particulier, $T(S^{2n+1}/\sigma)$ est stablement plat, donc sa classe stable appartient à la \hat{k} -torsion de $\widetilde{KO}^0(S^{2n+1}/\sigma)$, d'après le théorème 1.

D'après le théorème 4, la \hat{k} -torsion de $\widetilde{KO}^0(S^{2n+1}/\sigma)$ est annulée par $k^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ si k est impair (et même : $k^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \widetilde{KO}^0(S^{2n+1}/\sigma) = 0$ si $n \not\equiv 3 \pmod{4}$), tandis que

$$k'^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \widetilde{KO}^0(S^{2n+1}/\sigma) \otimes \mathbf{Z}[1/2] = 0.$$

Le théorème 5 en résulte.

4. Applications au bordisme équivariant.

THÉOREME 6. — *Pour tout groupe fini Π , d'ordre k , les groupes $\tilde{\mathcal{U}}_*(\Pi)$, $\tilde{\Omega}_*^{\text{So}}(\Pi)$, $\tilde{\Omega}_*^{\text{Spin}}(\Pi)$, $\tilde{\Omega}_*^U(\Pi)$ ne contiennent que de la \hat{k} -torsion.*

C'est un cas particulier du corollaire (A₂) [partie (ii)]. Pour \mathcal{U}_* , on le savait déjà, car : $\tilde{\mathcal{U}}_*(\Pi) \simeq \mathcal{U}_* \otimes \tilde{H}_*(\Pi, Z_2)$ (cf. CONNER et FLOYD [3]).

COROLLAIRE 6'. — *Pour toute variété bord compacte V_r sur laquelle Π opère librement, et telle que V_r/Π soit une variété bord, il existe un entier $n \geq 0$, tel que l'action de Π sur $k^n \cdot V_r$ (Π opérant de la même façon sur chacun des k^n exemplaires de V_r) se prolonge en une action libre de Π sur une variété W_{r+1} de bord $k^n \cdot V_r$ (ceci, quelle que soit la théorie de bordisme considérée).*

Puisque chacune des théories de bordisme explicitées ci-dessus vérifie l'axiome de Milnor, et

$$\Omega_q = 0 \quad \text{pour } q < 0,$$

il existe (cf. § 5) une suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch

$$\tilde{H}_p(\Pi, \Omega_q) \Rightarrow \tilde{\Omega}_{p+q}(\Pi)$$

(laquelle est toujours triviale pour $\Omega = \mathcal{U}$, d'après [3]).

THÉOREME 7. — *La suite spectrale*

$$\tilde{H}_p(\Pi, \Omega_q) \Rightarrow \tilde{\Omega}_{p+q}(\Pi)$$

est triviale (i. e. a toutes ses différentielles nulles),

(i) *en théorie $\tilde{\Omega}_*^U$, si $\tilde{H}_{\text{pair}}(\Pi, \mathbf{Z}) = 0$;*

(ii) *en théories $\tilde{\Omega}_*^{\text{So}}$ et $\tilde{\Omega}_*^{\text{Spin}}$, si $\tilde{H}_{\text{pair}}(\Pi, \mathbf{Z}) = 0$ et si l'ordre k de Π est impair;*

(iii) *en théories $\tilde{\Omega}_*^{\text{So}} \otimes \mathbf{Z}[1/2]$ et $\tilde{\Omega}_*^{\text{Spin}} \otimes \mathbf{Z}[1/2]$, si $\tilde{H}_{\text{pair}}(\Pi, \mathbf{Z}[1/2]) = 0$*

Ce théorème s'obtient par exemple en appliquant le lemme (B) pour $X_{2n+1}(\Pi) = (B_\Pi)_{2n+1}$ avec n assez grand (ou se vérifie directement). On utilise les renseignements connus sur Ω_* (cf. [3], [9], [12], [13], [14]).

Remarques.

1° $\tilde{H}_{\text{pair}}(\Pi, \mathbf{Z}) = 0$ pour les groupes à cohomologie périodique (i. e. opérant librement sur une sphère homotopique).

2° La trivialité de la suite spectrale ci-dessus équivaut à la *surjectivité* de l'homomorphisme $\mu : \tilde{\Omega}_*(\Pi) \rightarrow \tilde{H}_*(\Pi, \Lambda)$ de THOM-STEENROD,

où $\Lambda = \mathbf{Z}$ dans les cas (i) et (ii), $\mathbf{Z}[1/2]$ dans le cas (iii) (cf. [3]). Pour \mathcal{X} , $\mu : \mathcal{X}_*(X) \rightarrow H_*(X, \mathbf{Z}_2)$ est toujours surjectif (cf. THOM [13]).

3° Le théorème 7 avait été démontré pour $\Pi = \mathbf{Z}_q$ (q impair) et $\Omega = \Omega^{S^0}$ par CONNER et FLOYD, en vérifiant directement la surjectivité de μ (cf. [3]).

COROLLAIRE 7'. — Si $\tilde{H}_{\text{pair}}(\Pi, \mathbf{Z}) = 0$, sans autre hypothèse en théorie Ω_*^u , avec k impair en théories $\Omega_*^{S^0}$ et Ω_*^{Spin} , l'entier n , défini au corollaire 6', peut être pris :

- égal à 0 si r est pair;
- égal à $\left[\frac{r}{2}\right] + 1$ (resp. $\left[\frac{r}{4}\right] + 1$) si r est impair, en théorie Ω_*^u (resp. $\Omega_*^{S^0}$ ou Ω_*^{Spin}).

Il suffit en effet d'appliquer le corollaire (B₂).

Indépendamment des résultats ci-dessus, signalons aussi le théorème suivant :

THÉORÈME 8. — Pour tout Π -module complexe $\sigma : \Pi \rightarrow U(l)$ tel que l'action de Π sur S^{2l-1} soit libre,

(i) S^{2l-1}/σ est toujours une variété bord (sans aucune hypothèse supplémentaire en théorie Ω_*^U , si k est impair en théorie $\Omega_*^{S^0}$).

(ii) Il n'existe pourtant aucune variété à bord W_{2l} (stablement presque complexe; resp. orientée) de bord S^{2l-1} , telle que l'on puisse prolonger l'action σ de Π sur S^{2l-1} en une action libre de Π sur W_{2l} (respectant la structure stablement presque complexe; resp. l'orientation).

L'image réciproque du fibré tangent $T(S^{2l-1}/\sigma)$ par la projection $S^{2l-1} \rightarrow S^{2l-1}/\sigma$ est en effet égale au fibré stablement trivial $T(S^{2l-1})$. Il s'ensuit que les nombres caractéristiques de S^{2l-1}/σ sont tous nuls en cohomologie entière, et aussi en cohomologie modulo 2 si k est impair. La partie (i) en résulte.

Puisque $n\sigma$ opère librement sur $S^{-2n(l-1)}$ pour tout entier $n \geq 1$, la suite d'injections canoniques $\mathbf{C}^{nl} \rightarrow \mathbf{C}^{(n+1)l}$ induit une suite de plongements de variétés $S^{2nl-1}/n\sigma \rightarrow S^{2(n+1)l-1}/(n+1)\sigma$, dont la limite inductive peut être prise pour B_Π . Il s'ensuit que la classe fondamentale de S^{2l-1}/σ a pour image, par le morphisme canonique

$$H_{2l-1}(S^{2l-1}/\sigma, \mathbf{Z}) \rightarrow H_{2l-1}(B_\Pi, \mathbf{Z}) \cong H^{2l}(\Pi, \mathbf{Z}),$$

un générateur maximal de $H^{2l}(\Pi, \mathbf{Z})$, lequel n'est pas nul. Puisque

$$\mu([S^{2l-1}, \sigma]) \neq 0,$$

c'est que $[S^{2l-1}, \sigma]$ n'est pas nul dans $\tilde{\Omega}_{2l-1}(B_\Pi)$, d'où la partie (ii).

5. Remarques sur la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch de B_{II} .

Pour tout CW-complexe et toute théorie réduite h , définie sur les CW-complexes, on considère la suite spectrale de (X, h) associée au couple exact

$$\begin{array}{ccc}
 h^*(X_p) & \longrightarrow & h^*(X_{p-1}) \\
 \swarrow & & \searrow \partial \\
 E_{p,*}^{p,*}(X, h) & = & h^*(X_p/X_{p-1})
 \end{array}
 \quad \left(\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc}
 h_*(X_{p-1}) & \longrightarrow & h_*(X_p) \\
 \swarrow & & \searrow \partial \\
 E_{p,*}^{p,*}(X, h) & = & h_*(X_p/X_{p-1})
 \end{array} \right).$$

Si X n'a qu'un nombre fini de cellules en chaque dimension, ou si h vérifie l'axiome d'additivité de Milnor, on a

$$E_{2,*}^{p,q}(X, h) = \tilde{H}^p(X, h^q(S^0)) \quad [\text{resp. } E_{p,q}^2(X, h) = \tilde{H}_p(X, h_q(S^0))].$$

Voici deux critères permettant d'affirmer que la suite spectrale de (X, h) converge vers $h(X)$:

CRITÈRE 1 (J. MOORE [11]). — *Supposons que h^* (resp. h_*) vérifie l'axiome de Milnor. S'il existe un entier $r \geq 1$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, il n'y ait qu'un nombre fini de couples $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ tels que $p + q = n$ et $E_{p,q}^{r,q}(X, h) \neq 0$ [resp. $E_{p,q}^{r,q}(X, h) \neq 0$], la suite spectrale de (X, h) converge alors vers $h(X)$.*

Ainsi que me l'a fait remarquer M. ZISMAN, il se peut que h^* vérifie l'axiome de Milnor sans qu'il en soit de même pour $h^* \otimes \mathbf{Z}_{[1/2]}$. On a, toutefois, le deuxième critère.

CRITÈRE 2. — *Si la suite spectrale de (X, h) converge vers $h(X)$, et si Λ est un groupe sans torsion, la suite spectrale de $(X, h \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda)$ converge vers $h(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda$.*

Remarque. — Pour tout CW-complexe, et pour toute théorie de bordisme, les hypothèses du critère de Moore sont satisfaites; il n'en est pas de même en cobordisme ou en K -théorie.

Puisque E_{II} est contractile et que la théorie h est réduite, on a

$$\begin{aligned}
 h^*(B_{II}) &= \text{Ker}(h^*(B_{II}) \rightarrow h^*(E_{II})) \\
 (\text{resp. } h_*(B_{II}) &= \text{Coker}(h_*(E_{II}) \rightarrow h_*(B_{II}))).
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait déjà que $\tilde{H}(B_{II})$ ne contient que de la k -torsion (cohomologie ou homologie ordinaire à coefficients dans un groupe arbitraire), et que $h_*(B_{II})$ ne contient que de la \tilde{k} -torsion pourvu que h_* vérifie l'axiome de Milnor [corollaire (A_2)].

Je ne sais pas généraliser aux CW-complexes infinis la suite spectrale des revêtements utilisée au lemme (A). Toutefois, pour $X = X_r(\Pi)$, on peut démontrer la conclusion du lemme (A) en ne se servant que de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch. On démontre ainsi le lemme ci-dessous :

LEMME (A'). — *Si la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch de (B_Π, h) converge vers $h(B_\Pi)$, $h(B_\Pi)$ ne contient que de la \hat{k} -torsion en général, que de la k -torsion en cohomologie ou homologie ordinaire, et est nul si $h(S^0)$ est un $\mathbf{Z}[\mathbf{1}/k]$ -module.*

En effet, si $h^*(S^0)$ est un $\mathbf{Z}[\mathbf{1}/k]$ -module, le groupe

$$E_2^{p,q}(B_\Pi, h) = \tilde{H}^p(\Pi, h^q(S^0))$$

est nul (c'est un $\mathbf{Z}[\mathbf{1}/k]$ -module, annulé par k). On en déduit que $h(B_\Pi) = 0$.

Dans le cas général, on obtient une nouvelle théorie de cohomologie généralisée en posant $\bar{h}^*(X) = h^*(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\mathbf{1}/k]$ ($\mathbf{Z}[\mathbf{1}/k]$ est \mathbf{Z} -plat, car sans torsion); il est clair que $\bar{h}^*(S^0)$ est un $\mathbf{Z}[\mathbf{1}/k]$ -module. Par conséquent,

$$h^*(B_\Pi) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\mathbf{1}/k] = 0.$$

C'est dire que $h^*(B_\Pi)$ ne contient que de la \hat{k} -torsion.

En homologie, la démonstration est analogue.

LEMME (B'). — *Supposons que la suite spectrale de (B_Π, h) converge vers $h(B_\Pi)$. Si, en outre,*

- (i) $H^{\text{impair}}(\Pi, h^*(S^0)) = 0$ [resp. $\tilde{H}_{\text{pair}}(\Pi, h_*(S^0)) = 0$];
- (ii) $\tilde{H}_{\text{pair}}(\Pi, h^{\text{impair}}(S^0)) = 0$ [resp. $H_{\text{impair}}(\Pi, h_{\text{impair}}(S^0)) = 0$],

alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_* h^{2s}(B_\Pi) = \bigoplus_i H^{2i}(\Pi, h^{2(s-i)}(S^0)), \\ h^{\text{impair}}(B_\Pi) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left[\text{resp.} \left\{ \begin{array}{l} G_* h_{2s+1}(B_\Pi) = \bigoplus_i H_{2i+1}(\Pi, h_{2(s-i)}(S^0)), \\ h_{\text{pair}}(B_\Pi) = 0 \right. \right].$$

La vérification de ce lemme est immédiate. Notons que l'hypothèse de convergence implique que la somme directe égale à $G_* h^{2s}(B_\Pi)$ [resp. $G_* h_{2s+1}(B_\Pi)$] ne contient qu'un nombre fini de facteurs non nuls.

Le théorème 7 (§ 4) est en fait un cas particulier du lemme (B').

Les lemmes (A') et (B') permettent aussi de généraliser les conclusions du théorème 1 au cas d'un fibré $P \rightarrow X$ dont la base est un CW-complexe infini, pourvu que la suite spectrale de (B_Π, h) converge.

P. LANDWEBER m'a signalé que R. SWAN a démontré le résultat suivant : les seuls groupes finis Π vérifiant $H^{\text{impair}}(\Pi, \mathbf{Z}) = 0$ sont les groupes à cohomologie périodique (*).

