BULLETIN DE LA S. M. F.

R. BKOUCHE

Couples spectraux et faisceaux associés. Applications aux anneaux de fonctions

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 253-295
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__253_0>

Bull. Soc. math. France,
98, 1970, p. 253 à 295.
(*Thèse Sc. math.* Paris, 1969; article principal)

COUPLES SPECTRAUX ET FAISCEAUX ASSOCIÉS. APPLICATIONS AUX ANNEAUX DE FONCTIONS (1)

PAR

RUDOLPHE BKOUCHE.

Introduction. — Un espace topologique X est complètement régulier si l'application canonique $X \xrightarrow{\mu} \max \mathcal{C}(X)$ (spectre maximal de l'anneau de fonctions continues sur X muni de la topologie de Zariski) est un plongement topologique, et, dans ce cas, si j_x désigne la localisation (au sens algébrique) par rapport à l'idéal maximal $\mu(x)$, j_x est une surjection et coïncide avec la localisation au sens topologique [de façon précise $j_x(f) = 0$ si, et seulement si, f est nulle dans un voisinage de x]. De plus, on démontre que la propriété précédente est vraie pour tous les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X)$. L'objet de ce travail est d'étudier les anneaux pour lesquels la localisation en chaque idéal maximal est surjective, ce qui est équivalent au fait que le spectre maximal est séparé.

Le paragraphe 1 introduit la notion de couple spectral (A, X), où A est un anneau commutatif avec unité, et X une partie de $\operatorname{Spec} A$, et énonce des critères de séparation de X pour la topologie de Zariski, on en déduit la notion d'*idéal mou* et d'*anneau mou*, ainsi que des critères de mollesse (liés dans le cas des anneaux de fonctions, à la compactification de Stone-Čech).

Le paragraphe 2 étudie la relation entre couples spectraux et espaces annelés; à tout couple spectral (A, X) on associe l'espace annelé induit par $\tilde{A}$ (schéma affine de A) sur X; de même, à tout espace annelé $(X, \mathcal{O})$ on associe le couple spectral $(\Gamma(\mathcal{O}, X), \overline{X})$, où $\overline{X}$ est l'image de X dans $\operatorname{Spec}\Gamma(\mathcal{O}, X)$; on définit ainsi un couple de foncteurs contravariants,

(1) *Thèse Sc. math.* Paris, 1969; article principal.

adjoints l'un de l'autre, et un procédé standard de foncteurs adjoints définit les couples schématiques (l'anneau des sections de $\tilde{A} \mid X$ est A) et les espaces schématiques (partie de schémas). On introduit alors les notions de *point mou* d'un espace annelé [plus généralement, soit $(X, \mathcal{F})$ un faisceau d'ensemble, on dit que x est un point mou si tout élément de la fibre $\mathcal{F}_x$ est le germe d'une section globale] et *d'espace ponctuellement mou,* ainsi que les relations avec les idéaux mous définis au paragraphe 1; en particulier, on montre que, si A est un anneau sans radical de Jacobson, A est mou (c'est-à-dire $\max A$ est un espace séparé) si, et seulement si, le faisceau $\tilde{A} \mid \max A$ est mou au sens de GODEMENT.

Au paragraphe 3, on applique les résultats ci-dessus aux anneaux de fonctions sur un espace complètement régulier X, et on définit les sous-algèbres de Gel'fand de l'anneau $\mathcal{C}(X)$ (qui généralise la notion d'algèbre de Banach commutative régulière) et les faisceaux associés.

En particulier, si X est une variété différentiable de classe C^r, modelée sur un espace de Banach satisfaisant à une condition de EELLS, on montre que le faisceau de fonction de classe C^r est induit par le schéma affine de $\mathcal{C}^r(X, R)$, et lorsque l'espace de Banach est séparable, X s'identifie à l'ensemble des points réels de $\max \mathcal{C}^r(X, R)$.

1. Couples spectraux.

1. Couples spectraux.

Tous les anneaux sont commutatifs avec élément unité, tous les homomorphismes d'anneaux conservent l'élément unité.

Soit A un anneau, pour tout idéal premier x, on note $\delta_x : A \to A/x$, et $j_x : A \to A_x$ les homomorphismes canoniques; pour tout élément f de A, on note $f(x) = \delta_x(f)$.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A, on note $V(\mathfrak{a})$ [resp. : $D(\mathfrak{a})$ le fermé (resp. l'ouvert) correspondant dans $\operatorname{Spec} A$ pour la topologie de Zariski ([3], chap. II).

Soit X une partie de $\operatorname{Spec} A$, on note $k(X)$ l'intersection des éléments de X.

Un *couple spectral* (A, X) est défini par un anneau A et une partie X de $\operatorname{Spec} A$, on note $\Phi(X)$ [resp. : $\Phi_0(X)$] l'ensemble des idéaux (resp. : des idéaux propres) qui sont intersections d'éléments de $X (A \in \Phi(X$ comme intersection de la partie vide de $X]$.

Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, on note

$$V_X(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap X, \qquad D_X(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{a}) \cap X,$$
$$\rho_X(\mathfrak{a}) = k(V_X(\mathfrak{a})).$$

Pour toute partie U de X, on note $\tau_X(U) = V_X(k(U))$, alors $\tau_X(U)$ est l'adhérence de U pour la topologie induite sur X par la topologie de Zariski : *topologie spectrale*; on notera $\mathrm{Int}_X(U)$ l'intérieur de U. Lorsque $X = \mathrm{Spec}\,A$, on notera $\overline{U}$ et $\mathring{U}$.

Soit $f \in A$, l'ouvert $D_X(f)$ [resp. : le fermé $V_X(f)$] est appelé un *ouvert spécial* (resp. : un *fermé spécial*). On rappelle que l'ensemble des ouverts spéciaux est une base de la topologie spectrale.

Enfin, on notera $S_X = \{ f \in A \mid X \subset D(f) \}$ la partie multiplicative associée à X.

Soient (A, X) et (B, Y) deux couples spectraux, un morphisme $\varphi : (A, X) \to (B, Y)$ est un homomorphisme d'anneau $\varphi : A \to B$, tel que ${}^a\varphi(Y) \subset X$ (${}^a\varphi : \mathrm{Spec}\,B \to \mathrm{Spec}\,A$ étant l'application canonique); il est clair que ${}^a\varphi : Y \to X$ est une application continue pour les topologies spectrales.

Nous dirons qu'un couple spectral (A, X) est *réduit* si $k(X) = \{ 0 \}$; autrement dit, si A est un anneau réduit, et X une partie dense de $\mathrm{Spec}\,A$.

Nous dirons qu'un couple spectral (A, X) est *t-réduit* si tout élément de S_X est inversible; on montre aisément que si A est sans radical de Jacobson, t-réduit implique réduit.

Pour tout couple spectral (A, X), il existe un couple spectral réduit et t-réduit « universel », à savoir : le couple spectral $(C(A, X), X)$, où $C(A, X) = S_X^{-1} A \otimes_A A/k(X)$, et où on identifie X à son image canonique dans $\mathrm{Spec}\,C(A, X)$.

2. La topologie constructible.

Soit A un anneau, on appelle *topologie constructible* sur $\mathrm{Spec}\,A$ la topologie la moins fine admettant les ouverts spéciaux et les fermés spéciaux comme ouverts; cette définition est équivalente à celles de de Grothendieck ([9], chap. IV, § 9). Soit $T(A)$ l'anneau absolument plat universel associé à A [14], alors $\mathrm{Spec}\,\mathrm{T}(A)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Spec}\,A$ muni de la topologie constructible; ceci implique que $\mathrm{Spec}\,A$, muni de la topologie constructible, est un espace compact totalement discontinu.

Pour toute partie X de $\mathrm{Spec}\,A$, nous noterons $\gamma(X)$ l'adhérence constructible; nous dirons pour abréger γ-fermé (γ-ouvert, γ-dense) au lieu de fermé (ouvert, dense) pour la topologie constructible.

Proposition 1.2.1. — *Soient X et Y deux parties de* $\mathrm{Spec}\,A$, *les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $\gamma(X) = \gamma(Y)$;

(*b*) *Pour tout idéal de type fini* $\mathfrak{a}$ *de* A, *on a la relation* $\rho_X(\mathfrak{a}) = \rho_Y(\mathfrak{a})$.

Notons d'abord le lemme suivant qui résulte des définitions.

LEMME 1.2.2. — *Soient X une partie de* Spec A, *et y un idéal premier, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $y \in \gamma(X)$;

(*b*) *Pour toute famille finie* $(f_1, f_2, \ldots, f_n, g)$ *d'éléments de A, telle que*

$$f_1(y) = \ldots = f_n(y) = 0; \qquad g(y) \neq 0,$$

on a

$$V(f_1) \cap \ldots \cap V(f_n) \cap D(g) \cap X \neq \emptyset.$$

Démonstration de la proposition 1.2.1.

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*) : Soit X une partie de Spec A, pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A, on a

$$\rho_X(\mathfrak{a}) \supset \rho_{\gamma(X)}(\mathfrak{a}).$$

Soit $g \notin \rho_{\gamma(X)}(\mathfrak{a})$, alors il existe un idéal premier $y \in \gamma(X)$ contenant $\mathfrak{a}$ et ne contenant pas g, d'après le lemme 1.2.2,

$$V(\mathfrak{a}) \cap D(g) \cap X \neq \emptyset,$$

donc il existe un idéal premier $z \in X$, contenant $\mathfrak{a}$ et ne contenant pas g, ce qui implique $g \notin \rho_X(\mathfrak{a})$, d'où l'assertion.

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*) : Soient X et Y deux parties de Spec A satisfaisant à la condition (*b*). Soient $y \in Y$, $f_1, \ldots, f_n$, g des éléments de A tels que $f_1(y) = \ldots = f_n(y) = 0$, $g(y) \neq 0$, par conséquent $\rho_X(f_1, \ldots, f_n) \subset y$, donc $g \notin \rho_X(f_1, \ldots, f_n)$, et il existe un idéal premier

$$z \in V(f_1) \cap \ldots \cap V(f_n) \cap D(g) \cap X,$$

c'est-à-dire $y \in \gamma(X)$. On a ainsi montré $Y \subset \gamma(X)$, de même $X \subset \gamma(y)$, d'où l'assertion.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1.2.1.1. — *Soit X une partie de* Spec A, *pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$, on a la relation*

$$\tau_{\gamma(X)}(V_X(\mathfrak{a})) = V_{\gamma(X)}(\mathfrak{a}).$$

Enfin, nous rappelons les propositions suivantes plus ou moins évidentes ([9], chap. IV, § 9).

PROPOSITION 1.2.3. — *Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneau, l'application ${}^a\varphi$:* Spec $B \to$ Spec A *est continue pour la topologie constructible.*

PROPOSITION 1.2.4 (*Stabilité de la topologie constructible*). — *Soit A un anneau.*

(i) *Soit S une partie multiplicative de A, la topologie constructible de* $\operatorname{Spec} S^{-1}A$ *est induite par la topologie constructible de* $\operatorname{Spec} A$.

(ii) *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A, la topologie constructible de* $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} = V(\mathfrak{a})$ *est induite par la topologie constructible de* $\operatorname{Spec} A$.

3. Ouverts réguliers et annulateurs.

Soit X un espace topologique, on dit qu'un ouvert est *régulier* s'il est égal à l'intérieur de son adhérence. On démontre qu'un ouvert est régulier si, et seulement si, c'est un intérieur, et que l'ensemble des ouverts réguliers ordonné par inclusion est une algèbre de Boole, la complémentarité étant définie par $U \to \complement \overline{U}$ [10].

Dans la suite de ce numéro, (A, X) est un couple spectral réduit, on se propose de caractériser les éléments de $\Phi(X)$ correspondants aux ouverts réguliers.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A, alors

$$\operatorname{Ann} \mathfrak{a} = k(D_X(\mathfrak{a})).$$

En effet,

$$\begin{aligned} f \in k(D_X(\mathfrak{a})) &\iff \tau_X(D_X(\mathfrak{a})) \subset V_X(f) \\ &\iff D_X(\mathfrak{a}) \cap D_X(f) = \emptyset \iff f \in \operatorname{Ann} \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

En particulier, $\operatorname{Ann} \mathfrak{a} = \{ 0 \}$ si, et seulement si, $D_X(\mathfrak{a})$ est un ouvert dense dans X.

PROPOSITION 1.3.1. — *Tout annulateur est un élément de $\Phi(X)$, et D_X induit un isomorphisme (d'ensembles ordonnés) de l'ensemble des annulateurs de A sur l'ensemble des ouverts réguliers.*

Démonstration. — La première assertion est évidente, et la relation

$$V_X(\operatorname{Ann} \mathfrak{a}) = \tau_X(D_X(\mathfrak{a}))$$

implique que $D_X(\operatorname{Ann} \mathfrak{a})$ est un ouvert régulier.

Réciproquement, supposons que $D_X(\mathfrak{a})$ soit un ouvert régulier, alors

$$D_X(\mathfrak{a}) = \operatorname{Int}_X \tau_X(D_X(\mathfrak{a})) = \operatorname{Int}_X V_X(\operatorname{Ann} \mathfrak{a}) = D_X(\operatorname{Ann} \operatorname{Ann} \mathfrak{a}),$$

ce qui implique $\rho_X(\mathfrak{a}) = \operatorname{Ann} \operatorname{Ann} \mathfrak{a}$, et achève la démonstration.

C. Q. F. D.

Corollaire 1.3.1.1. — *Pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *de* A, *on a*

$$\operatorname{Ann}\mathfrak{a} = \operatorname{Ann}\rho_X(\mathfrak{a}).$$

En effet, $\mathfrak{a} \subset \rho_X(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Ann}\operatorname{Ann}\mathfrak{a}$.

4. Séparation normale.

Soient A un anneau, X et Y deux parties de $\operatorname{Spec} A$; nous dirons que X et Y sont *normalement séparés* si $k(X) + k(Y) = A$.

Soient (A, X) un couple spectral, Y et Z deux parties de X; il est clair que Y et Z sont normalement séparées si, et seulement si, $\tau_X(Y)$ et $\tau_X(Z)$ le sont. Dans ce cas, $\tau_X(Y)$ et $\tau_X(Z)$ sont disjoints, la réciproque est fausse.

Nous dirons qu'un couple spectral (A, X) est *normal* s'il est réduit, et s'il satisfait à l'une des propriétés suivantes (équivalentes) :

(N_1) *Deux fermés disjoints de* X *sont normalement séparés.*

(N_2) *Pour tout couple d'idéaux* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, *appartenant à* $\Phi(X)$, *tels que* $\rho_X(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = A$, *on a* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$.

Soit A un anneau réduit (resp. : sans radical de Jacobson), le couple spectral $(A, \operatorname{Spec} A)$ [resp. : $(A, \max A)$] est normal.

Soient (A, X) un couple spectral, Y et Z deux parties de X; en identifiant X à son image dans $\operatorname{Spec} A/k(X)$, on voit que Y et Z sont normalement séparées par rapport à A si, et seulement si, ils le sont par rapport à $A/k(X)$, on en déduit la propriété de relativisation :

Proposition 1.4.1. — *Soient* (A, X) *un couple spectral normal, et* Y *une partie fermée de* X; *alors le couple* $(A/k(Y), Y)$ *est normal.*

Soient (A, X) un couple spectral réduit, S_X la partie multiplicative associée à X (*cf.* n° 1), Y et Z deux parties de X, en identifiant X à son image dans $\operatorname{Spec} S_X^{-1} A$, on voit que si Y et Z sont normalement séparées par rapport à A, ils le sont encore par rapport à $S_X^{-1} A$, la réciproque étant fausse; on a alors l'énoncé suivant :

Proposition 1.4.2. — *Soit* (A, X) *un couple spectral normal, alors le couple spectral* $(S_X^{-1} A, X)$ *est normal.*

5. Séparation topologique.

Dans ce numéro, A est un anneau réduit; certains résultats s'étendent au cas non réduit, mais seul le cas réduit intervient dans les applications ultérieures.

Pour tout idéal premier x de A, on note $\mathcal{G}_x$(resp. : $\mathcal{P}_x$) l'ensemble des idéaux premiers (resp. : des idéaux premiers minimaux) contenus dans x.

PROPOSITION 1.5.1. — *Soient* (A, X) *un couple spectral réduit,* x *et* y *deux idéaux premiers distincts, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $\operatorname{Ker} j_x \not\subset y$;

(*b*) $\operatorname{Ker} j_y \not\subset x$;

(*c*) $\mathcal{P}_x \cap \mathcal{P}_y = \emptyset$;

(*d*) x *et* y *sont séparés dans* X*;*

(*e*) $A_x \otimes_A A_y = 0$.

Avant de démontrer la proposition 1.5.1, nous énonçons quelques propriétés élémentaires de localisation.

LEMME 1.5.2. — *Soient* S *une partie multiplicative de* A, $j_S : A \to S^{-1}A$ *l'homomorphisme canonique, alors* $S^{-1}A$ *est un anneau réduit, et* $\operatorname{Ker} j_S$ *est l'intersection des idéaux premiers minimaux de* A *disjoints de* S ([3], chap. II, § 2, propos. 7).

COROLLAIRE 1.5.2.1. — *Soit* x *un idéal premier de* A, *alors* $\operatorname{Ker} j_x$ *est l'intersection des idéaux premiers minimaux contenus dans* x, *et les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) x *est un idéal premier minimal;*

(*b*) $\operatorname{Ker} j_x = x$;

(*c*) *Tout élément* f *de* x *est diviseur de zéro, et* $\operatorname{Ann} f$ *n'est pas contenu dans* x,

(*d*) A_x *est un corps.*

COROLLAIRE 1.5.2.2. — *Soient* f *un élément de* A, $j_f : A \to A_f$ *l'homomorphisme canonique, alors* $\operatorname{Ker} j_f = \operatorname{Ann} f$. *Pour que* f *soit diviseur de zéro, il faut et il suffit que* f *soit contenu dans un idéal premier minimal.*

LEMME 1.5.3. — *Soient* S *une partie multiplicative de* A, $j_S : A \to S^{-1}A$ *l'homomorphisme canonique,* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* A*; les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier minimal disjoint de* S*;*

(*b*) $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier minimal contenant* $\operatorname{Ker} j_S$*;*

(*c*) $\mathfrak{p}$ *est minimal parmi les idéaux premiers contenant* $\operatorname{Ker} j_S$.

Démonstration. — Il est clair que $(a) \Rightarrow (b)$ et $(b) \Rightarrow (c)$.

$(c) \Rightarrow (a)$: Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, minimal parmi ceux contenant $\operatorname{Ker} j_S$, alors $\mathfrak{p}/\operatorname{Ker} j_S$ est un idéal premier minimal de $A/\operatorname{Ker} j_S$, donc tout élément de $\mathfrak{p}/\operatorname{Ker} j_S$ divise o dans $A/\operatorname{Ker} j_S$; autrement dit, pour tout élément f de $\mathfrak{p}$, il existe un élément g de A n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} j_S$, tel que $gf \in \operatorname{Ker} j_S$, donc un élément $s \in S$ tel que $gfs = 0$, ce qui implique que f n'appartient pas à S.

C. Q. F. D.

LEMME 1.5.4. — *Soient x et y deux idéaux premiers distincts de A, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $\operatorname{Ker} j_x \subset y$;

(*b*) $\operatorname{Ker} j_y \subset x$;

(*c*) $\mathcal{P}_x \cap \mathcal{P}_y \neq \emptyset$.

Démonstration. — $(a) \Rightarrow (c)$: Supposons $\operatorname{Ker} j_x \subset y$, alors il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$, minimal parmi les idéaux premiers contenus dans y, et contenant $\operatorname{Ker} j_x$, d'après le lemme 1.5.3, $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_x \cap \mathcal{P}_y$.

$(c) \Rightarrow (a)$: C'est évident d'après le corollaire 1.5.2.1.

C. Q. F. D.

LEMME 1.5.5. — *Soient (A, X) un couple spectral réduit, x un élément de X, f un élément de A, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $j_x(f) \neq 0$;

(*b*) $x \in \tau_X(D_X(f))$.

En effet, $j_x(f) = 0$ si, et seulement si, $\operatorname{Ann} f \subset x$, et on sait que $V_X(\operatorname{Ann} f) = \tau_X(D_X(f))$ (*cf.* n° 3).

COROLLAIRE 1.5.5.1. — *Avec les notations du lemme* 1.5.5, $f \in \operatorname{Ker} j_x$ *si, et seulement si,* $V_X(f)$ *est un voisinage de* x.

D'autre part, le corollaire suivant sera utile dans la suite :

COROLLAIRE 1.5.5.2. — *Soit (A, X) un couple spectral réduit.*

(i) *Pour tout ouvert U de X,* $\bigcap_{x \in U} \operatorname{Ker} j_x = k(U)$.

(ii) *On suppose que (A, X) est un couple normal, pour tout fermé F de X,* $\operatorname{Ker} j_{S_F} = \bigcap_{x \in F} \operatorname{Ker} j_x$ (S_F *est la partie multiplicative associée à* F).

Démonstration.

(i) : C'est trivial.

(ii) : On sait que $\operatorname{Ker} j_{S_F} \subset \bigcap_{x \in F} \operatorname{Ker} j_x$; soit $f \in \bigcap_{x \in F} \operatorname{Ker} j_x$, alors $F \subset \operatorname{Int}_X V_X(f)$; autrement dit, $F \cap V_X(\operatorname{Ann} f) = \emptyset$, et l'hypothèse de normalité implique $k(F) + \operatorname{Ann} f = A$, donc il existe $g \in k(F)$ tel que $f(1 - g) = 0$, il est clair que $1 - g \in S_F$, donc $f \in \operatorname{Ker} j_{S_F}$.

C. Q. F. D.

Démonstration de la proposition 1.5.1. — L'équivalence de (*a*), (*b*), (*c*) n'est autre que le lemme 1.5.4.

(*a*) $\Rightarrow$ (*d*) : On suppose que $\operatorname{Ker} j_x \not\subset y$, et soit $f \in \operatorname{Ker} j_x$, $f \notin y$, alors $V_X(f)$ est un voisinage de x, $D_X(f)$ est un voisinage de y, d'où l'assertion.

(*d*) $\Rightarrow$ (*e*) : On suppose que x et y sont séparés dans X, alors il existe $f, g \in A$ tels que $f \notin x$, $g \notin y$, et $fg = 0$, ce qui implique $A_x \otimes_A A_y = 0$.

(*e*) $\Rightarrow$ (*c*) : Supposons $\mathcal{G}_x \cap \mathcal{G}_y \neq 0$, et soit $\mathfrak{p} \in \mathcal{G}_x \cap \mathcal{G}_y$; on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & A_x \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
A_y \arrow[r] \arrow[drr] & A_x \otimes_A A_y \arrow[dr] & \\
 & & A_\mathfrak{p}
\end{tikzcd}$$

où les flèches sont des homomorphismes d'anneaux, ce qui implique $A_x \otimes_A A_y \neq 0$, d'où l'assertion.

C. Q. F. D.

Notons que si (A, X) est un couple spectral réduit, x et y deux éléments de X, alors x et y sont séparés dans X si, et seulement si, ils sont séparés dans $\operatorname{Spec} A$.

PROPOSITION 1.5.6. — *Soient* (A, X) *un couple spectral réduit, x un élément de* X, *alors* $V_X(\operatorname{Ker} j_x)$ *est l'intersection des voisinages fermés de x.*

En effet, soit F l'intersection des voisinages fermés de x, alors $y \in F$ si, et seulement si, x et y ne sont pas séparés, c'est-à-dire $\operatorname{Ker} j_x \subset y$.

PROPOSITION 1.5.7. — *Le spectre minimal d'un anneau est séparé* [11].

6. **Idéaux mous.**

Soit A un anneau; pour alléger les notations, nous noterons V_M, D_M, ρ_M, τ_M, Int_M au lieu de $V_{\max A}$, $D_{\max A}$, ...

PROPOSITION 1.6.1. — *Soient A un anneau sans radical de Jacobson, x un idéal maximal, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *$j_x : A \to A_x$ est une surjection;*

(*b*) *$A/\mathrm{Ker}\, j_x$ est un anneau local;*

(*c*) *Pour tout idéal premier $y \subset x$, A/y est un anneau local;*

(*d*) *Pour tout idéal premier $y \not\subset x$, x et y sont séparés;*

(*e*) *Pour tout idéal maximal $y \neq x$, x et y sont séparés;*

(*f*) *Pour tout fermé F de* $\max A$, *ne contenant pas x, x et F sont séparés dans* $\max A$;

(*g*) *Pour tout élément f de A tel que $f(x) \neq 0$, $V_M(f)$ et x sont séparés dans* $\max A$;

(*h*) $(V_M(f))_{f \in \mathrm{Ker}\, j_x}$ *est une base de voisinage de x dans* $\max A$.

L'ensemble des idéaux maximaux satisfaisant aux propriétés (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), (*e*), (*f*), (*g*), (*h*) *est un espace régulier.*

Démonstration. — Il est clair que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$, $(d) \Leftrightarrow (e)$, $(h) \Rightarrow (f) \Rightarrow (g) \Rightarrow (e)$.

On démontre $(c) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a) \Rightarrow (h)$.

$(c) \Rightarrow (e)$: Par hypothèse, si y est un idéal maximal différent de x, $y \cap x$ ne contient pas d'idéaux premiers, donc y et x sont séparés (*cf.* propos. 1.5.1).

$(e) \Rightarrow (a)$: Par hypothèse, $V_M(\mathrm{Ker}\, j_x) = \{x\}$ (*cf.* propos. 1.5.6), alors si $f \in A - x$, $j_x(f)$ n'appartient à aucun idéal de $A/\mathrm{Ker}\, j_x$ donc est inversible dans $A/\mathrm{Ker}\, j_x$, ce qui prouve que $A/\mathrm{Ker}\, j_x = A_x$.

$(a) \Rightarrow (h)$: Par hypothèse, pour tout $f \in A - x$, il existe $g \in A$ tel que $j_x(gf - 1) = 0$ et, par conséquent, $V_M(gf - 1) \subset D_M(f)$, d'où l'assertion (*cf.* cor. 1.5.5.1).

Enfin, la dernière assertion est une conséquence de (*h*).

C. Q. F. D.

Soit A un anneau sans radical de Jacobson, nous dirons qu'un idéal maximal x est *mou* s'il vérifie les propriétés équivalentes de la proposition 1.6.1. Nous dirons qu'un sous-ensemble X de $\max A$ est *mou* [ou que (A, X) est un *couple mou*] si tous les éléments de X sont des idéaux mous. On peut définir aussi la mollesse lorsque A a un radical non nul, en « remontant » les définitions correspondantes sur l'anneau $A/R(A)$. Il est clair que la mollesse est stable par passage au quotient et par localisation.

Nous dirons qu'un anneau A est *mou* s'il est sans radical de Jacobson, et si tout idéal maximal est mou (c'est-à-dire $\max A$ est un espace séparé). Si A est un anneau mou et $\mathfrak{a}$ un idéal intersection d'idéaux maximaux, alors $A/\mathfrak{a}$ est un anneau mou.

Un anneau absolument plat est évidemment mou; nous montrerons au paragraphe 3 que si X est un espace topologique, l'anneau $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues réelles sur X et l'anneau $\mathcal{C}^*(X)$ des fonctions continues réelles bornées sur X sont des anneaux mous. Une algèbre de Banach régulière sans radical est un anneau mou [13].

Soit (A, X) un couple spectral mou, on note $\mathcal{G}(X)$ le générisé de X (c'est-à-dire l'ensemble des idéaux premiers de A contenus dans un élément de X), et $\pi : \mathcal{G}(X) \to X$ l'application qui associe à tout $y \in \mathcal{G}(X)$ l'unique idéal maximal $\pi(y)$ contenant y, alors on a le résultat suivant :

PROPOSITION 1.6.2. — *Avec les notations ci-dessus, π est une application fermée. Si, de plus, le couple (A, X) est réduit, π est une application continue.*

Démonstration. — La première assertion est triviale; en effet, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, on a

$$\pi(V(\mathfrak{a}) \cap \mathcal{G}(X)) = V(\mathfrak{a}) \cap X.$$

Supposons que le couple (A, X) soit réduit, et soit Y une partie fermée de X, on va montrer que $\pi^{-1}(Y) = \overline{\pi^{-1}(Y)} \cap \mathcal{G}(X)$ [on rappelle que $\overline{\pi^{-1}(Y)}$ désigne l'adhérence de $\pi^{-1}(Y)$ dans $\operatorname{Spec} A$]. Il est clair que

$$\pi^{-1}(Y) \subset \overline{\pi^{-1}(Y)} \cap \mathcal{G}(X).$$

Soit $y \in \overline{\pi^{-1}(Y)} \cap \mathcal{G}(X)$, alors $\pi(y) \in \overline{\pi^{-1}(Y)} \cap X$, et il suffit de montrer que $\overline{\pi^{-1}(Y)} \cap X = Y$.

On sait que X est un espace régulier (propos. 1.6.1), soit $x \in X - Y$, alors x et Y sont séparés dans X, et par conséquent, il existe $f \in A - x$ tel que $\tau_X(D_X(f)) \cap Y = \emptyset$, ce qui implique

$$f \in \bigcap_{y \in y} \operatorname{Ker} j_y = k(\pi^{-1}(Y)),$$

soit $\overline{\pi^{-1}(Y)} \subset V(f)$ et, par conséquent, $\overline{\pi^{-1}(Y)} \cap X = Y$.

C. Q. F. D.

Corollaire 1.6.2.1. — *Soit A un anneau mou, l'application* $\pi : \mathrm{Spec}A \to \max A$ *est propre.*

Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneau, A étant un anneau mou, on définit alors ${}^m\varphi : \max B \to \max A$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \max B \arrow[r, "{}^m\varphi"] \arrow[d] & \max A \\ \mathrm{Spec}B \arrow[r, "{}^a\varphi"] & \mathrm{Spec}A \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

et ${}^m\varphi$ est une application continue.

Proposition 1.6.3. — *Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneau, A étant un anneau mou, B un anneau sans radical de Jacobson, pour que ${}^m\varphi : \max B \to \max A$ soit une surjection, il faut et il suffit que φ soit une injection.*

Démonstration. — Supposons φ injective, alors ${}^a\varphi(\mathrm{Spec}B)$ est dense dans $\mathrm{Spec}A$ ([9], chap. I, § 1, cor. 1.2.7), et comme par hypothèse $\max B$ est dense dans $\mathrm{Spec}B$, ${}^m\varphi(\max B)$ est dense dans $\max A$, donc ${}^m\varphi$ est surjective.

Supposons ${}^m\varphi$ surjective, alors tout idéal maximal de A contient l'image réciproque d'un idéal premier de B, et par conséquent $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$.

C. Q. F. D.

7. **Propriétés de compacité.**

Dans les numéros 7 et 8, A est un anneau sans radical de Jacobson.

Lemme 1.7.1. — *Soit (A, X) un couple mou, pour que X soit un espace compact, il faut et il suffit que X soit fermé dans* $\max A$.

Il est clair que si X est fermé dans $\max A$, X est compact. Réciproquement, supposons X compact, un argument standard de compacité montre que, pour tout idéal maximal y n'appartenant pas à X, y et X sont séparés, ce qui implique que X est fermé dans $\max A$.

Lemme 1.7.2. — *Soient (A, X) un couple mou, et Y une partie de X, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *Y est une partie relativement compacte dans X;*

(*b*) $\tau_M(Y) \subset X$.

Démonstration. — Il est clair que $(b) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (b)$: On a $\tau_X(Y) = \tau_M(Y) \cap X$, et $\tau_X(Y)$ étant compact est fermé dans $\max A$ (lemme 1.7.1), ce qui implique $\tau_X(Y) = \tau_M(Y)$.

C. Q. F. D.

LEMME 1.7.3. — *Soient* (A, X) *un couple mou réduit,* Y *un ouvert de* $\max A$*, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $Y \subset X$ *et* Y *est relativement compact dans* X*;*

(*b*) $Y \cap X$ *est relativement compact dans* X.

Démonstration. — Il est clair que $(a) \Rightarrow (b)$.

$(b) \Rightarrow (a)$: On suppose $Y \cap X$ relativement compact dans X, alors (lemme 1.7.2) $\tau_M(Y \cap X) \subset X$, et puisque X est dense dans $\max A$ et Y ouvert, on a $\tau_M(Y \cap X) = \tau_M(Y)$, d'où l'assertion.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 1.7.4. — *Soit* (A, X) *un couple mou réduit, on notera* $X' = \max A - X$, *et* $\mathcal{D}(X)$ *l'ensemble des éléments* $f \in A$ *tels que* $D_X(f)$ *soit relativement compact dans* X *(éléments à support compact), alors :*

(i) $\mathcal{D}(X) = \bigcap_{y \in X'} \operatorname{Ker} j_y$*;*

(ii) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) X *est localement compact;*

(*b*) *Pour tout* $x \in X$, *il existe* $f \in \mathcal{D}(X)$ *avec* $f(x) \neq 0$*;*

(*c*) X *est ouvert dans* $\max A$.

Si les propositions (*a*), (*b*), (*c*) *sont vérifiées, alors* $\mathcal{D}(X) = \operatorname{Ker} j_{S_{X'}}$, ($S_{X'}$ *étant la partie multiplicative associée à* X').

Démonstration.

(i) D'après le lemme 1.7.2, $f \in \mathcal{D}(X)$ si, et seulement si, $\tau_M(D_X(f) \subset X$, et on sait que $\tau_M(D_X(f)) = \tau_M(D_M(f))$ (*cf.* n° 3), l'assertion résulte alors du lemme 1.5.5.

(ii) $(a) \Rightarrow (b)$: Soit $x \in X$ et soit U un voisinage compact de x de X, il existe $f \in A - x$ tel que $D_X(f) \subset U$, soit $f \in \mathcal{D}(X)$.

$(b) \Rightarrow (c)$: C'est évident, on a $X' = V_M(\mathcal{D}(X))$.

$(c) \Rightarrow (a)$: Par hypothèse, X' est fermé dans $\max A$, donc, pour tout $x \in X$, x et X' sont séparés, autrement dit, il existe un voisinage fermé U de x dans $\max A$ tel que $U \subset X$, d'où l'assertion.

Supposons (*a*), (*b*), (*c*) vérifiées, la dernière assertion résulte de la normalité du couple $(A, \max A)$ (*cf.* cor. 1.5.5.2).

C. Q. F. D.

8. Critères de mollesse.

LEMME 1.8.1. — *Soit* A *un anneau mou; deux fermés disjoints de* $\max A$ *sont séparés par des ouverts spéciaux de* $\max A$.

Démonstration. — Soient F et G deux fermés disjoints de $\max A$; pour tout $x \in F$, il existe $f_x \in \operatorname{Ker} j_x$ tel que $V_M(f_x) \subset \max A - G$; un argument standard de compacité montre qu'il existe une famille finie $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de A telle que

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Int}_M V_M(f_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_M(f_i) \subset \max A - G;$$

soit $f = f_1, f_2, \ldots, f_n$, alors (*cf.* n° 3)

$$\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Int}_M V_M(f_i) = \bigcup_{i=1}^{n} D_M(\operatorname{Ann} f_i) = D_M\left(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Ann} f_i\right) \subset D_M(\operatorname{Ann} f)$$
$$= \operatorname{Int}_M V_M(f),$$

d'où les inclusions

$$F \subset D_M(\operatorname{Ann} f) \subset V_M(f) \subset \max A - G.$$

De même, on montre qu'il existe un élément $g \in A$ tel que

$$V_M(\operatorname{Ann} f) \subset D_M(\operatorname{Ann} g) \subset V_M(g) \subset \max A - F,$$

et, par conséquent,

$$F \subset D_M(g) \subset V_M(f) \subset \max A - G,$$

ce qui démontre le lemme.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 1.8.2. — *Soit* (A, X) *un couple spectral réduit,* X *étant une partie* γ*-dense de* $\max A$.

(i) *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) (A, X) *est un couple mou;*

(*b*) *Pour tout* $x \in X$, $(V_X(f))_{f \in \operatorname{Ker} j_x}$ *est une base de voisinage de* x.

(ii) *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*c*) A *est un anneau mou;*

(*d*) *Deux fermés spéciaux disjoints de* X *sont séparés par des ouverts spéciaux de* X.

Démonstration.

(i) Il est clair que $(a) \Rightarrow (b)$ propos. 1.6.1).

$(b) \Rightarrow (a)$: Soient $x \in X$ et $f \in A - x$; par hypothèse, il existe $g \in \operatorname{Ker} j_X$ tel que $V_X(g) \subset D_X(f)$, et l'hypothèse de γ-densité implique $V_M(g) \subset D_M(f)$

(*cf.* propos. 1.2.1); autrement dit, x et $V_M(f)$ sont séparés dans $\max A$, d'où l'assertion.

(*ii*) $(c) \Rightarrow (d)$: Soient f et g deux éléments de A tels que

$$V_X(f) \cap V_X(g) = \emptyset,$$

alors la propriété de γ-densité implique $V_M(f) \cap V_M(g) = \emptyset$, et l'assertion résulte du lemme 1.8.1.

$(d) \Rightarrow (c)$: Soient x et y deux éléments de $\max A$, f un élément de A tel que $f(x) = 0$, $f(y) = 1$, alors il existe f', $g' \in A$ tels que

$$V_X(f) \subset D_X(f') \subset V_X(g') \subset D_X(1 - f),$$

et l'hypothèse de γ-densité implique

$$V_M(f) \subset D_M(f') \subset V_M(g') \subset D_M(1 - f),$$

donc x et y sont séparés dans $\max A$, d'où l'assertion.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 1.8.3. — *Soit* (A, X) *un couple spectral normal,* X *étant une partie* γ*-dense de* $\max A$.

(i) *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) (A, X) *est un couple mou;*

(*b*) X *est un espace topologique régulier.*

(ii) *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*c*) A *est un anneau mou;*

(*d*) X *est un espace topologique normal.*

Démonstration.

(i) On sait que $(a) \Rightarrow (b)$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Soient $x \in X$ et $f \in A - x$, alors x et $V_X(f)$ sont séparés; par conséquent, il existe $g \in A - x$ tel que $\tau_X(D_X(g)) \subset D_X(f)$, soit $\rho_X(\operatorname{Ann} g + Af) = A$, la normalité implique $\operatorname{Ann} g + \rho_X(f) = A$, et la propriété de γ-densité implique $\rho_X(f) = \rho_M(f)$, par conséquent. $\tau_M(D_N(g)) \subset V_M(f)$, donc x et $V_M(f)$ sont séparés dans $\max A$, d'où l'assertion,

(ii) $(c) \Rightarrow (d)$: Soient F et G deux fermés disjoints de X, alors $\tau_M(F) \cap \tau_M(G) = 0$ (hypothèse de normalité), et l'assertion résulte du lemme 1.8.1.

Notons que la γ-densité n'intervient pas dans la démonstration de $(c) \Rightarrow (d)$.

$(d) \Rightarrow (c)$: Soient f et g tels que $V_M(f) \cap V_M(g) = \emptyset$, alors $V_X(f)$ et $V_X(g)$ sont séparés dans X, et il existe un idéal $\mathfrak{a} \in \Phi(X)$ tel que

$$V_X(f) \subset D_X(\mathfrak{a}) \subset \tau_X(D_X)(\mathfrak{a})) \subset D_X(g),$$

ce qui implique

$$\rho_X(\mathfrak{a} + Af) = A, \qquad \rho_X(\operatorname{Ann}\mathfrak{a} + Ag) = A,$$

et par conséquent (hypothèse de normalité et de γ-densité),

$$\mathfrak{a} + \rho_M(f) = A, \qquad \operatorname{Ann}\mathfrak{a} + \rho_M(g) = A,$$

soit

$$V_M(f) \subset D_M(\mathfrak{a}) \subset \tau_M(D_M(\mathfrak{a})) \subset D_M(g),$$

ce qui achève la démonstration.

C. Q. F. D.

9. Localisation des anneaux mous.

LEMME 1.9.1. — *Soient A un anneau réduit, X une partie de* Spec A, *S_X la partie multiplicative associée à X, on note $j_{S_X} : A \to S_X^{-1}A$ l'homomorphisme canonique, et on identifie* Spec $S_X^{-1}A$ *à son image dans* Spec A.

(i) *Pour qu'un idéal maximal de A contienne un élément de* Spec $S_X^{-1}A$, *il faut et il suffit qu'il appartienne à* $V_M(\operatorname{Ker} j_{S_X})$.

(ii) *Soit $\mathcal{R}(S_X^{-1})$ le radical de Jacobson de $S_X^{-1}A$, alors*

$$j_{S_X}^{-1}(\mathcal{R}(S_X^{-1}A)) = k(X),$$

et tout idéal maximal de A contenant un élément de Spec $S_X^{-1}A$ *appartient à $\tau_M(X)$.*

Démonstration.

(i) : C'est une conséquence triviale du lemme 1.5.3.

(ii) : Il est clair que $j_{S_X}^{-1}(\mathcal{R}(S_X^{-1}A)) \subset k(X)$. Réciproquement, soit $\mathfrak{p}$ un élément maximal de Spec $S_X^{-1}A$, on va montrer que $\mathfrak{p} \supset k(X)$; soit $f \in A - \mathfrak{p}$, alors il existe $s \in S_X$, $g \in \mathfrak{p}$, $a \in A$ tel que $s = af + g$ et, par conséquent, $V_X(f) \cap V_X(g) = \emptyset$; comme $V_X(g)$ n'est pas vide, il s'ensuit que $V_X(f)$ est strictement contenu dans X, c'est-à-dire f n'appartient pas à $k(X)$.

La dernière assertion est évidemment triviale.

COROLLAIRE 1.9.1.1. — *Soient A un anneau mou, X une partie de* max A, *alors*

$$\tau_M(X) = V_M\Big(\bigcap_{x \in X} \operatorname{Ker} j_x\Big) = V_M(\operatorname{Ker} j_{S_X}).$$

En particulier, pour qu'un idéal maximal de A *contienne un élément maximal de* $\operatorname{Spec} S_X^{-1} A$, *il faut et il suffit qu'il appartienne* à $\tau_M(X)$.

En effet, la mollesse de A implique que tout idéal maximal de A, contenant un élément de $\operatorname{Spec} S_X^{-1} A$, contient un élément maxima de $\operatorname{Spec} S_X^{-1} A$ et, par conséquent, $V_M(\operatorname{Ker} j_{S_X}) \subset \tau_M(X)$, d'où le corollaire.

Proposition 1.9.2. — *Soient* A *un anneau mou,* F *une partie fermée de* $\max A$, *on a les propositions suivantes :*

(i) *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* A; *pour que* $V_M(\mathfrak{a}) = F$, *il faut et il suffit que l'on ait les relations d'inclusion*

$$\bigcap_{x \in F} \operatorname{Ker} j_X \subset \mathfrak{a} \subset k(F).$$

(ii) *La suite*

$$0 \to \bigcap_{x \in F} \operatorname{Ker} j_x \to A \xrightarrow{j_{S_F}} S_F^{-1} A \to 0$$

est exacte, et l'homomorphisme canonique $A/k(F) \to S_F^{-1} \otimes_A A/k(F)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration.

(i) L'assertion « *il suffit* » est conséquence du corollaire 1.9.1.1. Pour montrer « *il faut* », on vérifie que $V_M(\mathfrak{a}) = F$ implique $\bigcap_{x \in F} \operatorname{Ker} j_x \subset \mathfrak{a}$; en effet, soit $f \in \bigcap_{x \in F} \operatorname{Ker} j_x$, alors $F \subset \operatorname{Int}_M V_M(f)$ (*cf.* cor. 1.5.5.1), c'est-à-dire $F \cap V_M(\operatorname{Ann} f) = \emptyset$ et, par conséquent, $\mathfrak{a} + \operatorname{Ann} f = A$, donc il existe un élément $g \in \mathfrak{a}$ tel que $f = gf$, et $f \in \mathfrak{a}$.

(ii) On veut montrer que la suite

$$0 \to \bigcap_{x \in F} \operatorname{Ker} j_x \to A \xrightarrow{j_{S_F}} S_F^{-1} A \to 0$$

est exacte; on sait que $\bigcap_{x \in F} \operatorname{Ker} j_x = \operatorname{Ker} j_{S_F}$ (cor. 1.5.5.2); d'autre part, $V_M(\operatorname{Ker} j_{S_F}) = F$ (cor. 1.9.1.1), donc si $f \in S_F$, $j_S(f)$ n'appartient à aucun idéal de $A/\operatorname{Ker} j_{S_F}$, donc est inversible dans $A/\operatorname{Ker} j_{S_F}$, ce qui implique que $A/\operatorname{Ker} j_{S_F} \to S_F^{-1}/A$ est un isomorphisme.

Enfin, la dernière assertion est triviale.

C. Q. F. D.

Remarque. — L'assertion I de la proposition précédente est bien connue lorsque A est une algèbre de Banach régulière ([6], § 36).

PROPOSITION 1.9.3. — *Soient A un anneau mou, X une partie de* $\max A$, *γ-dense dans* $\max A$, *et F une partie fermée de X, et soient les propositions :*

(*a*) $\gamma(F) \cap \max A = \tau_M(F)$;

(*b*) $j_{S_F} : A \to S_F^{-1}$ *est une surjection, et l'homomorphisme canonique* $A/k(F) \to S_F^{-1} A \otimes_A A/k(F)$ *est un isomorphisme.*

Alors $(a) \Rightarrow (b)$.

Si $F = V_X(\mathfrak{a})$, *où* $\mathfrak{a}$ *est un idéal de type fini, les assertions* (*a*) *et* (*b*) *sont vérifiées.*

Si (A, X) *est un couple normal, les assertions* (*a*) *et* (*b*) *sont vérifiées et la suite*

$$0 \to \bigcap_{x \in F} \operatorname{Ker} j_x \to A \xrightarrow{j_{S_F}} S_F^{-1} A \to 0$$

est exacte.

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b)$: — On suppose que A est vérifiée; soit $f \in A$ tel que $F \subset D_M(f)$, alors $\tau_M(F) \subset D_M(f)$ et, par conséquent, $S_F = S_{\tau_M}(F)$; l'assertion résulte alors de la proposition 1.9.2.

A étant un anneau mou, pour tout $x \in \max A$, $(V_M(f))_{f \in \ker j_x}$ est une base de voisinage de x pour la topologie spectrale de $\max A$, ce qui implique que l'ensemble $\{ V_M(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a}$ est un idéal de type fini contenant $x \}$ est une base de voisinage de x pour la topologie induite sur $\max A$ par la topologie constructible.

Supposons que $F = V_X(\mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de type fini, alors pour tout idéal de type fini $\mathfrak{b}$, tel que $V_X(\mathfrak{a}) \cap V_X(\mathfrak{b}) = \varnothing$, la propriété de γ-densité implique $V_M(\mathfrak{a}) \cap V_M(\mathfrak{b}) = \varnothing$ (*cf.* cor. 1.2.1.I) et, par conséquent,

$$\tau_M(F) = V_M(\mathfrak{a}) \subset \gamma(F) \cap \max A, \qquad \text{d'où} \qquad \tau_M(F) = \gamma(F) \cap \max A.$$

Supposons que (A, X) soit un couple normal, et soit $\mathfrak{b}$ un idéal de type fini tel que $F \cap V_X(\mathfrak{b}) = \varnothing$; l'hypothèse de normalité et la propriété de γ-densité impliquent $\tau_M(F) \cap V_M(\mathfrak{b}) = \varnothing$ et, par conséquent,

$$\tau_M(F) \subset \gamma(F) \cap \max A, \qquad \text{d'où} \qquad \tau_M(F) = \gamma(F) \cap \max A.$$

Enfin, la dernière assertion résulte du corollaire 1.5.5.2.

C. Q. F. D.

2. Faisceaux associés aux couples spectraux.

1. Espaces spectrologiques.

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace annelé local; pour toute partie Y de X, on notera $(Y, \mathcal{O} \mid Y)$ l'espace annelé local induit sur Y, $\Gamma(\mathcal{O}, Y)$ l'anneau des sections au-dessus de Y, $\theta_Y^X : \Gamma(\mathcal{O}, X) \to \Gamma(\mathcal{O}, Y)$ l'homomorphisme canonique. Pour tout $x \in X$, on notera $\mathcal{O}_x$ la fibre au point x, k_x le corps résiduel; pour tout ouvert U contenant x, on notera

$$\theta_x^U : \quad \Gamma(\mathcal{O}, U) \to \mathcal{O}_x, \qquad \delta_x^U : \quad \Gamma(\mathcal{O}, U) \to k_x$$

les homomorphismes canoniques; pour tout élément $f \in \Gamma(\mathcal{O}, U)$, on notera $f(x) = \delta_x^U(f)$.

Soit U un ouvert de X, on notera $\mu_U(x) = \operatorname{Ker} \delta_x^U$, c'est un idéal premier de $\Gamma(\mathcal{O}, U)$, ce qui définit une application $\mu_U : U \to \operatorname{Spec} \Gamma(\mathcal{O}, U)$.

PROPOSITION 2.1.1. — $\mu_U : U \to \operatorname{Spec} \Gamma(\mathcal{O}, U)$ *est une application continue, et le couple spectral* $(\Gamma(\mathcal{O}, U), \mu_U(U))$ *est t-réduit (cf.* § 1, nº 1).

En effet, pour tout $f \in \Gamma(\mathcal{O}, U)$,

$$U_f = \mu_U^{-1}(D(f)) = \{ x \in U \mid f(x) \neq \emptyset \}$$

est un ouvert de U, ce qui implique la continuité de μ_U, et d'autre part, f est inversible dans $\Gamma(\mathcal{O}, U)$ si, et seulement si, $U_f = U$, ce qui implique la dernière assertion ([4], propos. 42).

Nous dirons qu'un ouvert U de X est un *ouvert spectrologique* si $\mu_U : U \to \operatorname{Spec} \Gamma(\mathcal{O}, U)$ est un plongement, dans ce cas, on identifie U et $\mu_U(U)$, ce qui définit le couple spectral $(\Gamma(\mathcal{O}, U), U)$.

LEMME 2.1.1. — *Soient U un ouvert spectrologique de X, Y une partie de X, alors $U \cap Y$ est un ouvert spectrologique du faisceau $(Y, \mathcal{O} \mid Y)$.*

En effet, il suffit de regarder le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U \cap Y & \longrightarrow & U \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_{U \cap Y}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_U} \\ \operatorname{Spec} \Gamma(\mathcal{O}, U \cap Y) & \longrightarrow & \operatorname{Spec} \Gamma(\mathcal{O}, U) \end{array}$$

il est clair que si μ_U est un plongement, $\mu_{U \cap Y}$ est un plongement.

COROLLAIRE 2.1.2.1. — *Tout ouvert de X, contenu dans un ouvert spectrologique, est un ouvert spectrologique.*

Nous dirons qu'un espace annelé local $(X, \mathcal{O})$ est un *espace spectrologique* si X est un ouvert spectrologique. Nous dirons qu'un espace annelé local $(X, \mathcal{O})$ est un *espace localement spectrologique* si tout point de X a un voisinage ouvert spectrologique; dans ce cas, l'ensemble des ouverts spectrologiques est une base de la topologie de X, et X est un espace de Kolmogorov; pour toute partie Y de X, le faisceau $(Y, \mathcal{O} \mid Y)$ est un espace localement spectrologique.

Nous dirons qu'un espace localement spectrologique $(X, \mathcal{O})$ est un *espace fonctionnel* si, pour tout ouvert spectrologique U, le couple spectral $(\Gamma(\mathcal{O}, U), U)$ est réduit. Pour qu'un espace localement spectrologique soit fonctionnel, il faut et il suffit que tout point de la base admette un système de voisinages ouverts spectrologiques, tels que les couples spectraux correspondants soient réduits.

2. Espaces schématiques.

Nous noterons EAL la catégorie des espaces annelés locaux, on définit les foncteurs contravariants $\Phi : \mathrm{EAL} \to \mathrm{CS}$, $\Psi : \mathrm{CS} \to \mathrm{EAL}$, et les morphismes fonctoriels $\alpha : \mathrm{Id}_{\mathrm{CS}} \to \Phi \circ \Psi$, $\beta : \mathrm{Id}_{\mathrm{EAL}} \to \Psi \circ \Phi$ de la façon suivante :

Le foncteur Φ. — Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace annelé local, on notera

$$\Phi(X, \mathcal{O}) = (\Gamma(\mathcal{O}, X), \mu_X(X)),$$

Soit $\psi : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{Q})$ un morphisme d'espaces annelés locaux, on notera $\Phi(\psi) : \Gamma(\mathcal{Q}, Y) \to \Gamma(\mathcal{O}, X)$ l'homomorphisme canonique, et il est clair que $\Phi(\psi)$ est un morphisme de couples spectraux $\Phi(\psi)$

$$(\Gamma(\mathcal{Q}, Y), \mu_Y(Y)) \to (\Gamma(\mathcal{O}, X), \mu_X(X)).$$

Le foncteur Ψ. — Soit (A, X) un couple spectral, on notera

$$\Psi(A, X) = \tilde{A} \mid \mathrm{X}$$

la restriction du schéma affine $\tilde{A}$ au sous-ensemble X de Spec A.

Soit $\varphi : (A, X) \to (B, Y)$ un morphisme de couples spectraux, on définit de façon évidente le morphisme $\Psi(\varphi) : \Psi(B, Y) \to \Psi(A, X)$, à partir du morphisme $\tilde{\varphi} : \tilde{B} \to \tilde{A}$.

Le morphisme α. — Soit (A, X) un couple spectral, on note $\Gamma(A, X)$ l'anneau des sections de $\tilde{A} \mid X$, et $\alpha(A, X) : A \to \Gamma(A, X)$ l'homomorphisme canonique, on a le diagramme commutatif d'espaces topologiques

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\mu_X"'] \arrow[dr] & \\ \operatorname{Spec}\Gamma(A, X) \arrow[rr, "a_{\alpha(X, A)}"'] & & \text{Spce } A \end{tikzcd}$$

ce qui montre que $\Psi(A, X)$ est un espace spectrologique et

$$\alpha(A, X) : (A, X) \to (\Gamma(A, X), X) = \Phi \circ \Psi(A, X)$$

est un morphisme de couples spectraux. On vérifie aisément que α est un morphisme fonctoriel $\alpha : \mathrm{Id}_{\mathrm{CS}} \to \Phi \circ \Psi$.

Le morphisme β. — Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace annelé local, et soit $(X, \mathcal{O}) \to \widetilde{\Gamma(\mathcal{O}, X)}$ le morphisme canonique ([9], chap. I, § 22), on en déduit un morphisme d'espaces annelés locaux,

$$\beta(X, \mathcal{O}) : (X, \mathcal{O}) \to \widetilde{\Gamma(\mathcal{O}, X)} \mid \mu_X(X) = \Psi \circ \Phi\,(X, \mathcal{O}),$$

et on vérifie aisément que β est un morphisme fonctoriel $\beta : \mathrm{Id}_{\mathrm{EAL}} \to \Psi \circ \Phi$.

PROPOSITION 2.2.1. — *Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace annelé local, (A, Y) un couple spectral, il existe une bijection naturelle*

$$\mathrm{EAL}((X, \mathcal{O}), \Psi(A, Y)) \to \mathrm{CS}((A, Y), \Phi(X, \mathcal{O})),$$

autrement dit les foncteurs contravariants Φ et Ψ sont adjoints l'un de l'autre.

Démonstration. — On définit

$$u : \mathrm{EAL}((X, \mathcal{O}), \Psi(A, Y)) \to \mathrm{CS}((A, Y), \Phi(X, \mathcal{O})).$$

Soit $\psi : (X, \mathcal{O}) \to \Psi(A, Y)$ un morphisme d'espaces annelés locaux, on notera

$$u(\psi) = \Phi(\psi) . \alpha(A, Y) : (A, Y) \to \Phi(X, \mathcal{O}).$$

On définit $v : \mathrm{CS}((A, Y), \Phi(X, \mathcal{O})) \to \mathrm{EAL}((X, \mathcal{O}), \Psi(A, Y))$.

Soit $\varphi : (A, Y) \to \Phi(X, \mathcal{O})$ un morphisme de couples spectraux, on notera

$$v(\varphi) = \Psi(\varphi) . \beta(X, \mathcal{O}) : (X, \mathcal{O}) \to \Psi(A, Y).$$

Pour montrer que u et v sont des bijections réciproques l'une de l'autre, on remarque que l'on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{EAL}((X, \mathcal{O}), \Psi(A, Y)) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{CS}((A, Y), \Phi(X, \mathcal{O})) \arrow[d, "g"] \\
\mathrm{EAL}((X, \mathcal{O}), \tilde{A}) \arrow[r, phantom, "="] & \mathrm{Ann}(A, \Gamma(\mathcal{O}, X))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{EAL}((X, \mathcal{O}), \Psi(A, Y)) \arrow[d, "f"'] & \mathrm{CS}((A, Y), \Phi(X, \mathcal{O})) \arrow[l, "v"'] \arrow[d, "g"] \\
\mathrm{EAL}((X, \mathcal{O}), \tilde{A}) \arrow[r, phantom, "="] & \mathrm{Ann}(A, \Gamma(\mathcal{O}, X))
\end{tikzcd}$$

où $=$ désigne l'isomorphisme canonique ([9], chap. I, § 2.2), g l'injection canonique, et f l'injection provenant du monomorphisme canonique $\tilde{A} \mid Y \to \tilde{A}$.

Enfin la naturalité des applications u et v est évidente.

C. Q. F. D.

On a les relations

$$\Psi \star \alpha . \beta \star \Psi = \mathrm{Id}_{\Psi}, \qquad \Phi \star \beta . \alpha \star \Phi = \mathrm{Id}_{\Phi},$$

où l'opération $\star$ est celle définie par Godement ([8], App.).

Nous dirons qu'un couple spectral (A, X) est un *couple schématique* si $\alpha(A, X)$ est un isomorphisme, et nous noterons C Sch la sous-catégorie pleine de CS dont les objets sont les couples schématiques.

De même, nous dirons qu'un espace annelé local $(X, \mathcal{O})$ est un *espace schématique* si $\beta(X, \mathcal{O})$ est un isomorphisme, et nous noterons E Sch la sous-catégorie pleine de EAL dont les objets sont les espaces schématiques.

Les propriétés des foncteurs adjoints montrent que si (A, X) [resp. : $(X, \mathcal{O})$] est un couple schématique (resp. : un espace schématique), alors $\Psi(A, X)$ [resp. : $\Phi(X, \mathcal{O})$] est un espace schématique (resp. : un couple schématique), et les foncteurs Φ et Ψ définissent une anti-équivalence entre les catégories E Sch et C Sch.

On notera $\mathcal{F}$: CS $\to$ C Sch le foncteur défini par

$$\mathcal{F}(A, X) = \Phi \circ \Psi(A, X)$$

3. **Propriétés du foncteur $\mathcal{F}$.**

Soit (A, X) un couple spectral; pour toute partie multiplicative S de A, on identifie $\operatorname{Spec} S^{-1}A$ à son image dans $\operatorname{Spec} A$, et on note $X_S = X \cap \operatorname{Spec} S^{-1}A$; on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A, X \arrow[rr] \arrow[dr, "j_S"] \arrow[dd, "\alpha(A, X)"'] & & (A, X_S) \arrow[dl, "j_S"'] \arrow[dd, "\alpha(A, X_S)"] \\
& (S^{-1}A, X_S) \arrow[dd, "\alpha(S^{-1}A, X_S)"' near start] \arrow[dr, "\beta_S"] & \\
\mathcal{F}(A, X) \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathcal{F}(j_S)"'] & & \mathcal{F}(A, X_S) \arrow[dl, shift left, "\mathcal{F}(j_S)"] \\
& \mathcal{F}(S^{-1}A, X_S) \arrow[ur, dashed, shift left, "\theta"] &
\end{tikzcd}$$

β_S étant défini de façon évidente; la propriété universelle du foncteur $\mathcal{F}$ montre alors qu'il existe un morphisme $\theta : \mathcal{F}(S^{-1}A, X_S) \to \mathcal{F}(A, X_S)$, et un seul, tel que $\beta_S = \theta . \alpha(S^{-1}A, X_S)$, et on vérifie aisément les relations

$$\tau(j_S).\theta = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(S^{-1}A, X_S)}, \qquad \theta . \mathcal{F}(j_S) = \mathrm{Id}_{\tau(A, X_S)},$$

d'où l'énoncé suivant :

Proposition 2.3.1. — *Le morphisme canonique*

$$\mathcal{F}(j_S) : \quad \mathcal{F}(A, X) \to \mathcal{F}(S^{-1}A, X_S)$$

est un isomorphisme.

Lemme 2.3.2. — *Soit (A, X) un couple spectral réduit, alors, pour tout $f \in A_f$, le couple spectral $(A_f, D_X(f))$ est réduit.*

En effet, soit $g \in A$ tel que, pour tout $y \in D_X(f)$, on ait $g(y) = 0$, alors $D_X(f) \subset V_X(g)$, c'est-à-dire $gf = 0$, puisque (A, X) est un couple réduit, donc $g \in \mathrm{Ker}\, j_f$, ce qui démontre le lemme.

Corollaire 2.3.2.1. — *Soit A un anneau sans radical de Jacobson, alors, pour tout $f \in A$, l'anneau A_f est sans radical de Jacobson.*

Lemme 2.3.3 — *Soit (A, X) un couple spectral réduit, alors le couple spectral $\mathcal{F}(A, X)$ est réduit.*

Démonstration. — Soit $f \in \Gamma(A, X)$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in X$; par définition de $\Gamma(A, X)$, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathrm{Spec}\, A$, et un élément $g \in \Gamma(A, U)$ tel que, pour tout $y \in X \cap U$, on ait $\theta_y^X(f) = \theta_y^U(g)$, ceci implique $g(y) = 0$ pour tout $y \in X \cap U$; on peut supposer $U = D(h)$, où h est un élément convenable de A; d'après le lemme 2.3.2, le couple spectral $(A_h, D_X(h))$ est réduit, donc $g = 0$, ce qui implique $\theta_x^X(f) = 0$, donc $f = 0$.

C. Q. F. D.

Proposition 2.3.4. — *Soit (A, X) un couple spectral, et soient les propositions :*

(*a*) *(A, X) est un couple spectral réduit;*

(*b*) *$\Psi(A, X) = \tilde{A} \mid X$ est un espace fonctionnel.*

alors $(a) \Rightarrow (b)$. *Si (A, X) est un couple schématique,* $(a) \Leftrightarrow (b)$.

Démonstration. — $(a) \Rightarrow (b)$: On suppose que (A, X) est un couple spectral réduit, et on veut montrer que $A \mid X$ est un espace fonctionnel; il suffit de montrer que, pour tout élément $f \in A$, le couple spectral $(\Gamma(A, D_X(f)), D_X(f))$ est réduit, ou ce qui revient au même (propos. 2.3.1) que le couple spectral $(\Gamma(A_f, D_X(f)), D_X(f))$ est réduit. Pour cela, il suffit de montrer (lemme 2.3.3) que, pour tout $f \in A$, le couple spectral $(A_f, D_X(f))$ est réduit, ce qui résulte du lemme 2.3.2.

La seconde assertion est évidente.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 2.3.4.1. — *Soit (A, X) un couple spectral réduit; pour tout ouvert U de X, le couple spectral $\mathcal{F}(A, U) = (\Gamma(A, U), U)$ est réduit.*

COROLLAIRE 2.3.4.2. — *Soient A un anneau sans radical de Jacobson, X une partie de* $\max A$, *dense dans* $\max A$*; pour tout ouvert U de X, l'anneau $\Gamma(A, U)$ est sans radical de Jacobson.*

4. Espaces spectrologiques fonctionnels.

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace spectrologique fonctionnel, on identifie X à son image dans $\operatorname{Spec}\Gamma(\mathcal{O}, X)$; pour tout $x \in X$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& \Gamma(\mathcal{O}, X) \arrow[dl, "i_x"'] \arrow[dr, "\theta_x^X"] & \\
(\Gamma(\mathcal{O}, X))_x \arrow[rr, "(\beta(X, \mathcal{O}))_x"] & & \mathcal{O}_x
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION 2.4.1. — *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace spectrologique fonctionnel, alors :*

(i) *Pour tout $x \in X$, l'homomorphisme $(\beta(X, \mathcal{O}))_x$ est injectif;*

(ii) *Le couple spectral $(\Gamma(\mathcal{O}, X), X)$ est schématique.*

Démonstration.

(i) Soit $f \in \Gamma(\mathcal{O}, X)$ tel que $\theta_x^X(f) = 0$, et notons $W_f = \{ y \in X \mid \theta_y^X(f) = 0 \}$, alors W_f est un voisinage ouvert de x, et il existe un élément $g \in \Gamma(\mathcal{O}, X)$ tel que $g(x) \neq 0$ et $D_X(g) \subset W_f$ (propriété spectrologique), ce qui implique $f(y)\, g(y) = 0$ pour tout $y \in X$; par hypothèse, le couple spectral $(\Gamma(\mathcal{O}, X), X)$ est réduit, donc $gf = 0$, ce qui implique $j_x(f) = 0$, d'où l'assertion.

(ii) Notons $u = \Phi \star \beta(X, \mathcal{O})$, $v = \alpha \star \Phi(X, \mathcal{O})$, on sait que $u \circ v = \mathrm{Id}_{\Gamma(\mathcal{O}, X)}$ (*cf.* n° 2), et il suffit de montrer que u est une injection; on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathcal{O}, X) \arrow[d, "\theta_x"'] & \Gamma(\Gamma(\mathcal{O}, X)\, X, X) \arrow[l, "u"'] \arrow[d, "\theta_x"] \\
\mathcal{O}_x & (\Gamma(\mathcal{O}, X))_x \arrow[l, "(\beta(X, \mathcal{O}))_x"]
\end{tikzcd}$$

Soit $f \in \operatorname{Ker} u$, alors, pour tout $x \in X$, $(\beta(X, \mathcal{O}))_x \circ \theta_x(f) = 0$, donc $\theta_x(f) = 0$, ce qui implique $f = 0$.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2.4.2. — *Soit* (A, X) *un couple spectral réduit, alors* $\psi(A, X)$ *est un espace schématique.*

En effet $\psi(A, X)$ est un espace fonctionnel spectrologique, d'après la proposition 2.3.4.

Les propositions 2.4.1 et 2.4.2 impliquent que la catégorie des espaces fonctionnels schématiques (resp. : des couples spectraux réduits schématiques) est une sous catégorie réflexive de la catégorie des espaces spectrologiques fonctionnels (resp. : des couples spectraux réduits).

5. **Propriétés de mollesse.**

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace annelé local, nous dirons qu'un point x de X est *mou* (resp. : *localement mou*) si l'homomorphisme canonique $\theta_x^X : \Gamma(\mathcal{O}, X) \to \mathcal{O}_x$ est surjectif (resp. : s'il existe un voisinage ouvert U de x tel que l'homomorphisme $\theta_x^U : \Gamma(\mathcal{O}, U) \to \mathcal{O}_x$ soit surjectif). Nous dirons qu'un espace annelé local $(X, \mathcal{O})$ est *ponctuellement mou* (resp. : *localement ponctuellement mou*) si tout point de X est mou (resp. : localement mou).

PROPOSITION 2.5.1. — *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace spectrologique fonctionnel, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) x *est un point mou;*

(*b*) $\mu_X(x)$ *est un idéal mou de* $\Gamma(\mathcal{O}, X)$.

Démonstration. — On identifie X à son image dans $\operatorname{Spec}\Gamma(\mathcal{O}, X)$, et on utilise les notations du n° 4.

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*) : Si θ_x^X est une surjection, alors $(\beta(X, \mathcal{O}))_x$ est une surjection, donc un isomorphisme, et par conséquent j_x^X est une surjection.

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*) : Soient $\dot{f} \in \mathcal{O}_x$ et $f \in \Gamma(\mathcal{O}, U)$ un représentant de $\dot{f}$, U étant un ouvert convenable de x dans X; pour montrer l'assertion, il suffit de trouver deux voisinages fermés de x dans X : W_1 et W_2 tels que $W_2 \subset \operatorname{Int}_X W_1 \subset W_1 \subset U$, et un élément $g \in \Gamma(\mathcal{O}, X)$ tel que $g(y) = 1$ pour $y \in W_2$, et $g(y) = 0$ pour $y \in X - W_1$; en effet, si on note $f_1 = g'f$, où $g' = \theta_U^X(g)$ est la restriction de g à l'ouvert U, et $f_2 \in \Gamma(\mathcal{O}, X)$ l'élément défini par $f_1 \in \Gamma(\mathcal{O}, U)$ et l'élément nul de $\Gamma(\mathcal{O}, X - W_1)$, on a $\dot{f} = \theta_x^X(f_2)$.

Construction de W_1, W_2, g. — Par hypothèse, il existe un élément $h_1 \in \Gamma(\mathcal{O}, X)$ tel que $h_1(x) \neq 0$ et $D_X(h_1) \subset U$, la propriété de mollesse implique l'existence d'un élément $k_1 \in \Gamma(\mathcal{O}, X)$ tel que $j_x(h_1 k_1 - 1) = 0$, et $W_1 = V_X(h_1 k_1 - 1)$ est un voisinage fermé de x contenu dans U (*cf.* § 1, cor. 1.5.5.1); de même, il existe un élément $h_2 \in \Gamma(\mathcal{O}, X)$ tel que $h_2(x) \neq 0$ et $D_X(h_2) \subset \mathrm{Int}_X W_1$, et un élément $k_2 \in \Gamma(\mathcal{O}, X)$ tel que $j_x(h_2 k_2 - 1) = 0$, alors $W_2 = V_X(h_2 k_2 - 1)$ est un voisinage fermé de x contenu dans $\mathrm{Int}_X W_1$. Enfin, on notera $g = h_2 k_2$.

C. Q. F. D.

Proposition 2.5.2. — *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace localement spectrologique fonctionnel, on suppose que* X *est un espace topologique régulier, alors* $(X, \mathcal{O})$ *est un espace spectrologique; si* $(X, \mathcal{O})$ *est localement ponctuellement mou, alors il est ponctuellement mou.*

Démonstration. — Montrons d'abord la première assertion.

Soit $x \in X$, et soit U un voisinage spectrologique de x dans X, alors il existe un voisinage ouvert V de x tel que $\overline{V} \subset U$ ($\overline{V}$ adhérence de V dans X) et, par conséquent, il existe un élément $f_1 \in \Gamma(\mathcal{O}, U)$ tel que $f_1(x) = 1$ et $f_1(y) = 0$ pour $y \in U - \overline{V}$, alors f_1 se prolonge en une section $f \in \Gamma(\mathcal{O}, X)$ telle que $\theta_U^X(f) = f_1$ et $\theta_{X-\overline{V}}^X(f) = 0$. Soit F un fermé de X ne contenant pas x, par hypothèse, il existe un voisinage ouvert spectrologique U de x tel que $F \cap U = \emptyset$, donc un élément $f \in \Gamma(\mathcal{O}, X)$ tel que $f(x) = 1$ et $f(y) = 0$ pour $y \in F$, d'où l'assertion.

Supposons que $(X, \mathcal{O})$ soit localement ponctuellement mou.

Soient $x \in X$, $\dot{f} \in \mathcal{O}_x$ et $f \in \Gamma(\mathcal{O}, U)$ un représentant de $\dot{f}$, U étant un voisinage ouvert convenable de x; on peut supposer que x est un point mou de $(U, \mathcal{O} \mid U)$. Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert V de x dans X tel que $\overline{V} \subset U$ ($\overline{V}$, adhérence de V dans X) et, puisque $\mu_U(x)$ est un idéal mou de $\Gamma(\mathcal{O}, U)$, il existe un voisinage ouvert W de x contenu dans V et un élément $g \in \Gamma(\mathcal{O}, U)$ tel que $g(y) = 1$ pour $y \in W$, $g(y) = 0$ pour $y \in U - \overline{V}$; si on note $f_1 = gf \in \Gamma(\mathcal{O}, U)$ et $f_2 \in \Gamma(\mathcal{O}, X)$ l'élément défini par $f_1 \in \Gamma(\mathcal{O}, U)$ et l'élément nul de $\Gamma(\mathcal{O}, X - \overline{V})$, on a $\dot{f} = \theta_x^X(f)$, ce qui achève la démonstration.

C. Q. F. D.

Proposition 2.5.3. — *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace spectrologique fonctionnel, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $(X, \mathcal{O})$ *est ponctuellement mou;*

(*b*) *Le couple spectral* $\Phi(X, \mathcal{O})$ *est mou.*

Si les propositions (*a*) *et* (*b*) *sont vérifiées,* X *est un espace topologique régulier, et* $(X, \mathcal{O})$ *est un espace schématique.*

Démonstration. — L'équivalence de (*a*) et (*b*) résulte de la proposition 2.5.1. Il est clair que X est un espace topologique régulier. Enfin, pour tout $x \in X$, $(\beta(X, \mathcal{O}))_x$ est un isomorphisme, et par conséquent $\beta(X, \mathcal{O})$ est un isomorphisme.

C. Q. F. D.

Proposition 2.5.4. — *Soit (A, X) un couple spectral mou et réduit, alors $\Psi(A, X)$ est un espace schématique ponctuellement mou et $\mathcal{F}(A, X)$ est un couple mou.*

Démonstration. — On sait que $\Psi(A, X)$ est un espace schématique fonctionnel (propos. 2.3.4); soit $x \in X$, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, "j_x"'] & \Gamma(A, X) \arrow[d, "\theta_x"] \\ & A_x \end{tikzcd}$$

montre que x est un point mou de $\tilde{A} \mid X$, ce qui achève la démonstration.

C. Q. F. D.

Les propositions 2.5.3 et 2.5.4 permettent d'énoncer le théorème de dualité :

Théorème 2.5.5. — *Les foncteurs Φ et Ψ définissent une anti-équivalence entre la catégorie des espaces spectrologiques fonctionnels ponctuellement mous et la catégorie des couples spectraux schématiques mous et réduits.*

Nous rappelons le lemme suivant ([8], II, théor. 3.7.2].

Lemme 2.5.6. — *Soient X un espace paracompact, et $(X, \mathcal{O})$ un espace annelé. Pour que $(X, \mathcal{O})$ soit un faisceau mou, il faut et il suffit que, pour tout couple F, G de fermés disjoints de X, il existe une section $f \in \Gamma(\mathcal{O}, X)$ telle que $\theta_F^X(f) = 1$ et $\theta_G^X(f) = 0$.*

Proposition 2.5.7. — *Soient X un espace paracompact et $(X, \mathcal{O})$ un espace spectrologique fonctionnel, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *$(X, \mathcal{O})$ est un faisceau mou;*

(*b*) *Le couple spectral $\Phi(X, \mathcal{O})$ est normal.*

Si les propositions (a) et (b) sont vérifiées, $(X, \mathcal{O})$ est un espace schématique; pour tout fermé F, l'homomorphisme canonique

$$\zeta_F : S_F^{-1}(\mathcal{O}, X) \to \Gamma \mathcal{O}\, F)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — L'équivalence de (*a*) et (*b*) résulte du lemme 2.5.6.

Supposons (*a*) et (*b*) vérifiées, on sait que $(X, \mathcal{O})$ est schématique (propos. 2.5.3); soit F un fermé de X, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \Gamma(\mathcal{O}, X) \arrow[dl, "i_{S_F}"'] \arrow[dr, "\theta_F^X"] & \\ S_F^{-1}\Gamma(\mathcal{O}, X) & & \Gamma(\mathcal{O}, F) \arrow[ll, "\zeta_F"'] \end{tikzcd}$$

montre que ζ_F est une surjection; d'autre part,

$$\mathrm{Ker}\,\theta_F^X = \bigcap_{x\in F} \mathrm{Ker}\, j_x = \mathrm{Ker}\, j_{S_F} \quad (\textit{cf. } \S\ 1, \text{ cor. } 1.5.5.2),$$

ce qui montre que ζ_F est une injection.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 2.5.7.1. — *Soit (A, X) un couple spectral normal, si X est un espace paracompact, le faisceau $\Psi(A, X)$ est mou, et le couple spectral $\mathcal{F}(A, X)$ est un couple mou et normal.*

6. Caractérisation des anneaux mous.

LEMME 2.6.1. — *Soient (A, X) un couple spectral, $\mathcal{G}(X)$ le générisé de X, alors l'homomorphisme $\theta_X^{\mathcal{G}(X)}$ est une injection. Si (A, X) est un couple mou et réduit, $\theta_X^{\mathcal{G}(X)}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Montrons d'abord que $\theta_X^{\mathcal{G}(X)}$ est injectif. Soit $f\in\Gamma(A, \mathcal{G}(X))$, alors, pour tout $x\in X$ et $y\in x$, on a

$$\theta_y^{\mathcal{G}(X)}(f) = j_y(\theta_x^{\mathcal{G}(X)}(f)),$$

par conséquent, si $\theta_X^{\mathcal{G}(X)}(f) = 0$, on a

$$\theta_y^{\mathcal{G}(X)}(f) = 0 \quad \text{pour tout } y\in\mathcal{G}(X),$$

d'où l'assertion.

On suppose que (A, X) est un couple spectral mou et réduit, et soit $\pi : \mathcal{G}(X) \to X$ l'application continue définie au § 1, n° 6. Soit $f\in\Gamma(A, X)$; pour tout $x\in X$, il existe un voisinage ouvert W_x de x dans $\mathrm{Spec}\,A$, et un élément $g_x\in\Gamma(A, W_x)$ tel que, pour tout $y\in X\cap W_x$, on ait $\theta_y^X(f) = \theta_y^{W_x}(g_x)$; on notera $U_x = \pi^{-1}(X\cap W_x)$; la famille $(U_x)_{x\in X}$ est un recouvrement ouvert de $\mathcal{G}(X)$; soit $z\in U_x\cap U_y$, alors

$$\pi(z)\in X\cap W_x\cap W_y \qquad \text{et} \qquad \theta_{\pi(z)}^{W_x}(g_x) = \theta_{\pi(z)}^{W_y}(g_y) = \theta_{\pi(z)}^X(f),$$

ce qui implique $\theta_z^{W_x}(g_x) = \theta_z^{W_y}(g_y)$, par conséquent la famille

$$(\theta_{U_x}^{W_x}(g_x) \in \Gamma(A, U_x))_{x \in X}$$

définit un élément $f' \in \Gamma(A, \mathcal{G}(X))$, et $\theta_X^{\mathcal{G}(X)}(f') = f$, ce qui achève la démonstration.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2.6.2. — *Soit A un anneau sans radical de Jacobson, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *A est un anneau mou;*

(*b*) *$\tilde{A} \mid \max A$ est un faisceau mou;*

(*c*) *$\tilde{A} \mid \max A$ est un faisceau ponctuellement mou.*

Si les propositions (a), (b), (c) sont vérifiées, le couple spectral $(A, \max A)$ est schématique.

Démonstration.

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*) : C'est une conséquence du corollaire 2.5.7.1.

(*b*) $\Rightarrow$ (*c*) : C'est évident.

(*c*) $\Rightarrow$ (*a*) : En effet, si $\tilde{A} \mid \max A$ est un faisceau ponctuellement mou, $\max A$ est un espace séparé.

Enfin la dernière assertion résulte du lemme 2.6.1.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 2.6.2.1. — *Soient X un espace compact, $(X, \mathcal{O})$ un espace spectrologique fonctionnel, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *$\Gamma(X, \mathcal{O})$ est un anneau mou;*

(*b*) *$(X, \mathcal{O})$ est un faisceau mou;*

(*c*) *$(X, \mathcal{O})$ est un faisceau ponctuellement mou.*

Si les propositions (a), (b), (c) sont vérifiées, alors $(X, \mathcal{O})$ est isomorphe au faisceau $\Gamma(\mathcal{O}, X) \mid \max A$.

3. Anneaux de fonctions continues.

1. Anneaux préordonnés ([7], chap. V, [12]).

Soit A un anneau; un *préordre* de A est une partie P de A contenant 0 et 1, stable pour l'addition et la multiplication; on note $|P| = P \cap (-P)$, on sait que $|P|$ est un idéal de A [12]; on dit que P est un *ordre* si $|P| = \{0\}$; les éléments de P (resp. : $P - \{0\}$ lorsque P est un ordre) sont appelés les éléments *positifs* (resp. : *strictement positifs*) de A, et on note $x \leq y$ (resp. : $x < y$) la relation $y - x \in P$ (resp. : $y - x \in P - \{0\}$).

On dit qu'un idéal $\mathfrak{a}$ de A est *P-convexe* si on a la propriété suivante :

$$0 \leqq g \leqq f \quad \text{et} \quad f \in \mathfrak{a} \Rightarrow g \in \mathfrak{a}.$$

On démontre que si P est un préordre, et $\mathfrak{a}$ un idéal P-convexe, l'image canonique de P dans $A/\mathfrak{a}$ définit un préordre de $A/\mathfrak{a}$: préordre quotient ([7], chap. V).

Nous noterons $c(P)$ l'ensemble des idéaux premiers P-convexes de A, alors on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.1.1. — *$c(P)$ est une partie γ-fermée de* Spec$A$.

Démonstration. — On remarque que la relation $0 \leqq g \leqq f$ implique $V(f) \cap D(g) \cap c(P) = \emptyset$; par conséquent, un idéal premier non convexe n'est pas γ-adhérent à $c(P)$, d'où la proposition.

C. Q. F. D.

Nous dirons qu'un préordre P est *réel* si $-1 \notin P$, et si tout carré est positif.

LEMME 3.1.2. — *Soient P un préordre réel, X une partie de $c(P)$, alors, pour tout couple $f.g$ d'éléments de A, on a $V_X(f, g) = V_X(f^2 + g^2)$.*

Démonstration. — Il est clair que $V_X(f, g) \subset V_X(f^2 + g^2)$.

D'autre part, les relations $0 \leqq f^2 \leqq f^2 + g^2$; $0 \leqq g^2 \leqq f^2 + g^2$ impliquent

$$V_X(f^2 + g^2) \subset V_X(f^2) \cap V_X(g^2) = V_X(f, g).$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 3.1.2.1. — *Soient P un préordre réel, X une partie de $c(P)$, alors, pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A, il existe un élément $f \in A$ tel que $V_X(\mathfrak{a}) = V_X(f)$.*

COROLLAIRE 3.1.2.2. — *Soient P un préordre réel, X une partie de $c(P)$, l'ensemble $\{ V_X(f) \cap D_X(g) \mid f, g \in A \}$ est une base de la topologie induite sur X par la topologie constructible.*

On peut énoncer alors la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1.3. — *Soient A un anneau sans radical de Jacobson, P un préordre réel, et X un ensemble d'idéaux maximaux P-convexes tel que le couple spectral (A, X) soit t-réduit* (*cf.* § 1, n° 1) *alors :*

(i) *Tout idéal maximal est convexe;*

(ii) *X est γ-dense dans* max$A$.

Démonstration. — On démontre d'abord le lemme suivant :

LEMME 3.1.4. — *Les hypothèses et notations étant celles de la proposition* 3.1.3, *pour tout élément f de A,*

$$\tau_M(V_x(f)) = V_M(f).$$

On peut supposer $f \in P - \{0\}$, il est clair que $\tau_M(V_X(f)) \subset V_M(f)$; soit y un idéal maximal, si $y \notin \tau_M(V_x(f))$, il existe un élément $g \in A$ tel que $g(y) = 0$ *et* $g(x) = 1$ pour tout $x \in V_X(f)$; notons $h = f + g$, alors $h(x) = 1$ pour tout $x \in V_X(f)$, $f(x) > 0$ pour tout $x \in D_X(f)$ ($A \mid x$ étant muni de l'ordre quotient), par conséquent, $h(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$; la propriété de t-réduction implique que h est inversible dans A; puisque $g(y) = 0$, il s'ensuit que $f(y) \neq 0$, ce qui achève la démonstration du lemme.

(i) Soient f et g deux éléments de A tels que $0 \leq g \leq f$, alors $V_X(f) \subset V_X(g)$, et d'après le lemme 3.1.4, $V_M(f) \subset V_M(g)$, d'où l'assertion.

(ii) D'après le corollaire 3.1.2.2, il suffit de montrer que $V_X(f) \cap D_X(g) = \emptyset$ implique $V_M(f) \cap D_M(g) = \emptyset$, ce qui est une conséquence du lemme 3.1.4.

C. Q. F. D.

2. **Espaces complètement réguliers.**

Soit X un espace topologique complètement régulier, on note $\mathcal{C}(X)$ l'anneau des fonctions continues réelles, $\mathcal{C}^*(X)$ le sous-anneau des fonctions continues réelles bornées. Par définition, les applications canoniques $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{C}(X)$ et $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{C}^*(X)$ sont des plongements, ceci permet de définir, par abus de notations, les couples spectraux $(\mathcal{C}(X), X)$ et $(\mathcal{C}^*(X), X)$. Le couple spectral $(\mathcal{C}(X), X)$ [resp. : $(\mathcal{C}^*(X), X)$] est réduit et t-réduit (resp. : réduit), et il est normal si, et seulement si, X est un espace normal.

Soit S_X la partie multiplicative associée à X dans $\mathcal{C}^*(X)$, c'est l'ensemble des fonctions continues réelles bornées qui ne s'annulent pas, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^*(X) \arrow[rr] \arrow[dr, "i_{S_X}"'] & & \mathcal{C}(X) \\ & S_X^{-1}\mathcal{C}^*(X) \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

alors on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 3.2.1. — *u est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il est clair que u est injective; pour montrer que u est surjective, on procède de la façon suivante : soit $\eta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$\eta(\lambda) = 1/\lambda \quad \text{si} \quad \lambda \geqq 1,$$
$$\eta(\lambda) = 1 \quad \text{si} \quad |\lambda| \leqq 1,$$
$$\eta(\lambda) = -1/\lambda \quad \text{si} \quad \lambda \leqq 1;$$

il est clair que η est une fonction continue; soit $f \in \mathcal{C}(X)$, alors $\eta \circ f$ et $f.\eta \circ f$ sont des éléments de $\mathcal{C}^*(X)$, ce qui achève la démonstration.

C. Q. F. D.

Dans la suite, on identifie $\mathrm{Spec}\,\mathcal{C}(X)$ à son image dans $\mathrm{Spec}\,\mathcal{C}^*(X)$, il est clair que si $x \in X$, les images canoniques de x dans $\mathrm{Spec}\,\mathcal{C}(X)$ et $\mathrm{Spec}\,\mathcal{C}^*(X)$ coïncident, ce qui permet d'identifier X à son image dans $\mathrm{Spec}\,\mathcal{C}(X)$ [resp. : $\mathrm{Spec}\,\mathcal{C}^*(X)$].

$\mathcal{C}(X)$ étant muni du préordre évident [$f \geqq 0$ si, et seulement si, pour tout $x \in X$, $f(x) \geqq 0$], on a la proposition ci-dessous.

Proposition 3.2.2. — *Tout idéal maximal de $\mathcal{C}(X)$ est convexe, et X est γ-dense dans* $\max \mathcal{C}(X)$.

En effet, tout point de X est un idéal maximal convexe de $\mathcal{C}(X)$, et le couple $(\mathcal{C}(X), X)$ est réduit et t-réduit (*cf.* propos. 3.1.3).

Proposition 3.2.3. — *$\mathcal{C}(X)$ est un anneau mou.*

Puisque X est γ-dense dans $\max A$, il suffit de vérifier que deux fermés spéciaux disjoints de X sont séparés par deux ouverts spéciaux (*cf.* § 1, propos. 1.8.2); soient f, g deux éléments de $\mathcal{C}(X)$ tels que $V_x(f) \cap V_x(g) = \emptyset$, on note

$$f' = \sup\left(\frac{g^2}{f^2+g^2} - \frac{2}{3}, 0\right) \qquad g' = \sup\left(\frac{f^2}{f^2+g^2} - \frac{2}{3}, 0\right);$$

alors f' et g' sont des fonctions continues, et on vérifie aisément les relations

$$V_X(f) \subset D_x(f'), \qquad V_X(g) \subset D_X(g'), \qquad D_X(f') \cap D_X(g') = \emptyset,$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire 3.2.3.1. — *X est un espace compact* (resp. : *localement compact*) *si, et seulement si, $X = \max \mathcal{C}(X)$* [resp. : *X est ouvert dans* $\max \mathcal{C}(X)$].

Remarque. — $\max \mathcal{C}(X)$ est évidemment le compactifié de Stone-Čech de X; la démonstration de la compacité de $\max \mathcal{C}(X)$ qui utilise les critères de mollesse du paragraphe 1, n° 8, est essentiellement celle de Gillmann et Jerison ([7], chap. 6.5).

Soit $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions continues sur X, c'est évidemment un espace spectrologique fonctionnel, alors on a le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2.4. — *$\mathcal{O}_X$ est un espace schématique ponctuellement mou.*

En effet, la proposition 3.2.3 et le lemme 2.4.1 du paragraphe 2 impliquent que $\mathcal{O}_X$ est ponctuellement mou et le théorème résulte de la proposition 2.4.3 du paragraphe 2.

COROLLAIRE 3.2.4.1. — *Le couple spectral* $(\mathcal{C}(X), X)$ *est schématique.*

3. **Compactification et réplétion** ([7], chap. 6.7.8) (²).

Notons CR la catégorie des espaces topologiques complètement réguliers, Comp la sous-catégorie pleine des espaces compacts, on définit le foncteur $\beta : \mathrm{CR} \to \mathrm{Comp}$ de la façon suivante :

Soit X un espace complètement régulier, alors $\beta X = \max \mathcal{C}(X)$ est le compactifié de Stone-Čech.

Soit $\varphi : X \to Y$ une application continue (X et Y étant complètement réguliers), on note $\mathcal{C}(\varphi) : \mathcal{C}(Y) \to \mathcal{C}(X)$ l'homomorphisme canonique, alors $\beta\varphi = {}^m\mathcal{C}(\varphi) : \beta Y \to \beta X$ est définie par le diagramme commutatif (*cf.* § 1, nº 6)

$$\begin{array}{ccc} \max \mathcal{C}(Y) & \xrightarrow{{}^m\mathcal{C}(\varphi)} & \max \mathcal{C}(X) \\ \downarrow & & \uparrow \pi \\ \operatorname{Spec} \mathcal{C}(Y) & \xrightarrow{{}^a\mathcal{C}(\varphi)} & \operatorname{Spec} \mathcal{C}(X) \end{array}$$

Il est bien connu que β est adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\mathrm{Comp} \subsetneq \mathrm{CR}$.

Soit X un espace complètement régulier, il est clair que l'application canonique $\mathcal{C}(\beta X) \to \mathcal{C}^*(X)$ est un isomorphisme, ce qui prouve que $\mathcal{C}^*(X)$ est un anneau mou. En identifiant βX à son image canonique dans $\operatorname{Spec} \mathcal{C}^*(X)$ (*cf.* nº 2), on définit l'application $\pi_X : \beta X \to \max \mathcal{C}^*(X)$ qui associe à tout élément $x \in \beta X$ l'unique idéal maximal de $\mathcal{C}^*(X)$ le contenant, et il est clair que π_X est un homéomorphisme, alors $\pi(x) = x$ si, et seulement si, le corps $\mathcal{C}(X)/x$ est isomorphe à $\mathbf{R}$.

On dit qu'un point $x \in \beta X$ est *réel* si le corps $\mathcal{C}(X)/x$ est isomorphe à $\mathbf{R}$, et on note νX l'ensemble des points réels de βX muni de la topologie spectrale [*spectre réel* de $\mathcal{C}(X)$], on dit que X est un espace *replet* (³) si $X = \nu X$, et on a la proposition suivante :

(²) Ce numéro ne sera pas utilisé dans la suite.

(³) C'est la terminologie de BOURBAKI ([2], chap. 10, § 4, ex. 17), on dit aussi *real compact* [7].

PROPOSITION 3.3.1. — *Soit X un espace topologique complètement régulier, alors νX est un espace replet.*

C'est une conséquence de la proposition ci-dessous.

PROPOSITION 3.3.2. — *L'homomorphisme canonique $\mathcal{C}(\nu X) \to \mathcal{C}(X)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\beta X) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{C}\,\nu(X) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d] & \mathcal{C}(X) \arrow[d] \\
& \mathcal{C}^*\nu(X) \arrow[r, "\xi^*"] & \mathcal{C}^*(X)
\end{tikzcd}$$

et on vérifie aisément que ξ^* est un isomorphisme; d'autre part, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Spec}\mathcal{C}(X) \arrow[d, "{}^a\xi"] \\
\nu X \arrow[ur, dashed, "\lambda"] \arrow[r, "\mu"] & \operatorname{Spec}\mathcal{C}(\nu X)
\end{tikzcd}$$

où λ est l'injection canonique, et μ le plongement canonique, est commutatif; si l'on identifie $\mathcal{C}^*(\nu X)$ et $\mathcal{C}^*(X)$ par l'isomorphisme ξ^*, les images canoniques de νX dans $\operatorname{Spec}\mathcal{C}^*(X)$ coïncident, et il suffit de vérifier que $S_X = S_{\nu X}$. Il est clair que $S_X \supset S_{\nu X}$; d'autre part, soit $f \in S_X$, alors tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{C}^*(X)$, contenant f, contient strictement l'idéal $\pi_X^{-1}(\mathfrak{m})$, donc $\mathfrak{m} \notin \nu X$, et par conséquent $f \in S_{\nu X}$, ce qui achève la démonstration.

C. Q. F. D.

Notons RC la catégorie des espaces replets, on définit le foncteur $\nu : \mathrm{CR} \to \mathrm{RC}$: Soit X un espace complètement régulier, alors νX est le spectre réel de $\mathcal{C}(X)$. Soit $\varphi : X \to Y$ une application continue (X et Y étant complètement réguliers), il est clair que ${}^a\mathcal{C}(\varphi)(\nu Y) \subset \nu X$, ce qui définit $\nu\varphi : \nu Y \to \nu X$.

Enfin, il est bien connu que ν est adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\mathrm{RC} \to \mathrm{CR}$.

4. Sous-algèbres de Gel'fand.

Dans la suite sous-algèbre signifie sous-**R**-algèbre contenant l'élément unité.

Soit X un espace topologique complètement régulier, nous dirons qu'une sous-algèbre A de $\mathcal{C}(X)$ sépare les points de X [resp. : est une *sous-algèbre de Gel'fand*) de $\mathcal{C}(X)$] si l'application canonique $X \to \operatorname{Spec} A$ est une injection, évidemment continue (resp. : un plongement). On définit alors, par abus de notation, le couple spectral (A, X), c'est un couple réduit, et il est t-réduit si, et seulement si, A est une sous-algèbre pleine de $\mathcal{C}(X)$ [c'est-à-dire tout élément de A inversible dans $\mathcal{C}(X)$ est inversible dans A].

Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$, on définit sur A le préordre évident ($f \geqq 0$ si, et seulement si, $f(x) \geqq 0$ pour tout $x \in X$), c'est évidemment un préordre réel, et on a la proposition ci-après.

PROPOSITION 3.4.1. — *Soit A une sous-algèbre pleine de $\mathcal{C}(X)$ séparant les points de X, alors :*

(i) *Tout idéal maximal de A est convexe, et X est une partie γ-dense de* $\max A$;

(ii) *Si on note $i : A \to \mathcal{C}(X)$ l'injection canonique, alors*

$$^a i(\beta X) \supset \max A.$$

Démonstration.

(i) C'est une conséquence de la proposition 3.1.3.

(ii) Il suffit de vérifier que si $\mathfrak{a}$ est un idéal de type fini de A tel que $\mathcal{C}(X)\,\mathfrak{a} = \mathcal{C}(X)$, alors $\mathfrak{a} = A$. Soit alors $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_n)$ un tel idéal, par hypothèse, il existe une famille $(g_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ d'éléments de $\mathcal{C}(X)$ telle que $\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = 1$, et par conséquent $V_X(f_1, \ldots, f_n) = \emptyset$, et la propriété de γ-densité de i implique $V_M^A(f_1, \ldots, f_n) = \emptyset$, donc $\mathfrak{a} = A$.

C. Q. F. D.

En particulier, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.4.2. — *Soit A une sous-algèbre de Gel'fand de $\mathcal{C}(X)$, on suppose que A est une sous-algèbre pleine et que (A, X) est un couple normal, alors A est un anneau mou, et l'application continue* $\operatorname{Spec}\mathcal{C}(X) \to \operatorname{Spec} A$ *induit un homéomorphisme de βX sur* $\max A$.

Démonstration. — Par hypothèse, X est un espace normal, et puisque X est γ-dense dans $\max A$, la proposition 1.8.3 du paragraphe 1 implique que A est un anneau mou.

Soit $i : A \to \mathcal{C}(X)$ l'injection canonique; pour montrer la dernière assertion, il suffit de vérifier que l'application continue $^m i : \beta X \to \max A$ (*cf.* § 1, n° 6) est injective, donc un homéomorphisme; la proposition 3.4.1 montre alors que $^m i$ coïncide avec la restriction de $^a i$ à βX.

Soient ξ et η deux éléments distincts de βX, il existe deux éléments $f, g \in \mathcal{C}(X)$ tels que $f \in \xi$, $g \in \eta$, $V_{\beta X}(f, g) = \emptyset$; on note $F = V_X(f)$, $G = V_X(g)$, alors $F \cap G = \emptyset$, et puisque (A, X) est un couple normal, $\tau_M^A(F) \cap \tau_M^A(G) = \emptyset$ (τ_M^A désigne l'adhérence dans $\max A$), et il suffit de montrer que ${}^m i(\xi) \in \tau_M^A(F)$, ${}^m i(\eta) \in \tau_M^A(G)$, ce qui résulte de ce que $\xi \in V_{\beta X}(f) = \tau_{\beta X}(F)$, $\eta \in V_{\beta X}(g) = \tau_{\beta X}(G)$.

C. Q. F. D.

5. **Sous-algèbres de Gel'fand** (*suite*).

Proposition 3.5.1. — *Soit A une sous-algèbre de Gel'fand de $\mathcal{C}(X)$, alors :*

(i) *Tout élément de A diviseur de zéro dans $\mathcal{C}(X)$ est diviseur de zéro dans A;*

(ii) *Pour tout élément $x \in X$, l'homomorphisme canonique $i_x : A \to (\mathcal{C}(X))_x$ est une injection.*

Démonstration. — L'assertion (i) est évidente (*cf.* § 1, n° 3).

Soit $x \in X$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathcal{C}(X) \\ {\scriptstyle j_x^A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_x} \\ A_x & \xrightarrow{i_x} & (\mathcal{C}(X))_x \end{array}$$

Il suffit de montrer que si $f \in A$, la relation $i_x \circ j_x^A(f) = 0$ implique $j_x^A(f) = 0$.

Supposons $i_x \circ j_x^A(f) = 0$, alors $j_x(f) = 0$ et, par conséquent, il existe un voisinage U de x dans X tel que $f(y) = 0$ pour tout $y \in U$, ce qui implique $j_x^A(f) = 0$ (*cf.* § 1, cor. 1.5.5.1).

C. Q. F. D.

Dans la suite, lorsque A est une sous-algèbre de Gel'fand, on identifie A_x à son image canonique dans $(\mathcal{C}(X))_x$ et on note j_x au lieu de j_x^A.

Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$, on définit la propriété (S) :

(S) *Pour tout $x \in X$ et tout fermé F ne contenant pas x, il existe un voisinage U de x dans X, et un élément $f \in A$, tel que $f(y) = 1$ pour tout $y \in U$, et $f(y) = 0$ pour tout $y \in F$.*

La propriété (S) implique trivialement que A est une sous-algèbre de Gel'fand.

Proposition 3.4.2. — *Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$, et soient les propositions suivantes :*

(*a*) *A est une sous-algèbre de Gel'fand, et tout point de X est un idéal mou de A,*

(*b*) *A vérifie la propriété* (S).

Alors $(a) \Rightarrow (b)$; *si A est une sous-algèbre pleine de $\mathcal{C}(X)$,* $(a) \Leftrightarrow (b)$.

Démonstration. — $(a) \Rightarrow (b)$: Soient $x \in X$, et F un fermé de X ne contenant pas x, il existe un élément $f \in A - x$ tel que $D_X(f) \cap F = \emptyset$ et un élément $g \in A$ tel que $j_x(gf - 1) = 0$, d'où l'assertion.

On suppose que A est une sous-algèbre pleine de $\mathcal{C}(X)$, alors $(b) \Rightarrow (a)$. La condition (S) implique que A est une sous-algèbre de Gel'fand; d'autre part, soit $x \in X$ et $f \in A - x$, on va montrer qu'il existe $g \in A$ tel que $j_x(gf - 1) = 0$. On peut supposer $f(x) > 0$, et soit b un nombre réel tel que $0 < b < f(x)$, on notera $F = f^{-1}(]-\infty, b])$, d'après la condition (S), il existe un voisinage U de x dans X, et un élément $\varphi \in A$ tel que $\varphi(y) = 1$ pour $y \in U$, $\varphi(y) = 0$ pour $y \in F$; de même, il existe un voisinage W de x, et un élément $\psi \in A$ tel que $\psi(y) = 0$ pour $y \in W$, $\psi(y) = 1$ pour $y \in X - U$; soit $h = \varphi^2 f + \psi^2$, alors $h(y) > 0$ pour tout $y \in X$, donc h est inversible dans $\mathcal{C}(X)$, donc dans A; si on note $g = 1/h$, il est clair que $j_x(f) j_x(g) = 1$.

C. Q. F. D.

Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$ séparant les points de X [resp. : une sous-algèbre de Gel'fand de $\mathcal{C}(X)$], il est clair que $S_X^{-1} A$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$ séparant les points de X [resp. : une sous-algèbre de Gel'fand de $\mathcal{C}(X)$]. D'autre part, puisque le couple spectral $(\mathcal{C}(X), X)$ est schématique et réduit, la propriété universelle du foncteur $\mathcal{F}$ (*cf.* § 2, n° 4) définit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \Gamma(A, X) \arrow[rr, "u"] & & \mathcal{C}(X) \end{tikzcd}$$

On sait que le couple spectral $(\Gamma(A, X), X)$ est réduit (§ 2, lemme 2.3.3), ce qui montre que u est une injection, et par conséquent $\Gamma(A, X)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$ séparant les points de X [resp. : une sous-algèbre de Gel'fand de $\mathcal{C}(X)$].

Nous dirons qu'une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$ séparant les points de X est *schématique* si $A = \Gamma(A, X)$. Lorsque X est un espace compact, les sous-algèbres de Gel'fand schématiques sont caractérisées par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.5.3. — *Soient X un espace compact, A une sous-algèbre de Gel'fand de $\mathcal{C}(X)$, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *A est schématique;*

(*b*) *A est pleine;*

(*c*) $X = \max A$*;*

(*d*) *Tout point de X est un idéal mou de A.*

Démonstration. — $(a) \Rightarrow (b)$: *cf.* § 2, propos. 2.1.1.

$(b) \Rightarrow (c)$: On montre, de façon plus générale, que si A est une sous-algèbre pleine de $\mathcal{C}(X)$ séparant les points de X, alors $X = \max A$. On raisonne comme dans [13], § 19.C; soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A non contenu dans x, pour tout $x \in X$; par hypothèse, pour tout $x \in X$, il existe $f \in \mathfrak{a}$ tel que $f(x) \neq 0$, un argument standard de compacité permet de construire une famille finie $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_x(f_i)$, alors $f = \sum_{i=1}^{n} f_i^2$ est un élément de $\mathfrak{a}$ inversible dans $\mathcal{C}(X)$, donc dans A, d'où l'assertion.

$(c) \Rightarrow (a)$: *cf.* § 2, propos. 2.6.2.

$(c) \Leftrightarrow (d)$: *cf.* § 1, propos. 1.7.1.

C. Q. F. D.

6. Faisceaux de Gel'fand.

Soient X un espace topologique complètement régulier, $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions continues réelles, nous dirons qu'un sous-espace $\mathbf{R}$-algébré local $(X, \mathcal{O})$ de $\mathcal{O}_X$ est un *faisceau de Gel'fand* sur X si, pour tout ouvert U de X, l'injection canonique $\Gamma(\mathcal{O}, U) \rightarrow \mathcal{C}(U)$ définit $\Gamma(\mathcal{O}, U)$ comme sous-algèbre de Gel'fand de $\mathcal{C}(U)$. $\mathcal{O}_X$ est évidemment un faisceau de Gel'fand.

Soit $(X, \mathcal{O})$ un faisceau de Gel'fand, c'est un espace spectrologique fonctionnel, et pour tout ouvert U de X, le faisceau induit $(U, \mathcal{O} \mid U)$ est un faisceau de Gel'fand sur U; réciproquement on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.6.1. — *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un sous-espace* $\mathbf{R}$-*algébré local du faisceau* $\mathcal{O}_X$ *tel que, pour tout* $x \in X$, *il existe un voisinage* U *de* x *dans* X *tel que le faisceau* $(U, \mathcal{O} \mid U)$ *soit un faisceau de Gel'fand, alors* $(X, \mathcal{O})$ *est un faisceau de Gel'fand.*

En effet, la proposition 2.5.2 du paragraphe 2 implique que le faisceau $(X, \mathcal{O})$ est spectrologique.

Nous noterons $G(X)$ l'ensemble des sous-algèbres de Gel'fand de $\mathcal{C}(X)$, $\tilde{G}(X)$ l'ensemble des faisceaux de Gel'fand sur X, on définit alors les applications :

$\varphi : \tilde{G}(X) \rightarrow G(X) : (X, \mathcal{O}) \mapsto \Gamma(\mathcal{O}, X)$;

$\psi : G(X) \rightarrow \tilde{G}(X) : A \mapsto \tilde{A} \mid X$; le fait que $\tilde{A} \mid X$ soit un faisceau de Gel'fand résulte de la proposition 2.3.4 du paragraphe 2.

Soit A une sous-algèbre de Gel'fand de $\mathcal{C}(X)$, alors $\psi(A)$ est un faisceau de Gel'fand schématique (*cf.* § 2, propos. 2.4.2); de même, soit $(X, \mathcal{O})$

un faisceau de Gelfand, alors $\varphi(X, \mathcal{O})$ est une sous-algèbre de Gel'fand schématique (*cf.* § 2, propos. 2.4.1). Pour qu'une sous-algèbre de Gel'fand A soit schématique, il faut et il suffit que $\varphi \circ \psi(A) = A$; de même, pour qu'un faisceau de Gel'fand $(X, \mathcal{O})$ soit schématique, il faut et il suffit que $\varphi \circ \psi(X, \mathcal{O}) = (X, \mathcal{O})$. On définit ainsi une bijection de l'ensemble des sous-algèbres de Gel'fand schématique sur l'ensemble des faisceaux de Gel'fand schématiques.

PROPOSITION 3.6.2. — *Soient X un espace topologique complètement régulier, et* $(X, \mathcal{O})$ *un faisceau de Gel'fand, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $(X, \mathcal{O})$ *est un faisceau ponctuellement mou;*

(*b*) $\Gamma(\mathcal{O}, X)$ *satisfait à la condition* (S).

Si les propositions (*a*) *et* (*b*) *sont vérifiées,* $(X, \mathcal{O})$ *est un espace schématique.*

Démonstration. — L'équivalence de (*a*) et (*b*) résulte de la proposition 2.5.3 du paragraphe 2, et de la proposition 3.5.2; la dernière assertion résulte de la proposition 2.5.3 du paragraphe 2.

C. Q. F. D.

La question se pose de savoir s'il existe des faisceaux de Gel'fand schématiques qui ne soient pas ponctuellement mous; je ne sais pas répondre à cette question.

PROPOSITION 3.6.3. — *Soient X un espace paracompact, et* $(X, \mathcal{O})$ *un faisceau de Gel'fand, pour que* $(X, \mathcal{O})$ *soit un faisceau mou, il faut et il suffit que le couple spectral* $\Phi(X, \mathcal{O})$ *soit normal. Si* $(X, \mathcal{O})$ *est un faisceau mou, il est schématique, l'anneau* $\Gamma(\mathcal{O}, X)$ *est mou, et l'application canonique* $\operatorname{Spec} \mathcal{C}(X) \to \operatorname{Spec} \Gamma(\mathcal{O}, X)$ *induit un homéomorphisme de* βX [resp. : *du spectre réel de* $\mathcal{C}(X)$] *sur* $\max \Gamma(\mathcal{O}, X)$ [resp. : *sur le spectre réel de* $\Gamma(\mathcal{O}, X)$].

Démonstration. — La première assertion résulte de la proposition 2.5.7 du paragraphe 2.

Supposons que $(X, \mathcal{O})$ soit un faisceau mou, alors $(X, \mathcal{O})$ est un espace schématique, l'anneau $\Gamma(\mathcal{O}, X)$ est mou, et l'application canonique $\operatorname{Spec} \mathcal{C}(X) \to \operatorname{Spec} \Gamma(\mathcal{O}, X)$ induit un homéomorphisme $\beta X \to \max \Gamma(\mathcal{O}, X)$ (*cf.* propos. 3.4.2). Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\mathcal{C}(X)$, alors $\mathfrak{m} \cap \Gamma(\mathcal{O}, X)$ est un idéal maximal de $\Gamma(\mathcal{O}, X)$, donc convexe (*cf.* propos. 3.4.1), et l'ordre défini sur $\Gamma(\mathcal{O}, X)/\mathfrak{m} \cap \Gamma(\mathcal{O}, X)$, par passage au quotient, coïncide avec l'ordre induit par l'injection canonique

$$\Gamma(\mathcal{O}, X)/\mathfrak{m} \cap \Gamma(\mathcal{O}, X) \to \mathcal{C}(X)/\mathfrak{m};$$

pour montrer l'assertion relative aux spectres réels, il suffit de montrer que si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal non réel de $\mathcal{C}(X)$, alors $\mathfrak{m} \cap A$ est un idéal maximal non réel de $\Gamma(\mathcal{O}, X)$, ce qui résulte du lemme ci-après.

LEMME 2.6.4 — *Avec les notations de la proposition* 2.6.3, *on suppose que* $(X, \mathcal{O})$ *est un faisceau mou; soit* f *un élément de* $\mathcal{C}(X)$, *pour tout nombre réel* $\varepsilon > 0$, *il existe un élément* $g \in \Gamma(\mathcal{O}, X)$ *tel que, pour tout* $x \in X$, $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$

Montrons d'abord comment le lemme 2.6.4 implique la proposition 2.6.3; en effet, soit $f \in \mathcal{C}(X)$ tel que $f(\mathfrak{m})$ soit un élément infiniment grand de $\mathcal{C}(X)/\mathfrak{m}$ [c'est-à-dire que, pour tout entier $n > 0$, on a $f(\mathfrak{m}) > n$ dans $\mathcal{C}(X)/\mathfrak{m}$], alors il existe un élément $g \in \Gamma(\mathcal{O}, X)$ tel que $g(\mathfrak{m})$ soit infiniment grand, d'où l'assertion

Démonstration du lemme [1] — Pour tout nombre réel λ, on note $U_\lambda = f^{-1}\left(\left]\lambda - \frac{\varepsilon}{2}, \lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right[\right)$ alors $(U_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ est un recouvrement ouvert de X; par hypothèse, il existe une partition de l'unité $(\varphi_i)_{i \in I}$ du faisceau $(X, \mathcal{O})$ subordonnée, un recouvrement $(U_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$; soit, pour tout $i \in I$, $x_i \in D_X(\varphi_i)$; on vérifie aisément que si l'on note $g = \sum_{i \in I} f(x_i)\, \varphi_i$, alors $g \in \Gamma(\mathcal{O}, X)$ et, pour tout $x \in X$, $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 3.6.5. — *Soient* X *un espace paracompact, et* $(X, \mathcal{O})$ *un faisceau de Gel'fand, on suppose que, pour tout fermé* F *de* X, *il existe un élément* $f \in \Gamma(\mathcal{O}, X)$ *tel que* $V_X(f) = F$, *alors* $(X, \mathcal{O})$ *est un faisceau schématique et mou.*

En effet, il est clair que le couple spectral $\Phi(X, \mathcal{O})$ est normal (propriété de γ-densité.)

PROPOSITION 3.6.6. — *Soient* X *un espace localement compact dénombrable à l'infini, alors tout faisceau de Gel'fand ponctuellement mou est schématique et mou.*

Démonstration. — Soient F et G deux fermés disjoints de X, on suppose que F est compact, alors F est fermé dans $\max \Gamma(\mathcal{O}, X)$ (*cf.* § 1, propos. 1.7.2) et par conséquent, F et G sont normalement séparés par rapport à l'anneau $\Gamma(\mathcal{O}, X)$. Ceci implique que, pour tout recouvrement $\mathcal{U}$ de X par des ouverts relativement compacts, il existe une partition de l'unité du faisceau $(X, \mathcal{O})$ subordonnée à $\mathcal{U}$, d'où la proposition.

C. Q. F. D.

Proposition 3.6.7. — *Soit X un espace compact, tout faisceau de Gel'fand sur X est schématique et mou.*

En effet, soit $(X, \mathcal{O})$ un faisceau de Gel'fand, la proposition 3.5.3 montre que le couple spectral $\Phi(X, \mathcal{O})$ est un couple mou et normal.

C. Q. F. D.

Corollaire 3.6.7.1. — *Soit X un espace compact; les applications φ et ψ définissent une bijection de l'ensemble des faisceaux de Gel'fand sur X, sur l'ensemble des sous-algèbres de Gel'fand, et pleines de $\mathcal{C}(X)$.*

7. Application aux variétés différentiables ([1], [15]).

Soit E un espace de Banach réel, on définit, pour tout $r = 1, 2, \ldots, \infty$, la propriété suivante :

(S^r) *L'algèbre de $\mathcal{C}^r(E)$ des fonctions différentiables réelles de classe C^r vérifie la propriété* (S) *du* n° 5 (*il est équivalent de dire qu'il existe un voisinage V de 0 contenu dans la boule unité de E, et une fonction f différentiable réelle de classe C^r telle que $f(x) = 1$ si $x \in V$, $f(x) = 0$ si $\|x\| \geq 1$*).

Soit X une variété différentiable de classe C^r, on note $\mathcal{C}^r(X)$ l'algèbre des fonctions différentiables réelles de classe C^r, $(X, \mathcal{O}_r)$ le faisceau des fonctions différentiables réelles de classe C^r.

Proposition 3.7.1. — *Soient E un espace de Banach réel vérifiant la propriété* (S^r), *et X une variété différentiable de classe C^r, modelée sur E, le faisceau $(X, \mathcal{O}_r)$ est un faisceau de Gel'fand ponctuellement mou et schématique.*

En effet, la condition (S^r) implique que le faisceau $(E, \mathcal{O}_r)$ est un faisceau de Gel'fand ponctuellement mou (propos. 3.6.2), et l'assertion résulte de la proposition 3.6.1.

Proposition 3.7.2. — *Soient E un espace de Banach réel séparable vérifiant la propriété* (S^r), *et X une variété différentiable de classe C^r, modelée sur E et paracompacte, le faisceau $(X, \mathcal{O}_r)$ est un faisceau de Gel'fand mou et schématique, l'anneau $\mathcal{C}^r(X)$ est mou, et l'application canonique* $\operatorname{Spec}\mathcal{C}(X) \to \operatorname{Spec}\mathcal{C}^r(X)$ *induit un homéomorphisme de βX sur* $\max\mathcal{C}^r(X)$; *si X est un espace à base dénombrable, tout idéal maximal réel de $\mathcal{C}^r(X)$ est un point de X.*

Démonstration. — Lorsque E est un espace de Banach réel séparable, la condition (S^r) implique que, pour tout ouvert U de E, il existe $f \in \mathcal{C}^r(X)$ tel que $U = D_X(f)$ [15]; ceci implique que le faisceau $(E, \mathcal{O})$ est un faisceau mou (propos. 3.6.5). Soit X une variété paracompacte, alors tout point de X a un voisinage U tel que le faisceau $(U, \mathcal{O}_r)$ soit mou, ce qui explique que le faisceau $(X, \mathcal{O}_r)$ est mou, et par conséquent les assertions relatives à la mollesse de l'anneau $\mathcal{C}^r(X)$ et à l'homomorphisme $\beta X \to \max \mathcal{C}^r(X)$. Si X est un espace à base dénombrable, on sait que X est replet ([7], chap. 8), ce qui implique la dernière assertion.

C. Q. F. D.

Soit $\mathcal{V}_r$ la catégorie dont les objets sont les variétés différentiables de classe C^r, modelée sur un espace de Banach séparable vérifiant la propriété (S^r), et à base dénombrable, et les morphismes, les applications différentiables de classe C^r, on note $\mathcal{C}^r$ le foncteur qui associe à toute variété l'algèbre des fonctions réelles différentiables de classe C^r, alors on a l'énoncé suivant :

THÉORÈME 3.7.3. — *Le foncteur $\mathcal{C}^r$ est pleinement fidèle.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BONIC (R.) and FROMPTON (J.). — Smooth functions on Banach manifolds, *J. of Math. and Mech.*, t. 15, 1966, p. 877-898.

[2] BOURBAKI (N.). — *Topologie générale*, chap. 1 à 10. — Paris, Hermann, 1940 à 1963 (*Act. scient. et ind.*, *Bourbaki*, 2, 3, 5, 8 et 10).

[3] BOURBAKI (N.). — *Algèbre commutative*, chap. 1 à 7. — Paris, Hermann, 1961 à 1965 (*Act. scient. et ind.*, *Bourbaki*, 27, 28, 30 et 31).

[4] CHEVALLEY (C.). — *Théorie des schémas*. Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris, 1964-1965. — Paris, Centre de Physique théorique de l'École Polytechnique, 1965 (multigr.).

[5] EELLS (J.). — On the geometry of function spaces, *Symposium internacional de topologia algebraica* [1956, Mexico], p. 303-308. — Mexico, UNESCO, 1958.

[6] GEL'FAND (I. M.), RAIKOV (D.) and SILOV (G.). — *Commutative normed rings*. — New York, Chelsea publishing Company, 1964.

[7] GILLMAN (L.) and JERISON (M.). — *Rings of continuous functions*. — Princeton, D. Van Nostrand Company, 1960 (*University Series in higher Mathematics*).

[8] GODEMENT (R.). — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. — Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1252; *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 13).

[9] GROTHENDIECK (A.). — *Éléments de géométrie algébrique*, chap. I à IV. — Paris, Presses universitaires de France, 1960 à 1968 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28 et 32).

[10] HALMOS (P. R.). — *Lectures on Boolean algebras*. — Princeton, D. Van Nostrand Company, 1963 (*Van Nostrand mathematical Series*, 1).

[11] HENRIKSEN (M.) and JERISON (M.). — The space of minimal prime ideals of a commutative rings, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 115, 1965, p. 110-130.

[12] KRIVINE (J.-L.). — Anneaux préordonnés, *J. Anal. math.*, Jérusalem, t. 12, 1964, p. 307-326.

[13] LOOMIS (L. K.). — *An introduction to abstract harmonic analysis.* — New York, Van Nostrand and Company, 1953 (*University Series in higher Mathematics*).

[14] OLIVIER (J.-P.). — Anneaux absolument plats universels et épimorphismes à buts réduits, *Séminaire Samuel : Algèbre commutative,* 1967-1968 : *Les épimorphismes d'anneaux,* n° 6, 12 p. — Paris, Secrétariat mathématique, 1968.

[15] PALAIS (R. S.). — *Lectures on the differential topology of infinite dimensional manifolds.* Notes by S. GREENFIELD, Brandeis University, 1964-1965 (multigr.).

(Texte reçu le 30 septembre 1969.)

Rudolphe BKOUCHE
Fac. Sc. Lille
B. P. 36
59 - Lille (Nord)