BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS ARIBAUD

Une nouvelle démonstration d'un théorème de R. Bott et B. Kostant

Bulletin de la S. M. F., tome 95 (1967), p. 205-242
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1967__95__205_0>

Bull. Soc. math. France,
95, 1967, p. 205 à 242.

UNE NOUVELLE DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE R. BOTT ET B. KOSTANT

PAR

FRANÇOIS ARIBAUD (*).

A la fin d'une étude consacrée à la cohomologie des fibrés homogènes, R. BOTT [3] a donné une expression remarquable de la dimension des espaces de cohomologie $H^i(\mathfrak{m}, M(\lambda))$, où $\mathfrak{m}$ est le radical nilpotent d'une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$, et $M(\lambda)$ le $\mathfrak{g}$-module simple de poids dominant λ. B. KOSTANT [12] a retrouvé par voie algébrique les résultats précédents, et il les a étendus au cas où $\mathfrak{m}$ est le radical nilpotent d'une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$. Il en a déduit l'expression de la décomposition, dans l'anneau des représentations $\mathcal{R}(\mathfrak{s})$ de la composante réductive $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{p}$, de la représentation de $\mathfrak{s}$ dans $M(\lambda)$ induite par la représentation de $\mathfrak{g}$, énoncé qui généralise la formule de H. Weyl. Nous nous proposons dans ce qui suit de montrer que la démarche précédente peut être inversée : un simple jeu d'écriture permet d'obtenir la formule de H. Weyl généralisée à partir de la formule classique; et lorsqu'on dispose de cette dernière, les démonstrations données par KOSTANT peuvent être grandement simplifiées.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma profonde reconnaissance à M. le Professeur CHEVALLEY qui m'a guidé tout au long de ce travail, et qui y a apporté de nombreuses améliorations. Je tiens également à remercier vivement M. le Professeur BRUHAT et M. le Professeur VAROPOULOS qui m'ont fait l'honneur de se joindre à lui pour constituer mon jury de thèse.

Les nombres entre crochets renvoient aux articles cités à la fin du présent travail. Les références aux *Éléments de Mathématique* de

(*) Cet article constitue la partie principale de la Thèse de Doctorat ès Sciences mathématiques soutenue le 17 mai 1967 auprès de la Faculté des Sciences de Paris.

N. Bourbaki sont faites sous la forme usuelle. Les références aux notes du « Séminaire Sophus Lie » seront précédées du sigle SL et du numéro de l'exposé.

1. L'anneau des représentations d'une algèbre de Lie.

On désigne par K un corps commutatif. Toutes les algèbres de Lie et tous les modules considérés admettent K comme corps de base, et sont de dimension finie sur K.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, on désignera par $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ la catégorie abélienne des $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie sur K, par $K(\mathfrak{g})$ le groupe de Grothendieck de $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$. Tout $\mathfrak{g}$-module de dimension finie sur K étant de longueur finie, il résulte du théorème de Jordan-Hölder que $K(\mathfrak{g})$ est *le groupe abélien libre engendré par l'ensemble des classes de* $\mathfrak{g}$ *modules simples de* dimension finie sur K (*cf.* Bourbaki [5], *Alg.*, chap. 8, § 3, n° 2). En particulier, si $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ des $\mathfrak{g}$-modules semi-simples, l'injection canonique de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ induit un isomorphisme de $K(\mathcal{S}(g))$ sur $K(\mathfrak{g})$.

Si M est un $\mathfrak{g}$*-module, on appellera* $\mathfrak{g}$*-caractère de* M, et l'on notera $\mathrm{ch}_{\mathfrak{g}} M$, *la classe de M dans* $K(\mathfrak{g})$.

Le groupe $K(\mathfrak{g})$ *est un foncteur contravariant en* $\mathfrak{g}$: soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux algèbres de Lie, et soit p un homomorphisme de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Si M est un $\mathfrak{g}$-module, on définira un $\mathfrak{h}$-module M_p en prenant pour espace vectoriel sous-jacent à M_p l'espace vectoriel V sous-jacent à M, et en faisant opérer $\mathfrak{h}$ sur V par $h \bigstar m = p(h)m$. Si p est l'injection canonique d'une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$, le $\mathfrak{h}$-module M_p est le $\mathfrak{h}$*-module induit*. Si M et N sont deux $\mathfrak{g}$-modules, et si φ est un homomorphisme du $\mathfrak{g}$-module M dans le $\mathfrak{g}$-module N, l'application φ peut visiblement s'interpréter comme un homomorphisme du $\mathfrak{h}$-module M_p dans le $\mathfrak{h}$-module N_p. L'opération, qui à M associe M_p, est exacte puisqu'elle conserve les espaces sous-jacents, et l'on a ainsi un foncteur covariant exact de $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{C}(\mathfrak{h})$ qui définit un homomorphisme $p_!$ de $K(\mathfrak{g})$ dans $K(\mathfrak{h})$. Il est évident que $id_! = id$, et que, si $\mathfrak{l}$ est une troisième algèbre de Lie et q un homomorphisme de $\mathfrak{l}$ dans $\mathfrak{h}$, on a $(p \circ q)_! = q_! \circ p_!$. Lorsque p est l'injection canonique d'une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$, on dit que $p_!$ est *l'homomorphisme de restriction* de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{h}$, et l'on écrit $\mathrm{Res}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ au lieu de $p_!$. Ces homomorphismes de restriction joueront un grand rôle dans ce qui suit.

Lemme 1. — *Si* $\mathfrak{n}$ *est le radical nilpotent de l'algèbre* $\mathfrak{g}$, *la projection p de* $\mathfrak{g}$ *sur* $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ *induit un isomorphisme $p_!$ de* $K(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})$ *sur* $K(\mathfrak{g})$.

On va construire un homomorphisme inverse de $K(\mathfrak{g})$ sur $K(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})$; il suffira de se donner les images des classes des $\mathfrak{g}$-modules simples. Si M est un $\mathfrak{g}$-module simple, il est annulé par les opérations de $\mathfrak{n}$, par définition même de $\mathfrak{n}$ (BOURBAKI [6], *Alg. de Lie*, chap. 1, § 5, n° 3), et la représentation de $\mathfrak{g}$ dans M passe donc à $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$.

Q. E. D.

Ce lemme est particulièrement utile en caractéristique o, l'algèbre $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ étant alors réductive.

Si M et N sont deux $\mathfrak{g}$-modules, on définit, sur leur produit tensoriel sur K, une structure de $\mathfrak{g}$-module, la « structure diagonale » de l'algèbre homologique, en posant

$$g(m \otimes n) = (gm) \otimes n + m \otimes (gn), \qquad \text{avec} \quad g \in \mathfrak{g}, \quad m \in M \quad \text{et} \quad n \in N.$$

Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules, et si N est un autre $\mathfrak{g}$-module, la suite $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ est encore exacte. L'opération définie sur $\mathcal{C}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{C}(\mathfrak{g})$, à valeurs dans $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$, qui associe $M \otimes_K N$ à (M, N) est « biadditive », et elle définit une application bilinéaire de $K(\mathfrak{g}) \times K(\mathfrak{g})$ dans $K(\mathfrak{g})$.

LEMME 2. — *L'application bilinéaire précédente de $K(\mathfrak{g}) \times K(\mathfrak{g})$ dans $K(\mathfrak{g})$ est un produit pour lequel $K(\mathfrak{g})$ est un anneau commutatif unitaire, l'unité étant la classe du module trivial.*

Les isomorphismes naturels entre espaces vectoriels $M \otimes N$ et $N \otimes M$, $(M \otimes N) \otimes P$ et $M \otimes (N \otimes P)$, sont compatibles avec les $\mathfrak{g}$-structures correspondantes; on a donc

$$\mathrm{ch}_{\mathfrak{g}}(M \otimes N) = \mathrm{ch}_{\mathfrak{g}}(N \otimes M)$$

et

$$\mathrm{ch}_{\mathfrak{g}}(M \otimes (N \otimes P)) = \mathrm{ch}_{\mathfrak{g}}((M \otimes N) \otimes P),$$

ce qui établit la commutativité et l'associativité de ce produit. Enfin l'isomorphisme canonique de $M \otimes_K K$ sur M est compatible avec les $\mathfrak{g}$-structures.

Q. E. D.

L'anneau ainsi obtenu est appelé *l'anneau de Grothendieck ou l'anneau des représentations de* $\mathfrak{g}$; on le notera $K(\mathfrak{g})$ ou $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$. La structure d'anneau de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ peut être renforcée :

DÉFINITION 1. — *Soit A un anneau commutatif unitaire. On appelle λ-structure sur A la donnée d'un homomorphisme λ_t du groupe additif de A dans le groupe multiplicatif $1 + A[[t]]^+$ des séries formelles d'augmentation 1 à coefficients dans A satisfaisant à $\lambda_t(x) = 1 + xt + \ldots$.*

Un couple (A, λ_t), constitué d'un anneau A et d'une λ-structure sur A, est appelé un λ-anneau (*cf.* [1] et [10]). Si (A, λ_t) est un λ-anneau, on notera $\lambda^i(x)$ le coefficient de t^i dans $\lambda_t(x)$; ainsi $\lambda^0(x) = 1$ et $\lambda^1(x) = x$.

DEUX EXEMPLES DE λ ANNEAUX.

(i) *L'anneau* $\mathbf{Z}$ *des entiers rationnels.* — On fait de $\mathbf{Z}$ un λ-anneau en posant $\lambda_t(1) = 1 + t$, soit $\lambda_t(n) = (1+t)^n$ ou $\lambda^i(n) = \binom{n}{i}$, coefficient binomial. Cette λ-structure sera appelée *la λ-structure canonique.*

(ii) *L'anneau* $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ *des représentations d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$. — Soit M un $\mathfrak{g}$-module. Sur chaque puissance extérieure $\Lambda^i M$ de M sur le corps de base K, on définit une $\mathfrak{g}$-structure en posant (« prolongement des dérivations »)

$$g(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_i) = \sum_j x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge gx_j \wedge \ldots \wedge x_i.$$

Si M et N sont deux $\mathfrak{g}$-modules, l'isomorphisme naturel entre espaces vectoriels

$$\Lambda^i(M \otimes N) = \sum_{r+s=i} (\Lambda^r M) \otimes (\Lambda^s N)$$

se prolonge en un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules, ce qui donne

$$\mathrm{ch}_{\mathfrak{g}}\, \Lambda^i(M \otimes N) = \sum_{r+s=i} \mathrm{ch}_{\mathfrak{g}}(\Lambda^r M)\, \mathrm{ch}_{\mathfrak{g}}(\Lambda^s N).$$

Si $\lambda_t(M)$ est la série formelle d'augmentation 1 de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$

$$1 + \mathrm{ch}_{\mathfrak{g}}(M)t + \ldots + \mathrm{ch}_{\mathfrak{g}}(\Lambda^i M)t^i + \ldots,$$

l'opération qui associe $\lambda_t(M)$ à M est une opération additive de la catégorie $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ des $\mathfrak{g}$-modules semi-simples à valeurs dans le groupe multiplicatif des séries formelles d'augmentation 1 sur $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$, qui passe donc au groupe de Grothendieck $K(\mathcal{S}(\mathfrak{g})) = \mathcal{R}(\mathfrak{g})$ de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$. La λ-structure ainsi obtenue sera dite *canonique.*

DÉFINITION 2. — *Soient* (A, λ_t) *et* (B, μ_t) *deux λ-anneaux. On appelle homomorphisme du λ-anneau* (A, λ_t) *dans le λ-anneau* (B, μ_t) *un homomorphisme f de l'anneau A dans l'anneau B tel que le diagramme (où f_t désigne le prolongement canonique de f à $A[[t]]$)*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda_t} & 1 + A[[t]]^+ \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_t} \\ B & \xrightarrow{\mu_t} & 1 + B[[t]]^+ \end{array}$$

soit commutatif.

Lorsque (B, μ_t) est le λ-anneau $\mathbf{Z}$ muni de sa λ-structure canonique, on dit que f est une augmentation de (A, λ_t) ou que (A, λ_t, f) est un

λ-anneau augmenté. Si (A, λ_t, f) et (B, μ_t, g) sont deux λ-anneaux augmentés, un homomorphisme du premier dans le second est un homomorphisme φ du λ-anneau (A, λ_t) dans le λ-anneau (B, μ_t) tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & \mathbf{Z} & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

LEMME 3. — *L'opération qui à tout module sur une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *associe sa dimension sur le corps de base* K *définit une augmentation du* λ*-anneau des représentations de* $\mathfrak{g}$.

C'est immédiat, vu que $\dim_K(\Lambda^i M) = \binom{\dim M}{i}$.

PROPOSITION 1. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{h}$ *deux algèbres de Lie, et soit* p *un homomorphisme de* $\mathfrak{h}$ *dans* $\mathfrak{g}$. *L'homomorphisme* $p_!$ *du groupe* $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ *dans le groupe* $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ *est compatible avec les structures de* λ*-anneaux augmentés dont on vient de munir ces groupes.*

La proposition découle aussitôt du fait que M et M_p ont même espace vectoriel sous-jacent.

COROLLAIRE. — *Si* $\mathfrak{n}$ *est le radical nilpotent de l'algèbre* $\mathfrak{g}$, *la projection canonique de* $\mathfrak{g}$ *sur* $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ *induit un isomorphisme du* λ*-anneau augmenté* $\mathcal{R}(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})$ *sur le* λ*-anneau augmenté* $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$. *Si l'extension* $0 \to \mathfrak{n} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{n} \to 0$ *est inessentielle, et si* $\mathfrak{s}$ *est un relèvement de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ *dans* $\mathfrak{g}$, *l'homomorphisme de restriction* $\operatorname{Res}(\mathfrak{g}, \mathfrak{s})$ *est un isomorphisme qui, une fois identifiés* $\mathcal{R}(\mathfrak{s})$ *et* $\mathcal{R}(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})$, *est l'isomorphisme inverse de* $p_!$.

Pour obtenir la première partie de ce corollaire, il suffit d'utiliser le lemme 1 et la proposition 1. D'autre part, si M est un $\mathfrak{g}$-module simple, et si $s \in \mathfrak{s}$, l'endomorphisme s_M de M coïncide avec l'endomorphisme défini par la classe de s dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. D'où la seconde partie du corollaire.

Q. E. D.

A titre d'exemple considérons l'anneau des représentations d'une algèbre résoluble $\mathfrak{b}$ sur un corps K de caractéristique 0 algébriquement clos. Le corollaire de la proposition 1 et le théorème de Lie (BOURBAKI [6], *Alg. de Lie*, chap. 1, § 5, n° 3, théorème 1) montrent que l'anneau des représentations $\mathcal{R}(\mathfrak{b})$ est isomorphe à l'anneau des représentations de l'algèbre abélienne $\mathfrak{h} = \mathfrak{b}/\mathcal{D}\mathfrak{b}$. Comme K est algébriquement clos, les représentations simples de l'algèbre abélienne $\mathfrak{h}$ sont de dimension 1 (*Ibid.*, § 5, n° 3, corollaire 2 du théorème 1). Réciproquement, toute représentation de $\mathfrak{h}$, qui est de dimension 1, est simple, et une telle représentation est caractérisée, à un isomorphisme près, par une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$, appelée son *poids*, la forme linéaire α telle que $hx = \alpha(h)x$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$ et tout élément x de l'espace de la représentation. Comme toute forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ est poids d'une représentation de $\mathfrak{h}$, le groupe $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) \simeq \mathcal{R}(\mathfrak{b})$ est isomorphe au groupe abélien libre $\mathbf{Z}[h^*]$ engendré par les éléments du dual sur K de l'espace vectoriel $\mathfrak{h}$.

Soit M_λ (resp. N_μ) un $\mathfrak{h}$-module simple de poids λ (resp. de poids μ). Le module $M_\lambda \otimes N_\mu$ est un $\mathfrak{h}$-module simple, puisqu'il est de dimension 1 ; il est donc caractérisé à un isomorphisme près par son poids; comme pour tous $h \in \mathfrak{h}$, $x \in M$ et $y \in N$, on a

$$h(x \otimes y) = h(x) \otimes y + x \otimes h(y) \qquad \text{et} \qquad h(x \otimes y) = (\lambda(h) + \mu(h))x \otimes y,$$

le poids du $\mathfrak{h}$-module simple $M_\lambda \otimes N_\mu$ est égal à $\lambda + \mu$. La structure d'anneau sur $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ coïncide avec la structure d'anneau sur l'algèbre $\mathbf{Z}[\mathfrak{h}^*]$ du groupe $\mathfrak{h}^*$.

Sur l'algèbre d'un groupe commutatif G, on définira une λ-structure, dite *canonique*, en posant, pour l'élément e_g de la base canonique de $\mathbf{Z}[G]$ qui correspond à l'élément g de G,

$$\lambda_t(e_g) = 1 + e_g t \qquad \text{et} \qquad \operatorname{aug}(e_g) = 1.$$

La proposition suivante est alors immédiate :

Proposition 2. — *Soit $\mathfrak{b}$ une algèbre résoluble sur un corps commutatif de caractéristique 0 algébriquement clos K. L'anneau des représentations de $\mathfrak{b}$ est isomorphe à l'algèbre du groupe $(\mathfrak{b}/\mathcal{D}\mathfrak{b})^*$ munie de sa λ-structure canonique, l'isomorphisme étant défini en attachant à tout $\mathfrak{b}$ module simple son poids.*

Signalons, pour terminer ce paragraphe, le résultat suivant :

Lemme 4. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps commutatif K quelconque, et soient M et N deux $\mathfrak{g}$-modules semi-simples. Si $\operatorname{ch}_{\mathfrak{g}} M = \operatorname{ch}_{\mathfrak{g}} N$, les modules M et N sont isomorphes.*

Car, pour toute classe ω de $\mathfrak{g}$-modules simples, les composants isotypiques de type ω de M et de N ont même longueur (*cf.* Bourbaki [5], *Alg.*, chap. 8, § 3, n° 5).

Q. E. D.

2. La formule de H. Weyl et B. Kostant.

A partir de maintenant, K désigne un corps commutatif de caractéristique 0 algébriquement clos.

Nous supposerons connue la théorie des représentations linéaires des algèbres réductives, renvoyant si besoin était au Séminaire « Sophus Lie » [13] ou aux chapitres du Traité de N. Bourbaki concernant les systèmes de racines [7] et les algèbres de Lie semi-simples [8] (ou encore à [11]). Nous nous bornerons à fixer la terminologie et les notations.

La définition usuelle des systèmes de racines n'est pas assez générale pour traiter des algèbres réductives. Suivant BOREL-TITS [2], nous appellerons *système de racines dans le couple* (V, Z), constitué d'un espace vectoriel V sur K et d'un sous-espace Z, un sous-ensemble R de V possédant les propriétés suivantes :

(i) Le sous-espace U de V, engendré par R, est un supplémentaire de Z dans V;

(ii) L'ensemble R est un système de racines, au sens usuel, dans U.

Si $Z = 0$, on dira que R est *un système de racines dans* V; c'est un système de racines au sens usuel. On prolongera tout automorphisme de U en un automorphisme de V en le prenant égal à l'automorphisme identique sur Z. Le groupe de Weyl $W(R)$ sera, par définition, *le groupe d'automorphismes de* V *engendré par les réflexions de* R, considéré comme systèmes de racines dans U, *prolongées à* V. Le sous-espace Z de V est invariant par les opérations de $W(R)$.

La décomposition en somme directe $V = U \oplus Z$ permet de réaliser U^* et Z^* comme des sous-espaces de V^*. Le système R^*, inverse de R dans U^*, peut alors s'interpréter comme un système de racines dans (V^*, Z^*). On désignera comme d'habitude par H_α l'élément de R^* qui correspond à la racine α de R. *Le groupe des poids* $P(R)$ sera l'ensemble des éléments λ de V tels que $\langle \lambda, H_\alpha \rangle$ soit un entier rationnel pour tous les H_α de R^*. Tous les éléments de Z sont ainsi des poids. On choisira, une fois pour toutes, une relation d'ordre total $<$ sur R. On désignera alors par $P^+(R)$ le sous-ensemble de $P(R)$ des λ, tels que $\langle \lambda, H_\alpha \rangle \geqq 0$ pour toute racine α positive. Les éléments de $P^+(R)$ seront appelés les poids dominants pour la relation d'ordre $<$ considérée. Tout élément de Z est un poids dominant.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre réductive sur K. La décomposition canonique de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \times \mathcal{D}\mathfrak{g}$, où $\mathfrak{z}$ est le centre de $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$, induit une décomposition $\mathfrak{h} = \mathfrak{z} \times \mathfrak{k}$ de toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{z}$ et en une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{k}$ de $\mathcal{D}\mathfrak{g}$. Cette décomposition permet de réaliser $\mathfrak{z}^*$ et $\mathfrak{k}^*$ comme des sous-espaces de $\mathfrak{h}^*$. L'ensemble des poids non nuls de la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ induite par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est un système de racines dans $(\mathfrak{h}^*, \mathfrak{z}^*)$, qu'on notera $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On désignera de même par $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ [resp. par $P(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$] le groupe de Weyl (resp. le groupe des poids) associé à $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Il existe sur $\mathfrak{g}$ des formes bilinéaires symétriques invariantes et non dégénérées qui induisent, sur le sous-espace rationnel engendré par les racines H_α du système inverse de $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, une forme bilinéaire définie positive; on peut prendre par exemple la forme produit d'une forme bilinéaire non dégénérée sur le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ et de la forme de Killing sur $\mathcal{D}\mathfrak{g}$. Nous dirons qu'une telle forme est *définie positive sur* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

A chaque racine α de $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ correspond un sous-espace $\mathfrak{g}^\alpha$ de dimension 1 de $\mathfrak{g}$, qui est le sous-espace des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $[h, x] = \alpha(h)x$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$. Si S est un ensemble de racines, on posera

$$\mathfrak{h}(S) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in S} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Pour que $\mathfrak{h}(S)$ soit une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, il faut et il suffit que S soit clos; réciproquement, toute sous-algèbre $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{h}$ est de la forme $\mathfrak{h}(S)$, où S est l'ensemble des poids non nuls de la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{a}$ induite par la représentation adjointe de $\mathfrak{a}$. En particulier, les chambres de Weyl de $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sont en correspondance biunivoque avec les sous-algèbres résolubles maximales, ou *sous-algèbres de Borel*, de $\mathfrak{g}$ qui contiennent $\mathfrak{h}$. Le choix d'une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$ équivaut donc au choix d'un ordre total sur $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Nous fixerons une fois pour toutes une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$, et nous désignerons par $P^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ l'ensemble des poids dominants correspondant à l'ordre défini sur $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ par le choix de $\mathfrak{b}$.

Le radical nilpotent $\mathfrak{m}$ de l'algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ coïncide avec l'algèbre dérivée $\mathscr{D}\mathfrak{b}$, et $\mathfrak{m} = \mathscr{D}\mathfrak{b} = \bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}^\alpha$. Comme $\mathfrak{b}/\mathscr{D}\mathfrak{b}$ est isomorphe à $\mathfrak{h}$, les formes linéaires sur $\mathfrak{h}$ peuvent s'interpréter comme des formes linéaires sur $\mathfrak{b}$ s'annulant sur $\mathscr{D}\mathfrak{b}$, et les racines ne sont alors rien d'autre que les poids non nuls des quotients simples de la représentation de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ induite par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ (*cf.* la fin du paragraphe 1). D'ailleurs, dans la théorie générale des représentations linéaires de $\mathfrak{g}$ le rôle fondamental est joué par $\mathfrak{b}$, la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ n'intervenant que comme un auxiliaire technique.

Si M est un $\mathfrak{g}$-module, on peut considérer la représentation de la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ dans M, induite par la représentation de $\mathfrak{g}$, et s'intéresser en particulier aux sous-$\mathfrak{b}$-modules simples de M; ce sont des sous-espaces de dimension 1, caractérisés par un générateur e, qui est un élément non nul de M, et par un poids λ, qui est une forme linéaire sur $\mathfrak{b}$ s'annulant sur $\mathscr{D}\mathfrak{b}$; pour tout $b \in \mathfrak{b}$, on a $be = \lambda(b)e$; on dira qu'un tel élément e de M est *un élément* $\mathfrak{b}$-*primitif de M de poids* λ. Si M est un $\mathfrak{g}$-module simple, les éléments $\mathfrak{b}$-primitifs de M ont tous le même poids λ, et ils engendrent un sous-espace vectoriel de dimension 1 de M. Le poids λ est un élément de $P(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, qui est un poids dominant pour l'ordre défini par $\mathfrak{b}$. Les poids des quotients simples de la représentation induite de $\mathfrak{b}$ dans M sont de la forme λ-γ, où γ est un poids radiciel positif, i. e. un poids combinaison linéaire à coefficients entiers $\geqq 0$ de racines positives. On dit alors que le $\mathfrak{g}$-module simple M est *un* $\mathfrak{g}$-*module simple de poids dominant* λ. Tout élément de $P^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est poids dominant d'un $\mathfrak{g}$-module simple, et deux $\mathfrak{g}$-modules simples qui ont même poids dominant sont isomorphes. On emploiera la notation générale $M(\lambda)$ pour désigner un $\mathfrak{g}$-module simple de poids dominant λ. On désignera également par $M(\lambda)$ la classe des $\mathfrak{g}$-modules simples de poids dominant λ dans $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$.

Les résultats généraux de la théorie des représentations linéaires des algèbres réductives montrent que l'homomorphisme de restriction $\operatorname{Res}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$ de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ à $\mathcal{R}(\mathfrak{b})$ est injectif. Le groupe de Weyl $W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ opère sur $\mathfrak{h}^*$, et il conserve le sous-groupe des poids $P(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Les opérations de W sur $P(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ se prolongent de façon naturelle à l'algèbre $\mathbf{Z}[P(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})]$ du groupe $P(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Si, au moyen de la proposition 2, on identifie $\mathcal{R}(\mathfrak{b})$ à $\mathbf{Z}[\mathfrak{h}^*]$, et $\mathbf{Z}[P(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})]$ à un sous-anneau de $\mathbf{Z}[\mathfrak{h}^*]$, l'image de $\operatorname{Res}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$ est la sous-algèbre $\mathbf{Z}[P(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})]^W$ des éléments de $\mathbf{Z}[P(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})]$ qui sont invariants par l'action de W. La formule de H. Weyl permet d'expliciter $\operatorname{Res}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$, en donnant les images des éléments $M(\lambda)$ de la base canonique de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$:

Si ρ désigne la demi-somme des racines positives et si $\exp \lambda$ est l'élément de la base canonique de $\mathbf{Z}[h^*]$ associé à $\lambda \in h^*$

$$\operatorname{Res}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})(M(\lambda)) = \frac{\sum_{s \in W} \det(s) \exp s(\lambda + \rho)}{\sum_{s \in W} \det(s) \exp s\rho}.$$

Cette présentation de la formule de H. Weyl est celle qui est adoptée dans [8]. Comme une représentation simple de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est entièrement déterminée à un isomorphisme près par le caractère de l'algèbre enveloppante qu'elle définit (*cf.* SL [13], exp. 18, n° 2), l'expression précédente de $\operatorname{Res}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})(M(\lambda))$ se déduit aussitôt de la formule (7) de SL [13], exp. 19, n° 3, en utilisant l'interprétation des « exponentielles » comme caractères de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{h}$, donnée au même numéro.

Puisque $\operatorname{Res}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$ est injectif, tous les homomorphismes de restriction $\operatorname{Res}(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})$, où $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{b}$, sont injectifs. Le but de ce paragraphe est d'expliciter $\operatorname{Res}(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})(M(\lambda))$ dans $\mathcal{R}(\mathfrak{p})$, sous une forme qui généralise la formule de H. Weyl.

DÉFINITION 3. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre réductive et* $\mathfrak{b}$ *une sous-algèbre de Borel de* $\mathfrak{g}$. *On appelle sous-algèbres* $\mathfrak{b}$*-paraboliques de* $\mathfrak{g}$ *les sous-alqèbres de* $\mathfrak{g}$ *qui contiennent* $\mathfrak{b}$.

On a, pour les algèbres paraboliques, « le théorème de décomposition » suivant :

PROPOSITION 3. — *Soit* $\mathfrak{p}$ *une sous-algèbre* $\mathfrak{b}$*-parabolique de* $\mathfrak{g}$, *et soit* S *l'ensemble clos de racines tel que* $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}(S)$. *Le sous-espace* $\mathfrak{s} = \mathfrak{h}(S \cap -S)$

de $\mathfrak{g}$ *est une sous-algèbre réductive dans* $\mathfrak{g}$, *le radical nilpotent* $\mathfrak{n}$ *de* $\mathfrak{p}$ *admet la représentation*

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{S-(S\cap -S)} \mathfrak{g}^{\alpha},$$

et $\mathfrak{p}$ *est somme directe de* $\mathfrak{s}$ *et de* $\mathfrak{n}$.

L'ensemble S étant clos, il en est de même de l'ensemble $S\cap -S$, et $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

(i) La sous-algèbre $\mathfrak{s}$ est réductive (*cf.* [8], § 3, nº 6, prop. 3).

Soit B une forme bilinéaire symétrique invariante et non dégénérée sur $\mathfrak{g}$, associée à une représentation de $\mathfrak{g}$. Comme la restriction de B à $\mathfrak{s}$ est associée à la représentation induite de $\mathfrak{s}$, il suffira de montrer que la restriction de B à $\mathfrak{s}$ est non dégénérée (*cf.* Bourbaki [6], *Alg. de Lie*, chap. 1, § 6, nº 4).

Si $h\in\mathfrak{h}$, et si x et $y\in\mathfrak{g}$, on a $B([h, x], y) + B(x, [h, y]) = 0$; en particulier, si $x\in\mathfrak{g}^{\alpha}$ et $y\in\mathfrak{g}^{\beta}$ (resp. si $x\in\mathfrak{h}$ et $y\in\mathfrak{g}^{\beta}$), on a $(\alpha+\beta)(h)\,B(x, y) = 0$ pour tout $h\in\mathfrak{h}$, et $B(x, y) = 0$ si $\alpha+\beta\neq 0$ [resp. on a $\alpha(h)\,B(x, y) = 0$ pour tout $h\in\mathfrak{h}$, et $B(x, y) = 0$]. On en déduit que B met en dualité $\mathfrak{h}$ avec elle-même (resp. $\mathfrak{g}^{\alpha}$ avec $\mathfrak{g}^{-\alpha}$) et que $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}^{\beta}$ sont orthogonaux (resp. que $\mathfrak{g}^{\alpha}$ et $\mathfrak{g}^{\beta}$ sont orthogonaux si $\alpha+\beta\neq 0$). Comme $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{s}$, et comme $S\cap -S$ est un ensemble symétrique de racines, la restriction de B à $\mathfrak{s}$ est non dégénérée.

(ii) La sous-algèbre $\mathfrak{s}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$.

Si $X_{\alpha}\in\mathfrak{g}^{\alpha}$ et $X_{-\alpha}\in\mathfrak{g}^{-\alpha}$ sont deux éléments non nuls de $\mathfrak{s}$, on a $[X_{\alpha}, X_{-\alpha}]\neq 0$. Le centre de $\mathfrak{s}$ est donc contenu dans $\mathfrak{h}$, et il suffit alors de remarquer que tous les éléments de $\mathfrak{h}$ sont semi-simples dans $\mathfrak{g}$.

(iii) Le sous-espace $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{p}$.

On a d'abord $[\mathfrak{s}, \mathfrak{n}]\subset\mathfrak{n}$. Soient s et t deux éléments de $\mathfrak{s}$, et soit n un élément de $\mathfrak{n}$. Si B désigne toujours la forme bilinéaire introduite en (i), on a $B[(s, n], t) + B(n, [s, t]) = 0$. Comme $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}^{\alpha}$ sont orthogonaux, ainsi que $\mathfrak{g}^{\alpha}$ et $\mathfrak{g}^{\beta}$ pour $\alpha+\beta\neq 0$, les sous-espaces $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{n}$ sont orthogonaux, et $\mathfrak{n}$ est le sous-espace de $\mathfrak{p}$ orthogonal à $\mathfrak{s}$. Comme $[s, t]\in\mathfrak{s}$, on a $B(n, [s, t]) = 0$, et, pour tout $t\in\mathfrak{s}$, $B([s, n], t) = 0$. L'élément $[s, n]$ de $\mathfrak{p}$ est orthogonal à $\mathfrak{s}$, et il est donc contenu dans $\mathfrak{n}$.

D'autre part, $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]\subset\mathfrak{n}$. Soient α et β deux racines de $S-(S\cap -S)$ telles que $\alpha+\beta$ soit une racine. Comme $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, on a $\alpha+\beta\in S$. Si $\alpha+\beta\in S\cap -S$, on a également $-(\alpha+\beta)\in S$; comme S est clos, il en résulte que $-\alpha = -(\alpha+\beta)+\beta$ est contenue dans S; on voit de même que $-\beta\in S$, et que $\alpha = (\alpha+\beta)-\beta\in S$. Par conséquent, $\alpha\in S\cap -S$, ce qui est contraire à l'hypothèse $\alpha\in S-(S\cap -S)$.

(iv) L'idéal $\mathfrak{n}$ est le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$.

Comme $\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$, isomorphe à $\mathfrak{s}$, est réductive, l'idéal $\mathfrak{n}$ contient le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$ (*cf.* Bourbaki [6], *Alg. de Lie*, chap. 1, § 6, n° 4), corollaire de la proposition 6). Comme $\mathfrak{n}$ est une sous-algèbre de l'algèbre nilpotente $\mathfrak{m} = \mathcal{D}\mathfrak{b}$, l'idéal $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{p}$ est résoluble, et il est contenu dans le radical $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{p}$. Si $\alpha \in S - (S \cap - S)$, et si X_α est un élément non nul de g^α, on a, pour tout $h \in \mathfrak{h}$, $[h, X_\alpha] = \alpha(h) X_\alpha$, d'où il résulte que $\mathfrak{n} \subset \mathcal{D}\mathfrak{p}$. L'idéal $\mathfrak{n}$ est donc contenu dans l'intersection du radical $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{p}$ et de $\mathcal{D}\mathfrak{p}$, intersection qui n'est autre, d'après le théorème de Lie (Bourbaki [6], *Alg. de Lie*, chap. 1, § 5, th. 1), que le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$. Et, comme $\mathfrak{n}$ contient de radical nilpotent, l'idéal $\mathfrak{n}$ est le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$.

Q. E. D.

Corollaire. — *Les notations étant celles de la proposition* 3, *l'homomorphisme de restriction* $\mathrm{Res}(\mathfrak{p}, \mathfrak{s})$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{R}(\mathfrak{p})$ *sur* $\mathcal{R}(\mathfrak{s})$.

La sous-algèbre $\mathfrak{s}$, qui dépend évidemment du choix de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, est appelée *la sous-algèbre de dévissage de* $\mathfrak{p}$.

Lemme 5. — *Les notations étant toujours celles de la proposition* 3, *la sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *est également une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{s}$.

Comme $\mathfrak{h}$ est abélienne et réductive dans $\mathfrak{g}$, et donc dans $\mathfrak{s}$, il suffit de vérifier que $\mathfrak{h}$ est le sous-espace des invariants de la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{s}$ induite par la représentation adjointe de $\mathfrak{s}$ (*cf.* la définition des sous-algèbres de Cartan d'une algèbre de Lie donnée dans le Séminaire « Sophus Lie » [13], exp. 9, n° 2, déf. 1). Ce qui est évident sur la décomposition

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in S \cap - S} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Q. E. D.

On introduira le système de racines $R(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})$, le groupe de Weyl $W(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})$, et le groupe des poids $P(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})$. Comme $R(\mathfrak{s}, \mathfrak{h}) = S \cap - S$ est un sous-ensemble de $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, on identifiera $W(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})$ à un sous-groupe de $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Il sera commode d'utiliser les notations suivantes : on désignera par R (resp. par W, resp. par P) le système de racines $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ [resp. le groupe de Weyl $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, resp. le groupe des poids $P(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$], par r (resp. par w, resp. par p) le système de racines $R(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})$ [resp. le groupe de Weyl $W(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})$, resp. le groupe des poids $P(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})$]. On munira, d'autre part, r de l'ordre induit par l'ordre de R, et l'on désignera par p^+ l'ensemble des poids dominants de $(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})$ qui correspond à la donnée de r^+. Enfin $m(\mu)$ désignera indifféremment un $\mathfrak{s}$-module simple de poids dominant μ ou la classe dans l'anneau des représentations $\mathcal{R}(\mathfrak{s})$ des $\mathfrak{s}$-modules simples de poids dominant μ.

On notera $S(\mathfrak{n})$ l'ensemble de racines $S-(S\cap -S)$, i. e. l'ensemble de racines Φ tel que $\mathfrak{n}=\bigoplus_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{g}^\alpha$.

LEMME 6. — *La demi-somme* ν *des racines de* $S(\mathfrak{n})$ *est invariante par tout élément de* $w=W(\mathfrak{s},\mathfrak{h})$. *En particulier, si* B *est une forme bilinéaire sur* $\mathfrak{h}$ *symétrique, invariante par* w, *et non dégénérée, l'élément* ν *est orthogonal pour* B *à toutes les racines de* r.

Comme $\mathfrak{n}$ est un $\mathfrak{s}$-module pour la représentation $(s, n)\to[s, n]$, l'ensemble $S(\mathfrak{n})$ des poids de ce $\mathfrak{s}$-module est stable par les opérations de w, et tout $\sigma\in w$ définit une permutation de $S(\mathfrak{n})$. On a donc $\sigma(\nu)=\nu$ pour tout $\sigma\in w$. Si α est une racine de r et s_α la réfléxion correspondante, on a $s_\alpha(\nu)=\nu-2(\nu,\alpha)/(\alpha,\alpha)\,\alpha$; or $s_\alpha(\nu)=\nu$, et $(\nu,\alpha)=0$.

Q. E. D.

Nous allons maintenant décomposer W en classes à droite suivant w. Nous aurons besoin pour cela de quelques lemmes préliminaires.

LEMME 7. — *Posons, pour tout* $s\in W$, $\Phi(s)=sR^-\cap R^+$. *L'application, qui, à* s, *associe* $\Phi(s)$ *est une bijection de* W *sur la famille des sous-ensembles* F *de* R^+ *qui satisfont à la condition suivante : l'ensemble* F *et son complémentaire* R^+-F *dans* R^+ *sont clos.*

Démonstration communiquée par C. CHEVALLEY :

Il est d'abord évident que, quel que soit $s\in W$, les ensembles $s(R^-)\cap R^+$ et $s(R^+)\cap R^+$ sont clos, disjoints, et de réunion R^+.

Soit maintenant F un ensemble clos de racines de R^+ tel que son complémentaire R^+-F dans R^+ soit également clos. Considérons l'ensemble $\sum$ des racines φ telles que $\varphi\in R^+-F$ ou $-\varphi\in F$. Comme F et R^+-F sont des sous-ensembles de R^+, on a

$$F\cap -F=\emptyset \qquad \text{et} \qquad (R^+-F)\cap(-(R^+-F))=\emptyset.$$

Comme, d'autre part, $(R^+-F)\cap(-(-F))=(R^+-F)\cap F=\emptyset$, on a finalement $\sum\cap-\sum=\emptyset$. Puisque $\sum\cup-\sum$ est un ensemble symétrique de racines qui contient $R^+=(R^+-F)\cup F$, il coïncide avec R.

Enfin, on va voir que $\sum$ est clos. Une racine, qui est somme de deux racines de R^+-F (resp. de $-F$), est une racine de R^+-F (resp. de $-F$), les ensembles R^+-F et $-F$ étant clos. On peut donc se limiter à la situation suivante : on considère une racine α de R^+-F, une racine β de $-F$, telles que $\alpha+\beta$ soit une racine, et il s'agit de voir qu'on a

$$\alpha+\beta\in\sum=(R^+-F)\cup(-F).$$

Comme l'ensemble des racines est totalement ordonné, on a, soit $\alpha+\beta>0$, soit $\alpha+\beta<0$. Supposons d'abord $\alpha+\beta>0$, et posons $\gamma=\alpha+\beta$; comme $(R^+-F)\cup F$ est une partition de R^+, on a, soit $\gamma\in F$, soit $\gamma\in R^+-F$; si $\gamma\in F$, la racine $\alpha=\gamma-\beta$ appartient à F, puisque $-\beta\in F$, et que F est clos, ce qui contredit la définition de α. Si maintenant $\alpha+\beta<0$, on posera $\alpha+\beta=-\delta$; la racine δ, qui est >0, appartient, soit à F, soit à R^+-F; mais le cas $\delta\in R^+-F$ est impossible, car $-\beta=\alpha+\delta$, et les relations $\alpha\in R^+-F$ et $\delta\in R^+-F$ entraîneraient $-\beta\in R^+-F$, l'ensemble R^+-F étant clos.

L'ensemble $\sum$ est ainsi l'ensemble des racines d'une chambre de Weyl. Comme le groupe de Weyl opère de façon simplement transitive sur les chambres de Weyl, il existe un $s\in W$ unique tel que $s(R^+)=\sum$. On a alors $s(R^-)=-s(R^+)=-\sum$, et

$$-\sum\cap R^+=((-(R^+-F))\cup F)\cap R^+=F.$$

Q. E. D.

Rappelons qu'une racine de R^+ (resp. de r^+) est *simple* si elle n'est pas la somme de deux racines de R^+ (resp. de r^+).

LEMME 8. — *Pour qu'une racine de r^+ soit simple, il faut et il suffit qu'elle soit simple dans R^+.*

Une racine qui est simple dans R^+ l'est évidemment aussi dans r^+. Considérons maintenant une racine α qui serait simple dans r^+, mais qui ne serait pas simple dans R^+. Il existerait deux racines β et γ de R^+ telles que $\alpha=\beta+\gamma$. Comme α est simple dans r^+, l'une de ces racines, par exemple γ, serait dans $S(\mathfrak{n})$. Mais, comme $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{p}$, on aurait alors

$$\alpha=\beta+\gamma\in S(\mathfrak{n}).$$

Q. E. D.

LEMME 9. — *Pour tout $s\in W$, il y a équivalence entre :*

(i) $\Phi(s)=sR^-\cap R^+\subset S(\mathfrak{n})$;

(ii) $s^{-1}r^+\subset R^+$ *et*

(iii) $sP^+\subset p^+$.

De plus, si λ est un poids de P tel que $\lambda(H_i)>0$ pour toutes les racines simples H_i du système inverse de R, et si $s\in W$ vérifie l'une des trois conditions équivalentes précédentes, on a $s\lambda(h_i)>0$ pour toutes les racines simples h_i du système inverse de r.

Commençons par montrer que (i) entraîne (ii). Comme $sR^-\cap R^+\subset S(\mathfrak{n})$, et comme $(sR^-\cap R^+)\cup(sR^+\cap R^+)$ est une partition de R^+, le sous-ensemble r^+ de R^+ est contenu dans $(sR^+ \cap R^+)$; or $s^{-1}(sR^+ \cap R^+) \subset R^+$. D'autre part, (ii) implique (i). Supposons, en effet, qu'il existe une racine α de R^- telle que $s\alpha \in r^+$; alors $\alpha \in s^{-1} r^+$, et $s^{-1} r^+ \not\subset R^+$.

Pour montrer que (ii) et (iii) sont équivalentes, on introduira une forme bilinéaire B sur $\mathfrak{h}^*$, symétrique invariante par W, non dégénérée, et définie positive sur le sous-espace rationnel de $\mathfrak{h}^*$ engendré par les racines; on peut prendre par exemple l'inverse de la restriction à $\mathfrak{h}$ d'une forme définie positive sur $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Pour tout $\lambda \in P$ (resp. toute $\varphi \in r$), il y a équivalence entre $\lambda \in P^+$ et $B(\lambda, \alpha) \geqq 0$ pour toute $\alpha \in R^+$ [resp. équivalence entre $\varphi \in r^+$ et $B(\mu, \varphi) \geqq 0$ pour tout $\mu \in p^+$].

Montrons d'abord que (ii) entraîne (iii). Soit λ un poids dominant de P. Pour toute $\alpha \in R^+$, $B(\lambda, \alpha) \geqq 0$; en particulier, pour $\varphi \in r^+$, $B(\lambda, s^{-1}\varphi) \geqq 0$, et comme B est invariante par W, on a

$$B(s\lambda, \varphi) = B(\lambda, s^{-1}\varphi) \geqq 0$$

pour toute $\varphi \in r^+$, et $s\lambda \in p^+$.

Enfin, (iii) implique (ii). Soit $\varphi \in r^+$; on a $B(\mu, \varphi) \geqq 0$ pour tout $\mu \in p^+$, et en particulier pour $\mu = s\lambda$ avec $\lambda \in P^+$. Pour tout $\lambda \in P^+$, on a donc

$$B(\lambda, s^{-1}\varphi) = B(s\lambda, \varphi) \geqq 0,$$

ce qui équivaut à $s^{-1}\varphi \in R^+$.

Pour toute racine $\varphi \in R$ et tout poids $\lambda \in P$,

$$s\lambda(H_\varphi) = 2(s\lambda, \varphi)/(\varphi, \varphi) = 2(\lambda, s^{-1}\varphi)/(s^{-1}\varphi, s^{-1}\varphi).$$

Si $\varphi \in r^+$, et si s vérifie la condition (ii), la racine $s^{-1}\varphi$ est une racine positive de R, qui peut donc s'exprimer comme une combinaison linéaire à coefficients entiers $\geqq 0$ non tous nuls de racines simples de R^+. On en déduit aussitôt la remarque finale.

Q. E. D.

On désignera par $W(\mathfrak{n})$ *l'ensemble des* $s \in W$ *tels que*

$$\Phi(s) = sR^- \cap R^+ \subset S(\mathfrak{n}).$$

La décomposition cherchée de W en classes suivant w est alors donnée par la proposition suivante :

Proposition 4. — *Les notations étant toujours les mêmes, tout* $t \in W$ *admet une décomposition unique* $t = sn$, *où* $s \in w$ *et* $n \in W(\mathfrak{n})$.

Établissons d'abord l'existence d'une telle décomposition. Posons $F_1 = tR^- \cap r^+$; le complémentaire de F_1 dans r^+ est $F_2 = tR^+ \cap r^+$, et F_1 et F_2 sont clos. Le lemme 7 appliqué au système de racines r montre qu'il existe un $s \in w$ tel que $F_1 = sr^- \cap r^+$; on posera $n = s^{-1}t$. De $tR^- \cap r^+ = sr^- \cap r^+$, on tire d'abord

$$nR^- \cap s^{-1}r^+ = r^- \cap s^{-1}r^+ \qquad \text{et} \qquad nR^- \cap (s^{-1}r^+ \cap r^+) \subset r^+ \cap r^- = \emptyset.$$

Comme $(s^{-1}r^+ \cap r^+) \cup (s^{-1}r^- \cap r^+)$ est une partition de r^+, on a

$$nR^- \cap r^+ = nR^- \cap (s^{-1}r^- \cap r^+);$$

mais

$$\begin{aligned}(s^{-1}r^- \cap r^+) &= -s^{-1}(sr^- \cap r^+)\\ &= -s^{-1}(tR^- \cap r^+),\end{aligned}$$

et

$$nR^- \cap r^+ = nR^- \cap (-s^{-1}(tR^- \cap r^+)) \subset nR^- \cap (-nR^-) = \emptyset.$$

Comme $nR^- \cap R^+$ ne rencontre pas r^+, on a $nR^- \cap R^+ \subset S(\mathfrak{n})$, et $n \in W(\mathfrak{n})$.

Considérons une décomposition $t = sn$ de $t \in W(\mathfrak{n})$ en un $s \in W$ et en un $n \in W(\mathfrak{n})$. Puisque $tn^{-1} = s \in w$, on a $tn^{-1}(r^+) \subset r$. Comme, d'autre part, n appartient à $W(\mathfrak{n})$, le lemme 9 montre que $n^{-1}(r^+)$ est contenu dans R^+, et que $tn^{-1}(r^+) \subset t(R^+)$; or

$$tR^+ = (tR^+ \cap R^+) \cup (tR^+ \cap R^-)$$

et

$$tR^+ \cap R^- = -(tR^- \cap R^+) \subset -S(\mathfrak{n}),$$

puisque t appartient à $W(\mathfrak{n})$. On a ainsi

$$(tR^+ \cap R^-) \cap r = \emptyset \qquad \text{et} \qquad s(r^+) \subset tn^{-1}(r^+) \subset R^+.$$

Comme on a déjà $s(r^+) \subset r$, il vient finalement $sr^+ \subset r \cap R^+ = r^+$, et l'élément s de w, qui laisse invariant r^+, est égal à l'identité; autrement dit, $t = n$.

Si maintenant $sn = s'n'$ sont deux décompositions d'un même élément de W, on a $n = s^{-1}s'n'$; comme $s^{-1}s' \in w$, il résulte de ce qui précède que $s = s'$ et $n = n'$. La décomposition est donc unique.

Q. E. D.

On dispose maintenant de tous les éléments nécessaires pour expliciter $\mathrm{Res}(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})(M(\lambda))$ dans $\mathcal{R}(\mathfrak{p}) \simeq \mathcal{R}(\mathfrak{s})$.

THÉORÈME 1 (H. WEYL et B. KOSTANT). — *Considérons une algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}$, une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ définie par la donnée d'un ordre sur $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, une sous-algèbre $\mathfrak{b}$-parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$, de radical nilpotent $\mathfrak{n}$ et de sous-algèbre de dévissage $\mathfrak{s}$. Si ρ est la demi-somme des racines positives de R, le poids $s(\lambda + \rho) - \rho$ est un poids dominant de $\mathfrak{s}$, pour l'ordre de $r = R(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})$ induit par l'ordre de R, quel que soit le poids dominant λ de $P(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et l'élément s de $W(\mathfrak{n})$. Et dans l'anneau $\mathcal{R}(\mathfrak{p}) \simeq \mathcal{R}(\mathfrak{s})$,*

$$\mathrm{Res}(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})(M(\lambda)) = \frac{\sum_{s \in W(\mathfrak{n})} \det(s)\, m(s(\lambda + \rho) - \rho)}{\sum_{s \in W(\mathfrak{n})} \det(s)\, m(s\rho - \rho)}.$$

Rappelons que $m(\mu)$ désigne la classe dans $\mathcal{R}(\mathfrak{p}) \simeq \mathcal{R}(\mathfrak{s})$ des $\mathfrak{s}$- ou $\mathfrak{p}$-modules simples de poids dominant μ.

Si λ est un poids dominant de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ on a $\lambda(H_i) \geqq 0$ pour toutes les racines simples H_i du système inverse de R; comme d'autre part, $\lambda(H_i) = 1$ pour tout i (*cf.* SL [13], exp. 19, n° 1, lemme 2), on a $(\lambda + \rho)(H_i) > 0$ pour tout i. Le lemme 9 montre alors que, pour tout $s \in W(\mathfrak{n})$ et pour toutes les racines simples h_j du système inverse de r, $s(\lambda + \rho)(h_j) > 0$; comme, d'après le lemme 8, les h_j sont aussi des racines simples du système inverse de R, on a $\rho(h_j) = 1$ pour tout j, et $(s(\lambda + \rho) - \rho)(h_j) \geqq 0$ pour tout j, puisque $s(\lambda + \rho)(h_j)$ est un entier.

Comme $\operatorname{Res}(\mathfrak{p}, \mathfrak{b})$, qui s'identifie à $\operatorname{Res}(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})$, est injectif, il suffira, pour établir la formule de H. Weyl et B. Kostant, de prendre les restrictions de $\mathfrak{p}$ à $\mathfrak{b}$ des deux membres et de vérifier qu'il y a égalité. Comme $\operatorname{Res}(\mathfrak{p}, \mathfrak{b}) \operatorname{Res}(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}) = \operatorname{Res}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$, la formule de H. Weyl classique montre que

$$\operatorname{Res}(\mathfrak{p}, \mathfrak{b}) \operatorname{Res}(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}) (M(\lambda)) = \frac{\sum_{s \in W} \det(s) \exp s(\lambda + \rho)}{\sum_{s \in W} \det(s) \exp s\rho}.$$

Appliquée à l'algèbre réductive $\mathfrak{s}$, cette même formule de H. Weyl donne, si l'on désigne par π la demi-somme des racines positives de r,

$$\operatorname{Res}(\mathfrak{p}, \mathfrak{b}) (m(s(\lambda + \rho) - \rho)) = \frac{\sum_{t \in w} \det(t) \exp t(s(\lambda + \rho) - \rho + \pi)}{\sum_{t \in w} \det(t) \exp t\pi}.$$

L'élément $\nu = \rho - \pi$, qui est la somme des racines de $S(\mathfrak{n})$, est invariant par les opérations de w, d'après le lemme 6. Comme

$$\exp t(s(\lambda + \rho) - \rho + \pi) = \exp ts(\lambda + \rho) \exp(-\nu),$$

on a

$$\frac{\sum_{t \in w} \det(t) \exp t(s(\lambda + \rho) - \rho + \pi)}{\sum_{t \in w} \det(t) \exp t\pi} = \frac{\sum_{t \in w} \det(t) \exp ts(\lambda + \rho)}{\sum_{t \in w} \det(t) \exp t\pi} \exp(-\nu)$$

$$= \frac{\sum_{t \in w} \det(t) \exp ts(\lambda + \rho)}{\sum_{t \in w} \det(t) \exp t\rho},$$

et

$$\sum_{s\in W(n)} \det(s)\operatorname{Res}(\mathfrak{p},\mathfrak{b})(m(s(\lambda+\rho)-\rho)) = \sum_{s\in W(n)} \frac{\sum_{t\in w}\det(ts)\exp ts(\lambda+\rho)}{\sum_{t\in w}\det(t)\exp t\rho}.$$

Mais, d'après la proposition 4, tout élément u de W admet une décomposition unique $u=ts$ en un élément $t\in w$ et en un élément $s\in W(\mathfrak{n})$. Par suite,

$$\sum_{s\in W(\mathfrak{n})} \det(s)\operatorname{Res}(\mathfrak{p},\mathfrak{b})(m(s(\lambda+\rho)-\rho)) = \frac{\sum_{s\in W}\det(s)\exp s(\lambda+\rho)}{\sum_{t\in w}\det(t)\exp t\rho};$$

de même,

$$\sum_{s\in W(\mathfrak{n})} \det(s)\operatorname{Res}(\mathfrak{p},\mathfrak{b})(m(s\rho-\rho)) = \frac{\sum_{s\in W}\det(s)\exp s\rho}{\sum_{t\in w}\det(t)\exp t\rho}.$$

Finalement,

$$\frac{\sum_{s\in W(\mathfrak{n})} \det(s)\operatorname{Res}(\mathfrak{p},\mathfrak{b})(m(s(\lambda+\rho)-\rho))}{\sum_{s\in W(\mathfrak{n})} \det(s)\operatorname{Res}(\mathfrak{p},\mathfrak{b})(m(s\rho-\rho))} = \frac{\sum_{s\in W}\det(s)\exp s(\lambda+\rho)}{\sum_{s\in W}\det(s)\exp s\rho}$$
$$= \operatorname{Res}(\mathfrak{p},\mathfrak{b})\operatorname{Res}(\mathfrak{g},\mathfrak{p})(M(\lambda)),$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Q. E. D.

3. Le théorème de Riemann-Roch pour les algèbres de Lie.

Pour les généralités concernant la cohomologie des algèbres de Lie, nous renvoyons à Cartan-Eilenberg chap. 13. Nous nous bornerons à indiquer les notations utilisées et à rappeler les démonstrations de deux lemmes bien connus, mais pour lesquels il n'a pas été possible de donner de références précises.

Dans tout ce paragraphe, K est un corps commutatif de caractéristique quelconque, non nécessairement algébriquement clos. Si $\mathfrak{l}$ est une algèbre de Lie sur K, et M un $\mathfrak{l}$-module, on notera $C^*(\mathfrak{l}, M)$ le complexe des cochaînes alternées sur $\mathfrak{l}$ à valeurs dans M, et $d_{\mathfrak{l}}^*$ le cobord de $C^*(\mathfrak{l}, M)$.

La représentation adjointe de $\mathfrak{l}$ définit de façon canonique une représentation de $\mathfrak{l}$ dans $\mathrm{Hom}_K(\Lambda\mathfrak{l}, K)$ qui sera notée ad^*. La représentation de $\mathfrak{l}$ dans

$$C^*(\mathfrak{l}, M) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda\mathfrak{l}, M) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda\mathfrak{l}, K) \otimes_K M$$

produit tensoriel de la représentation ad^* et de la représentation de $\mathfrak{l}$ dans M sera désignée par θ^*. Enfin, pour tout $x \in \mathfrak{l}$, $i_M(x)$, ou simplement $i(x)$ lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, sera l'endomorphisme linéaire de degré -1 de $C^*(\mathfrak{l}, M)$ qui à $f \in C^n(\mathfrak{l}, M)$ associe $i(x)f$ définie par $i(x)f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

LEMME 10. — *Dans le complexe* $C^*(\mathfrak{l}, M)$, $\theta^*(x) = i(x)\,d^* + d^*\,i(x)$. *En particulier, on a* $\theta^*(x)\,d^* = d^*\,\theta^*(x)$.

Si f est une cochaîne de degré p de $C^*(\mathfrak{l}, M)$, la cochaîne df est définie par

$$\begin{aligned} df(x_1, \ldots, x_{p+1}) = & \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{p+1}) \\ & + \sum_i (-1)^{i+1} (x_i)_M f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{p+1}). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & i(x)\,df(x_1, \ldots, x_p) \\ & = \sum (-1)^j f([x, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_p) \\ & \quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_p) \\ & \quad + xf(x_1, \ldots, x_p) + \sum_i (-1)^i x_i f(x, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_p) \\ & = \sum_j f(x_1, x_2, \ldots, [x, x_j], \ldots, x_p) + xf(x_1, \ldots, x_p) \\ & \quad - \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f(x, [x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_p) \\ & \quad - \sum_i (-1)^{i+1} x_i f(x, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_p) \\ & = \theta^*(x)\,f(x_1, \ldots, x_p) - d(i(x)f)(x_1, \ldots, x_p). \end{aligned}$$

Q. E. D.

Soit maintenant B une forme bilinéaire symétrique invariante non dégénérée sur $\mathfrak{l}$. La forme B met $\mathfrak{l}$ en dualité avec elle-même, et à B est associé un élément du centre de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{l})$ de $\mathfrak{l}$: soit (e_i)

une base de $\mathfrak{l}$, et soit (e'_i) la base duale pour B : l'élément $c = \sum e_i e'_i$ ne dépend que de B, et non de la base (e_i); on l'appelle *l'élément de Casimir* associé à B (*cf.* BOURBAKI [6], *Alg. de Lie*, chap. 1, § 3, n° 7). Si M est un $\mathfrak{l}$ module, l'élément c définit un endomorphisme c_M de M qui est compatible avec la $\mathfrak{l}$-structure. On notera Γ_M l'endomorphisme $1 \otimes c_M$ de $C^*(\mathfrak{l}, M) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda \mathfrak{l}, K) \otimes_K M$.

LEMME 11. — *Les notations étant celles de l'alinéa précédent, soit* γ *l'endomorphisme de degré* -1 *de* $C^*(\mathfrak{l}, M)$ *défini par*

$$(\gamma f)(x_1, \ldots, x_{p-1}) = \sum e_i f(e'_i, x_1, \ldots, x_{p-1}).$$

Alors $\Gamma_M = d^*\gamma + \gamma d^*$ et $\Gamma_M d^* = d^* \Gamma_M$.

La seconde assertion est une conséquence évidente de la première. Soit f une cochaîne de degré n. On a

$$df(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1}) + \sum_i (-1)^{i+1} x_i f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})$$

et

$$\begin{aligned}(\gamma\, df)(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{j,k} (-1)^j e_k f([e'_k, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n) \\ &+ \sum_{i<j;\,k} (-1)^{i+j} e_k f([x_i, x_j], e'_k, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n) \\ &+ \sum_k e_k e'_k f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i,k} (-1)^i e_k x_i f(e'_k, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

De même,

$$d(\gamma f)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i<j;\,k} (-1)^{i+j} e_k f(e'_k, [x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n) + \sum_{i,k} (-1)^{i+1} x_i e_k f(e'_k, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}(\gamma\, df + d\gamma f)(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_k e_k e'_k f(x_1, \ldots, x_n) \\ &+ \sum_{k,j} (-1)^j e_k f([e'_k, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n) \\ &+ \sum_{k,j} (-1)^j [e_k, x_j] f(e'_k, x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Posons $[e_k, x] = \sum_m a_{km}(x)\, e_m$. On a $a_{km}(x) = B([e_k, x], e'_m)$, et, comme B est invariante, $a_{km}(x) = -B(e_k, [e'_m, x])$; d'où il résulte que

$$[e'_k, x] = -\sum_m a_{mk}(x)\, e'_m.$$

On a ainsi, pour tout i,

$$\begin{aligned}
&\sum_k [e_k, x_i]\, f(e'_k, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) \\
&= \sum_{k,m} a_{km}(x_i)\, e_m\, f(e'_k, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) \\
&= \sum_{k,m} e_m\, f(a_{km}(x_i)\, e'_k, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) \\
&= -\sum_m e_m\, f([e'_m, x_i], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

L'expression de $(\gamma\, df + d\gamma f)$ donnée plus haut se réduit alors à

$$\gamma\, df + d\gamma f = \sum_k e_k\, e'_k\, f = \Gamma_M f.$$

Q. E. D.

Soient $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{s}$ deux sous-algèbres de $\mathfrak{l}$ telles que $[\mathfrak{s}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$. On notera $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}}$ la représentation de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{n}$ qui associe $[s, n]$ à (s, n), et on l'appellera *la représentation adjointe de* $\mathfrak{s}$ *dans* $\mathfrak{n}$. A cette représentation correspond canoniquement une représentation $\mathrm{ad}^\star_{\mathfrak{n}}$ de $\mathfrak{s}$ dans $\mathrm{Hom}_K(\Lambda\mathfrak{n}, K)$. Si maintenant M est un $\mathfrak{l}$-module, on peut former le complexe des cochaînes alternées $C^\star(\mathfrak{n}, M)$, en considérant la représentation induite de $\mathfrak{n}$ dans M, et faire opérer $\mathfrak{s}$ sur l'espace $\mathrm{Hom}_K(\Lambda\mathfrak{n}, M) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda\mathfrak{n}, K) \otimes_K M$ par la représentation $\theta^\star_{\mathfrak{n}}$ produit tensoriel de $\mathrm{ad}^\star_{\mathfrak{n}}$ et de la représentation induite de $\mathfrak{s}$ dans M. Le lemme 10 montre que, si $\mathfrak{s} = \mathfrak{n} = \mathfrak{l}$, la représentation $\theta^\star_{\mathfrak{l}}$ commute avec le cobord $d^\star_{\mathfrak{l}}$. Plus généralement.

PROPOSITION 5. — *Les notations étant celles de l'alinéa précédent, la représentation* $\theta^\star$ *de* $\mathfrak{s}$ *dans* $\mathrm{Hom}_K(\Lambda\mathfrak{n}, M)$ *commute avec le cobord* $d^\star_{\mathfrak{n}}$ *du complexe* $C^\star(\mathfrak{n}, M)$.

L'injection i de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{l}$, qui est compatible avec les opérations de $\mathfrak{s}$, se transpose en un homomorphisme surjectif de $\mathfrak{s}$-modules $i^\star : C^\star(\mathfrak{l}, M) \to C^\star(\mathfrak{n}, M)$; pour tout $s \in \mathfrak{s}$, on a ainsi $\theta^\star_{\mathfrak{n}}(s)\, i^\star = i^\star \theta(s)$. Comme, d'autre part, $i^\star$ est une flèche de complexes, $d^\star_{\mathfrak{n}} i^\star = i^\star d^\star_{\mathfrak{l}}$. Par suite,

$$d^\star_{\mathfrak{n}} \theta^\star_{\mathfrak{n}}(s)\, i^\star = d^\star_{\mathfrak{n}} i^\star \theta^\star_{\mathfrak{l}}(s) = i^\star d^\star_{\mathfrak{l}}\, \theta^\star_{\mathfrak{l}}(s).$$

D'après le lemme 10,

$$d_{\mathfrak{l}}^{\star}\,\theta_{\mathfrak{l}}^{\star}(s) = \theta_{\mathfrak{l}}^{\star}(s)\,d_{\mathfrak{l}}^{\star},$$

et

$$d_{\mathfrak{n}}^{\star}\theta_{\mathfrak{n}}^{\star}(s)\,i^{\star} = i^{\star}\theta_{\mathfrak{l}}^{\star}(s)\,d_{\mathfrak{l}}^{\star} = \theta_{\mathfrak{n}}^{\star}(s)\,i^{\star}d_{\mathfrak{l}}^{\star} = \theta_{\mathfrak{n}}^{\star}(s)\,d_{\mathfrak{n}}^{\star}i^{\star}.$$

Comme $i^{\star}$ est surjectif, on a

$$d_{\mathfrak{n}}^{\star}\theta_{\mathfrak{n}}^{\star}(s) = \theta_{\mathfrak{n}}^{\star}(s)\,d_{\mathfrak{n}}^{\star}.$$

Q. E. D.

La représentation $\theta_{\mathfrak{u}}^{\star}$ de $\mathfrak{s}$ dans $C^{\star}(\mathfrak{n}, M)$ induit donc une représentation de $\mathfrak{s}$ dans les espaces de cohomologie $H^{\star}(\mathfrak{n}, M)$. Bien entendu, d'après le lemme 10, les éléments de $\mathfrak{s}\subset\mathfrak{n}$ définissent des opérateurs nuls. Si l'on pose

$$X_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{n};\,M) = \sum_{i}(-1)^{i}\,\mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}H^{i}(\mathfrak{n},\,M),$$

on a, pour toute suite exacte $0\to M'\to M\to M''\to 0$ de $\mathfrak{l}$ modules,

$$X_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{n};\,M) = X_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{n};\,M') + X_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{n};\,M''),$$

car $0\to M'\to M\to M''\to 0$ est aussi une suite exacte de $\mathfrak{n}$-modules, et $H^{\star}(\mathfrak{n}, ?)$ est un foncteur cohomologique. Il existe donc un homomorphisme $\chi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{n};\,?)$ de $\mathcal{R}(\mathfrak{l})$ dans $\mathcal{R}(\mathfrak{s})$ tel que, pour tout $\mathfrak{l}$-module M,

$$X_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{n};\,M) = \chi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{n};\,\mathrm{ch}_{\mathfrak{l}}M).$$

THÉORÈME 2 (*Théorème de Riemann-Roch pour les algèbres de Lie*). — *Si* $\mathfrak{l}$ *est une algèbre de Lie sur un corps commutatif* K *quelconque, et si* $\mathfrak{s}$ *et* $\mathfrak{n}$ *sont deux sous-algèbres de* $\mathfrak{l}$ *telles que* $[\mathfrak{s},\,\mathfrak{n}]\subset\mathfrak{n}$, *on a, pour tout élément* x *du* λ*-anneau* $\mathcal{R}(\mathfrak{l})$,

$$\chi_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{n}\,;\,x) = \mathrm{Res}\,(\mathfrak{l},\,\mathfrak{s})\,(x)\,\lambda_{-1}(\mathfrak{n}^{\star}).$$

Si Z^{i} (resp. B^{i}) est le $\mathfrak{s}$-module des cocyles (resp. des cobords) de $C^{i}(\mathfrak{n}, M)$, on a

$$\mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}H^{i}(\mathfrak{n},\,M) = \mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}Z^{i} - \mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}B^{i} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}C^{i}(\mathfrak{n},\,M) = \mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}Z^{i} + \mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}B^{i+1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} X_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{n},\,M) &= \sum(-1)^{i}(\mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}Z^{i} - \mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}B^{i}) = \sum(-1)^{i}\mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}Z^{i} - \sum(-1)^{i}\mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}B^{i} \\ &= \sum(-1)^{i}(\mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}Z^{i} + \mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}B^{i+1}) = \sum(-1)^{i}\,\mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}C^{i}(\mathfrak{n},\,M). \end{aligned}$$

Mais

$$\mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}C^{i}(\mathfrak{n},\,M) = \mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}(\Lambda^{i}\mathfrak{n}^{\star}\otimes_{K}M) = \mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}(\Lambda^{i}\mathfrak{n}^{\star})\,\mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}(M)$$

et

$$\mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}(M) = \mathrm{Res}\,(\mathfrak{l},\ \mathfrak{s})\,(\mathrm{ch}_{\mathfrak{l}} M).$$

On a donc

$$X_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{n};\ M) = \left(\sum (-1)^i \mathrm{ch}_{\mathfrak{s}}(\Lambda^i \mathfrak{n}^*)\right) \mathrm{Res}\,(\mathfrak{l},\ \mathfrak{s})\,(\mathrm{ch}_{\mathfrak{l}} M)$$
$$= \lambda_{-1}(\mathfrak{n}^*)\,\mathrm{Res}(\mathfrak{l},\ \mathfrak{s})\,(\mathrm{ch}_{\mathfrak{l}} M).$$

Q. E. D.

COROLLAIRE. — *Soient K un corps algébriquement clos de caractéristique* o, *une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *réductive sur K, une sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$, *une sous-algèbre de Borel* $\mathfrak{b}$ *de* $\mathfrak{g}$ *contenant* $\mathfrak{h}$, *une sous-algèbre* $\mathfrak{b}$*-parabolique* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathfrak{g}$, *de radical nilpotent* $\mathfrak{n}$ *et de sous-algèbre de dévissage* $\mathfrak{s}$. *On munira* $R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *de l'ordre défini par* $\mathfrak{b}$, *et* $R(\mathfrak{s},\ \mathfrak{h})$ *de l'ordre induit. Si* ρ *est la demi-somme des racines positives de* $\mathfrak{g}$, *on a, pour tout poids dominant* λ *de* $\mathfrak{g}$,

$$\sum_i (-1)^i \mathrm{ch}_{\mathfrak{s}} H^i(\mathfrak{n},\ M(\lambda)) = \sum_{s \in W(n)} \det(s)\, m(s(\lambda + \rho) - \rho).$$

Les notations sont celles du théorème 1.

La formule de H. Weyl et B. Kostant (théor. 1) et le théorème 2 montrent qu'il suffit de vérifier que

$$\lambda_{-1}(\mathfrak{n}^*) = \sum_{s \in W(\mathfrak{n})} \det(s)\, m(s\rho - \rho) \quad \text{dans } \mathcal{R}(\mathfrak{s}).$$

Comme $\mathrm{Res}\,(\mathfrak{s},\ \mathfrak{h})$ est un homomorphisme injectif de λ-anneaux, l'égalité précédente sera une conséquence de l'égalité dans $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$

$$\lambda_{-1}(\mathrm{ch}_{\mathfrak{h}} \mathfrak{n}^*) = \mathrm{Res}(\mathfrak{s},\ \mathfrak{h})\,(\lambda_{-1}(\mathfrak{n}^*)) = \sum_{s \in W(\mathfrak{n})} \det(s)\,\mathrm{Res}(\mathfrak{s},\ \mathfrak{h})\,(m(s\rho - \rho)).$$

Une forme bilinéaire symétrique invariante, non dégénérée sur $\mathfrak{g}$, définit un isomorphisme du $\mathfrak{h}$-module $\mathfrak{n}^*$ sur le $\mathfrak{h}$-module $\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \mathfrak{g}^{-\alpha}$ (*cf.* la démonstration de la proposition 3). On a donc

$$\mathrm{ch}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{n}^*) = \mathrm{ch}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{n}_-) = \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \exp(-\alpha)$$

et

$$\lambda_{-1}(\mathrm{ch}_{\mathfrak{h}} \mathfrak{n}^*) = \prod_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} (1 - \exp(-\alpha)) = \frac{\exp \rho \prod_{\alpha \in R^+} (1 - \exp(-\alpha))}{\exp \pi \prod_{\alpha \in r^+} (1 - \exp(-\alpha))} \exp(-\nu),$$

où π (resp. ν) est la demi-somme des racines positives de r [resp. la demi-somme des racines de $S(\mathfrak{n})$]. En vertu d'un résultat bien connu sur les systèmes de racines (*cf.* SL [13], exp. 19, nº 2, p. 4)

$$\exp\rho \prod_{\alpha\in R^+} (1-\exp(-\alpha)) = \sum_{s\in W} \det(s) \exp s\,\rho$$

et

$$\exp\pi \prod_{\alpha\in r^+} (1-\exp(-\alpha)) = \sum_{t\in w} \det(t) \exp t\pi.$$

La décomposition du groupe de Weyl en classes suivant w, donnée par la proposition 4, permet d'écrire

$$\lambda_{-1}(\mathrm{ch}_{\mathfrak{h}}\mathfrak{n}^*) = \sum_{s\in W(\mathfrak{n})} \det(s) \frac{\sum_{t\in W} \det(t)\exp(ts\,\rho-\nu)}{\sum_{t\in w} \det(t)\exp t\pi}$$

Mais, d'après le lemme 6, $t\nu=\nu$ pour tout $t\in w$, et l'on a, pour tout $t\in w$ et tout $s\in W(\mathfrak{n})$,

$$ts\,\rho-\nu = t(s\,\rho-\nu) = t\,((s\,\rho-\rho)+\pi).$$

Comme, d'après la formule de H. Weyl,

$$\mathrm{Res}(\mathfrak{s},\mathfrak{n})\,(m(s\,\rho-\rho)) = \frac{\sum_{t\in w} \det(t)\exp t(s\,\rho-\rho+\pi)}{\sum_{t\in w} \det(t)\exp t\pi},$$

on obtient finalement

$$\lambda_{-1}(\mathrm{ch}_{\mathfrak{h}}\mathfrak{n}^*) = \sum_{s\in W(\mathfrak{n})} \det(s)\,\mathrm{Res}(\mathfrak{s},\mathfrak{h})\,(m(s\,\rho-\rho)),$$

et le corollaire est démontré.

Q. E. D.

4. Le théorème de R. Bott et B. Kostant.

On désigne à nouveau par K un corps commutatif algébriquement clos. On considère une algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}$ sur K, une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$ et de radical nilpotent $\mathfrak{m}=\mathcal{D}\mathfrak{b}$, une sous-algèbre $\mathfrak{b}$-parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$, de radical nilpotent $\mathfrak{n}$ et de sous-algèbre de dévissage $\mathfrak{s}$. L'ensemble de racines $R=R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ [resp. $r=R(\mathfrak{s},\mathfrak{h})$] sera muni de l'ordre défini par $\mathfrak{b}$ (resp. de l'ordre induit par l'ordre de R), et ρ (resp. π, resp. ν) sera la demi-somme des racines positives de R [resp. la demi-somme des racines positives de r, resp. la demi-somme des racines de $S(\mathfrak{n})$]. On a alors $\mathfrak{m} = \bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}^\alpha$. Enfin, B sera une forme bilinéaire symétrique invariante, non dégénérée, définie positive sur $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, au sens de l'introduction du paragraphe 2. Rappelons que la restriction de B à $\mathfrak{h}$ est non dégénérée, et que B met en dualité $\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$.

Le corollaire du théorème 2 nous permet d'évaluer la classe d'Euler-Poincaré de $H^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ dans l'anneau des représentations de $\mathfrak{s}$. L'objet du théorème de R. Bott et B. Kostant est de déterminer la classe de chacun des $H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda))$. Comme la sous-algèbre $\mathfrak{s}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$, l'idéal $\mathfrak{n}$ et le module $M(\lambda)$ sont des $\mathfrak{s}$-modules semi-simples (*cf.* Bourbaki [6], *Alg. de Lie*, chap. 1, § 6, corollaire 1 de la proposition 7); par suite, $C^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ et $H^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ sont des $\mathfrak{s}$-modules semi-simples. D'après le lemme 4, la classe de $H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ dans $\mathcal{R}(\mathfrak{s})$ détermine $H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ à un isomorphisme de $\mathfrak{s}$-modules près.

Les classes des $\mathfrak{s}$-modules simples constituant une base du groupe libre $\mathcal{R}(\mathfrak{s})$, on définira une application linéaire du K-espace vectoriel $\mathcal{R}(\mathfrak{s}) \otimes_{\mathbf{Z}} K$ dans lui-même en posant

$$\Delta(m(\mu)) = B(\mu + \rho, \mu + \rho)\, m(\mu).$$

Proposition 6 (B. Kostant [12]). — *L'élément $ch_{\mathfrak{s}} H^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ de $\mathcal{R}(\mathfrak{s})$ est un vecteur propre de Δ pour la valeur $B(\lambda + \rho, \lambda + \rho)$.*

Si ζ est un élément de $\mathfrak{h}^*$, on écrira $|\zeta|^2$ au lieu de $B(\zeta, \zeta)$.

Comme $C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda))$ [resp. $C^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$] est un $\mathfrak{s}$-module semi-simple, il existe un endomorphisme $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ (resp. $\Lambda_{\mathfrak{n}}$) de $C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda))$ [resp. de $C^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$] qui se réduit, sur chaque $\mathfrak{s}$ composant simple de poids dominant ζ, à l'homothétie de rapport $|\lambda + \rho|^2 - |\rho + \xi|^2$.

(i) Pour démontrer la proposition, il suffit d'établir que l'endomorphisme $\Lambda_{\mathfrak{n}}$ de $C^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ est homotope à o.

L'endomorphisme $\Lambda_{\mathfrak{n}}$ de $C^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$, qui commute avec le cobord $d^*_{\mathfrak{n}}$, induit alors un endomorphisme Λ^*_n de $H^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$, et cet endomorphisme est l'endomorphisme nul. Comme $H^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ est un quotient d'un sous-module de $C^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$, l'endomorphisme $\Lambda^*_{\mathfrak{n}}$ de $H^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ est l'endomorphisme qui se réduit, sur chaque $\mathfrak{s}$-composant simple $m(\mu)$, à l'homothétie de rapport $|\lambda + \rho|^2 - |\rho + \mu|^2$. On a ainsi $|\lambda + \rho|^2 = |\rho + \mu|^2$ pour tout poids dominant μ d'un $\mathfrak{s}$-composant simple de $H^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$, et c'est ce qu'il faut démontrer.

L'injection de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$ induit un homomorphisme p^* du complexe de $\mathfrak{s}$-modules $C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda))$ dans le complexe de $\mathfrak{s}$-modules $C^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$. Si N est un sous-$\mathfrak{s}$-module simple de $C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda))$ de poids dominant ξ, et si $p^*(N) \neq 0$, le $\mathfrak{s}$-module $p^*(N)$ est un sous-$\mathfrak{s}$-module simple de $C^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ de poids dominant ξ. Il en résulte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda)) & \xrightarrow{p^*} & C^*(\mathfrak{n}, M(\lambda)) \\ {\scriptstyle \Lambda_\mathfrak{g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Lambda_\mathfrak{n}} \\ C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda)) & \xrightarrow{p^*} & C^*(\mathfrak{n}, M(\lambda)) \end{array}$$

est commutatif.

(ii) Supposons que $\Lambda_\mathfrak{g}$ soit homotope à o, i. e. que $\Lambda_\mathfrak{g} = d_\mathfrak{g}^* h^* + h^* d_\mathfrak{g}^*$, et qu'il existe un endomorphisme linéaire k^* de $C^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ tel que $p^* h^* = k^* p^*$. Alors $\Lambda_\mathfrak{n}$ est homotope à o.

En effet, on a

$$\begin{aligned} \Lambda_\mathfrak{n} p^* = p^* \Lambda_\mathfrak{g} &= p^* d_\mathfrak{g}^* h^* + p^* h^* d_\mathfrak{g}^* = d_\mathfrak{n}^* p^* h^* + p^* h^* d_\mathfrak{g}^* \\ &= d_\mathfrak{n}^* k^* p^* + k^* p^* d_\mathfrak{g}^* = d_\mathfrak{n}^* k^* p^* + k^* d_\mathfrak{n}^* p^* \\ &= (d_\mathfrak{n}^* k^* + k^* d_\mathfrak{n}^*)\, p^*. \end{aligned}$$

Comme p^* est surjectif, on a $\Lambda_\mathfrak{n} = d_\mathfrak{n}^* k^* + k^* d_\mathfrak{n}^*$.

(iii) Dans $C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda))$, $\Lambda_\mathfrak{g}$ est homotope à o.

Désignons par $\{h_i\}$ une base de $\mathfrak{h}$, par $\{k_i\}$ la base duale de $\{h_i\}$ pour la restriction de B à $\mathfrak{h}$. Pour toute racine α de $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, nous choisirons un élément X_α non nul de $\mathfrak{g}^\alpha$, et nous supposerons les X_α normalisés par les conditions $B(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$. Le crochet $[X_\alpha, X_{-\alpha}]$ est alors égal à l'élément h_α de $\mathfrak{h}$ qui correspond à α par l'isomorphisme de $\mathfrak{h}^*$ sur $\mathfrak{h}$ défini par la forme B; en particulier, $[h_\alpha, X_\beta] = (\alpha, \beta)\, X_\beta$. Enfin Γ_λ sera l'endomorphisme de $C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda)) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda \mathfrak{g}, K) \otimes_K M(\lambda)$, produit tensoriel de l'automorphisme identique de $\mathrm{Hom}_K(\Lambda \mathfrak{g}, K)$ et de l'endomorphisme de Casimir de $M(\lambda)$ associé à B. Rappelons que Γ_λ se réduit à l'homothétie de rapport $|\lambda + \rho|^2 - |\rho|^2$ (*cf.* SL [13], exp. 19, nº 3, lemme 4).

D'après le lemme 6, la demi-somme ν des racines de $S(\mathfrak{n})$ est orthogonale à toutes les racines de $\mathfrak{r}$. Par suite.

$$\rho^2 = (\pi + \nu, \pi + \nu) = |\pi|^2 + 2(\pi, \nu) + |\nu|^2 = |\pi|^2 + |\nu^2.$$

De même, si ξ est un poids dominant de $\mathfrak{s}$,

$$\begin{aligned} |\rho + \xi|^2 = |(\pi + \xi) + \nu|^2 &= ((\pi + \xi) + \nu, (\pi + \xi) + \nu) \\ &= |\pi + \xi|^2 + 2(\xi, \nu) + |\nu|^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$|\lambda + \rho|^2 - |\xi + \rho|^2 = |\lambda + \rho|^2 - (|\pi + \xi|^2 - |\xi|^2) - 2(\xi, \nu),$$

Le scalaire $|\lambda+\rho|^2-|\rho|^2$ est le rapport de l'homothétie Γ_λ. Pour tout $x\in\mathfrak{g}$, désignons par $i(x)$ l'endomorphisme $i_K(x)$ de $\mathrm{Hom}_K(\Lambda\,\mathfrak{g}, K)$ (*cf.* l'introduction du paragraphe 3), et identifions $\mathrm{End}_K(C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda))$ à $\mathrm{End}_K(\mathrm{Hom}_K(\Lambda\,\mathfrak{g}, K))\otimes_K \mathrm{End}_K(M(\lambda))$. D'après le lemme 11,

$$\Gamma_\lambda = h'(\mathfrak{g})\, d^*_{\mathfrak{g}} + d^*_{\mathfrak{g}} h'(\mathfrak{g}),$$

où l'on a posé

$$h'(\mathfrak{g}) = \sum_{\alpha\in R} i(X_{-\alpha})\otimes X_\alpha + \sum_j i(k_j)\otimes h_j.$$

Soit γ l'endomorphisme de Casimir du $\mathfrak{s}$-module $C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda))$ associé à la restriction de B à $\mathfrak{s}$. Par définition, si θ^* est la représentation canonique de $\mathfrak{g}$ dans $C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda))$, on a

$$\gamma = \sum_{\alpha\in r} \theta^*(X_{-\alpha})\,\theta^*(X_\alpha) + \sum_i \theta^*(h_i)\,\theta^*(k_i).$$

Soit e un élément primitif de poids ξ du $\mathfrak{s}$-module $C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda))$ pour la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{s}$ associée à r^+ (*cf.* l'introduction du paragraphe 2). On a $\theta^*(X_\alpha)\,e = 0$ pour tout $\alpha\in r^+$, et

$$\sum_{\alpha\in r^+} \theta^*(X_{-\alpha})\,\theta^*(X_\alpha)\,e = 0;$$

de même,

$$\sum_{\alpha\in r^+} \theta^*(X_\alpha)\,\theta^*(X_{-\alpha})\,e = \sum_{\alpha\in r^+} \theta^*([X_\alpha, X_{-\alpha}])\,e + \sum_{\alpha\in r^+} \theta^*(X_{-\alpha})\,\theta^*(X_\alpha)\,e$$
$$= \sum_{\alpha\in r^+} \theta^*(h_\alpha)\,e = \sum_{\alpha\in r^+} \xi(h_\alpha)\,e.$$

Mais les h_α sont tels que $\xi(h_\alpha) = (\xi, \alpha)$, et finalement

$$\sum_{\alpha\in r} \theta^*(X_{-\alpha})\,\theta^*(X_\alpha)\,e = 2(\xi, \pi)\,e.$$

D'autre part,

$$\sum_i \theta^*(h_i)\,\theta^*(k_i)\,e = \sum_i \xi(h_i)\,\xi(k_i)\,e$$

et comme $\sum_i \xi(k_i)\,h_i$ est l'élément de $\mathfrak{h}$ qui correspond à ξ par l'isomorphisme de $\mathfrak{h}^*$ sur $\mathfrak{h}$ défini par B, on a $\sum_i \xi(h_i)\,\xi(k_i) = |\xi|^2$. Il en résulte que

$$\gamma e = (|\xi|^2 + 2(\xi, \pi))\,e = (|\xi+\pi|^2 - |\pi|^2)\,e.$$

Mais γ est un endomorphisme de $\mathfrak{s}$-modules. Puisqu'il transforme tout élément primitif en un de ses multiples, il laisse stable chaque $\mathfrak{s}$-composant simple de $C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda))$. Comme le corps de base K est algébriquement clos, le théorème de Burnside (BOURBAKI [5], *Alg.*, chap. 8, § 4, n° 3, corollaire 1 de la proposition 2) montre que γ se réduit à une homothétie sur chaque $\mathfrak{s}$-composant simple. Comme pour tout élément primitif e de poids ξ on a $\gamma e = (|\xi + \pi|^2 - |\pi|^2)e$, le rapport de l'homothétie induite par γ du $\mathfrak{s}$-composant simple $m(\xi)$ de $C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda))$ est donc $(|\xi + \pi|^2 - |\pi|^2)$. D'après le lemme 10, on a, pour tout $s \in \mathfrak{s}$,

$$\theta^*(s) = (i(s) \otimes 1)\, d_{\mathfrak{g}}^* + d_{\mathfrak{g}}^*(i(s) \otimes 1) \qquad \text{et} \qquad \theta^*(s)\, d_{\mathfrak{g}}^* = d_{\mathfrak{g}}^*\, \theta^*(s).$$

Il en résulte que

$$\gamma = \left[\sum_{\alpha \in r} \theta^*(X_{-\alpha})(i(X_\alpha) \otimes 1) + \sum_j \theta^*(h_j)\,(i(k_j) \otimes 1)\right] d_{\mathfrak{g}}^* + d_{\mathfrak{g}}^*\left[\sum_{\alpha \in r} \theta^*(X_{-\alpha})\,(i(X_\alpha) \otimes 1) + \sum_j \theta^*(h_j)\,(i(k_j) \otimes 1)\right].$$

Par définition de θ^*, on a, pour tout $s \in \mathfrak{s}$,

$$\theta^*(s) = \operatorname{ad}^*(s) \otimes 1 + 1 \otimes s$$

et

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha \in r} \theta^*(X_{-\alpha})\,(i(X_\alpha) \otimes 1) + \sum_j \theta^*(h_j)(i(k_j) \otimes 1) \\ &= \sum_{\alpha \in r} \operatorname{ad}^*(X_{-\alpha})\, i(X_\alpha) \otimes 1) + \sum_{\alpha \in r} i(X_\alpha) \otimes X_{-\alpha} \\ &\quad + \sum_j \operatorname{ad}^*(h_j)\, i(k_j) \otimes 1 \qquad + \sum_j i(k_j) \otimes h_j. \end{aligned}$$

Considérons enfin l'endomorphisme $\zeta = \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \theta^*(h_\alpha)$ de $C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda))$. Pour toute racine β de $r = R(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})$, on a

$$\zeta\theta^*(X_\beta) - \theta^*(X_\beta)\zeta = \sum_{\alpha \in S(n)} \theta^*([h_\alpha, X_\beta]) = \sum_{\alpha \in S(n)} (\alpha, \beta)\, \theta^*(X_\beta) = 2(\nu, \beta)\, \theta^*(X_\beta).$$

Mais d'après le lemme 6, ν est orthogonale à toute racine de r. On a ainsi, pour tout β, $\zeta\theta^*(X_\beta) = \theta^*(X_\beta)\,\zeta$. Si, d'autre part, h est un élément de $\mathfrak{h}$, on a

$$\zeta\theta^*(h) - \theta^*(h)\,\zeta = \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \theta^*([h_\alpha, h]) = 0$$

puisque $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ pour toute racine α. Il en résulte, par linéarité, que, pour tout $s \in \mathfrak{s}$, $\zeta\theta^*(s) = \theta^*(s)\,\zeta$, et ζ est un endomorphisme du $\mathfrak{s}$-module

$C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda))$. Si e est un élément primitif de poids ξ du $\mathfrak{s}$-module $C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda))$, on a

$$\zeta e = \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \xi(h_\alpha)\, e = \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} (\xi, \alpha) e = 2(\xi, \nu)\, e.$$

L'endomorphisme ζ laisse donc stable chaque $\mathfrak{s}$-composant simple de $C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda))$, et un raisonnement identique à celui qui a été fait plus haut pour γ montre que ζ se réduit à l'homothétie de rapport $2(\xi, \nu)$ sur chaque $\mathfrak{s}$-composant simple de poids dominant ξ de $C^*(\mathfrak{g}, M(\lambda))$. D'autre part,

$$\zeta = \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \theta^*(X_\alpha)\, \theta^*(X_{-\alpha}) - \sum_{\alpha \in -S(\mathfrak{n})} \theta^*(X_\alpha)\, \theta^*(X_{-\alpha}).$$

On vérifie, par des réductions identiques à celles qui ont été effectuées pour γ, que

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \theta^*(X_\alpha)\, \theta^*(X_{-\alpha}) \\ &\quad = \Big[\sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} i(X_{-\alpha}) \otimes X_\alpha + \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \mathrm{ad}^*(X_\alpha)\, i(X_{-\alpha}) \otimes 1\Big] d_{\mathfrak{g}}^* \\ &\quad\quad + d_{\mathfrak{g}}^* \Big[\sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} i(X_{-\alpha}) \otimes X_\alpha + \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \mathrm{ad}^*(X_\alpha)\, i(X_{-\alpha}) \otimes 1\Big], \\ &\sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \theta^*(X_{-\alpha})\, \theta^*(X_\alpha) \\ &\quad = \Big[\sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} i(X_\alpha) \otimes X_{-\alpha} + \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \mathrm{ad}^*(X_{-\alpha})\, i(X_\alpha) \otimes 1\Big] d_{\mathfrak{g}}^* \\ &\quad\quad + d_{\mathfrak{g}}^* \Big[\sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} i(X_\alpha) \otimes X_{-\alpha} + \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \mathrm{ad}^*(X_{-\alpha})\, i(X_\alpha) \otimes 1\Big]. \end{aligned}$$

Posons

$$h'(\mathfrak{g}) = \sum_{\alpha \in R} i(X_{-\alpha}) \otimes X_\alpha + \sum_j i(k_j) \otimes h_j,$$

$$h'(\mathfrak{s}) = \sum_{\alpha \in r} i(X_\alpha) \otimes X_{-\alpha} + \sum_j i(k_j) \otimes h_j,$$

$$h''(\mathfrak{s}) = \sum_{\alpha \in r} \mathrm{ad}^*(X_{-\alpha})\, i(X_\alpha) + \sum_j \mathrm{ad}^*(h_j)\, i(k_j),$$

$$h'_+(\mathfrak{n}) = \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} i(X_{-\alpha}) \otimes X_\alpha, \qquad h'_-(\mathfrak{n}) = \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} i(X_\alpha) \otimes X_{-\alpha},$$

$$h''_+(\mathfrak{n}) = \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \mathrm{ad}^*(X_\alpha)\, i(X_{-\alpha}), \qquad h''_-(\mathfrak{n}) = \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \mathrm{ad}^*(X_{-\alpha})\, i(X_\alpha).$$

Les résultats de cet alinéa montrent que Γ_λ, γ et ζ peuvent se représenter sous la forme

$$\begin{aligned}\Gamma_\lambda &= h'(\mathfrak{g})\, d_{\mathfrak{g}}^\star + d_{\mathfrak{g}}^\star h'(\mathfrak{g}),\\ \gamma &= (h'(\mathfrak{s}) + h''(\mathfrak{s}) \otimes 1)\, d_{\mathfrak{g}}^\star + d_{\mathfrak{g}}^\star (h'(\mathfrak{s}) + h''(\mathfrak{s}) \otimes 1),\\ \zeta &= (h'_+(\mathfrak{n}) - h'_-(\mathfrak{n}) + (h''_+(\mathfrak{n}) - h''_-(\mathfrak{n})) \otimes 1)\, d_{\mathfrak{g}}^\star \\ &\quad + d_{\mathfrak{g}}^\star (h'_+(\mathfrak{n}) - h'_-(\mathfrak{n}) + (h''_+(\mathfrak{n}) - h''_-(\mathfrak{n})) \otimes 1).\end{aligned}$$

On remarquera, d'autre part, que $h'(\mathfrak{g}) = h'(\mathfrak{s}) + h'_+(\mathfrak{n}) + h'_-(\mathfrak{n})$.

En utilisant la décomposition de $\Lambda_{\mathfrak{g}}$ en $\Lambda_{\mathfrak{g}} = \Gamma_\lambda - \gamma - \zeta$, on obtient

$$\Lambda_{\mathfrak{g}} = (h' + h'' \otimes 1)\, d_{\mathfrak{g}}^\star + d_{\mathfrak{g}}^\star (h' + h'' \otimes 1),$$

où

$$h' = h'(\mathfrak{g}) - h'(\mathfrak{s}) - h'_+(\mathfrak{n}) + h'_-(\mathfrak{n}) = 2h'_-(\mathfrak{n}) = 2\left(\sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} i(X_\alpha) \otimes X_{-\alpha}\right).$$

et

$$\begin{aligned} h'' &= h''_-(\mathfrak{n}) - h''_+(\mathfrak{n}) - h''(\mathfrak{s}) \\ &= \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \operatorname{ad}^\star(X_{-\alpha})\, i(X_\alpha) - \sum_{\alpha \notin S(\mathfrak{n})} \operatorname{ad}^\star(X_{-\alpha})\, i(X_\alpha) - \sum_j \operatorname{ad}^\star(h_j)\, i(k_j).\end{aligned}$$

(iv) Il existe un endomorphisme linéaire k' de $C^\star(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C^\star(\mathfrak{g}, M(\lambda)) & \xrightarrow{p^\star} & C^\star(\mathfrak{n}, M(\lambda)) \\ {\scriptstyle h'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k'} \\ C^\star(\mathfrak{g}, M(\lambda)) & \xrightarrow{p^\star} & C^\star(\mathfrak{n}, M(\lambda)) \end{array}$$

soit commutatif.

Pour tout $x \in \mathfrak{n}$, soit $i_{\mathfrak{n}}(x)$ l'endomorphisme linéaire de $C^\star(\mathfrak{n}, K)$ qui à $\varphi \in C^n(\mathfrak{n}, K)$ associe la cochaîne $i_{\mathfrak{n}}(x)\, \varphi$ définie par

$$i_{\mathfrak{n}}(x)\, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \varphi(x, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Il est immédiat que $p^\star(i(x) \otimes 1) = (i_{\mathfrak{n}}(x) \otimes 1)\, p^\star$. Comme, d'autre part, $p^\star(1 \otimes g) = (1 \otimes g)\, p^\star$, pour tout $g \in \mathfrak{g}$, on voit que l'endomorphisme linéaire

$$k' = \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} i_{\mathfrak{n}}(X_\alpha) \otimes X_{-\alpha}$$

répond à la question.

(v) Il existe un endomorphisme linéaire k'' de $C^\star(\mathfrak{g}, K)$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C^\star(\mathfrak{g}, M(\lambda)) & \xrightarrow{p^\star} & C^\star(\mathfrak{n}, M(\lambda)) \\ {\scriptstyle h'' \otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k'' \otimes 1} \\ C^\star(\mathfrak{g}, M(\lambda)) & \xrightarrow{p^\star} & C^\star(\mathfrak{n}, M(\lambda)) \end{array}$$

soit commutatif.

On se ramène aussitôt au cas où $\lambda = 0$, i. e. au cas où $M(\lambda) = K$. On identifie alors $C^*(\mathfrak{g}, K)$ [resp. $C^*(\mathfrak{n}, K)$] à l'algèbre extérieure du dual $\mathfrak{g}^*$ (resp. $\mathfrak{n}^*$) de $\mathfrak{g}$ (resp. de $\mathfrak{n}$). La forme bilinéaire B définit un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^*$: si $x \in \mathfrak{g}$, Bx est la forme linéaire $B(x, ?)$. L'orthogonal de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}^*$, noyau de l'application linéaire de $\mathfrak{g}^*$ dans $\mathfrak{n}^*$ transposée de l'injection canonique, n'est autre que $B\mathfrak{p}$, ainsi qu'il résulte des relations d'orthogonalité $B(X_\alpha, X_\beta) = 0$ si $\alpha + \beta \neq 0$, et $B(X_\alpha, h) = 0$ si $h \in \mathfrak{h}$.

Comme $p^* : \Lambda\mathfrak{g}^* \to \Lambda\mathfrak{n}^*$ est une surjection, il suffira de montrer que $p^* \circ h''$ s'annule sur le noyau de p^*, ou encore que h'' $(\operatorname{Ker} p^*) \subset \operatorname{Ker} p^*$. Un lemme élémentaire (par exemple, BOURBAKI, [4], *Alg. chap.* 6, § 4, n° 1, lemme 1) montre que le noyau de p^* est l'idéal bilatère $\mathfrak{a}$ de l'algèbre $\Lambda\mathfrak{g}^*$ engendré par $B\mathfrak{p}$; c'est donc l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de la forme $Bx \wedge By_1 \wedge \ldots \wedge By_n$, où $x \in \mathfrak{p}$ et $y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{g}$. Pour toute racine α de R, on a

$$i(X_\alpha)(Bx \wedge By_1 \wedge \ldots \wedge By_n) = -B(x, X_\alpha)\, By_1 \wedge \ldots \wedge By_n + \sum_i (-1)^{i-1} B(y_i, X_\alpha) \wedge Bx \wedge By_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{By_i} \wedge \ldots \wedge By_n.$$

Si $\alpha \in S(\mathfrak{n})$, x et X_α appartiennent à $\mathfrak{p}$, et $B(x, X_\alpha) = 0$; on a donc, en remarquant que $\operatorname{ad}^* z(By) = -B([z, y])$,

$$\sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \operatorname{ad}^*(X_{-\alpha})\, i(X_\alpha)(Bx \wedge By_1 \wedge \ldots \wedge By_n)$$
$$\underset{\mathfrak{a}}{\equiv} \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n});\, i} (-1)^i B(y_i, X_\alpha) B([X_{-\alpha}, x]) \wedge By_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{By_i} \wedge \ldots \wedge By_n,$$

puisque les autres termes, qui débutent par Bx, sont des éléments de $\mathfrak{a}$. Si $\alpha \in R(\mathfrak{s}) \cup (-S(\mathfrak{n}))$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{p}$ et $[X_{-\alpha}, x] \in \mathfrak{p}$. On a, par suite,

$$\sum_{\alpha \notin S(\mathfrak{n})} \operatorname{ad}^*(X_{-\alpha})\, i(X_\alpha)(Bx \wedge By_1 \wedge \ldots \wedge By_n)$$
$$\underset{\mathfrak{a}}{\equiv} \sum_{\alpha \notin S(\mathfrak{n});\, i} B(x, X_\alpha)\, By_1 \wedge \ldots \wedge B([X_{-\alpha}, y_i]) \wedge \ldots \wedge By_n$$
$$\underset{\mathfrak{a}}{\equiv} \sum_{\alpha \notin S(\mathfrak{n});\, i} (-1)^{i-1} B(x, X_\alpha) B([X_{-\alpha}, y_i]) \wedge By_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{By_i} \wedge \ldots \wedge By_n.$$

Enfin, comme $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}$, le calcul précédent est applicable à $\sum \operatorname{ad}^*(h_j)\, i(k_j)$, ce qui donne

$$\sum \mathrm{ad}^*(h_j)\, i(k_j)\,(Bx \wedge By_1 \wedge \ldots \wedge By_n)$$

$$\underset{\mathfrak{a}}{\equiv} \sum_{i,j} (-1)^{i-1} B(x, k_j) B([h_j, y_i]) \wedge By_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{By_i} \wedge \ldots \wedge By_n.$$

Si l'on pose

$$z(x, y) = \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} B(y, x_\alpha)[X_{-\alpha}, x] + \sum_{\alpha \notin S(\mathfrak{n})} B(x, X_\alpha)[X_{-\alpha}, y] + \sum B(x, k_j)[h_j, y],$$

on a

$$h''(Bx \wedge By_1 \wedge \ldots \wedge By_n)$$

$$\underset{\mathfrak{a}}{\equiv} \sum_i (-1)^i B(z(x, y_i)) \wedge By_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{By_i} \wedge \ldots \wedge By_n.$$

Pour achever la démonstration, il suffira d'établir que $z(x, y)$ appartient à $\mathfrak{p}$ si $x \in \mathfrak{p}$ et $y \in \mathfrak{g}$. Comme $z(x, y)$ dépend linéairement de x et y, on pourra supposer que $x = X_\gamma$ pour $\gamma \in R(\mathfrak{s}) \cup S(\mathfrak{n})$ ou $x = h_j$ (resp. $y = X_\alpha$ pour $\alpha \in R$ ou $y = h_j$), ces éléments formant une base de $\mathfrak{p}$ (resp. de $\mathfrak{g}$).

Si $y \in \mathfrak{p}$, $B(y, X_\alpha) = 0$ pour $\alpha \in S(\mathfrak{n})$, $[X_{-\alpha}, y] \in \mathfrak{p}$ pour $\alpha \notin S(\mathfrak{n})$, et $[h_j, y] \in \mathfrak{p}$ pour tout j. On a alors $z(x, y) \in \mathfrak{p}$ pour tout x.

Supposons maintenant que $y = X_{-\beta}$ avec $\beta \in S(\mathfrak{n})$. Pour $\gamma \in R(\mathfrak{s}) \cup S(\mathfrak{n})$,

$$z(X_\gamma, X_{-\beta}) = \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} B(X_{-\beta}, X_\alpha)[X_{-\alpha}, X_\gamma] + \sum_{\alpha \notin S(\mathfrak{n})} B(X_\gamma, X_\alpha)[X_{-\alpha}, X_{-\beta}] + \sum_j B(X_\gamma, k_j)[h_j, X_{-\beta}].$$

Si $\delta(u, v)$ est le symbole de Kronecker,

$$B(X_{-\beta}, X_\alpha) = \delta(\alpha, \beta), \qquad B(X_\gamma, X_\alpha) = \delta(\alpha, -\gamma) \qquad \text{et} \qquad B(X_\gamma, k_j) = 0;$$

on obtient

$$z(X_\gamma, X_{-\beta}) = [X_{-\beta}, X_\gamma] + [X_\gamma, X_{-\beta}] = 0.$$

Enfin

$$z(h_j, X_{-\beta}) = \sum_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} B(X_{-\beta}, X_\alpha)[X_{-\alpha}, h_j] + \sum_{\alpha \notin S(\mathfrak{n})} B(h_j, X_\alpha)[X_{-\alpha}, X_{-\beta}] + \sum_i B(h_j, k_i)[h_j, X_{-\beta}],$$

et la relation $B(h_j, k_i) = \delta(i, j)$, jointe aux relations d'orthonormalité rappelées plus haut, montre que

$$z(h_j, X_{-\beta}) = [X_{-\beta}, h_j] + [h_j, X_{-\beta}] = 0.$$

La proposition 6 est alors une conséquence immédiate des résultats des alinéas (i) à (v). D'après (iii), (iv) et (v), les hypothèses de (ii) sont vérifiées, et la proposition résulte de (i).

Q. E. D.

Remarque. — Le résultat de KOSTANT [12] est en réalité beaucoup plus précis que la proposition 6 : il établit l'existence d'un isomorphisme entre $H^*(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ et Ker $\Lambda_{\mathfrak{n}}$. Mais, comme nous allons le voir, il peut être avantageusement remplacé par la proposition 6 et le corollaire du théorème 2.

On garde les notations du début du paragraphe. On désigne de plus par $\mathfrak{m}_-$ la sous-algèbre $\bigoplus_{\alpha<0}$ de $\mathfrak{g}^\alpha$. Si Φ est un ensemble de racines de $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, on posera $\langle \Phi \rangle = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha$. Si l'on s'est fixé une famille (Y_α), $\alpha \in R$, $Y_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, d'éléments de $\mathfrak{g}$, on notera $Y(\Phi)$ l'élément $Y_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge Y_{\alpha_i}$ de $\Lambda \mathfrak{g}$, où les α_j sont les éléments de Φ rangés par ordre croissant. En particulier, si (X_α), $\alpha \in R$, $X_\alpha \in g^\alpha$, est une famille d'éléments non nuls de $\mathfrak{g}$ normalisée par les conditions $B(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$ pour tout $\alpha \in R$, les $X(-\Phi)$, où Φ parcourt la famille des sous-ensembles de R^+, constituent une base de $\Lambda \mathfrak{m}_-$.

Si M est un $\mathfrak{h}$-module, on appellera *représentant du poids* λ dans M un élément e de M différent de 0 tel que $he = \lambda(h) e$ pour tout $h \in h$. On désignera, d'une façon générale, par $e(\lambda)$ un représentant de λ dans M. Pour tout sous-ensemble Φ de R^+, $X(-\Phi)$ est un représentant du poids $-\langle \Phi \rangle$ dans le $\mathfrak{h}$-module $\Lambda \mathfrak{m}_-$.

LEMME 12. — *Pour que μ soit un poids du $\mathfrak{h}$-module $\Lambda \mathfrak{m}_-$ il faut et il suffit que $\mu + \rho$ soit un poids du $\mathfrak{h}$-module $M(\rho)$, et la multiplicité de μ dans $\Lambda \mathfrak{m}_-$ est égale à la multiplicité de $\mu + \rho$ dans $M(\rho)$. Si $s \in W$, $s\rho - \rho$ est un poids de multiplicité 1 de $\Lambda \mathfrak{m}_-$, et $X(-\Phi(s))$, où $\Phi(s) = sR^- \cap R^+$, est un représentant de $s\rho - \rho$. Tous les représentants $e(s\rho - \rho)$ de $s\rho - \rho$ se déduisent par une homothétie de $X(-\Phi(s))$.*

D'après la formule de H. Weyl,

$$\operatorname{ch}_{\mathfrak{h}} M(\rho) = \frac{\sum_{s \in W} \det(s) \exp 2 s\rho}{\sum_{s \in W} \det(s) \exp s\rho}.$$

Mais (*cf.* SL [13], exp. 19, n° 2)

$$\sum_{s \in W} \det(s) \exp s\rho = \exp \rho \prod_{\alpha > 0} (1 - \exp(-\alpha)),$$

et de même

$$\sum_{s \in W} \det(s) \exp 2s\rho = \exp 2\rho \prod_{\alpha > 0} (1 - \exp(-2\alpha));$$

comme $(1 - \exp(-2\alpha)) = (1 - \exp(-\alpha))(1 + \exp(-\alpha))$, on a

$$\mathrm{ch}_{\mathfrak{h}} M(\rho) = \exp \rho \prod_{\alpha > 0} (1 + \exp(-\alpha)) = \exp \rho \, \mathrm{ch}_{\mathfrak{h}}(\Lambda \mathfrak{m}_-),$$

car

$$\mathrm{ch}_{\mathfrak{h}}(\Lambda \mathfrak{m}_-) = \lambda_1(\mathrm{ch}_{\mathfrak{h}} \mathfrak{m}_-) = \lambda_1\Big(\sum_{\alpha > 0} \exp(-\alpha)\Big) = \prod_{\alpha > 0} (1 + \exp(-\alpha)).$$

On obtient la première partie du lemme.

La multiplicité de $s\rho - \rho$ dans $\Lambda \mathfrak{m}_-$ est donc égale à la multiplicité de $s\rho$ dans $M(\rho)$. Les multiplicités de deux poids conjugués étant égales, la multiplicité de $s\rho$ dans $M(\rho)$ est égale à la multiplicité du poids dominant ρ, i. e. à 1. Enfin,

$$\begin{aligned} \rho - s\rho = {} & 1/2 \langle R^+ \rangle - 1/2 \langle sR^+ \rangle \\ = {} & 1/2 \langle sR^- \cap R^+ \rangle + 1/2 \langle sR^+ \cap R^+ \rangle \\ & - 1/2 \langle sR^+ \cap R^+ \rangle - 1/2 \langle sR^+ \cap R^- \rangle \\ = {} & 1/2 \langle sR^- \cap R^+ + 1/2 \langle -(sR^+ \cap R^-) \rangle \\ = {} & 1/2 \langle sR^- \cap R^+ \rangle + 1/2 \langle sR^- \cap R^+ \rangle = \langle \Phi(s) \rangle. \end{aligned}$$

L'élément $X(-\Phi(s))$ de $\Lambda \mathfrak{m}_-$ est donc un représentant du poids $s\rho - \rho$ et, comme $s\rho - \rho$ est de multiplicité 1, tous les représentants de $s\rho - \rho$ se déduisent de $X(-\Phi(s))$ par une homothétie.

Q. E. D.

On appellera *poids radiciel* (resp. *poids radiciel positif*) de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ une combinaison linéaire à coefficients entiers (resp. à coefficients entiers positifs) de racines simples de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

LEMME 13. — *Si λ est un poids dominant de* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, *et si φ est un poids radiciel positif*, (λ, φ) *est un nombre rationnel positif. Si* $\varphi \neq 0$, *on a* $(\rho, \varphi) > 0$.

Rappelons que la forme bilinéaire B est supposée *définie positive sur* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Si $\varphi = 0$, le lemme est évident. Si $\varphi \neq 0$, on peut supposer que φ est une racine simple de $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Comme λ est un poids dominant, $2(\lambda, \varphi)/(\varphi, \varphi)$

est un entier $\geqq 0$. Mais, comme B est définie positive sur $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, (φ, φ) est un nombre rationnel $\geqq 0$. On a donc $(\lambda, \varphi) \geqq 0$. D'autre part, si α_i est une racine simple, et si H_i est l'élément de $\mathfrak{h}$ qui correspond à α_i, le lemme 2 du n° 1 de SL [13], exp. 19 montre que $2(\rho, \alpha_i):(\alpha_i, \alpha_i) = \rho(H_i) = 1$; comme (α_i, α_i) est un nombre rationnel > 0, on en tire $(\rho, \alpha_i) > 0$. Tout poids radiciel positif non nul étant combinaison linéaire à coefficients entiers positifs non tous nuls de racines simples, on en déduit la deuxième assertion.

Q. E. D.

Proposition 7. — *Considérons la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $C^i(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ induite par la représentation de $\mathfrak{s}$. Les poids μ de cette représentation, tels que $|\mu + \rho|^2 = |\lambda + \rho|^2$, sont de la forme $\mu = s(\lambda + \rho) - \rho$, où $s \in W(\mathfrak{n})$ et* Card $(sR^- \cap R^+) = i$. *La multiplicité d'un tel μ est égale à* 1.

On posera

$$\lambda(s) = s(\lambda + \rho) - \rho, \quad \Phi(s) = sR^- \cap R^+ \qquad \text{et} \qquad n(s) = \mathrm{Card}(\Phi(s)).$$

La forme bilinéaire B met en dualité $\mathfrak{n}$ avec $\mathfrak{n}_- = \bigotimes_{\alpha \in S(\mathfrak{n})} \mathfrak{g}^{-\alpha}$. La représentation de $\mathfrak{h}$ dans $C^i(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ est donc isomorphe à une sous-représentation de la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\Lambda^i \mathfrak{m}_- \otimes M(\lambda)$.

D'après le lemme 12, si μ est un poids de la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\Lambda \mathfrak{m}_- \otimes M(\lambda)$, $\mu + \rho$ est un poids de la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $M(\lambda) \otimes M(\rho)$ induite par la représentation de $\mathfrak{g}$, la multiplicité de $\mu + \rho$ dans $M(\lambda) \otimes M(\rho)$ étant égale à la multiplicité de μ dans $\Lambda \mathfrak{m}_- \otimes M(\lambda)$. D'après le lemme 1 du n° 1 de SL [13], exp. 19, on peut trouver un $t \in W$ tel que $t(\mu + \rho)$ soit un poids dominant. Comme les poids de $M(\lambda)$ [resp. de $M(\rho)$] sont de la forme $\lambda - \gamma$ (resp. $\rho - \delta$), où γ (resp. δ), est un poids radiciel, positif, le poids $t(\mu + \rho)$ de $M(\lambda) \otimes M(\rho)$ est de la forme $\lambda + \rho - \varphi$, où φ est un poids radiciel positif. On a alors, la forme B étant invariante,

$$|\mu + \rho|^2 = |t(\mu + \rho)|^2 = |\lambda + \rho|^2 - (\varphi, \lambda + \rho) - (\lambda + \rho - \varphi, \varphi).$$

D'après le lemme 13, $(\lambda + \rho - \varphi, \varphi)$ est un nombre rationnel $\geqq 0$, et $(\varphi, \lambda + \rho)$ un nombre rationnel > 0 si $\varphi \neq 0$. On ne peut donc avoir $|\mu + \rho|^2 = |\lambda + \rho|^2$ que si $\lambda + \rho = t(\mu + \rho)$, i. e. si $\mu = \lambda(s)$ avec $s = t^{-1}$ Comme $\lambda + \rho$ et $\mu + \rho$ sont deux poids conjugués de $M(\lambda) \otimes M(\rho))$ ils ont même multiplicité; et la multiplicité de $\lambda + \rho$ est égale à 1. Si $e(s\lambda)$ est un représentant du poids $s\lambda$ dans $M(\lambda)$, $X(-\Phi(s)) \otimes e(s\lambda)$ est un représentant du poids $\lambda(s)$ dans $\Lambda \mathfrak{m}_- \otimes M(\lambda)$. Comme $\lambda(s)$ est un poids de multiplicité 1, tous les représentants de $\lambda(s)$ se déduisent par une homothétie de $X(-\Phi(s)) \otimes e(s\lambda)$. En particulier, $\lambda(s)$ est un poids de la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\Lambda^i \mathfrak{n}_- \otimes M(\lambda)$ si et seulement si $X(-\Phi(s)) \otimes e(s\lambda) \in \Lambda^i \mathfrak{n}_- \otimes M(\lambda)$. On vérifie aussitôt que $X(-\Phi(s) \otimes e(s\lambda)$

ne peut appartenir à $\Lambda^i \mathfrak{n}_- \otimes M(\lambda)$ que si $X(-\Phi(s))$ appartient à $\Lambda^i \mathfrak{n}_-$, et cette dernière condition équivaut, par définition de $X(-\Phi(s))$, à $\Phi(s) \subset S(\mathfrak{n})$, soit $s \in W(\mathfrak{n})$, et à $\mathrm{Card}\,\Phi(s) = i$.

Q. E. D.

COROLLAIRE. — *Les poids dominants μ des $\mathfrak{s}$-composants simples $m(\mu)$ de $H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ sont de la forme $\mu = \lambda(s)$, où $s \in W(\mathfrak{n})$ et $n(s) = i$. Pour tout $s \in W(\mathfrak{n})$, tel que $n(s) = i$, la longueur du composant isotypique de type $m(\lambda(s))$ de $H^i(n, M(\lambda))$ est $\leqq 1$.*

On notera $\mathrm{long}(M; m(\mu))$ la longueur du composant isotypique de type $m(\mu)$ d'un $\mathfrak{s}$-module M, et mult $(N; \mu)$ la multiplicité du poids μ dans la représentation de $\mathfrak{h}$ dans N.

Comme $H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ est isomorphe à un quotient d'une sous-représentation de $\mathfrak{s}$ dans $C^i(\mathfrak{n}, M(\lambda))$, on a, pour tout poids dominant μ de $(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})$,

$$(1) \qquad \mathrm{long}(H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda)); m(\mu)) \leqq \mathrm{long}(C^i(\mathfrak{n}, M(\lambda)); m(\mu)).$$

D'autre part,

$$(2) \qquad \mathrm{long}(C^i(\mathfrak{n}, M(\mu)); m(\mu)) \leqq \mathrm{mult}(C^i(\mathfrak{n}, M(\lambda)); \mu).$$

D'après la proposition 6, les poids dominants μ, tels que long $(H^i(n, M(\lambda)); m(\mu)) \neq 0$, vérifient $|\mu + \rho|^2 = |\lambda + \rho|^2$. La proposition 7, montrant que les poids μ de la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $C^i(\mathfrak{n}, M(\lambda))$, tels que $|\mu + \rho|^2 = |\lambda + \rho|^2$, sont de la forme $\lambda(s)$, où $s \in W(\mathfrak{n})$ et $n(s) = i$, et sont de multiplicité inférieure ou égale à 1, le corollaire résulte aussitôt des inégalités (1) et (2).

Q. E. D.

On désignera par $W(\mathfrak{n}, i)$ le sous-ensemble de $W(\mathfrak{n})$ des s tels que $n(s) = i$.

THÉORÈME 3 (B. KOSTANT). — *Considérons une algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}$ sur un corps algébriquement clos K de caractéristique 0, une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$, une sous-algèbre $\mathfrak{b}$-parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$, de radical nilpotent $\mathfrak{n}$ et de sous-algèbre de dévissage $\mathfrak{s}$. La représentation adjointe de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{n}$ et la représentation de $\mathfrak{s}$ dans $M(\lambda)$, induite par la représentation simple de $\mathfrak{g}$ de poids dominant λ, définissent de façon canonique une représentation semi-simple de $\mathfrak{s}$ dans les espaces de cohomologie $H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda))$, et la classe de cette représentation dans l'anneau $\mathcal{R}(\mathfrak{s})$ des représentations de $\mathfrak{s}$ est donnée par, $m(\mu)$ étant la classe des $\mathfrak{s}$-modules simples de poids dominant μ,*

$$\mathrm{ch}_{\mathfrak{s}} H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda)) = \sum_{s \in W(\mathfrak{n}; i)} m(s(\lambda + \rho) - \rho).$$

De plus, si long $H^i(n, M(\lambda))$ *est la longueur du* $\mathfrak{s}$*-module semi-simple* $H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda))$,

$$\text{long}\, H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda)) = \text{nombre d'éléments de } W(\mathfrak{n}) \text{ transformant } i \text{ racines négatives en racines positives.}$$

Si $\lambda(s) = \lambda(s')$, on a $s = s'$: en effet, on a alors $\lambda + \rho = s^{-1}s'(\lambda + \rho)$ et, comme $\lambda + \rho$ est un poids dominant tel que $(\lambda + \rho)(H_i) > 0$ pour toutes les racines simples H_i du système inverse de R, il suffit d'appliquer le lemme 3 de SL [13], exp. 19, n° 1. En particulier, les éléments $m(\lambda(s))$ de $\mathcal{R}(\mathfrak{s})$, où s parcourt l'ensemble $W(\mathfrak{n})$, sont linéairement indépendants. Si

$$\text{ch}_{\mathfrak{s}} H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda)) = \sum n(i, j)\, m(\mu(i, j)),$$

on a

$$\sum_i (-1)^i \text{ch}_{\mathfrak{s}} H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda)) = \sum_{i,j} (-1)^i n(i, j)\, m(\mu(i, j))$$
$$= \sum_{\mu} \Bigg[\sum_{\mu(i,j)=\mu} (-1)^i n(i, j) \Bigg] m(\mu).$$

D'après le corollaire du théorème 2,

$$\sum_i (-1)^i \text{ch}_{\mathfrak{s}} H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda)) = \sum_{s \in W(\mathfrak{n})} \det(s)\, m(\lambda(s)).$$

L'indépendance linéaire des $m(\lambda(s))$, pour $s \in W(\mathfrak{n})$, permet d'écrire en comparant les deux expressions précédentes,

$$\sum_{i,j} (-1)^i n(i, j) \neq 0,$$

la sommation étant étendue aux i et j tels que $\mu(i, j) = \lambda(s)$. L'un au moins des $n(i, j)$ étant ainsi $\neq 0$, on a, pour tout $s \in W(\mathfrak{n})$,

$$\text{long}(H^*(\mathfrak{n}, M(\lambda));\, m(\lambda(s))) \geqq 1.$$

D'après le corollaire de la proposition 7, $m(\lambda(s))$ ne peut être un composant simple de $H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ que si $n(s) = i$; pour $s \in W(n;\, i)$, on a donc

$$\text{long}(H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda));\, m((s))) = \text{long}(H^*(\mathfrak{n}, M(\lambda));\, m(\lambda(s))) \geqq 1$$

et, comme d'après le corollaire de la proposition 7.

$$\text{long}(H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda));\, m(\lambda(s))) \leqq 1,$$

on a finalement

$$\text{long}(H^i(n, M(\lambda));\, m(\lambda(s))) = 1.$$

D'autre part, si μ n'est pas de la forme $\lambda(s)$, avec $s \in W(\mathfrak{n}; i)$, le corollaire de la proposition 7 montre que $\operatorname{long}(H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda)); m(\mu)) = 0$. On obtient alors l'expression cherchée de $\operatorname{ch}_{\mathfrak{s}} H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda))$ en écrivant que

$$\operatorname{ch}_{\mathfrak{s}} H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda)) = \sum_{\mu \in p+} \operatorname{long}(H^i(n, M(\lambda)); m(\mu))\, m(\mu).$$

Comme

$$\operatorname{long} H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda)) = \sum_{\mu \in p+} \operatorname{long}(H^i(\mathfrak{n}, M(\lambda)); m(\mu)),$$

la deuxième assertion découle aussitôt de la première.

Q. E. D.

COROLLAIRE (R. BOTT). — *Les notations étant celles du théorème* 3, *soit* $\mathfrak{m}$ *le radical nilpotent de* $\mathfrak{b}$. *On a*

$\dim_K H^i(\mathfrak{m}, M(\lambda))$ = nombre d'éléments s de W transformant i racines négatives en racines positives.

La sous-algèbre réductive de dévissage de $\mathfrak{b}$ étant $\mathfrak{h}$, et les représentations simples de $\mathfrak{h}$ étant de dimension 1, on a

$$\dim_K H^i(\mathfrak{m}, M(\lambda)) = \operatorname{long} H^i(\mathfrak{m}, M(\lambda)).$$

De plus, $W(\mathfrak{m}) = W$. Il suffit alors d'utiliser l'égalité du théorème 3 donnant la longueur de $H^i(\mathfrak{m}, M(\lambda))$.

Q. E. D.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ATIYAH (M. F.). — *Characters and cohomology of finite groups.* — Paris, Presses Universitaires de France, 1961 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 9, p. 23-64).

[2] BOREL (A.) et TITS (J.). — *Groupes réductifs.* — Paris, Presses Universitaires de France, 1965 (*Institut des Hautes Études Scientifiques*, 27, p. 55-152).

[3] BOTT (R.). — Homogeneous vector bundles, *Annals of Math.*, Series 2, t. 66, 1957, p. 203-248.

[4] BOURBAKI (N.). — *Algèbre*; Chap. 6 : *Groupes et corps ordonnés*; Chap. 7 : *Modules sur les anneaux principaux.* — Paris, Hermann, 1952 (*Act. scient. et ind.*, 1179; *Bourbaki*, 14).

[5] BOURBAKI (N.). — *Algèbre*; Chap. 8 : *Modules et anneaux semi-simples.* — Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1261; *Bourbaki*, 23).

[6] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie*; Chap. 1 : *Algèbres de Lie.* — Paris, Hermann, 1960 (*Act. scient. et ind.*, 1285; *Bourbaki*, 26).

[7] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie;* Chap. 3 : *Systèmes de racines* (à paraître).

[8] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie; Algèbres de Lie semi-simples* (à paraître).

[9] Cartan (H.) et Eilenberg (S.). — *Homological algebra.* — Princeton, Princeton University Press, 1956 (*Princeton mathematical Series*, 19).
[10] Grothendieck (A.). — Classes de Chern, *Bull. Soc. math. France*, t. 86, 1958, p. 137-154.
[11] Jacobson (N.). — *Lie algebras.* — New York, Interscience Publishers, 1962 (*Interscience Tracts in pure and applied Mathematics*, 10).
[12] Kostant (B.). — Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem, *Annals of Math.*, Series 2, t. 74, 1961, p. 329-387.
[13] *Séminaire « Sophus Lie »*, 1re année, 1954-1955 : *Théorie des algèbres de Lie, Topologie des groupes de Lie.* — Paris, Secrétariat mathématique, 1955.

(Manuscrit reçu le 12 juin 1967.)

François Aribaud,
134, boulevard Brune,
75-Paris, 14e.