Bulletin de la S. M. F.

M.-P. Malliavin

Condition (a_q) de Samuel et q-torsion

Bulletin de la S. M. F., tome 96 (1968), p. 193-196
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1968__96__193_0>

Bull. Soc. math. France,
96, 1968, p. 193 à 196.

CONDITION (a_q) DE SAMUEL ET q-TORSION

PAR

MARIE-PAULE MALLIAVIN.

Tous les anneaux considérés sont supposés commutatifs, noethériens, et possèdent un élément unité; tous les modules sont unitaires et de type fini.

Si M est un A-module, on notera prof (M) sa profondeur (ou codimension homologique), dhM sa dimension homologique. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, on notera $ht(\mathfrak{p})$ sa hauteur et prof$(\mathfrak{p})$ sa profondeur (ou grade), i. e. la longueur d'une A-suite maximale formée d'éléments de $\mathfrak{p}$.

PROPOSITION 1. — *Soient A un anneau, M un A-module. On suppose que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, de profondeur ≤ 1, l'anneau $A_\mathfrak{p}$ est régulier et que, si $a \in A$, n'est pas diviseur de zéro dans A, il n'est pas diviseur de zéro dans M. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*

(i) *Le module M est réflexif;*

(ii) *On a* $M = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P(A)} M_\mathfrak{p}$ [où $P(A)$ désigne l'ensemble des idéaux premiers de A de profondeur 1 et où M et les $M_\mathfrak{p}$ sont considérés comme plongés dans le S-module semi-simple $S \otimes_A M$, en notant par S l'anneau total des fractions de A];

(iii) *Toute A-suite à deux éléments est une M-suite.*

Sous les hypothèses précédentes, l'anneau A est normal (critère de normalité de Serre), et l'application canonique $M \to S \otimes_A M$ est injective. La démonstration est la même que dans le cas d'un anneau intègre [4].

On a aussi (*cf.* prop. 6 de [4]) :

PROPOSITION 2. — *Si A est un anneau local, M un A-module et q un entier ≥ 0, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i)$_q$ *On a* prof$(M_\mathfrak{p}) \geq$ Inf$(q$, prof $(\mathfrak{p}))$, *pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A;*

(ii)$_q$ *Toute A-suite de longueur $\leq q$ est une M-suite.*

Nous désignerons sous le nom de *condition* (a_q) chacune des conditions (i)$_q$ et (ii)$_q$.

Un module M est un $r^{\text{ième}}$ *module de syzygies*, s'il existe une suite exacte :

$$0 \to M \to P_0 \to P_1 \to \ldots \to P_{r-1}$$

dans laquelle les P_i sont projectifs (*cf.* § 8 de [1]); en fait, nous appelons ici $r^{\text{ième}}$ module de syzygies, ce que H. Bass désigne sous le nom de $(r-1)^{\text{ième}}$ module de syzygies.

Si l'anneau de base A est local, si q est un entier $\geqq 1$ et si M est un $q^{\text{ième}}$ module de syzygies, alors M vérifie la condition (a_q); on procède par récurrence sur q en remarquant que si, dans une suite exacte :

$$0 \to M \to F \to N \to 0,$$

le module F est libre et le module N vérifie (a_{q-1}), alors M vérifie (a_q).

En imposant à l'anneau A des conditions supplémentaires, la remarque précédente admet une réciproque :

Proposition 3. — *Soient M un module sur un anneau local de Macaulay A et q un entier $\geqq 1$. On suppose que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A dont la profondeur est $\leqq q-1$, le localisé $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau régulier. Alors, s'il vérifie la condition (a_q), le module M est un $q^{\text{ième}}$ module de syzygies.*

Démonstration. — Pour $q \geqq 1$, la condition imposée à A entraîne que c'est un anneau réduit; soit S son anneau total des fractions. Si M vérifie (a_1), l'application canonique $M \to S \otimes_A M$ est injective. Puisque $S \otimes_A M$ est un module semi-simple sur l'anneau semi-simple S, il est projectif, donc facteur direct d'un S-module libre. Une base convenable de ce dernier engendre un A-module libre dans lequel M est plongé. Supposons $q \geqq 2$, et la proposition démontrée pour $q-1$; d'après la proposition 1, le module M est réflexif. Considérons une suite exacte :

$$(1) \qquad 0 \to U \to F_0 \to M^* \to 0,$$

dans laquelle F_0 est libre et M^* désigne le dual de M. On en déduit la suite exacte :

$$(2) \qquad 0 \to M \to F_0^* \to U^* \to \operatorname{Ext}^1_A(M^*, A) \to 0.$$

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Si $\operatorname{prof}(\mathfrak{p}) \leqq q-1$, alors, d'après l'hypothèse faite sur A, on a : $\operatorname{prof}(\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{p})$; puisque M vérifie (a_q), on a $\operatorname{prof}(M_{\mathfrak{p}}) \geqq ht(\mathfrak{p})$; donc, nécessairement, $\operatorname{prof}(M_{\mathfrak{p}}) = ht(\mathfrak{p})$; et, puisque $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier, $dh_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$ est nul, et $M_{\mathfrak{p}}$ est libre. Par suite, $M_{\mathfrak{p}}^*$ est libre; d'où, en localisant en $\mathfrak{p}$ la suite (1), $U_{\mathfrak{p}}$ est libre. Donc $U_{\mathfrak{p}}^*$ est libre, et $\operatorname{Ext}^1_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}^*, A_{\mathfrak{p}}) = 0$. Dans la suite exacte :

$$(3) \qquad 0 \to M \to L_0 \to V \to 0,$$

où $L_0 = F_0^*$ et où $V = \operatorname{Im}(F_0^* \to U^*)$, on a que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A de profondeur $\leqq q-1$, $V_{\mathfrak{p}} = U_{\mathfrak{p}}^*$ est un module libre; donc, pour un tel idéal, l'inégalité $\operatorname{prof}(V_{\mathfrak{p}}) \geqq \inf(q-1, \operatorname{prof}(\mathfrak{p}))$ est vérifiée. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de A de profondeur $\geqq q$, et supposons que $\operatorname{prof}(V_{\mathfrak{q}}) < \inf(q-1, \operatorname{prof}(\mathfrak{q})) = q-1$; de la suite exacte (3) localisée en $\mathfrak{q}$, il résulte, puisque $\operatorname{prof}(V_{\mathfrak{q}}) < \operatorname{prof}(L_{\mathfrak{q}})$, l'égalité :

$$\operatorname{prof}(M_{\mathfrak{q}}) = 1 + \operatorname{prof}(V_{\mathfrak{q}}) < q,$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur M. Par conséquent, on a toujours $\operatorname{prof}(V_{\mathfrak{q}}) \geqq \inf(q-1, \operatorname{prof}(\mathfrak{q}))$, et le module V vérifie la condition (a_{q-1}); d'après l'hypothèse de récurrence, V est un $(q-1)^{\text{ième}}$ module de syzygies et, d'après la suite (3), M est un $q^{\text{ième}}$ module de syzygies.

Soient M un A-module, et $F_1 \to F_0 \to M \to 0$ une suite exacte où les F_i sont des modules projectifs; on démontre que le conoyau de la flèche $F_0^* \to F_1^*$ ne dépend que de M, et on le note $D(M)$; M. Auslander (*cf.* [5]) appelle *i-torsion de M*, le module $\operatorname{Ext}_A^i(D(M), A)$. Dans l'étude, faite dans [5], de l'annulation de la i-torsion d'un module, on démontre le résultat suivant :

Proposition 4. — *Si q est un entier $\geqq 1$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La k-torsion de M est nulle pour $1 \leqq k \leqq q$;*

(ii) *Il existe une suite exacte :*

$$0 \to M \to F_0 \to F_1 \to \ldots \to F_{q-1},$$

dans laquelle les F_i sont libres, telle que la suite :

$$F_{q-1}^* \to \ldots \to F_1^* \to F_0^* \to M^* \to 0$$

soit exacte.

Si les conditions équivalentes de la proposition 4 sont vérifiées, on dit que M est *sans q-torsion*. Alors, M est évidemment un $q^{\text{ième}}$ module de syzygies. Dans le cas où l'anneau de base est un anneau de Gorenstein, la remarque précédente admet une réciproque. On utilisera le résultat suivant (théor. 8-2 de [1]).

Théorème. — *Soit A un anneau de Gorenstein. Si r est un entier $\geqq 2$, un A-module M est un $r^{\text{ième}}$ module de syzygies si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

1° *Le module M est réflexif;*

2° *$r-1$ est au plus égal au plus petit entier $s \geqq 1$ tel que $\operatorname{Ext}_A^s(M^*, A) \neq 0$.*

Proposition 5. — *Soient A un anneau de Gorenstein, M un A-module et q un entier $\geqq 1$. Si M est un $q^{\text{ième}}$ module de syzygies, alors M est sans q-torsion.*

Preuve. — Un premier module de syzygies est sans 1-torsion et ceci sans hypothèse sur A. Si q est $\geqq 2$, le module M est, d'après le théorème, réflexif, et l'on a $\mathrm{Ext}^i_A(M^*, A) = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, q-2$. Donc $\mathrm{Ext}^i_A(D(M), A) = 0$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots, q$.

Si X est une variété sur un corps k, on notera $\mathrm{Diff}(k, X)$ le faisceau des k-différentielles de X.

PROPOSITION 6. — *Soient X une variété sur un corps parfait k, x un point de X. On suppose que localement en x, $\mathcal{O}_X$ est une intersection complétée. Soit q un entier ≥ 0. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *Localement en x, la variété X est régulière en codimension $\leq q$;*

2° *Localement en x, le faisceau* $\mathrm{Diff}(k, X)$ *est sans q-torsion;*

3° *Le* $(\mathcal{O}_X)_x$*-module* $(\mathrm{Diff}(k, X))_x$ *vérifie la condition* (a_q).

Démonstration. — Soit $R = (\mathcal{O}_X)_x$; alors R est un anneau local réduit et un localisé d'une k-algèbre de type fini. On identifie $(\mathrm{Diff}(k, X))_x$ au R-module des différentielles de R sur k, soit $\mathrm{Diff}(k, R)$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de R, alors $R_\mathfrak{p}$ est régulier si et seulement si le $R_\mathfrak{p}$-module $\mathrm{Diff}(k, R_\mathfrak{p}) = (\mathrm{Diff}(k, R))_\mathfrak{p}$ est libre (critère jacobien de simplicité, applicable, puisque k est parfait). De plus, R est une intersection complète (i. e. un quotient d'un anneau régulier par une suite régulière); par conséquent, la dimension homologique de $\mathrm{Diff}(k, R)$ sur R est ≤ 1, et l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de R en lesquels $R_\mathfrak{p}$ n'est pas régulier est le support du module $D(\mathrm{Diff}(k, R))$ (*cf.* [3]). Puisque $dh_R(\mathrm{Diff}(k, R)) \leq 1$, on a ici :

$$D(\mathrm{Diff}(k, R)) = \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Diff}(k, R), R).$$

La proposition en résulte.

Si, dans la proposition précédente, on prend $q \geq 3$, alors l'anneau $(\mathcal{O}_X)_x$ est factoriel [2] donc, localement en x, toute sous-k-variété de X de codimension 1 est une intersection complète.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BASS (Hyman). — On the ubiquity of Gorenstein rings, *Math. Z.*, t. 82, 1963, p. 8-28.

[2] GIRAUD (Jean). — Groupe de Picard, anneaux factoriels, *Séminaire Bourbaki*, 15e année, 1962-1963, n° 248, 13 pages.

[3] LIPMAN (Joseph). — Free derivation modules on algebraic varieties, *Amer. J. of Math.*, t. 87, 1965, p. 874-898.

[4] SAMUEL (Pierre). — Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs, *Bull. Soc. math. France*, t. 92, 1964, p. 237-249.

[5] Séminaire SAMUEL, 1966-1967. Algèbre commutative : *Anneaux de Gorenstein, et torsion en algèbre commutative.* — Paris, Secrétariat mathématique, 1967.

(Manuscrit reçu le 24 février 1968.)

Mme Marie-Paule MALLIAVIN,
Maître de Conférences
à la Faculté des Sciences de Caen,
252, rue de Rivoli,
75-Paris, 1er.