BULLETIN DE LA S. M. F.

C.O. KISELMAN

Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants

Bulletin de la S. M. F., tome 97 (1969), p. 329-356
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1969__97__329_0>

Bull. Soc. math. France,
97, 1969, p. 329 à 356.

PROLONGEMENT DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES A COEFFICIENTS CONSTANTS

PAR

CHRISTER O. KISELMAN

[Nice et Uppsala].

0. Introduction.

Il est bien connu que toute fonction harmonique dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$ peut se prolonger en une fonction holomorphe dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$, que toute solution de l'équation de la chaleur

$$\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2 u/\partial x_n^2$$

est analytique par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$, et que toute solution de l'équation des ondes

$$\partial^2 u/\partial t^2 = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2 u/\partial x_n^2$$

dans le demi-espace $t < 0$ se prolonge dans tout l'espace des variables réelles $t, x_1, \ldots, x_n$.

Nous nous proposons ici de déterminer le plus grand domaine convexe dans lequel on peut prolonger toutes les solutions indéfiniment dérivables d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants définies dans un convexe donné. Il s'agit donc des fonctions qui sont holomorphes par rapport à certaines variables; nous les appellerons partiellement holomorphes. Si $P(D)$ est un opérateur différentiel dans $\mathbf{C}^n$, et si U est un ouvert dans un sous-espace vectoriel réel F de $\mathbf{C}^n$ (par exemple $F = \mathbf{R}^n$ ou $F = \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{R}$) il faut donner un sens à l'expression $P(D)\,u$ quand u est définie dans U et holomorphe par rapport aux « variables complexes dans F », c'est-à-dire par rapport aux variables dans $F \cap iF$. C'est ce que nous ferons au paragraphe 1. Le paragraphe 2 est consacré à l'étude de quelques propriétés des fonctions partiellement holomorphes qui sont bien connues pour les fonctions holomorphes. Le prolongement d'une solution u dans U existe dans un ensemble $\Theta_P(U)$ où Θ_P est une « application enveloppante ». Il paraît utile d'étudier les propriétés formelles d'une telle application; nous l'avons fait au paragraphe 3. Le théorème de prolongement (théorème 5.1) est formulé au paragraphe 5 et démontré au même paragraphe à l'aide de « l'algorithme de division » du paragraphe 4. Cet algorithme est le cœur de la démonstration et utilise la technique de l'opérateur $\bar{\partial}$ de Hörmander. Le paragraphe 5 contient aussi la réciproque du théorème 5.1 (théorème 5.8) et un théorème d'unicité (théorème 5.4). Les solutions distributions se prolongent (au moins) aussi loin que les solutions indéfiniment dérivables : cette propriété est démontrée dans le paragraphe 6. Enfin, nous donnerons quelques exemples au paragraphe 7. Bien que le cadre naturel de ces résultats soit les espaces affines complexes de dimension finie, l'introduction d'une origine est commode, même dans les énoncés.

Quelques cas particuliers du théorème de prolongement sont déjà connus. Si U est un ouvert de $\mathbf{C}^n$, le domaine $\Theta_P(U)$ où le prolongement existe ne dépend que des zéros de la partie principale du polynôme P (corollaire 5.3) et le prolongement dans ce cas a été établi par Schapira [7] et Bengel (non publié). D'autre part, Zerner [8] a montré qu'un ouvert convexe V de $\mathbf{C}^n$ est un domaine d'holomorphie pour les solutions de $P(D)v = 0$ si, et seulement si, $\Theta_P(V) = V$. Ce cas ne nécessite pas la $\bar{\partial}$-cohomologie. Un autre cas particulier, celui des équations elliptiques (corollaire 5.2), a été démontré par l'auteur en 1965 (non publié) à l'aide de la présente méthode.

D'autre part, si P est hyperbolique et non ordinaire, et $U \subset \mathbf{R}^n (n \geq 2)$, $\Theta_P(U)$ est un ouvert réel qu'on trouve facilement en utilisant des propriétés classiques des opérateurs hyperboliques.

Notations. — Si E est un espace vectoriel réel, on notera H_A la fonction d'appui d'une partie A de E :

$$H_A(\xi) = \sup_{x \in A} \langle x, \xi \rangle, \qquad \xi \in E',$$

E' étant le dual de E et $\langle x, \xi \rangle$ la valeur de la forme linéaire ξ au point x. Si E est un espace vectoriel complexe, H_A sera définie dans le dual E' de E par la formule

$$H_A(\zeta) = \sup_{z \in A} \operatorname{Re} \langle z, \zeta \rangle, \qquad \zeta \in E'.$$

Si A est une partie d'un espace vectoriel réel ou complexe, on notera A^i, et appellera *intérieur relatif de* A, l'intérieur de A par rapport à l'espace affine réel qu'elle engendre. Si $A = A^i$, on dira que A est *relativement ouvert*.

La norme $|\xi|$ d'une forme linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie E est toujours arbitraire, sauf dans quelques démonstrations et exemples, où E est $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$, et où il faut utiliser la norme $\left(\sum |\xi_j|^2\right)^{1/2}$.

Les applications enveloppantes Γ_Ξ et Θ_Ξ sont définies au paragraphe 3.

1. Opérateurs différentiels à coefficients constants dans un espace vectoriel complexe de dimension finie.

Soient E un espace vectoriel complexe de dimension finie n, et E' (resp. $E^\star$) l'espace de toutes les formes $\mathbf{C}$-linéaires (resp. $\mathbf{R}$-linéaires) de valeurs complexes définies dans E. Donc E' (resp. $E^\star$) est un espace vectoriel complexe de dimension n (resp. $2n$) sur $\mathbf{C}$. Si $\zeta \in E^\star \supset E'$ et $z \in E$, on écrira $\langle z, \zeta \rangle$ pour la valeur de ζ au point z.

Les opérateurs différentiels à coefficients constants sur E s'identifient aux polynômes sur $E^\star$ à l'aide de l'équation

$$(1.1) \qquad P(D)\, e^{\langle z, \zeta \rangle} = P(\zeta)\, e^{\langle z, \zeta \rangle}, \qquad z \in E, \qquad \zeta \in E^\star.$$

Si F est un sous-espace réel de E, alors $F^\star$ est isomorphe à $E^\star/F^\perp$, où

$$F^\perp = \{\zeta \in E^\star;\ \zeta|_F = 0\}.$$

Donc $P(D)$ opère sur les fonctions définies dans F si, et seulement si, $P(\zeta + \theta) = P(\zeta)$ pour tout $\theta \in F^\perp$ et tout $\zeta \in E^\star$.

Les fonctions holomorphes dans E sont caractérisées par l'équation $\bar{\partial}_E u = 0$, où $\bar{\partial}_E$ est l'opérateur différentiel du premier ordre et à valeurs vectorielles dont le polynôme correspondant Q est la projection

$$E^\star = E' \oplus E^a \to E^a;$$

ici on a noté E^a l'espace des formes $\mathbf{C}$-antilinéaires sur E. On note que $\operatorname{Ker} Q = E'$; naturellement n'importe quelle application linéaire $R : E^\star \to G$ avec $\operatorname{Ker} R = E'$ définit les fonctions holomorphes, la fonction exponentielle $z \mapsto e^{\langle z, \zeta \rangle}$ étant holomorphe si, et seulement si, $\zeta \in E'$. Si F est un sous-espace complexe de E, on a $Q(F^\perp) \subset F^\perp$, donc Q induit une application

$$E^\star/F^\perp \to E^a/F^\perp \cap E^a$$

qui, moyennant les isomorphismes $E^\star/F^\perp \cong F^\star$, $E^a/F^\perp \cap E^a \cong F^a$, n'est autre que le polynôme correspondant à l'opérateur $\bar{\partial}_F$. Nous poserons $\bar{\partial}_F = \bar{\partial}_{F \cap iF}$ (considéré comme un opérateur différentiel dans F) si F est un sous-espace réel de E; puis $\mathcal{H}(U)$ [resp. $\mathcal{H}(U, \mathcal{D}')$] désignera l'espace des fonctions $u \in \mathcal{E}(U)$ [resp. distributions $u \in \mathcal{D}'(U)$] qui satisfont à $\bar{\partial}_F u = 0$, U étant un ouvert de F.

Cela dit, il est évident que la restriction aux fonctions holomorphes d'un opérateur différentiel s'identifie à un polynôme dans E', la correspondance étant donnée par (1.1) avec $z \in E$, $\zeta \in E'$. Si F est un sous-espace réel de E, et $P(D)$ un opérateur différentiel, la question se pose si la restriction de $P(D)$ aux fonctions holomorphes peut se réaliser comme un opérateur différentiel opérant dans F. Cela est toujours possible si $F + iF = E$. En effet, on pose

$$R(\zeta + \theta) = P(\zeta) \quad \text{si} \quad \zeta \in E', \quad \theta \in F^{\perp}, \tag{1.2}$$

ce qui est une bonne définition si $E' \cap F^{\perp} = \{0\}$, condition qui équivaut à $F + iF = E$. Si $E' + F^{\perp} = E^*$ (c'est-à-dire si $F \cap iF = \{0\}$), alors (1.2) définit de façon unique le polynôme R dans E^*, correspondant à un opérateur différentiel dans F. Si $E' + F^{\perp} \neq E^*$ d'autre part, on prolonge le polynôme obtenu par (1.2) en un polynôme dans E^*. La réalisation de l'opérateur $P(D)|_{\mathcal{H}(E)}$ comme opérateur différentiel dans F n'est donc pas toujours unique. Cependant, la restriction à $\mathcal{H}(F)$ de l'opérateur obtenu est uniquement déterminée, car pour calculer $P(D)\,u$ s'il est connu que $\bar{\partial}_F u = 0$, on n'utilise que des formes $\mathbf{R}$-linéaires dans F qui sont $\mathbf{C}$-linéaires dans $F \cap iF$, or ce sont précisément les restrictions à F des éléments de l'espace

$$(F + iF)' \cong \frac{E'}{E' \cap (F + iF)^{\perp}} = \frac{E'}{E' \cap F^{\perp}} \cong \frac{E' + F^{\perp}}{F^{\perp}};$$

donc le polynôme R, donné par (1.2) sur $E' + F^{\perp}$, suffira. Un système d'équations différentielles

$$P(D)\,u = 0,$$
$$\bar{\partial}_F u = 0, \qquad u \in \mathcal{E}(U) \qquad [\text{ou } u \in \mathcal{D}'(U)]$$

a donc toujours un sens si U est ouvert dans F, sous-espace vectoriel réel de E, tel que $F + iF = E$.

Plus généralement, si

$$P(\zeta + \theta) = P(\zeta) \qquad \text{pour} \quad \zeta \in E', \quad \theta \in E' \cap F^{\perp},$$

on voit, avec le même raisonnement, que P définit un opérateur $P_F(D) : \mathcal{H}(F) \to \mathcal{H}(F)$, uniquement déterminé par la condition

$$P_F(D)\,(u|_F) = (P(D)\,u)|_F, \qquad u \in \mathcal{H}(E).$$

2. Fonctions partiellement holomorphes.

Soient E un espace vectoriel complexe de dimension finie, et F un sous-espace réel de E tel que $F + iF = E$ (si cette hypothèse n'est pas satisfaite, on pourra remplacer E par $F + iF$). Si U est une partie ouverte de F, l'espace

$$\mathcal{H}(U) = \{ u \in \mathcal{E}(U);\ \bar{\partial}_F u = 0 \},$$

dont les éléments seront appelés *fonctions partiellement holomorphes*, a été défini au paragraphe 1. Si $F \cap iF = \{0\}$, c'est évidemment $\mathcal{E}(U)$; si $F = E$, ce sont les fonctions holomorphes dans U au sens ordinaire. Nous munirons cet espace de la topologie induite par $\mathcal{E}(U)$; c'est donc un espace de Fréchet avec les semi-normes

$$p_{KN}(u) = \sup_{z \in K} \sup_{|\alpha| \leq N} |D^\alpha u(z)|,$$

où K est un compact de U, $N \in \mathbf{N}$. Si ζ est une forme $\mathbf{C}$-linéaire sur E, il est clair que la fonction exponentielle $U \ni z \mapsto e^{<z, \zeta>}$ est élément de $\mathcal{H}(U)$. Nous définissons la *transformée de Laplace* $\hat{T}$ d'une fonctionnelle $T \in \mathcal{H}'(U)$ (faut-il l'appeler fonctionnelle partiellement analytique?) en posant

$$\hat{T}(\zeta) = T(U \ni z \mapsto e^{<z, \zeta>}), \qquad \zeta \in E'.$$

La fonctionnelle T est déterminée par $\hat{T}$ si U est convexe.

Théorème 2.1. — *Soient F un sous-espace vectoriel réel de E, espace vectoriel complexe de dimension finie, et U un ouvert convexe de F. Les fonctions exponentielles*

$$U \ni z \mapsto e^{<z, \zeta>}, \qquad \zeta \in E', \tag{2.1}$$

forment un ensemble total dans $\mathcal{H}(U)$.

Démonstration. — Dans les cas extrêmes $F \cap iF = \{0\}$ et $F = E$, c'est le théorème d'approximation de Weierstrass, respectivement le théorème de Runge. Le cas général est naturellement une conséquence du principe fondamental d'Ehrenpreis (Ehrenpreis [1], Malgrange [5], Hörmander [3], Palamodov [6]). Or, on peut montrer le théorème, de façon élémentaire, en utilisant les deux cas extrêmes, plus précisément avec la méthode des polynômes de Bernstein.

En effet, soient $z = (z_1, \ldots, z_k)$ des coordonnées complexes dans $F \cap iF$,

$$(z, x) = (z_1, \ldots, z_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

des coordonnées dans F. Si $u \in \mathcal{H}(U)$ et K, compact de U, sont donnés, il existe $\delta > 0$ tel que K_δ, l'ensemble des points (z, x) de F dont la distance à K est au plus égale à δ, soit contenu dans U. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in \mathbf{R}^{n-k}$, il existe, d'après le théorème de Runge, un polynôme analytique $z \mapsto Q_\varepsilon(z, x)$ tel que

$$|Q_\varepsilon(z, x) - u(z, x)| \leq \varepsilon \quad \text{dès que} \quad (z, x) \in K_\delta. \tag{2.2}$$

Un raisonnement de compacticité montre même qu'il suffit de prendre un nombre fini de polynômes pour chaque ε. On peut supposer en particulier que Q_ε est borné sur tout compact de F. Pour simplifier l'écriture, nous supposerons que $(z, x) \in K$ entraîne $|z| \leqq 1$ et $x \in [0, 1]^{n-k}$; donc on aura, pour une constante M,

$$(2.3) \qquad |Q_\varepsilon(z, x)| \leqq M \quad \text{si} \quad |z| \leqq 1, \quad x \in [0, 1]^{n-k}.$$

Nous rappelons que les polynômes de Bernstein $P_\nu f$ d'une fonction f définie dans $[0, 1]^{n-k}$ sont définis par

$$P_\nu f(x) = \sum_{\alpha \leqq \nu} \binom{\nu}{\alpha} f(\alpha/\nu)\, x^\alpha ((1, \ldots, 1) - x)^{\nu-\alpha},$$

où α et ν sont des multi-ordres, et où l'on a utilisé les conventions usuelles, par exemple $\alpha/\nu = (\alpha_{k+1}/\nu_{k+1}, \ldots, \alpha_n/\nu_n)$. Un calcul classique montre que

$$|P_\nu f(y) - f(x)| \leqq \varepsilon + A\,|y - x|^2 + \frac{1}{4} A (1/\nu_{k+1} + \ldots + 1/\nu_n)$$

si $|f(y) - f(x)| \leqq \varepsilon + A\,|y - x|^2$ pour tout $y \in [0, 1]^{n-k}$ et un x fixé; en particulier,

$$(2.4) \qquad |P_\nu f(x) - f(x)| \leqq \varepsilon + \frac{M}{2\delta^2}\left(\frac{1}{\nu_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{\nu_n}\right)$$

si $|f(y) - f(x)| \leqq \varepsilon$ dès que $|y - x| \leqq \delta$ et si $|f(y)| \leqq M$ pour tout $y \in [0, 1]^{n-k}$. Nous supposons maintenant que $\delta > 0$ est choisi de façon que $|u(z, x) - u(z, y)| \leqq \varepsilon$ si $|x - y| \leqq \delta$ et $(z, x), (z, y) \in K_\delta$. Cela donne avec (2.2) :

$$|Q_\varepsilon(z, x) - Q_\varepsilon(z, y)| \leqq 3\varepsilon \quad \text{si } |x - y| \leqq \delta \quad \text{et} \quad (z, x), (z, y) \in K_\delta.$$

Tenant compte de (2.3), nous obtenons de (2.4) l'inégalité

$$(2.5) \qquad \begin{cases} |P_\nu Q_\varepsilon(z, x) - Q_\varepsilon(z, x)| \leqq 3\varepsilon + \dfrac{M}{2\delta^2}\left(\dfrac{1}{\nu_{k+1}} + \ldots + \dfrac{1}{\nu_n}\right) \leqq 4\varepsilon, \\ \qquad (z, x) \in K \end{cases}$$

si $\nu_{k+1}, \ldots, \nu_n$ sont assez grands; ici $P_\nu Q_\varepsilon$, qui est le résultat d'appliquer P_ν à la fonction $x \mapsto Q_\varepsilon(z, x)$, z étant paramètre, est un polynôme en (z, x), analytique en z. Enfin (2.2) et (2.5) donnent

$$|P_\nu Q_\varepsilon(z, x) - u(z, x)| \leqq 5\varepsilon, \qquad (z, x) \in K.$$

Cela montre que u peut être rapprochée uniformément sur K par des polynômes partiellement holomorphes, et un raisonnement classique montre alors que l'approximation a lieu aussi dans la topologie de $\mathcal{E}(U)$. Enfin, les polynômes partiellement holomorphes sont tous dans l'espace fermé engendré par les fonctions exponentielles (2.1). Le théorème est démontré.

Évidemment $\hat{T}$ est une fonction entière de type exponentiel dans E'. Plus précisément, on a $|T| \leqq C p_{KN}$ pour une seminorme p_{KN} et une constante C, donc avec une nouvelle constante C,

$$|\hat{T}(\zeta)| \leqq C(1 + |\zeta|)^N e^{H_K(\zeta)}, \qquad \zeta \in E', \tag{2.6}$$

où $\zeta \mapsto |\zeta|$ est une norme dans E', et H_K est la fonction d'appui de K. Réciproquement, on a le théorème suivant dont le théorème de Paley-Wiener et le théorème de Martineau-Ehrenpreis sont des cas particuliers (à savoir si $F \cap iF = \{0\}$, respectivement $F = E$).

Théorème 2.2. — *Une fonctionnelle $T \in \mathcal{H}'(F)$ est restriction d'une fonctionnelle dans U, ouvert convexe de F, si et seulement s'il existe un compact K de U et des constantes C et N tels que* (2.6) *soit satisfaite.*

Démonstration. — La démontration de Hörmander [3] du théorème de Martineau-Ehrenpreis se généralise facilement. En effet, il s'agit de prolonger $T \in \mathcal{H}'(F)$ en une distribution $\mu \in \mathcal{E}'(F)$ à support compact dans U. Cela équivaut à prolonger $\hat{T}$, définie dans E', dans F^*, en respectant sa croissance, car la transformée de Laplace de μ est définie dans F^*, dont E' peut être considéré comme sous-espace grâce à l'isomorphisme $F^* \simeq E' \oplus (F \cap iF)^a$. Soient $(z_1, \ldots, z_k)$ des coordonnées complexes dans $F \cap iF$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ des coordonnées dans F, où $z_{k+1}, \ldots, z_n$ sont maintenant des nombres réels. Nous posons

$$\hat{\mu}(\zeta, \theta) = \mu\left(F \ni z \mapsto \exp\left(\sum_1^n z_j \zeta_j + \sum_1^k \bar{z}_j \theta_j\right)\right), \qquad \zeta \in \mathbf{C}^n, \quad \theta \in \mathbf{C}^k,$$

ce qui impose la condition

$$\hat{\mu}(\zeta, 0) = \hat{T}(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbf{C}^n,$$

car $\hat{T}$ est définie par

$$\hat{T}(\zeta) = T\left(F \ni z \mapsto \exp\left(\sum_1^n z_j \zeta_j\right)\right), \qquad \zeta \in \mathbf{C}^n.$$

Enfin le théorème de Paley-Wiener montre que le support de μ est contenu dans un compact convexe K si et seulement s'il existe des constantes C et N telles que

$$|\hat{\mu}(\zeta, \theta)| \leqq C(1 + |\zeta| + |\theta|)^N \exp(H_K(\zeta + \bar{\theta})), \qquad \zeta \in \mathbf{C}^n, \quad \theta \in \mathbf{C}^k, \tag{2.7}$$

où $\bar{\theta} = (\bar{\theta}_1, \ldots, \bar{\theta}_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{C}^n$. Si $\hat{T}$ satisfait à (2.6), le théorème 4.4.3 de Hörmander [3] nous donne un prolongement $\hat{\mu}$ de $\hat{T}$ qui satisfait à (2.7), avec le même compact K, mais d'autres constantes C et N. Cela montre le théorème 2.2.

Enfin, nous aurons besoin du résultat suivant :

THÉORÈME 2.3. — *Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants dans E, espace vectoriel complexe de dimension finie. Si F est un sous-espace réel de E tel que $F + iF = E$, et U un ouvert convexe de F, alors les polynômes exponentiels solutions de*

$$P(D)\,u = 0, \qquad u \in \mathcal{H}(U),$$

forment un ensemble total dans l'espace de toutes les solutions dans $\mathcal{H}(U)$ de cette équation.

Ici $P(D)\,u = 0$ a le sens expliqué au paragraphe 1. Un polynôme exponentiel est une fonction $F \ni z \mapsto Q(z)\,e^{<z,\zeta>}$, où $\zeta \in E'$, et où Q est un polynôme partiellement holomorphe dans F.

Si $F \cap iF = \{0\}$, ce théorème est un théorème classique de MALGRANGE. Grâce au théorème 2.2, sa démonstration est presque littéralement la même dans le cas général. (Naturellement c'est aussi une conséquence du principe fondamental d'Ehrenpreis.)

3. Applications enveloppantes.

GÉNÉRALITÉS. — Soient T un ensemble ordonné, et S une partie de T. Une application $g : S \to T$ sera dite *enveloppante* si elle satisfait

$$(3.1) \qquad a \leqq g(a), \qquad a \in S,$$

et

$$(3.2) \qquad a \leqq g(b) \quad \text{entraîne} \quad g(a) \leqq g(b), \qquad a,\ b \in S.$$

Il s'ensuit que g est croissante et que $g(g(a)) = g(a)$, si $g(a) \in S$; en particulier, g est idempotente si $S = T$. Réciproquement, $g : T \to T$ est une application enveloppante si elle est croissante, idempotente et plus grande que l'identité. Il est vrai que toute application enveloppante $g : S \to T$ peut se prolonger en une application enveloppante $g_1 : S \cup \operatorname{Im} g \to S \cup \operatorname{Im} g$ en posant $g_1(a) = a$ si $a \in \operatorname{Im} g$, donc on peut se réduire au cas où $S = T$. Néanmoins, il sera utile d'admettre $S \neq T$ dans les applications.

Si E est un espace vectoriel réel de dimension finie, nous nous intéressons aux ensembles $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{C}(E)$, $\mathcal{K}(E)$, $\mathcal{F}(E)$ et $\mathcal{U}(E)$, ordonnés par inclusion. Ici $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble de toutes les parties de E, $\mathcal{C}(E)$ l'ensemble de toutes les parties convexes de E. Enfin, $A \in \mathcal{K}(E)$ [resp. $A \in \mathcal{F}(E)$, resp. $A \in \mathcal{U}(E)$] si et seulement si $A \in \mathcal{C}(E)$, et A est compact (resp. fermé, resp. relativement ouvert). Ces ensembles sont des inf-demi-treillis complets, donc des treillis, puisque tout ensemble fini est majoré, les bornes inférieures étant données par l'intersection sauf les bornes inférieures infinies dans $\mathcal{U}(E)$, où on a la formule

$$\bigwedge_\alpha U_\alpha = \left(\bigcap_\alpha U_\alpha\right)^i, \qquad U_\alpha \in \mathcal{U}(E);$$

ici A^i désigne l'intérieur relatif de A.

Les applications enveloppantes $\mathcal{U}(E) \to \mathcal{U}(E)$ sont en correspondance biunivoque avec celles de $\mathcal{F}(E)$ dans lui-même. En effet, $U = (\overline{U})_i$ si $U \in \mathcal{U}(E)$, et $F = \overline{(F^i)}$ si $F \in \mathcal{F}(E)$, ce qui permet d'associer l'application

$$g_f : \quad \mathcal{F}(E) \ni F \to \overline{g(F^i)} \in \mathcal{F}(E)$$

à

$$g : \quad \mathcal{U}(E) \to \mathcal{U}(E),$$

etc. On peut donc se restreindre à étudier par exemple $\mathcal{U}(E)$.

PROPOSITION 3.1. — *Soit* $g : \mathcal{K}(E) \to \mathcal{C}(E)$ *une application enveloppante et posons*

$$(3.3) \qquad g^*(U) = \bigcup (g(K);\ K \in \mathcal{K}(E),\ K \subset U), \qquad U \in \mathcal{U}(E).$$

Si g est « concave » c'est-à-dire si

$$(3.4) \qquad g(K + \lambda L) \supset g(K) + \lambda g(L), \qquad K, L \in \mathcal{K}(E), \qquad \lambda > 0,$$

alors g^* *est une application enveloppante concave qui applique* $\mathcal{U}(E)$ *dans lui-même.*

On remarquera que (3.4) entraîne que g est invariante par translations et par homothéties.

Démonstration. — Pour montrer que $g^*(U)$ est relativement ouvert, il suffira de montrer que

$$g^*(U) = \bigcup (g(K)^i;\ K \in \mathcal{K}(E),\ K \subset U).$$

Prenons $L \in \mathcal{K}(E)$ voisinage de l'origine dans l'espace vectoriel engendré par $U - x$ où $x \in U$. Alors

$$g(K + \varepsilon L) \supset g(K) + \varepsilon g(L) \qquad \text{si} \quad \varepsilon > 0,$$

ce qui montre que $g(K + \varepsilon L)$ est un voisinage de $g(K)$ dans $g^*(U)$, car $g(L)$ et $g^*(U)$ ont même dimension. Pour tout K compact de U, il existe $\varepsilon_K > 0$ tel que $K + \varepsilon_K L \subset U$, donc on a

$$g^*(U) \supset \bigcup_K g(K + \varepsilon_K L)^i \supset \bigcup_K g(K) = g^*(U),$$

d'où $g^*(U)$ est relativement ouvert.

La vérification de (3.1) pour $g^\star$ étant triviale, il suffit de montrer que $g^\star(U)\subset g^\star(V)$ si $U\subset g^\star(V)$. Si K est un compact contenu dans $U\subset g^\star(V)$, il existe un compact L dans V tel que $K\subset g(L)$, car

$$\bigcap_L (K\setminus g(L)^i)$$

est vide comme nous l'avons déjà constaté. Or g étant enveloppante, $K\subset g(L)$ entraîne $g(K)\subset g(L)$ ce qui montre bien l'inclusion $g^\star(U)\subset g^\star(V)$. La concavité de $g^\star$ étant facile, cela termine la démonstration.

On voit facilement que $g^\star(U) = g(\bar{U})^i$ si U est relativement ouvert et borné. En effet, $g^\star(U) = \bigcup (g(K);\ K\subset U)\subset g(\bar{U})$, donc $g^\star(U)\subset g(\bar{U})^i$; d'autre part si $x\in U$ alors $\lambda\bar{U} + (1-\lambda)x$ est compact dans U pour tout $\lambda < 1$, donc

$$\lambda g(\bar{U}) + (1-\lambda)x = g(\lambda\bar{U} + (1-\lambda)x)\subset g^\star(U),$$

d'où

$$g(\bar{U})^i = \bigcup (\lambda g(\bar{U}) + (1-\lambda)x)\subset g^\star(U).$$

Cela entraîne aussi que $g^\star_{\mathcal{F}}(K) = \overline{g(K)}$ pour K compact, où $g^\star_{\mathcal{F}}$ est l'application dans $\mathcal{F}(E)$ correspondant à $g^\star$. Or ceci n'est pas forcément vrai pour des ensembles fermés non bornés si g est initialement définie dans $\mathcal{F}(E)$.

Applications enveloppantes de type Γ. — Soit Ξ une partie de l'espace dual E' de E. Nous allons définir une certaine application enveloppante concave $\Gamma_\Xi : \mathcal{U}(E)\to\mathcal{U}(E)$. Soit

$$(3.5)\qquad \gamma_\Xi(K) = \bigcap_{\xi\in\Xi} \{x\in E;\ \langle x,\xi\rangle \leq H_K(\xi)\},\qquad K\in\mathcal{K}(E),$$

application enveloppante évidemment concave. Alors Γ_Ξ est $\gamma^\star_\Xi$, l'application dans $\mathcal{U}(E)$ associée à γ_Ξ par la formule (3.3). Toute application Γ_Ξ, $\Xi\subset E'$, sera dite *de type* Γ. Les cas extrêmes sont $\Gamma_\varnothing(U) = E$ et $\Gamma_{E'}(U) = U$, $U\in\mathcal{U}(E)$. On remarquera que Ξ et le cône fermé engendré par Ξ définissent la même application. La proposition suivante nous fournit une description plus concrète de Γ_Ξ.

PROPOSITION 3.2. — *Soient E un espace vectoriel réel, et $\Xi\subset E'$ un cône fermé. Alors*

$$(3.6)\qquad \Gamma_\Xi(U) = \Big(\bigcap_{\xi\in\Xi} \{x\in E;\ \langle x,\xi\rangle\leq H_U(\xi)\}\Big)^i,\qquad U\in\mathcal{U}(E).$$

Supposons que $-\Xi = \Xi$.

Si U, $V \in \mathfrak{U}(E)$ alors $V \subset \Gamma_\Xi(U)$ si et seulement si :

(3.7) *Tout hyperplan réel affine, dont la normale est dans Ξ, et qui rencontre V, coupe aussi U.*

D'autre part, si E est un espace vectoriel complexe, et $\Xi \subset E'$ est un cône fermé satisfaisant $\complement\Xi \subset E$, alors $V \subset \Gamma_\Xi(U)$, où U, $V \in \mathfrak{U}(E)$ si et seulement si :

(3.8) *Tout hyperplan complexe affine, dont la normale est dans Ξ, et qui rencontre V, coupe aussi U.*

(Cette proposition est vraie aussi dans le cas peu intéressant $\Xi = \{0\}$ si nous considérons l'ensemble $\{x \in E; \langle x, \xi\rangle = t\}$ comme un hyperplan de normale ξ même pour $\xi = 0$.)

Démonstration. — Si K est compact dans U, on a $H_K \leqq H_U$, donc

$$\gamma_\Xi(K) \subset \bigcap_{\xi \in \Xi} \{x \in E; \langle x, \xi\rangle \leqq H_U(\xi)\},$$

ce qui montre que le membre de droite de (3.6) contient $\Gamma_\Xi(U)$. D'autre part, si $x \notin \overline{\Gamma_\Xi(U)}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que les ensembles compacts

$$\{\xi \in \Xi; |\xi| = 1 \text{ et } \langle x, \xi\rangle \geqq H_K(\xi) + \varepsilon\}, \qquad K \in \mathcal{K}(E), \quad K \subset U$$

sont tous non vides; leur intersection

$$\{\xi \in \Xi; |\xi| = 1 \text{ et } \langle x, \xi\rangle \geqq H_U(\xi) + \varepsilon\}$$

est alors elle aussi non vide, donc x n'appartient pas au membre de droite de (3.6). Comme les deux ensembles dans (3.6) sont relativement ouverts, cela montre l'égalité en question.

Si $b \in V$ et $b \notin \overline{\Gamma_\Xi(U)}$, il existe, vu (3.6), un $\xi \in \Xi$ tel que $\langle b, \xi\rangle > H_U(\xi)$. Donc l'hyperplan

$$\{x \in E; \langle x - b, \xi\rangle = 0\}, \tag{3.9}$$

qui contient b, ne coupe pas U. Dans le cas complexe, il existe $\xi \in \Xi$ tel que $\operatorname{Re}\langle b, \xi\rangle > H_U(\xi)$; alors l'hyperplan complexe (3.9) qui est contenu dans l'hyperplan réel

$$\{x \in E; \operatorname{Re}\langle x - b, \xi\rangle = 0\}$$

ne coupe pas U non plus. Donc (3.7), respectivement (3.8), entraîne $V \subset \Gamma_\Xi(U)$.

Réciproquement, supposons que $V \subset \Gamma_\Xi(U)$ et que $F = \{x \in E; \langle x, \xi\rangle = t\}$ soit un hyperplan réel de normale $\xi \in \Xi$ qui rencontre V, donc $\Gamma_\Xi(U)$, donc $\gamma_\Xi(K)$, pour un compact convexe K de U. Si $x \in F \cap \gamma_\Xi(K)$, on a

$$H_K(\xi) \geqq \langle x, \xi\rangle = t \qquad \text{et} \qquad H_K(-\xi) \geqq \langle x, -\xi\rangle = -t.$$

Or il existe y et z dans K tels que $\langle y, \xi \rangle = H_K(\xi)$, $\langle z, -\xi \rangle = H_K(-\xi)$, par conséquent, on aura

$$\langle sy + (1-s) z, \xi \rangle = t \quad \text{pour un } s \in [0, 1].$$

Comme $sy + (1-s) z \in K \subset U$, cela montre que F rencontre U, donc que $V \subset \Gamma_\Xi(U)$ entraîne (3.7).

Enfin, si E est un espace vectoriel complexe, et s'il existe un hyperplan complexe H passant par b, dont la normale est dans Ξ et qui ne rencontre pas U, il existe aussi un hyperplan réel H_1 qui est disjoint de U et contient H. Si H est défini par $\xi(x-b) = 0$, alors H_1 est défini par une équation $\eta(\xi(x-b)) = 0$ où $\eta : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ est une forme $\mathbf{R}$-linéaire, donc la normale de H_1 est un multiple complexe de ξ. Si $\mathbf{C}\Xi \subset \Xi$, il s'ensuit que (3.7) entraîne (3.8), et la démonstration est achevée.

Les applications enveloppantes de type Γ sont celles qui admettent « suffisamment » de demi-espaces convexes, plus précisément une application enveloppante $g^* : \mathcal{U}(E) \to \mathcal{U}(E)$, où $g : \mathcal{K}(E) \to \mathcal{C}(E)$ est concave, est de type Γ avec Ξ cône fermé, si et seulement si $g^*(U)$ est l'intersection de tous les demi-espaces $D \supset U$ qui satisfont $g^*(D) = D$.

On peut construire des applications « de type Γ mixte » en faisant varier l'ensemble Ξ avec U. Par exemple si un ensemble $\Xi(F) \subset E'$ est donné pour tout sous-espace vectoriel réel F de E on peut poser

$$g(K) = \gamma_{\Xi(F)}(K)$$

si F est le sous-espace vectoriel réel engendré par $K - x$, où $x \in K$. Évidemment, $g : \mathcal{K}(E) \to \mathcal{F}(E)$ n'est en général pas enveloppante. Cependant, c'est le cas si

$$\Xi(F) = \bigcup (\Phi(G);\ G \in \mathcal{A},\ G \supset F),$$

où $\mathcal{A}$ est un ensemble non vide donné de sous-espaces vectoriels de E, $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(E')$ une application telle que $(\Phi(F) \cap F^{\perp})^{\perp} = F$ pour tout $F \in \mathcal{A}$. Les applications de type Θ que nous allons étudier maintenant s'obtiennent ainsi à partir des applications de type Γ.

Applications enveloppantes de type Θ. — Soit comme tout à l'heure Ξ une partie de E', dual de E espace vectoriel réel. Posons

$$\theta_{\Xi r}(K) = \bigcap_{\xi \in \Xi} \{x \in E;\ \langle x, \xi \rangle \leqq H_K(\xi) + r\}, \qquad K \in \mathcal{K}(E), \qquad r \geqq 0,$$

et

$$\theta_\Xi(K) = \overline{\bigcup_{r \geqq 0} \theta_{\Xi r}(K)}, \qquad K \in \mathcal{K}(E).$$

Évidemment, $\gamma_\Xi = \theta_{\Xi 0} \leqq \theta_{\Xi r} \leqq \theta_\Xi$. Notons aussi que

$$\theta_{\Xi, r+\lambda s}(K + \lambda L) \supset \theta_{\Xi r}(K) + \lambda\, \theta_{\Xi s}(L);$$

en particulier $\theta_{\Xi r}$ est invariante par translations et

$$\theta_{\Xi r}(\lambda K) = \lambda\, \theta_{\Xi, r/\lambda}(K).$$

Cela entraîne que $\theta_\Xi : \mathcal{K}(E) \to \mathcal{F}(E)$ est concave. D'autre part, θ_Ξ est enveloppante. La relation $K \subset \theta_\Xi(K)$ étant triviale, nous supposons que $K \subset \theta_\Xi(L)$, et nous allons montrer que $\theta_\Xi(K) \subset \theta_\Xi(L)$. Or si $K \subset \theta_\Xi(L)$, il s'ensuit que tout compact dans K^i est contenu dans un $\theta_{\Xi r}(L)$, ces derniers ensembles étant tous fermés et convexes. En particulier, si $0 \in K^i$, alors, pour tout λ avec $0 < \lambda < 1$, il existe r tel que $\lambda K \subset \theta_{\Xi r}(L)$. Donc

$$\theta_{\Xi s}(\lambda K) \subset \theta_{\Xi s}(\theta_{\Xi r}(L)) \subset \theta_{\Xi, s+r}(L) \subset \theta_\Xi(L).$$

Par conséquent,

$$\lambda\, \theta_\Xi(K) = \theta_\Xi(\lambda K) \subset \theta_\Xi(L)$$

et on a bien

$$\theta_\Xi(K) \subset \bigcap_{0<\lambda<1} \frac{1}{\lambda}\, \theta_\Xi(L) = \overline{\theta_\Xi(L)} = \theta_\Xi(L).$$

Comme toutes les applications sont invariantes par translations, l'hypothèse $0 \in K^i$ peut s'éliminer. Nous appellerons *application enveloppante de type* Θ l'application $\Theta_\Xi = \theta_\Xi^* : \mathfrak{U}(E) \to \mathfrak{U}(E)$ associée à θ_Ξ. Si Ξ est un cône, on a évidemment $\theta_{\Xi r} = \gamma_\Xi$, d'où $\Theta_\Xi = \Gamma_\Xi$. Toute application de type Γ est donc de type Θ.

Comme $\gamma_\Xi \leqq \theta_\Xi$, on a toujours $\Gamma_\Xi \leqq \Theta_\Xi$. Mais θ_Ξ ne dépend que du germe de Ξ à l'infini, donc $\Gamma_{\Xi(r)} \leqq \Theta_\Xi$ pour tout $r \geqq 0$, où $\Xi(r) = \{\xi \in \Xi ; |\xi| \geqq r\}$. D'autre part, en notant $\alpha(\Xi)$ le cône engendré par l'origine et l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites $\xi_j/|\xi_j|$ où $\xi_j \in \Xi$, $|\xi_j| \to +\infty$ (« le cône asymptotique de Ξ »), on a $\Theta_\Xi \leqq \Gamma_{\alpha(\Xi)}$ si $\Xi \neq \emptyset$. En général, $\Theta_\Xi \neq \Gamma_{\alpha(\Xi)}$, cependant toute application Θ_Ξ est « localement » de type Γ, c'est-à-dire que sa restriction aux ensembles ouverts par rapport à un sous-espace fixé est de type Γ :

PROPOSITION 3.3. — *Si $\Theta_\Xi : \mathfrak{U}(E) \to \mathfrak{U}(E)$ est une application enveloppante de type Θ, et F un sous-espace vectoriel réel donné de E, alors il existe un ensemble $\Xi(F) \subset E'$ tel que*

$$\Theta_\Xi(U) = \Gamma_{\Xi(F)}(U)$$

pour tout $U \in \mathfrak{U}(F)$ qui est ouvert dans F [et donc pour tout $U \in \mathfrak{U}(E)$ tel que $U - x$ ait cette propriété pour un $x \in U$]. En effet, si $\Xi = \emptyset$, on prend $\Xi(F) = \emptyset$, sinon on peut prendre

$$\Xi(F) = \alpha(\Xi + G^\perp),$$

où $G = \Theta_\Xi(F)$ *ou, encore mieux,* $G = \Gamma_{\alpha(\Xi)}(F) \supset \Theta_\Xi(F)$. *En particulier, on a*

$$\Theta_\Xi(U) = \Gamma_{\alpha(\Xi)}(U) \qquad si \quad \Gamma_{\alpha(\Xi)}(F) = E.$$

Démonstration. — Soient U ouvert dans F et $G = \Gamma_{\alpha(\Xi)}(F) = (\alpha(\Xi) \cap F^\perp)^\perp$. On note d'abord que G est l'espace vectoriel engendré par $\Gamma_{\alpha(\Xi)}(U)$. Il est clair que

$$\theta_{\Xi,r}(K) = \bigcap_{\eta \in \pi(\Xi)} \{ x \in G ; \langle x, \eta \rangle \leq H_K(\eta) + r \}$$

$$= \bigcap_{\xi \in \pi^{-1}(\pi(\Xi))} \{ x \in E ; \langle x, \xi \rangle \leq H_K(\xi) + r \}, \qquad K \in \mathcal{K}(F),$$

où $\pi : E' \to G'$ est la surjection naturelle et H_K désigne la fonction d'appui dans G' aussi bien que dans E'. Donc $\Theta_\Xi(U) = \Theta_{\pi(\Xi)}(U)$, où cette dernière application s'entend comme application dans $\mathfrak{U}(G)$. Il suffira donc de regarder le cas $G = E$ [c'est-à-dire $\alpha(\Xi) \cap F^\perp = \{ 0 \}$] et il s'agira alors de montrer que $\Theta_\Xi(U) = \Gamma_{\alpha(\Xi)}(U)$ pour tout $U \in \mathfrak{U}(E)$ d'intérieur non vide par rapport à F. Nous avons déjà constaté que $\Theta_\Xi \leq \Gamma_{\alpha(\Xi)}$.

D'autre part, soit K un compact convexe d'intérieur non vide dans F. On pourra supposer que l'origine appartient à l'intérieur de K; en d'autres termes que λK est un voisinage dans F de K pour tout $\lambda > 1$. Soit provisoirement $\lambda > 1$ fixé. Il existe alors $\delta > 0$ tel que, pour $x \in K$,

$$\xi \in \alpha(\Xi) \quad \text{et} \quad |\xi - \eta| \leq \delta |\eta|$$

entraînent

$$H_K(\xi - \eta) + \langle x, \eta - \xi \rangle \leq (\lambda - 1) H_K(\eta)$$

[car $\alpha(\Xi) \cap F^\perp = \{ 0 \}$], et par conséquent

$$\xi \in \alpha(\Xi), \quad \langle x, \xi \rangle \leq H_K(\xi) \qquad \text{et} \qquad |\xi - \eta| \leq \delta |\eta|$$

entraînent

$$\langle x, \eta \rangle \leq H_K(\eta) + H_K(\xi - \eta) + \langle x, \eta - \xi \rangle \leq H_{\lambda K}(\eta).$$

En notant $\alpha(\Xi, \delta)$ l'ensemble de tous les $\eta \in E'$, tels qu'il existe $\xi \in \alpha(\Xi)$ satisfaisant $|\xi - \eta| \leq \delta |\eta|$, cette dernière implication peut s'écrire

$$x \in \gamma_{\alpha(\Xi)}(K) \qquad \text{entraîne} \quad x \in \gamma_{\alpha(\Xi, \delta)}(\lambda K).$$

Or il existe $r \geq 0$ tel que $\xi \in \Xi$ et $|\xi| \geq r$ impliquent $\xi \in \alpha(\Xi, \delta)$; on a, avec un tel r,

$$\gamma_{\alpha(\Xi, \delta)}(\lambda K) \subset \gamma_{\Xi(r)}(\lambda K) \subset \theta_\Xi(\lambda K) = \lambda \theta_\Xi(K),$$

où $\Xi(r) = \{ \xi \in \Xi ; |\xi| \geq r \}$. En faisant finalement varier λ, on obtient

$$\gamma_{\alpha(\Xi)}(K) \subset \bigcap_{\lambda > 1} \lambda \theta_\Xi(K) = \theta_\Xi(K).$$

Enfin, cela montre que $\Gamma_{\alpha(\Xi)}(U) \subset \Theta_\Xi(U)$. La proposition est démontrée.

Dans le théorème de prolongement, E sera un espace vectoriel complexe et Ξ sera l'ensemble des zéros d'un polynôme P défini dans E'. Alors $\alpha(\Xi)$ est l'ensemble des vecteurs caractéristiques complexes de P, c'est-à-dire les zéros de la partie principale de P. La proposition que nous venons de démontrer permet d'affirmer que l'enveloppe $\Theta_\Xi(U)$ est en fait dans certaines circonstances déterminée par les vecteurs caractéristiques.

4. **Un algorithme de division.**

Dans ce paragraphe, nous montrerons le théorème suivant qui contient la partie essentielle du théorème de prolongement.

THÉORÈME 4.1. — *Soient E un espace vectoriel complexe, E' son dual, P un polynôme dans E'. Si K et L sont deux compacts de E tels que pour une constante b,*

$$H_L(\zeta) \leqq H_K(\zeta) + b\log(2+|\zeta|) \qquad \text{lorsque} \quad P(\zeta)=0, \tag{4.1}$$

alors toute fonction $f_1 \in \mathcal{H}(E')$ telle que

$$\log|f_1(\zeta)| \leqq H_L(\zeta) + a_1\log(2+|\zeta|), \qquad \zeta \in E', \tag{4.2}$$

peut s'écrire

$$f_1 = Pf_2 + f_3, \tag{4.3}$$

où f_2 et f_3 sont entières,

$$\log|f_2(\zeta)| \leqq H_L(\zeta) + a_2\log(2+|\zeta|), \qquad \zeta \in E', \tag{4.4}$$

et

$$\log|f_3(\zeta)| \leqq H_K(\zeta) + a_3\log(2+|\zeta|), \qquad \zeta \in E'. \tag{4.5}$$

Ici a_2, a_3 dépendent de P, K, L, a_1 et b, mais non pas de f_1.

Démonstration. — Nous utiliserons les méthodes de HÖRMANDER [3]. Posons

$$f_2 = (f_1(1-\varphi\circ P)/P) + v,$$
$$f_3 = f_1(\varphi\circ P) - Pv,$$

où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{C})$ est telle que $0 \leqq \varphi \leqq 1$, $\varphi(\tau)=1$ si $|\tau| \leqq \frac{1}{2}$, $\varphi(\tau)=0$ si $|\tau| \geqq 1$,

et où il reste à déterminer $v \in \mathcal{E}(E')$. Évidemment f_2, $f_3 \in \mathcal{E}(E')$ et $Pf_2 + f_3 = f_1$. Pour que f_2 soit holomorphe, il faut et il suffit que

$$0 = \bar\partial f_2 = -\frac{f_1(\bar\partial(\varphi\circ P))}{P} + \bar\partial v = -\frac{f_1\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\bar\tau}\circ P\right)\overline{\partial P}}{P} + \bar\partial v.$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation

$$\bar\partial v = f_1 \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar\tau} \circ P}{P} \overline{\partial P},$$

dont le membre de droite est une forme w, $\bar\partial$-fermée, de type (0, 1), à coefficients indéfiniment dérivables. En remarquant que $|\partial P| \leq C(1+|\zeta|)^{m-1}$ si m est le degré de P, et que $|P(\zeta)| \geq \frac{1}{2}$ dans le support de $\bar\partial(\varphi \circ P)$, on obtient

$$|w(\zeta)| \leq 2C(1+|\zeta|)^{m-1} |f_1(\zeta)| \sup \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \bar\tau}\right|.$$

Mais en changeant la valeur de b, l'inégalité (4.1) reste valable dès que $|P(\zeta)| \leq 1$ (car alors la distance de ζ aux zéros de P est bornée). Donc, comme $w(\zeta) = 0$ si $|P(\zeta)| > 1$, on a, avec une constante c,

$$\log|w(\zeta)| \leq H_K(\zeta) + c\log(2+|\zeta|), \qquad \zeta \in E'.$$

Le théorème 4.4.2 de Hörmander [3] nous donne une solution $v \in \mathcal{E}(E')$ de l'équation $\bar\partial v = w$ telle que

$$\log|v(\zeta)| \leq H_K(\zeta) + c_1 \log(2+|\zeta|), \qquad \zeta \in E',$$

pour une constante c_1. Cela montre immédiatement les inégalités désirées (4.4) et (4.5).

5. Le théorème de prolongement.

Nous allons maintenant démontrer le théorème de prolongement des solutions partiellement holomorphes.

Théorème 5.1. — *Soient E un espace vectoriel complexe de dimension finie et E' son dual, P un polynôme dans E' et Ξ l'ensemble des zéros de P. Si F est un sous-espace vectoriel réel de E avec $F + iF = E$, et U un ouvert convexe de F, alors toute solution $u \in \mathcal{H}(U)$ de l'équation $P(D)u = 0$ se prolonge en une solution $v \in \mathcal{H}(\Theta_\Xi(U))$ de $P(D)v = 0$.*

Remarque. — Dans certains cas, le théorème reste vrai même si $F + iF \neq E$; alors il faut poser $P(D)u = 0$ pour toute $u \in \mathcal{H}(U)$. En effet, dans [4] nous avons démontré que, si F est un hyperplan complexe non caractéristique, alors toute fonction $u \in \mathcal{H}(U)$ se prolonge en une solution $v \in \mathcal{H}(\Theta_\Xi(U)) = \mathcal{H}(\Gamma_{\alpha(\Xi)}(U))$ de $P(D)v = 0$ (et le problème de Cauchy est même résoluble).

Démonstration. — Soit $\mathcal{H}_P(U)$ l'espace des solutions $u \in \mathcal{H}(U)$ de $P(D)u = 0$ muni de la topologie induite, et notons $V = \Theta_\Xi(U)$. Il s'agit de montrer que la restriction

$$R:\ \mathcal{H}_P(V) \to \mathcal{H}_P(U)$$

est surjective. Pour cela, il suffit de montrer que $\operatorname{Im} R$ est dense dans $\mathcal{H}_P(U)$ et que l'application adjointe $R' : \mathcal{H}'_P(U) \to \mathcal{H}'_P(V)$ est surjective (donc d'image faiblement fermée). (On peut remarquer que ce cas particulier du « théorème de l'épimorphisme » peut se démontrer plus facilement que le théorème général.) Le théorème 2.3 montre que $\operatorname{Im} R$ est dense. Soient $T \in \mathcal{H}'_P(V)$ et $T_1 \in \mathcal{H}'(V)$ un prolongement de T. Alors

$$\log|\hat{T}_1(\zeta)| \leq H_L(\zeta) + a_1 \log(2 + |\zeta|), \qquad \zeta \in E',$$

pour un compact L de V et une constante a_1. Comme $V = \theta_\Xi(U)$ est la réunion des $\theta_\Xi(K)^i$ où K est un compact convexe contenu dans U, il existe un tel K avec $L \subset \theta_\Xi(K)^i$. Or $\theta_\Xi(K)^i$ est l'intérieur relatif de $\bigcup_{r \geq 0} \theta_{\Xi^r}(K)$, donc il existe $r \geq 0$ tel que $L \subset \theta_{\Xi^r}(K)$. Cela veut dire que la condition (4.1) est satisfaite. Les deux fonctions f_2 et f_3, fournies par le théorème 4.1, sont les transformées de Laplace de deux fonctionnelles $T_2 \in \mathcal{H}'(V)$ et $T_3 \in \mathcal{H}'(U)$. On a aussi

$$T_1(v) = T_2(P(D)v) + T_3(v|_U)$$

pour toute $v \in \mathcal{H}(V)$. Soit $S \in \mathcal{H}'_P(U)$ la restriction de T_3 à $\mathcal{H}_P(U)$. Alors $R'(S) = T$, car

$$R'(S)(v) = S(R(v)) = T_3(v|_U) = T_1(v) = T(v)$$

si $v \in \mathcal{H}_P(V)$. Le théorème est démontré.

Corollaire 5.2. — *Soient U un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, et $P(D)$ un opérateur elliptique à coefficients constants dans $\mathbf{R}^n$. Alors toute solution $u \in \mathcal{E}(U)$ de $P(D)u = 0$ se prolonge en une fonction v holomorphe dans l'ouvert $\Gamma_{\alpha(\Xi)}(U)$ de $\mathbf{C}^n$.*

Rappelons que $\alpha(\Xi)$ est l'ensemble des zéros de la partie principale de P.

Démonstration. — En effet, P elliptique veut dire que $\alpha(\Xi) \cap F^\perp = \{0\}$, où $F = \mathbf{R}^n$, donc $\Gamma_{\alpha(\Xi)}(F) = E = \mathbf{C}^n$, d'où, par la proposition 3.3,

$$\Theta_\Xi(U) = \Gamma_{\alpha(\Xi)}(U).$$

Corollaire 5.3. — *Si U est un ensemble ouvert convexe dans E, alors toute solution holomorphe de $P(D)u = 0$ dans U se prolonge en une fonction holomorphe dans $\Gamma_{\alpha(\Xi)}(U)$.*

Démonstration. — Si U est ouvert, $\Gamma_{\alpha(\Xi)}(U)$ est *a fortiori* ouvert, donc $\Theta_\Xi(U) = \Gamma_{\alpha(\Xi)}(U)$.

L'ensemble $\Theta_\Xi(U)$ est le plus grand ensemble convexe relativement ouvert auqel on puisse prolonger toutes les solutions de $P(D)u = 0$ dans U. Avant de montrer ceci, il nous faudra étudier l'unicité du prolongement.

THÉORÈME 5.4. — *Avec les notations du théorème* 5.1, *supposons que G soit un sous-espace vectoriel réel de E contenant F, et que V soit un ouvert convexe de G contenant U. Si $V \subset \Gamma_{\alpha(\Xi) \cap i G^{\perp}}(U)$ alors toute solution $v \in \mathcal{H}(V)$ de $P(D)v = 0$, qui s'annule dans U, est identiquement nulle.*

Démonstration. — Soient $z = (z_1, \ldots, z_k)$ des coordonnées complexes dans $G \cap i G$ et $(z, x) = (z_1, \ldots, z_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ $(0 \leq k \leq n)$ des coordonnées dans G. Pour tout $x \in \mathbf{R}^{n-k}$, on considère la fonction holomorphe v_x définie dans $V_x = \{ z \in \mathbf{C}^k ; (z, x) \in V \}$ par $v_x(z) = v(z, x)$ et s'annulant dans $U_x = \{ z \in \mathbf{C}^k ; (z, x) \in U \}$. Ici V_x est ouvert et convexe dans un translaté de $G \cap i G$, U_x l'est dans un translaté de $F \cap G \cap i G = F \cap i G$. Or $(F \cap i G) + i(F \cap i G) = G \cap i G$ d'après le lemme 5.5 ci-dessous, ce qui montre que v_x est nulle dès que U_x est non vide. Donc v est nulle dans l'ensemble

$$W = \{ (z, x) \in V ; (z', x) \in U \text{ pour un } z' \in \mathbf{C}^k \}.$$

Je dis que W est ouvert dans V. En effet W est ouvert dans $(G \cap i G) + F$, et ce dernier espace est égal à G, d'après le lemme 5.5. L'opérateur différentiel $P(\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n)$ peut se réaliser, par exemple, comme $P(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$ dans G. Un vecteur $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_k)$ dans G^* est caractéristique par rapport au dernier opérateur si et seulement si $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \alpha(\Xi)$. Nous allons utiliser le théorème d'unicité de Holmgren (*voir* HÖRMANDER [2], théorème 5.3.3) selon lequel il suffit de montrer que chaque hyperplan caractéristique réel dans G qui rencontre V coupe W, en d'autres termes (proposition 3.2) que

$$\begin{aligned} &H_V(\xi_1 - i\eta_1, \ldots, \xi_k - i\eta_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n) \\ &\quad \leq H_W(\xi_1 - i\eta_1, \ldots, \xi_k - i\eta_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n) \end{aligned}$$

pour tout vecteur réel $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_k)$ caractéristique par rapport à $P(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$. Il suffit même de le faire en supposant U maximal. Alors $U = W$; comme

$$H_{G \cap i G}(\xi_1 - i\eta_1, \ldots, \xi_k - i\eta_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n) = +\infty,$$

sauf si $\xi_1 = \ldots = \xi_k = \eta_1 = \ldots = \eta_k = 0$, il suffit de vérifier que

$$H_V(0, \ldots, 0, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n) \leq H_U(0, \ldots, 0, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$$

pour les vecteurs $(0, \ldots, 0, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n) \in i G^{\perp}$ qui sont dans $\alpha(\Xi)$. C'est précisément la condition $V \subset \Gamma_{\alpha(\Xi) \cap i G^{\perp}}(U)$.

Au cours de cette démonstration, nous avons utilisé le lemme suivant qui nous servira aussi au paragraphe 6.

LEMME 5.5. — *Soient E un espace vectoriel complexe de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels réels de E avec $F \subset G$, $F + iF = E$. En notant $G_0 = G \cap i G$, on a alors $G = F + G_0$ et $G_0 = (F \cap G_0) + i(F \cap G_0)$.*

Démonstration. — Il est clair que $G \supset F + G_0$ et $G_0 \supset (F \cap G_0) + i(F \cap G_0)$. Pour montrer les inclusions opposées, on se ramène d'abord au cas où $F \cap iF = \{0\}$. Alors on peut supposer que $F = \mathbf{R}^n$, $E = \mathbf{C}^n$ et que G soit défini par des équations $\operatorname{Im} \sum z_j \zeta_j^k = 0$, $k = 1, \ldots, m$. Par conséquent G_0 sera défini par

$$\sum z_j \zeta_j^k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

La condition $F \subset G$ montre que les ζ_j^k sont réels. Si alors $z \in G$, on écrit $z = x + iy$ avec x et y réels, donc $x \in F$ et $\sum iy_j \zeta_j^k = i \operatorname{Im} \sum z_j \zeta_j^k = 0$, d'où $iy \in G_0$, et on a $G \subset F + G_0$.

D'autre part, si $z \in G_0$ et $z = x + iy$ avec x et y réels, on a

$$0 = \sum z_j \zeta_j^k = \sum x_j \zeta_j^k + \sum iy_j \zeta_j^k,$$

donc $\sum x_j \zeta_j^k = \sum iy_j \zeta_j^k = 0$ comme les ζ_j^k sont réels. Cela montre que x, $y \in G_0$, donc que $G_0 \subset (F \cap G_0) + i(F \cap G_0)$.

Lemme 5.6. — *Dans tout demi-espace*

$$D = \{ z \in E ; \operatorname{Re}\langle z, \zeta \rangle < 0 \},$$

où $\zeta \in \alpha(\Xi)$ il existe une solution $u \in \mathcal{H}(D)$ de $P(D)u = 0$ telle que $|u(z)| \to +\infty$ lorsque $z \to 0$ en restant dans un cône $|z| \leq A(-\operatorname{Re}\langle z, \zeta \rangle)$, $z \neq 0$, A étant un nombre strictement positif arbitraire.

Démonstration. — Soient $\zeta_k \in \Xi$, $k \in \mathbf{N}$, tels que $|\zeta_k| \to +\infty$ et $\zeta_k / |\zeta_k| \to \zeta$ lorsque $k \to +\infty$; on pourra même supposer que $|\zeta_k| = k$ si k est assez grand. Posons

$$u(z) = \sum_{k \in \mathbf{N}} e^{\langle z, \zeta_k \rangle}, \qquad z \in D,$$

Soit $(K_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite fondamentale de compacts convexes de D. On a

$$H_{K_j}(\zeta) = -2\varepsilon_j < 0 \qquad \text{et} \qquad H_{K_j}(\theta) \leq r_j |\theta|, \qquad \theta \in E',$$

pour des nombres réels ε_j et r_j. Si $z \in K_j$, on obtient donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle z, \zeta_k \rangle &= |\zeta_k| \operatorname{Re}\langle z, \zeta \rangle + \operatorname{Re}\langle z, \zeta_k - |\zeta_k| \zeta \rangle \\ &\leq -2\varepsilon_j |\zeta_k| + r_j |\zeta_k| . |\zeta_k / |\zeta_k| - \zeta| . \end{aligned}$$

En choisissant k_j tel que $k \geq k_j$ entraîne $r_j |\zeta_k / |\zeta_k| - \zeta| \leq \varepsilon_j$, on a

$$\operatorname{Re}\langle z, \zeta_k \rangle \leq -\varepsilon_j |\zeta_k|, \qquad k \geq k_j, \qquad z \in K_j.$$

Cela montre que $\sum \exp\langle z, \zeta_k\rangle$ converge uniformément sur K_j, donc que $u \in \mathcal{H}(D)$ si $|\zeta_k|$ tend vers infini assez vite (par exemple $|\zeta_k| = k$ pour k grand). Évidemment, $P(D)\,u = 0$.

Pour étudier le comportement de $u(z)$ lorsque $z \to 0$, nous allons utiliser l'inégalité

$$\left|\sum_{k\in\mathbf{N}} w_k^k - \sum_{k\in\mathbf{N}} w^k\right| \leqq \frac{\varepsilon}{(1-|w|-\varepsilon)^2} \quad \text{si} \quad |w_k - w| \leqq \varepsilon, \quad |w| < 1-\varepsilon.$$

En posant $w = e^{\langle z, \zeta\rangle}$, $w_k = e^{\langle z, \zeta_k/k\rangle}$, ceci donne

$$\left|u(z) - \frac{1}{1-e^{\langle z, \zeta\rangle}}\right| \leqq \frac{\varepsilon(z)}{(1-e^{\mathrm{Re}\langle z, \zeta\rangle}-\varepsilon(z))^2}$$

sous l'hypothèse

$$\varepsilon(z) \geqq |e^{\langle z, \zeta_k/k\rangle} - e^{\langle z, \zeta\rangle}|, \qquad e^{\mathrm{Re}\langle z, \zeta\rangle} < 1 - \varepsilon(z).$$

Il suffit évidemment de prendre $\varepsilon(z) = e\delta|z|$ si $|z| \leqq 1$, $\mathrm{Re}\langle z, \zeta\rangle < 0$ et $|\zeta_k/k - \zeta| \leqq \delta \leqq 1$, car

$$|e^{\langle z, \zeta_k/k\rangle} - e^{\langle z, \zeta\rangle}| \leqq e^{\mathrm{Re}\langle z, \zeta\rangle} |\langle z, \zeta_k/k - \zeta\rangle| \, e^{|\langle z, \zeta_k/k - \zeta\rangle|} \leqq e\delta|z|.$$

Donc

$$\left|u(z) - \frac{1}{1-e^{\langle z, \zeta\rangle}}\right| \leqq \frac{e\delta|z|}{(1-e^{\mathrm{Re}\langle z, \zeta\rangle}-e\delta|z|)^2}$$

si $|z| \leqq 1$, $e^{\mathrm{Re}\langle z, \zeta\rangle} < 1 - e\delta|z|$ et $|\zeta_k/k - \zeta| \leqq \delta \leqq 1$. Compte tenu de l'inégalité $|z| \leqq A(-\mathrm{Re}\langle z, \zeta\rangle)$, cela donne

$$\overline{\lim_{z\to 0}}(-\mathrm{Re}\langle z, \zeta\rangle)\left|u(z) - \frac{1}{1-e^{\langle z, \zeta\rangle}}\right| \leqq \frac{e\delta A}{(1-e\delta A)^2}.$$

si $e\delta A < 1$. D'autre part

$$\underline{\lim}_{z\to 0} \frac{-\mathrm{Re}\langle z, \zeta\rangle}{|1-e^{\langle z, \zeta\rangle}|} \geqq \frac{1}{A|\zeta|};$$

donc

$$\underline{\lim}_{z\to 0}(-\mathrm{Re}\langle z, \zeta\rangle)\,|u(z)| \geqq \frac{1}{A|\zeta|} - \frac{e\delta A}{(1-e\delta A)^2} > 0$$

si δ est suffisamment petit. (Bien entendu z reste dans le cône en question en tendant vers l'origine.) Enfin, l'hypothèse $|\zeta_k/k - \zeta| \leqq \delta$ devient vraie en changeant un nombre fini des ζ_k, c'est-à-dire en ajoutant une fonction entière à u. Le lemme est démontré.

Lemme 5.7. — *Si dans la situation décrite dans le théorème* 5.1 *le prolongement de U à un convexe relativement ouvert V est toujours possible, alors* $V \subset \Gamma_{\alpha(\Xi)\cap iU^{\perp}}(U)$.

Démonstration. — Posons $W = \Gamma_{\alpha(\Xi)\cap iU^{\perp}}(U)$, et notons $D_{\zeta,a}$ le demi-espace ouvert $\{z \in E;\ \operatorname{Re}\langle z - a, \zeta\rangle < 0\}$. Vu la proposition 3.2, $\overline{W}$ est l'intersection des demi-espaces $\overline{D}_{\zeta,a}$ avec $\zeta \in \alpha(\Xi) \cap iU^{\perp}$ qui le contiennent. On voit aisément que, pour chaque point $a \in \partial W$, il existe $\zeta \in \alpha(\Xi) \cap iU^{\perp}$ tel que $\overline{D}_{\zeta,a}$ contienne $\overline{W}$. Je dis que $D_{\zeta,a}$ contient W. En effet dans le cas contraire, on aurait $W \subset \partial D_{\zeta,a}$, c'est-à-dire $\operatorname{Re}\langle z - a, \zeta\rangle = 0$ pour tout $z \in W$, en particulier pour tout $z \in U$. Or $i\zeta \in U^{\perp}$, donc $\operatorname{Re}\langle z, i\zeta\rangle = 0$ pour tout $z \in U$. L'inclusion $W \subset \partial D_{\zeta,a}$ entraînerait donc que U est contenu dans l'hyperplan complexe défini par $\langle z, \zeta\rangle = \operatorname{Re}\langle a, \zeta\rangle$, ce qui contredit l'hypothèse $F + iF = E$.

Cela dit, supposons que V ne soit pas contenu dans W et que le prolongement de U à V soit toujours possible. En choisissant $a \in V \cap \partial W$ et un demi-espace ouvert D correspondant contenant W mais non pas a, nous pouvons trouver, d'après le lemme 5.6, une solution $u \in \mathcal{H}(D)$ telle que sa restriction à W ne soit pas bornée près de a. D'autre part, la restriction de u à U est prolongeable en une solution $v \in \mathcal{H}(V)$ par hypothèse. La différence $u - v$ est alors définie dans $D \cap V$, nulle dans U, donc, d'après le théorème 5.4, nulle dans

$$D \cap V \cap \Gamma_{\alpha(\Xi)\cap iV^{\perp}}(U) \supset D \cap V \cap \Gamma_{\alpha(\Xi)\cap iU^{\perp}}(U) = W \cap V.$$

La fonction v serait donc non bornée au voisinage de a, contradiction qui démontre bien le lemme.

Finalement, nous pouvons montrer la réciproque du théorème 5.1.

THÉORÈME 5.8. — *Nous garderons les notations du théorème* 5.1. *Si toute solution $u \in \mathcal{H}(U)$ de $P(D)\,u = 0$ se prolonge en une solution $v \in \mathcal{H}(V)$ de $P(D)\,v = 0$, où V est convexe et relativement ouvert, alors $V \subset \Theta_{\Xi}(U)$.*

Démonstration. — Le lemme 5.7 montre que

$$V \subset \Gamma_{\alpha(\Xi)\cap iU^{\perp}}(U) \subset \Gamma_{\alpha(\Xi)\cap iV^{\perp}}(U),$$

donc, d'après le théorème 5.4, le prolongement est unique. Par conséquent, la restriction

$$R:\ \mathcal{H}_P(V) \to \mathcal{H}_P(U)$$

est une bijection. Comme elle est continue, R^{-1} est elle aussi continue d'après le théorème de Banach. En particulier, pour tout compact L de V, il existe un compact K de U, et deux nombres C et N, tels que

$$\sup_{z \in L} |v(z)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{z \in K} |D^{\alpha} v(z)|, \qquad v \in \mathcal{H}_P(V).$$

En prenant $v(z) = e^{\langle z, \zeta\rangle}$, $\zeta \in \Xi$, on obtient avec une constante b,

$$(5.1) \qquad H_L(\zeta) \leq H_K(\zeta) + b \log(2 + |\zeta|), \qquad \zeta \in \Xi,$$

c'est-à-dire la condition (4.1) que nous avons utilisée pour montrer le théorème 5.1. Il serait naturellement possible d'étudier une classe d'applications enveloppantes en partant de cette condition, cependant, Ξ étant algébrique, le théorème de Tarski-Seidenberg nous permettra de la remplacer par la condition définissant l'opération Θ_Ξ.

En effet, soit L_0 un compact donné de V. Il existe alors un ensemble fini de V dont l'enveloppe convexe L contient L_0. Donc il existe K compact de U tel que (5.1) soit vérifiée. Nous pouvons évidemment supposer K d'intérieur non-vide par rapport à U, et aussi, après avoir effectué, si nécessaire, une translation du système des coordonnées, que $0 \in K^\iota$. Prenons une intersection finie $K_0 = \bigcap B_j$ de boules fermées dans U (par rapport à une structure euclidienne arbitraire) qui contient K. Évidemment, $\inf H_{B_j} \geqq H_{K_0}$. D'autre part, il existe une constante λ telle que $\lambda H_{K_0} \geqq \inf H_{B_j}$, et on peut toujours trouver une famille finie de boules telle que $K \subset K_0 = \bigcap B_j \subset \lambda K_0 \subset U$ et à la fois $\lambda H_{K_0} \geqq \inf H_{B_j}$. Cela étant, nous avons

$$(5.2)\qquad \begin{aligned} H_{L_0}(\zeta) - H_{\lambda K_0}(\zeta) &\leqq H_L(\zeta) - \inf_j H_{B_j}(\zeta) \\ &\leqq H_L(\zeta) - H_K(\zeta) \leqq b \log(2 + |\zeta|) \end{aligned}$$

pour tout $\zeta \in \Xi$, en particulier

$$(5.3)\qquad H_L(\zeta) - \inf_j H_{B_j}(\zeta) \leqq b \log(2 + |\zeta|), \qquad \zeta \in \Xi.$$

Nous allons montrer que (5.3) implique que $H_L - \inf H_{B_j}$ est bornée supérieurement dans Ξ, donc d'après (5.2) que $H_{L_0} - H_{\lambda K_0}$ est bornée supérieurement. Cela montrera notre assertion, car L_0 est un compact quelconque de V, et λK_0 est compact dans U.

En introduisant des coordonnées $z_1, \ldots, z_k$ dans $F \cap iF$, $z_1, \ldots, z_k$, $x_{k+1}, \ldots, x_n$ dans F, $z_1, \ldots, z_n$ dans E et $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ dans E', nous pouvons écrire

$$H_L(\zeta) = \sup_i \operatorname{Re}\langle a^{(i)}, \zeta \rangle,$$

$$\inf H_{B_j}(\zeta) = \inf_j (\operatorname{Re}\langle b^{(j)}, \zeta\rangle + r_j(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 + \eta_1^2 + \ldots + \eta_k^2)^{1/2})$$

car $\zeta \mapsto (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 + \eta_1^2 + \ldots + \eta_k^2)^{1/2}$ est la fonction d'appui de la boule unité de F. Donc (5.3) s'écrit

$$\sup_i \sup_j \sup_{(\zeta, \sigma) \in M_\tau} \operatorname{Re}\langle a^{(i)} - b^{(j)}, \zeta \rangle - r_j \sigma \leqq b \log(2 + \tau),$$

où M_τ est l'ensemble semi-algébrique des $(\zeta, \sigma) \in \mathbf{R}^{2n+1}$ tels que $P(\zeta) = 0$, $\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 + \eta_1^2 + \ldots + \eta_k^2 - \sigma^2 = 0$ et $|\zeta|^2 - \tau^2 \leqq 0$. Appelons $F(\tau)$ le membre de gauche de cette inégalité; c'est une fonction de $\tau \in \mathbf{R}$ qui admet, d'après le théorème de Tarski-Seidenberg (*voir* Hörmander [2], lemme 2.1; le fait que M_τ soit défini par trois polynômes est sans importance) une formule asymptotique

$$F(\tau) = A\tau^a(1 + o(1)), \qquad \tau \to +\infty,$$

donc $A \leqq 0$ ou $a \leqq 0$, c'est-à-dire F est bornée supérieurement. Le théorème 5.8 est démontré.

6. Cas des solutions distributions.

Il est peu étonnant que le théorème de prolongement reste valable si on admet des distributions comme solutions, ce que nous nous proposons de montrer dans ce paragraphe. Nous appellerons ici $\mathcal{H}(U, \mathcal{D}')$ l'espace de toutes les distributions $u \in \mathcal{D}'(U)$ telles que $\bar{\partial}_F u = 0$, U étant un ensemble ouvert dans un sous-espace vectoriel réel F d'un espace vectoriel complexe E.

Notons d'abord que la restriction d'une distribution est toujours bien définie dans les cas dont il s'agit dans le théorème de prolongement. Soient U un ouvert dans F, $F + iF = E$, et V un ouvert dans le sous-espace vectoriel réel G de E tel que $U \subset V$. Tout élément $v \in \mathcal{H}(V, \mathcal{D}')$ admet alors une restriction $v|_U \in \mathcal{H}(U, \mathcal{D}')$ qui généralise la restriction des fonctions. Pour montrer ceci, nous pourrons supposer, grâce au lemme 5.5, que

$$F = \mathbf{C}^p \times \mathbf{R}^{n-p} = \mathbf{C}^p \times \mathbf{R}^{q-p} \times \mathbf{R}^{n-q}$$

et

$$G = \mathbf{C}^q \times \mathbf{R}^{n-q} = \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^{q-p} \times \mathbf{R}^{n-q}$$

où $\mathbf{R}^{q-p}$ est considéré comme sous-espace de $\mathbf{C}^{q-p}$. En effet, soient $(e_1, \ldots, e_p)$ une base complexe de $F \cap iF$ et $(e_1, \ldots, e_q, ie_1, \ldots, ie_p)$ une base réelle de $F \cap iG$. Alors

$$(e_1, \ldots, e_q, ie_1, \ldots, ie_q) \text{ engendre } (F \cap iG) + i(F \cap iG)$$

et c'est même une base, car

$$(F \cap iG) \cap i(F \cap iG) = F \cap iF,$$

c'est-à-dire l'intersection des deux espaces est égale à l'espace engendré par les éléments communs dans les deux bases. Or

$$(F \cap iG) + i(F \cap iG) = G \cap iG,$$

d'après le lemme 5.5. On peut trouver des nouveaux vecteurs $e_{q+1}, \ldots, e_n$ tels que $(e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_p)$ soit une base dans F. Donc $(e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_q)$ engendre $F + (G \cap iG)$ et c'est une base puisque $F \cap (G \cap iG) = F \cap iG$. Toujours d'après le lemme 5.5, $F + (G \cap iG) = G$. Cela veut dire que dans le système de coordonnées que nous venons de construire, G est défini par $y_{q+1} = \ldots = y_n = 0$ et F par $y_{p+1} = \ldots = y_n = 0$.

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{C})$ une fonction qui vaut 1 près de l'origine. On sait que, pour $v \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$,

$$(6.1) \qquad v(x) = v(x)\,\psi(0) = \int_{\mathbf{C}} v(z')\,\psi_\varepsilon(x - z')\,d\lambda(z'),$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{C}$, et

$$\psi_\varepsilon(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(-\frac{1}{\pi z}\psi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\right).$$

On notera que

$$\psi_\varepsilon - \psi_\delta = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(-\frac{1}{\pi z}\left(\psi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) - \psi\left(\frac{z}{\delta}\right)\right)\right) \in \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\mathcal{D}(\mathbf{C}).$$

Pour $v \in \mathcal{H}(V, \mathcal{D}')$, nous posons

$$u(\varphi) = v(\varphi_\varepsilon), \quad \varphi \in \mathcal{D}(U),$$

où

$$\begin{aligned}
&\varphi_\varepsilon(z_1, \ldots, z_q, x_{q+1}, \ldots, x_n) \\
&\quad = \int_{\mathbf{R}^{q-p}} \varphi(z_1, \ldots, z_p, x'_{p+1}, \ldots, x'_q, x_{q+1}, \ldots, x_n) \\
&\qquad \times \psi_\varepsilon(x'_{p+1} - z_{p+1}) \ldots \psi_\varepsilon(x'_q - z_q)\,dx'_{p+1} \ldots dx'_q,
\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ étant choisi de façon que $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(V)$. Cette définition ne dépend pas de ε, car

$$\varphi_\varepsilon - \varphi_\delta \in \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{p+1}}\mathcal{D}(V) + \ldots + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_q}\mathcal{D}(V)$$

si ε, $\delta > 0$ sont assez petits; donc $v(\varphi_\varepsilon - \varphi_\delta) = 0$; u est évidemment une distribution partiellement holomorphe dans U. Enfin, vu (6.1), il est clair que $u = v|_U$ si v est une fonction partiellement holomorphe. Il est aussi évident que, si $v_j \to v \in \mathcal{H}(V, \mathcal{D}')$ au sens faible par exemple, alors les restrictions des v_j tendent vers la restriction de v.

Désormais, nous noterons $x = (z_1, \ldots, z_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ les coordonnées de F, et $(x, y) = (z_1, \ldots, z_q, x_{q+1}, \ldots, x_n)$ celles de G. Si P est un polynôme tel que $G = \Theta_\Xi(F)$, Ξ étant les zéros de P, tout élément de $\mathcal{H}'(V)$, où $V = \Theta_\Xi(U)$ peut s'écrire, d'après le théorème 4.1, sous la forme $P(-D)\,T + R'(S)$, où $T \in \mathcal{H}'(V)$, $S \in \mathcal{H}'(U)$, et où $R : \mathcal{H}(V) \to \mathcal{H}(U)$ est la restriction, R' son adjointe. En particulier, si $(a, y) \in V$ et $\delta_{(a,y)}$ est la restriction à $\mathcal{H}(V)$ de la mesure de Dirac placée en (a, y), on a

$$\delta_{(a,y)} = P(-D)\,T_{ay} + R'(S_{ay}),$$

S_{ay} et T_{ay} étant des fonctionnelles sur $\mathcal{H}(U)$ et $\mathcal{H}(V)$ respectivement. Soit $\mu_{ay} \in \mathcal{E}'(U)$ un prolongement de S_{ay}. On a

$$v(a, y) = \mu_{ay}(R(v)) \text{ si } v \in \mathcal{H}(V) \text{ et } P(D)\,v = 0,$$

car $P(D)$ peut se réaliser comme un opérateur différentiel dans F, d'où

$$v(x, y) = (\delta_{x-a} \bigstar \mu_{ay})\,(R(v))$$

si x est près de a. En notant par ψ_{ay} la fonction $x \mapsto \psi(a + x, y)$, on aura donc

$$(6.2) \qquad \int_F v(x, y)\,\psi(x, y)\,dx = \int_F v(x, 0)\,(\psi_{ay} \bigstar \mu_{ay})\,(x)\,dx$$

pour toute $\psi \in \mathcal{D}(V)$ à support dans un petit voisinage de (a, y), plus précisément si $\psi_{ay} \bigstar \mu_{ay} \in \mathcal{D}(U)$.

Soit maintenant $u \in \mathcal{H}(U, \mathcal{D}')$ une solution distribution de $P(D)\,u = 0$. Il existe des régularisations $u_j = u \bigstar \varphi_j \in \mathcal{H}(U_j)$ qui tendent vers u fortement dans $\mathcal{D}'(U)$, la suite d'ouverts convexes U_j dans F étant croissante et ayant U comme réunion. Toute fonction u_j se prolonge, d'après le théorème 5.1, en une fonction $v_j \in \mathcal{H}(\Theta_\Xi(U_j))$, et les $\Theta_\Xi(U_j)$ recouvrent $\Theta_\Xi(U)$ grâce à la concavité de l'opération Θ_Ξ. Il suffira donc de montrer que v_j tend faiblement vers une distribution $v \in \mathcal{D}'(\Theta_\Xi(U))$ lorsque $j \to +\infty$, et même que $\int_G v_j(x, y)\,\psi(x, y)\,dx\,dy$ est une suite de Cauchy pour toute $\psi \in \mathcal{D}(\Theta_\Xi(U))$ ayant son support dans un petit voisinage d'un point donné (a, b) de $\Theta_\Xi(U)$. Or, vu (6.2), on a

$$\int_F v_j(x, y)\,\psi(x, y)\,dx = \int_F u_j(x)\,(\psi_{ay} \bigstar \mu_{ay})\,(x)\,dx$$

qui est évidemment une suite de Cauchy pour y fixé, mais aussi une suite de Cauchy uniformément lorsque y varie près de b, ceci grâce au théorème 4.1 qui montre que $\psi_{ay} \bigstar \mu_{ay}$ appartient à un ensemble borné dans $\mathcal{D}(U)$ si y est voisin de b, et grâce au fait que u_j tend vers u uniformément sur les bornés de $\mathcal{D}(U)$. Donc $\int_G v_j(x, y)\,\psi(x, y)\,dx\,dy$ est une suite de Cauchy, sa limite $v \in \mathcal{H}(\Theta_\Xi(U), \mathcal{D}')$ ayant comme restriction u. Nous avons finalement montré le théorème suivant.

THÉORÈME 6.1. — *Le théorème* 5.1 *reste valable si l'on remplace les espaces de fonctions* $\mathcal{H}(U)$, $\mathcal{H}(\Theta_\Xi(U))$ *par les espaces de distributions correspondants* $\mathcal{H}(U, \mathcal{D}')$, $\mathcal{H}(\Theta_\Xi(U), \mathcal{D}')$.

Nous n'aborderons pas ici la question de savoir si $\Theta_\Xi(U)$ est le plus grand convexe relativement ouvert ayant cette propriété.

7. Exemples.

Regardons d'abord le prolongement des fonctions harmoniques. Soit $P(\zeta) = \sum_1^n \zeta_j^2$, $n \geqq 2$. On a pour tout $U \subset \mathbf{R}^n$,

$$\Theta_\Xi(U) = \Gamma_\Xi(U) = \left\{ z \in \mathbf{C}^n ;\ \operatorname{Re}\langle z, \zeta\rangle \leqq H_U(\zeta) \text{ dès que } \sum_1^n \zeta_j^2 = 0 \right\}^i$$
$$= \{ x + iy \in \mathbf{C}^n ;\ \langle x, \xi\rangle - \langle y, \eta\rangle \leqq H_U(\xi) \text{ pour } |\xi| = |\eta|,\ \xi \perp \eta \}^i$$
$$= \{ x + iy \in \mathbf{C}^n ;\ \langle x, \xi\rangle + |y \wedge \xi| \leqq H_U(\xi) \text{ pour tout } \xi \}^i,$$

où $|y \wedge \xi|$ est la norme euclidienne du produit extérieur $y \wedge \xi$, $y, \xi \in \mathbf{R}^n$. Si par exemple U est défini par un nombre fini d'inégalités $\langle x, a_k\rangle < b_k$, $k = 1, \ldots, m$, alors $\Theta_\Xi(U)$ est évidemment défini par

$$\langle x, a_k\rangle + |y \wedge a_k| < b_k \qquad (k = 1, \ldots, m);$$

en particulier l'enveloppe du cube $|x_k| < b_k$, $k = 1, \ldots, n$ est définie par

$$|x_k| + \left(\sum_{j \neq k} y_j^2 \right)^{1/2} < b_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Si d'autre part U est la boule unité dans $\mathbf{R}^n$, nous pouvons choisir une base orthonormale telle que x et y donnés satisfont $x_3 = \ldots = x_n = 0$, $y_2 = \ldots = y_n = 0$, donc $x + iy \in \Theta_\Xi(U)$ si et seulement si

$$|x_1|\xi_1 + |x_2|\xi_2 + |y|(|\xi|^2 - \xi_1^2)^{1/2} < |\xi|, \quad \text{pour tout } \xi \neq 0,$$

ou encore

$$|x_1|\xi_1 + (|x_2| + |y|)(1 - \xi_1^2)^{1/2} < 1 \quad \text{pour tout } \xi_1,\ |\xi_1| \leqq 1.$$

Cela équivaut à $|x_1|^2 + (|x_2| + |y|)^2 < 1$, c'est-à-dire

$$|x + iy|^2 + 2|x_2|.|y| = |x + iy|^2 + 2|x \wedge y| = \langle z, \bar z\rangle^2 + |z \wedge \bar z| < 1.$$

Notons que $\Theta_\Xi(U)$ est contenu dans la boule unité de $\mathbf{C}^n$ et que ces deux ensembles ont même trace sur le cône $z \wedge \bar z = 0$ qui contient $\mathbf{R}^n$.

Si $n = 2$ et $U \subset \mathbf{R}^2$, on a

$$\Theta_\Xi(U) = \{ z \in \mathbf{C}^2 ;\ \operatorname{Re}(z_1 \pm iz_2)\xi_1 - \operatorname{Im}(z_1 \pm iz_2)\eta_1 \leqq H_U(\xi_1, \mp \eta_1)\}^i.$$

Cela signifie que $(z_1, z_2) \in \Theta_\Xi(U)$ si et seulement si

$$z_1 + iz_2 \in U \qquad \text{et} \qquad z_1 - iz_2 \in U^* = \{ x \in \mathbf{R}^2 ;\ (x_1, -x_2) \in U \},$$

$z_1 \pm iz_2$ désignant les points de $\mathbf{R}^2$ qu'on obtient en identifiant $\mathbf{R}^2$ avec $\mathbf{C}$. Ce résultat est naturellement classique, toute u harmonique dans U étant de la forme $u(x_1, x_2) = f(x_1 + ix_2) + g(x_1 - ix_2)$ où f est holomorphe dans U, g dans U^*; le prolongement est donné par $f(z_1 + iz_2) + g(z_1 - iz_2)$.

Considérons maintenant le polynôme non elliptique

$$P(\zeta) = \zeta_n - Q(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$$

où Q est homogène de degré au moins deux ($n \geqq 2$). Si U est un convexe de la forme $U' \times U_n \subset \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C}$ on obtient $\Gamma_{\alpha(\Xi)}(U) = \Gamma_{\Xi'}(U') \times U_n$ où $\alpha(\Xi)$ est l'ensemble des zéros dans $\mathbf{C}^n$ de $Q(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) = 0$, Ξ' sa projection sur $\mathbf{C}^{n-1}$. Si par exemple Q est elliptique, et $U \subset \mathbf{R}^n$, alors $\Gamma_{\alpha(\Xi)}(U)$ est ouvert dans l'hyperplan $y_n = 0$. D'autre part, on a dans ce cas $\Theta_\Xi(U) = \Gamma_{\Xi_1}(U)$ où $\Xi_1 = \alpha(\Xi + G^\perp)$, $G = \Gamma_{\alpha(\Xi)}(\mathbf{R}^n) = \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{R}$. Donc si $U = U' \times U_n \subset \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$,

$$\Theta_\Xi(U) = \Gamma_{\Xi_1}(U) = \Gamma_{\Xi_1'}(U') \times U_n,$$

où $\Xi_1' = \{\zeta' \in \mathbf{C}^{n-1}; \operatorname{Re} Q(\zeta') = 0\}$. Si par exemple $Q(\zeta') = i \sum_1^{n-1} \zeta_j^2$ (équation de Schrödinger), on obtient

$$\Gamma_{\Xi_1'}(U') = \{x' + iy' \in \mathbf{C}^{n-1}; \langle x', \xi' \rangle - \langle y', \eta' \rangle \leqq H_{U'}(\xi') \text{ si } \xi' \perp \eta'\}^i = U'$$

c'est-à-dire aucun prolongement n'est possible. D'autre part, si $Q(\zeta') = \sum_1^{n-1} \zeta_j^2$ (équation de la chaleur), $\Theta_\Xi(U)$ est de même dimension que $\Gamma_{\alpha(\Xi)}(U)$, mais strictement contenu dans cet ensemble; si par exemple U' est la boule unité dans $\mathbf{R}^{n-1}$, on aura

$$\Theta_\Xi(U) = \Gamma_{\Xi_1'}(U') \times U_n = \{x' + iy' \in \mathbf{C}^{n-1}; |x'| + |y'| < 1\} \times U_n,$$

et (d'après l'exemple plus haut) :

$$\Gamma_{\alpha(\Xi)}(U) = \{x' + iy' \in \mathbf{C}^{n-1}; 2|x' \wedge y'| + |x' + iy'|^2 < 1\} \times U_n.$$

Enfin si P est hyperbolique, il faut distinguer deux cas. Si P est un opérateur ordinaire, opérant dans un espace $F \subset \mathbf{R}^n$ de dimension 1, alors $\Theta_\Xi(U) = \Gamma_{\alpha(\Xi)}(U) = U + F + iF$ pour tout ouvert convexe $U \subset \mathbf{R}^n$. Si P n'est pas ordinaire, on montre que sa partie principale n'est pas ordinaire non plus, et que $\Theta_\Xi(U) = \Gamma_{\Xi_1}(U) \cap \mathbf{R}^n$ où Ξ_1 est l'ensemble des directions réelles par rapport auxquelles P n'est pas hyperbolique.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Ehrenpreis (L.). — A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients, and some of its applications, *Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces* [1960, Jerusalem], p. 161-174. Jerusalem, Jerusalem Academic Press, 1961.

[2] Hörmander (L.). — *Linear partial differential operators.* — Berlin, Springer-Verlag, 1963 (*Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 116).

[3] HÖRMANDER (L.). — *An introduction to complex analysis in several variables.* — Princeton, D. Van Nostrand Company, 1966 (*The University Series in Higher Mathematics*).

[4] KISELMAN (C. O.). — Existence and approximation theorems for solutions of complex analogues of boundary problems, *Ark. för Mat.*, Stockholm, t. 6, 1965, p. 198-207.

[5] MALGRANGE (B.). — Sur les systèmes différentiels à coefficients constants, *Colloques internationaux du C.N.R.S. : Les équations aux dérivées partielles* [117, 1963, Paris], p. 113-122. — Paris, Centre national de la Recherche Scientifique, 1963.

[6] PALAMODOV (V. P.). — *Opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants* [en russe]. — Moscou, 1967.

[7] SCHAPIRA (P.). — Équations aux dérivées partielles dans l'espace des hyperfonctions, *Séminaire Lelong*, 8e année, 1967-1968, nº 4, 8 p. — Berlin, Springer-Verlag, 1968 (*Lecture Notes in Mathematics*, 71).

[8] ZERNER (M.). — Domaines d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles, *Séminaire de mathématiques de la Faculté des Sciences de Nice*, 1967-1968.

(Texte reçu le 11 février 1969.)

Christer O. KISELMAN,
Rörstrandsgatan 13,
S-113 40 Stockholm (Suède).