BULLETIN DE LA S. M. F.

J. G. M. MARS

Les nombres de Tamagawa de certains groupes exceptionnels

Bulletin de la S. M. F., tome 94 (1966), p. 97-140

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1966__94__97_0>

Bull. Soc. math. France,
94, 1966, p. 97 à 140.

LES NOMBRES DE TAMAGAWA DE CERTAINS GROUPES EXCEPTIONNELS (1)

PAR

J. G. M. MARS.

0. Énoncé du théorème.

Le but de ce travail est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le nombre de Tamagawa de tout groupe algébrique semi-simple de type F_4 défini sur un corps de nombres algébriques est égal à* 1, *ainsi que le nombre de Tamagawa de tout groupe « spécial » de type E_6.*

Voici ce que nous entendons par groupes spéciaux de type E_6.

Soit G_0 le groupe simplement connexe déployé de type E_6 sur k. Les k-formes de G_0 sont en correspondance biunivoque avec les éléments de $H^1(k, \mathrm{Aut}(G_0))$. Les groupes appelés spéciaux dans l'énoncé du théorème sont les groupes qui correspondent aux éléments de l'image de l'homomorphisme canonique

$$H^1(k, G_0) \rightarrow H^1(k, \mathrm{Aut}(G_0)).$$

Notre méthode de démonstration, qui est essentiellement celle de WEIL [15], permet d'établir le même résultat pour un corps de fonctions algébriques de dimension 1 sur un corps fini dans l'hypothèse que les nombres de Tamagawa en question sont finis et sous réserve de l'exactitude de quelques assertions de géométrie algébrique qui n'ont peut-être pas été démontrées pour un corps non parfait (*cf.* le § 11).

La démonstration utilise la représentation d'un groupe spécial G de type E_6 comme groupe des automorphismes de la forme cubique det d'une algèbre de Jordan exceptionnelle simple réduite X, dont l'algèbre de coefficients est une algèbre d'octaves. Nous démontrons que le nombre

(1) *Thèse,* Faculté des Sciences de l'Université d'Utrecht, 1965.

de Tamagawa de G est égal au nombre de Tamagawa du stabilisateur dans G de tout point de X où l'application det est submersive. Or, si x est un tel point, le stabilisateur de x est un groupe semi-simple de type F_4 [si det $(x) \neq 0$] ou une extension par un groupe unipotent d'un groupe semi-simple simplement connexe du type B_4 [si det $(x) = 0$]. Dans le dernier cas, le nombre de Tamagawa du stabilisateur de x est connu : il est égal à 1.

Le fait qu'on obtient ainsi *tous* les groupes de type F_4 et tous les groupes spéciaux de type E_6 sur les corps de nombres algébriques peut être démontré par voie cohomologique (pour la méthode, *voir* [6], chap. III).

Au chapitre I nous démontrons les résultats nécessaires, relatifs aux orbites et aux sous-groupes de stabilité de G. Le chapitre II contient la démonstration du théorème sans s'occuper de la vérification de certaines conditions de convergence; la vérification de celles-ci, au chapitre III, rend la démonstration complète.

Nous ferons usage des Mémoires de Springer sur les algèbres de Jordan exceptionnelles ([7] à [11]), où nous renvoyons pour les démonstrations des résultats rappelés au chapitre I, § 1. Un résumé des notions adéliques se trouve dans [15], paragraphes 3-4.

Chapitre I.

Les algèbres de Jordan exceptionnelles.

1. Notations et rappels.

On considère une algèbre de Jordan exceptionnelle simple réduite X de dimension 27 sur un corps commutatif K de caractéristique $\neq 2, 3$. C'est-à-dire que X est une algèbre commutative, mais non associative, possédant un élément unité e, et munie d'une forme quadratique non dégénérée Q, telle que les conditions suivantes soient satisfaites :

(*a*) $Q(x^2) = (Q(x))^2$ si $[x, e] = 0$

(on note $[x, y]$ la forme bilinéaire $Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$);

(*b*) $[xy, z] = [x, yz]$;

(*c*) $Q(e) = \frac{3}{2}$;

(*d*) X possède des diviseurs de zéro $\neq 0$;

(*e*) X est simple;

(*f*) la dimension de X sur K est 27.

Les algèbres qui vérifient les conditions (*a*), (*b*), (*c*) ont été étudiées par SPRINGER dans [7]. Tout élément x d'une telle algèbre satisfait à une équation cubique :

$$(1) \qquad x^3 - [x, e]x^2 - (Q(x) - \frac{1}{2}[x, e]^2)x - \det(x)\, e = 0;$$

$x \to \det(x)$ est une forme cubique sur X. La condition (*d*) équivaut à l'existence d'un idempotent $\neq 0$, e, ou encore à l'existence d'un élément $x \neq 0$ tel que $\det(x) = 0$ ([7], lemmes 1 à 3). Si $u^2 = u$, $u \neq 0$, e (1) montre tout de suite qu'on a $Q(u) = \frac{1}{2}$ ou $Q(u) = 1$; si $Q(u) = \frac{1}{2}$, u est appelé idempotent primitif et n'est pas décomposable en une somme de deux idempotents non nuls; si $Q(u) = 1$, $e - u$ est un idempotent primitif.

Soit alors u un idempotent primitif de X. La multiplication par u est une transformation linéaire de X, symétrique par rapport à Q, qui a 0, $\frac{1}{2}$, 1 pour valeurs propres possibles. L'espace vectoriel X se décompose en une somme directe orthogonale

$$X = Ku + K(e-u) + E_0 + E_1,$$

où E_0 est le sous-espace de X formé des éléments x tels que $[x, e] = 0$, $ux = 0$, et où E_1 est le sous-espace des éléments y de X tels que $uy = \frac{1}{2}y$. La condition (*e*) implique que $E_1 \neq 0$ et que $\dim(E_0) > 1$. Pour $x \in E_0$, $y \in E_1$, on a

$$x^2 = Q(x)(e-u),$$

$$y^2 = \frac{1}{2}Q(y)(e+u) + y \circ y,$$

$(y, y') \to y \circ y'$ étant une application bilinéaire symétrique de $E_1 \times E_1$ dans E_0.

On peut trouver $x_1 \in E_0$ tel que $Q(x_1) = \frac{1}{4}$. E_1 est somme directe orthogonale de ses sous-espaces E_+ et E_- formés respectivement des éléments y de E_1 tels que $x_1 y = \frac{1}{4}y$, resp. $x_1 y = -\frac{1}{4}y$. Soit C le sous-espace de E_0 orthogonal à x_1. Si $a_+ \in E_+$ et $a_- \in E_-$ sont choisis de manière à avoir $Q(a_+)Q(a_-) \neq 0$, tout élément de E_- (resp. E_+) s'écrit d'une manière, et d'une seule, sous la forme $a_+ c$ (resp. $a_- c$) avec $c \in C$. C peut être muni d'une structure d'algèbre à composition sur K : le produit $\bigstar$ de cette algèbre et la norme N sont définis par

$$a_+ c \circ a_- c' = \frac{1}{4}Q(a_+ \circ a_-)\, c \bigstar c',$$

$$Q(c) = Q(a_+ \circ a_-)\, N(c),$$

pour c, $c' \in C$. On a alors

$$(a_- c') c = \frac{1}{4} Q(a_-) a_+ (c \star c'),$$

$$(a_+ c) c' = \frac{1}{4} Q(a_+) a_- (\bar{c} \star c').$$

Enfin, les deux formules suivantes sont à ajouter à notre « table de multiplication » :

$$y_+ \circ y_+ = Q(y_+) x_1,$$
$$y_- \circ y_- = -Q(y_-) x_1,$$

si $y_+ \in E_+$, $y_- \in E_-$; et pour Q on a encore

$$Q(a_+ c) = \frac{1}{4} Q(a_+) Q(c), \qquad Q(a_- c') = \frac{1}{4} Q(a_-) Q(c'),$$
$$Q(a_+ \circ a_-) = \frac{1}{4} Q(a_+) Q(a_-).$$

On voit qu'un élément de X est déterminé par la donnée de trois éléments de K et de trois éléments de C, et les formules écrites ci-dessus permettent de définir un isomorphisme de l'algèbre de Jordan X sur une algèbre de matrices hermitiennes d'ordre 3 à coefficients dans l'algèbre à composition C.

Des démonstrations de tout ce qu'on vient de dire se trouvent dans [7].

Rappelons encore que la condition (e) équivaut à l'irréductibilité du polynôme det ([7], theorem 4).

La classe d'isomorphie de l'algèbre à composition C introduite plus haut est indépendante du choix de l'idempotent u et de celui de l'élément x_1; elle ne dépend même que de la classe d'équivalence de la forme cubique det (une démonstration de ce fait se trouve dans [8], § 2). Toute algèbre à composition isomorphe à C s'appelle algèbre de coefficients pour X. L'hypothèse (f) sur la dimension de X n'est qu'une autre façon de dire qu'on suppose que l'algèbre de coefficients de X est une algèbre d'octaves.

Il existe une forme trilinéaire symétrique $(x, y, z) \to [x, y, z]$ et une seule sur $X \times X \times X$ telle qu'on ait $[x, x, x] = \det(x)$ pour tout $x \in X$. Cette forme trilinéaire et la forme bilinéaire associée à Q déterminent une application bilinéaire $(x, y) \to x \times y$ de $X \times X$ dans X par la formule

$$3[x, y, z] = [x \times y, z].$$

On a, pour tout $x \in X$,

$$(x \times x) \times (x \times x) = \det(x) x$$

(pour une démonstration, *voir* [10], p. 260).

Posons, comme dans [11], $R = K(e-u) + E_0$, et soit Q_1 la forme quadratique sur R définie par

$$Q_1(\xi(e-u)+a) = \xi^2 - Q(a) \qquad (\xi \in K,\ a \in E_0).$$

Posons encore $\bar{x} = \xi(e-u) - a$ si $x = \xi(e-u) + a$. R est somme directe orthogonale pour Q_1 de C et du plan hyperbolique $Kv + K\bar{v}$, où $v = \frac{1}{2}(e-u) + x_1$.

Voici quelques formules pour le produit $\times$ (les démonstrations sont immédiates quand on utilise l'expression (4) de [8] pour ce produit)

$$(2) \qquad \begin{cases} u\times u = 0, & u\times x = \frac{1}{2}\bar{x}, \qquad u\times y = 0, \\ x\times x = Q_1(x)\,u, & x\times y = -\bar{x}y, \\ y\times y = y\circ y - \frac{1}{2}Q(y)(e-u) \in R, & \end{cases}$$

si $x\in R$, $y \in E_1$. On déduit tout de suite de ces formules que

$$(3) \qquad \det(z) = \xi Q_1(x) + [x, y\times y],$$

si $z = \xi u + x + y$, $x \in R$, $y \in E_1$.

La notation suivante nous servira au paragraphe 6. Pour x, $y \in X$, soit $\varphi(x, y)$ la transformation linéaire de X définie par

$$\varphi(x, y)(z) = 2y\times(x\times z) - \frac{1}{2}[y, z]\,x - \frac{1}{6}[x, y]\,z;$$

$(x, y) \to \varphi(x, y)$ est une application bilinéaire de $X\times X$ dans l'espace des invariants infinitésimaux de det introduite par FREUDENTHAL dans [2] (où $\varphi(\ ,\ )$ est noté $\langle\ ,\ \rangle$). On a la formule

$$(4) \qquad 2\varphi(x, x\times y) + \varphi(y, x\times x) = 0 \qquad (x, y \in X);$$

c'est la formule (1.23) de [2], et c'est aussi ce qu'on obtient en linéarisant la formule (7) de [10].

Si u est un idempotent primitif de X, on vérifie facilement que $\varphi(u, z) = 0$ équivaut à $z \in R$.

2. **Extension du corps de base; réduction modulo $\mathfrak{p}$.**

Soit L une extension du corps K. Si X_K est une algèbre sur K vérifiant les conditions énumérées au paragraphe 1, toutes les structures de X_K s'étendent de façon évidente à $X_L = L \otimes_K X_K$, et X_L, muni de ces structures, est une algèbre sur L qui vérifie les conditions du paragraphe 1 : le seul point qui n'est pas tout à fait évident, à savoir l'irréductibilité du polynôme det, est démontré dans [7] (lemma 4).

Si k est un corps de nombres algébriques ou un corps de fonctions algébriques de dimension 1 sur un corps fini, si X_k est une algèbre de Jordan possédant les propriétés du paragraphe 1, et si M est un réseau dans X_k, la « réduction modulo $\mathfrak{p}$ » relative au réseau complété $M_{\mathfrak{p}}$ donne, pour presque toute place finie $\mathfrak{p}$ de k, une algèbre de Jordan sur le corps résiduel satisfaisant aux conditions du paragraphe 1 (l'irréductibilité du polynôme det se démontre à l'aide du lemme de Hensel). De plus, en choisissant M convenablement, on peut « réduire » la forme quadratique Q_1 sur R, etc.

3. Le groupe G et ses orbites.

Les notations de ce paragraphe sont celles du paragraphe 1 (exception faite pour le dernier alinéa de ce paragraphe).

Soit Γ le groupe des automorphismes g de l'espace vectoriel sous-jacent à X pour lesquels il existe $\nu(g) \in K^*$ tel qu'on ait

$$\det(g(x)) = \nu(g)\det(x) \quad \text{pour tout } x \in X. \tag{5}$$

$g \to \nu(g)$ est un homomorphisme de Γ dans K^*, dont le noyau sera désigné par G. Au choix d'un idempotent primitif u de X on fait correspondre un homomorphisme γ de K^* dans Γ tel que $\nu \circ \gamma = 1$: pour $t \in K^*$, $\gamma(t)$ est l'application linéaire de X sur lui-même définie par

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma(t)(u) = t^{-1}u, \\ \gamma(t)(x) = tx, \\ \gamma(t)(y) = y, \end{array}\right. \tag{6}$$

($x \in R$, $y \in E_1$). Γ est produit semi-direct de G et de $\gamma(K^*)$. Le déterminant d'une transformation linéaire g appartenant à Γ est $\nu(g)^9$: cela est exact pour $g = \gamma(t)$ et les transformations de G ont déterminant 1, parce que G est engendré par des éléments unipotents (*voir* [11], theorem 1, pour une algèbre d'octaves sans diviseurs de zéro; à peu près la même démonstration s'applique à l'autre cas).

Pour tout $g \in \Gamma$, l'application linéaire $\tilde{g}$ de X dans lui-même définie par

$$[g(x), \tilde{g}(y)] = [x, y] \qquad (x, y \in X)$$

appartient à Γ, et $g \to \tilde{g}$ est un automorphisme d'ordre 2 de Γ; on a $\nu(\tilde{g}) = \nu(g)^{-1}$. La condition (5) équivaut à la suivante :

$$g(x) \times g(y) = \nu(g)\,\tilde{g}(x \times y) \quad \text{pour } x, y \in X \tag{7}$$

([11], propos. 3). Cette formule, jointe à la définition de $\varphi(x, y)$ donnée à la fin du paragraphe 1, fait voir que

$$\varphi(g(x), \tilde{g}(y)) = g \circ \varphi(x, y) \circ g^{-1} \tag{8}$$

si $g \in \Gamma$.

LEMME 1. — *Soit $g \in \Gamma$. Pour que g laisse Ku invariant, il faut et il suffit que $\tilde{g}$ laisse R invariant. Et, si $g(u) = \lambda u$, $\tilde{g}$ induit sur R une similitude de Q_1 de multiplicateur $\lambda\nu(g)^{-1}$.*

Ce lemme se démontre facilement à l'aide de la formule (7) lorsqu'on observe que, d'après les formules (2), $z \times z \in K^* u$ entraîne $z \in R$.

Soit H le sous-groupe de Γ composé des éléments g de Γ tels que $g(R) = R$, et notons f l'application qui, à chaque élément de H, fait correspondre sa restriction à R. SPRINGER a démontré que f applique H sur le groupe $GO^+(Q_1)$ des similitudes directes de la forme quadratique Q_1 sur R. La démonstration donnée dans [11] repose sur une proposition ([11], p. 452) que nous copions :

Pour tout $t \in GO^+(Q_1)$, il existe deux transformations linéaires non singulières u_1, u_2 de E_1 telles qu'on ait

$$u_1(xy) = t(x)\, u_2(y) \qquad (x \in R,\ y \in E_1);$$

u_1, u_2 sont uniques à un facteur scalaire commun près; on a

$$[u_1(y_1),\ u_2(y_2)] = \sigma[y_1,\ y_2],$$

avec $\sigma \in K^*$.

On voit facilement que l'application qui, à tout $t \in GO^+(Q_1)$, fait correspondre la classe dans K^*/K^{*2} de l'élément σ, est un homomorphisme de $GO^+(Q_1)$ dans K^*/K^{*2}; on l'appellera ici la *norme spinorielle* et notera $GO'(Q_1)$ le groupe des éléments de $GO^+(Q_1)$ de norme spinorielle 1. La restriction à $O^+(Q_1)$ de cette norme spinorielle est la norme spinorielle usuelle.

Soit $t \in GO^+(Q_1)$, et soient u_1 et σ comme plus haut. L'application linéaire g telle que

$$g(u) = \sigma u, \qquad g(x) = t(x) \qquad (x \in R),$$
$$g(y) = u_1(y) \qquad (y \in E_1)$$

appartient à $f^{-1}(t)$, et $\nu(g) = \sigma\varkappa$ si $\varkappa$ est le multiplicateur de t. Le noyau de f se compose des transformations g de la forme

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} g(u) = \lambda^2 u - \lambda^{-2}\,\overline{c \times c} + c, \\ g(x) = x, \\ g(y) = -2\lambda^{-1}\,\overline{y \times c} + \lambda y, \end{array} \right.$$

avec $\lambda \in K^*$, $c \in E_1$. Pour une telle transformation g on a $\nu(g) = \lambda^2$. Il résulte de ce qu'on vient de dire que $f(H \cap G)$ est l'ensemble des $t \in GO^+(Q_1)$ tels que la classe dans K^*/K^{*2} du multiplicateur de t soit identique à la norme spinorielle de t.

Cherchons maintenant les orbites de G et de Γ dans X.

(a) Soient x_1, $x_2 \in X$ tels que $\det(x_1)\det(x_2) \neq 0$. D'après un résultat de SPRINGER ([10], propos. 4), il existe $g \in \Gamma$ tel que $g(x_1) = x_2$ si et seulement si les formes quadratiques $\det(x_1)^{-1}[x, x, x_1]$ et $\det(x_2)^{-1}[x, x, x_2]$ sont équivalentes. Or, la forme $3\det(x_1)^{-1}[x, x, x_1]$ est équivalente à une forme

$$(10) \qquad \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3 - \gamma_1 N(c_1) - \gamma_2 N(c_2) - \gamma_3 N(c_3),$$

où N désigne de nouveau la norme de l'algèbre d'octaves C et où γ_1, γ_2 γ_3 sont des constantes telles que $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 1$; on peut, en effet, munir l'espace vectoriel X d'une nouvelle structure d'algèbre de Jordan qui a x_1 pour élément unité et qui a un multiple scalaire de det pour forme cubique (SPRINGER [10], § 3 (a)), de sorte qu'il suffit de calculer $[x \times x, e]$. Quand on calcule, un peu plus généralement, $[x \times x, u + \beta v + \gamma \bar{v}]$, on voit en même temps que toute classe d'équivalence de formes du type (10) est en effet représentée. Donc :

PROPOSITION 1. — *Les orbites de* Γ *dans le sous-ensemble des* $x \in X$ *tels que* $\det(x) \neq 0$ *sont en correspondance biunivoque avec les classes d'équivalence des formes quadratiques du type* (10). *Pour tout* $i \in K^*$, *chacune de ces orbites de* Γ *contient exactement une orbite de* G *sur laquelle* det *prend la valeur* i.

Nous notons $U(i)$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $\det(x) = i$ ($i \in K^*$). Si l'algèbre C est décomposée, c'est-à-dire si sa norme N est hyperbolique, il n'y a qu'une seule classe d'équivalence de formes du type (10); donc, l'ensemble des $x \in X$ tels que $\det(x) \neq 0$ est une orbite de Γ, et, pour tout $i \in K^*$, $U(i)$ est une orbite de G. Si $K = \mathbf{R}$ et si C est sans diviseurs de zéro, N est définie positive et il y a deux classes de formes du type (10); par conséquent, $U(i)$ est réunion de deux orbites de G, et l'ensemble des x tels que $\det(x) \neq 0$ est réunion de deux orbites de Γ.

Si K est un corps de nombres algébriques, désignons par $\varkappa$ le nombre de places de K où l'algèbre d'octaves ne se décompose pas; ces places sont toutes infinies réelles. Le nombre de classes d'équivalence de formes (10) est alors $2^\varkappa$, de sorte que G a $2^\varkappa$ orbites distinctes dans chaque $U(i)$.

(b) Soit V l'ensemble des éléments x de X tels que $x \times x = 0$, $x \neq 0$. Tout élément de V est, soit un multiple scalaire d'un idempotent primitif, soit un nilpotent ([8], lemma 1). Si x_1, x_2 sont deux éléments de V, il existe toujours $g \in G$ et $\lambda \in K^*$ tels que $g(x_1) = \lambda x_2$: on peut prendre pour g une transvection (SPRINGER [11], propos. 5 (c)). Et, pour qu'il existe un élément h de G tel que $h(x_1) = \lambda x_1$ (où λ est donné), il faut et il suffit que λ soit norme d'un élément de C^*. Supposons, en effet, que x_1 est un idempotent primitif u (il suffit évidemment de considérer ce cas). Si $h \in G$ applique u en λu, $\tilde{h}$ induit une similitude de la forme quadratique Q_1 sur R de multiplicateur λ (lemme 1), et λ est par conséquent norme d'un élément de C^* (puisque λN est alors équivalente à N). La réciproque est démontrée dans [11] (lemma 4) (pour une algèbre C sans diviseurs de zéro; pour une algèbre C décomposée, c'est plus facile : lemma 3 de [11] reste évidemment valable et lemma 4 s'ensuit). On en conclut :

PROPOSITION 2. — *Les orbites de G dans V sont en correspondance bijective avec les classes de K^* suivant $N(C^*)$. Γ opère transitivement sur V.*

En particulier, le nombre d'orbites de G dans V est égal à 1 si C est décomposée, est égal à 2 si $K = \mathbf{R}$, C sans diviseurs de zéro, et est égal à $2^{\varkappa}$ si K est un corps de nombres algébriques.

(c) Considérons l'ensemble $U(0) = \{x \in X : \det(x) = 0,\ x \times x \neq 0\}$. Soit $x_i \in U(0)$, et posons $y_i = x_i \times x_i$ $(i = 1, 2)$. Alors $y_i \in V$. Si $g \in \Gamma$ est tel que $g(x_1) = x_2$, on a $\tilde{g}(y_1) = \nu(g)^{-1} y_2$. Réciproquement, si $\tilde{g}(y_1) = \nu(g)^{-1} y_2$, on a $g(x_1) \times g(x_1) = x_2 \times x_2$.

Cherchons d'abord les orbites de G. Soit u un idempotent primitif. Il résulte de (b) et du fait que $z \times z \in K^* u$ entraîne $z \in R$ que, après avoir effectué des transformations de G, on aura $x_1, x_2 \in R$, $Q_1(x_1)\, Q_1(x_2) \neq 0$. D'après le lemme 1, tout élément de G qui transforme x_1 en x_2 appartient au groupe H des éléments de Γ qui laissent R invariant; et la première partie de ce paragraphe montre que, pour que x_1 et x_2 appartiennent à une même orbite de G, il faut et il suffit qu'il existe $t \in GO^+(Q_1)$ tel que $t(x_1) = x_2$ et tel que la classe dans K^*/K^{*2} du multiplicateur de t soit identique à la norme spinorielle de t. Soit $x_0 \in R$, $Q_1(x_0) \neq 0$, et considérons l'ensemble F des $x \in R$ tels que $Q_1(x) \in Q_1(x_0)\, N(C^*)$; c'est une orbite pour $GO^+(Q_1)$. Soit M le stabilisateur de x_0 dans $O^+(Q_1)$. Si $\sigma(t)$ et $\varkappa(t)$ désignent respectivement la norme spinorielle de t et la classe dans K^*/K^{*2} du multiplicateur de t $(t \in GO^+(Q_1))$, l'application $t \to \sigma(t)\, \varkappa(t)^{-1}$ définit par passage aux quotients une application surjective :

$$GO^+(Q_1)/M \to (K^*/K^{*2})/\sigma(M);$$

le premier de ces deux ensembles s'identifie de manière évidente à l'ensemble F, et il résulte immédiatement de ce qu'on a dit plus haut que deux éléments de F ont même image dans $(K^*/K^{*2})/\sigma(M)$ si et seulement s'ils sont conjugués par un élément de G.

PROPOSITION 3. — *Choisissons pour toute classe α de K^* suivant $N(C^*)$ un élément $x_\alpha \in R$ tel que $Q_1(x_\alpha) \in \alpha$, et soit M_α le stabilisateur de x_α dans $O^+(Q_1)$. L'ensemble des orbites de G dans $U(0)$ est en correspondance bijective avec la réunion disjointe des ensembles $(K^*/K^{*2})/\sigma(M_\alpha)$, où σ désigne la norme spinorielle, α parcourant l'ensemble $K^*/N(C^*)$. L'ensemble* *des orbites de* Γ *dans* $U(0)$ *est en correspondance bijective avec l'ensemble* $K^*/N(C^*)$.

La dernière assertion résulte de ce que l'ensemble F considéré plus haut est une orbite pour $GO^+(Q_1)$.

La proposition 3 montre que $U(0)$ est une orbite de G si C est décomposée. $U(0)$ comprend trois orbites de G si $K = \mathbf{R}$, C sans diviseurs de zéro : si x_+, $x_- \in \mathrm{R}$ sont tels que $Q_1(x_+) > 0$, $Q_1(x_-) < 0$, la forme induite par Q_1 sur le sous-espace orthogonal à x_α est définie pour $x_\alpha = x_+$ et est d'indice 1 pour $x_\alpha = x_-$, ou inversement; donc, pour l'un des deux M_α on a $\sigma(M_\alpha) = \{\mathbf{R}_+^*\}$ et pour l'autre $\sigma(M_\alpha) = \mathbf{R}^*/\mathbf{R}_+^*$. Si K est un corps de nombres algébriques, G a $3^\varkappa$ orbites dans $U(0)$. Pour montrer cela, on prend x_α de la forme $av + \bar{v}(a \in K^*, v, \bar{v}$ comme au paragraphe 1); M_α est alors le groupe des rotations de la forme quadratique $-a\xi^2 + Q_1(C)$; si cette forme est définie (positive ou négative) à j places réelles de K, le théorème de Hasse pour les formes quadratiques montre que K^*/K^{*2} se compose de 2^j classes suivant $\sigma(M_\alpha)$; il y a donc $\sum_{j=0}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{j} 2^j = 3^\varkappa$ orbites.

On observera que, chaque fois que K est un corps localement compact non discret, G n'a qu'un nombre fini d'orbites dans chacun des ensembles $U(i)$ $(i \in K)$, V, et que ces orbites sont ouvertes dans $U(i)$, resp. V.

Si k est un corps de nombres algébriques ou un corps de fonctions algébriques de dimension 1 sur un corps fini, et si X_k est une algèbre de Jordan exceptionnelle sur k, notons X_A l'espace adélique attaché à X_k et notons G_k (resp. G_A) le groupe des automorphismes de la forme cubique det sur X_k (resp. le groupe adélique correspondant, c'est-à-dire le groupe adélique attaché au groupe *algébrique* des automorphismes de det). Les raisonnements précédents montrent alors que deux éléments de X_k sont conjugués par un élément de G_k si et seulement s'ils sont conjugués par un élément de G_A et que chaque orbite de G_A dans X_A sur laquelle la forme det prend une valeur $i \in k$, contient un point de X_k.

4. Les sous-groupes de stabilité.

Dans la première partie de ce paragraphe les notations sont celles des paragraphes 1 et 3.

Il nous faudra connaître la structure des groupes de stabilité, dans Γ et dans G, de tous les éléments de X.

Soit $x_0 \in X$.

1° Si $\det(x_0) \neq 0$, on peut changer la structure d'algèbre de Jordan sur l'espace vectoriel X comme cela a été dit déjà au paragraphe 3 : x_0 devient élément unité et la nouvelle forme cubique est un multiple de det. Le groupe de stabilité de x_0, dans G ou dans Γ, est identique au groupe des automorphismes de la nouvelle algèbre de Jordan.

2° Supposons $\det(x_0) = 0$, $x_0 \times x_0 \neq 0$, et supposons de plus, ce qui est licite, que $x_0 \in R$. Les éléments de Γ qui laissent x_0 invariant, laissent R invariant et leurs restrictions à R sont des rotations de Q_1. Une nouvelle application des résultats mentionnés dans la première partie du paragraphe 3 montre que le groupe de stabilité Γ_0 de x_0 dans Γ est une extension du groupe de stabilité de x_0 dans $O^+(Q_1)$ par le groupe B des $g \in \Gamma$ tels que la restriction $g \mid R$ de g à R soit l'identité; autrement dit, on a une suite exacte

$$1 \to \mathrm{B} \to \Gamma_0 \to O^+(Q_0) \to 1, \tag{11}$$

où Q_0 désigne la restriction de Q_1 au sous-espace de R orthogonal à x_0. Les éléments de B sont les transformations de la forme (9) (§ 3). L'image de $\Gamma_0 \cap G$ dans $O^+(Q_0)$ est le groupe orthogonal réduit $O'(Q_0)$.

3° Soit $x_0 \times x_0 = 0$, $x_0 \neq 0$. Il suffit de considérer un idempotent primitif $x_0 = u$. D'après le lemme 1, pour qu'un élément g de Γ laisse u invariant, il faut et il suffit que $\tilde{g}$ laisse R invariant et que $\tilde{g}$ induise sur R une similitude de multiplicateur $\nu(g)^{-1}$. L'application $g \to \tilde{g} \mid R$ définit un homomorphisme du groupe de stabilité Γ_u de u dans Γ sur le groupe $GO'(Q_1)$; le noyau de cet homomorphisme est l'image par $g \to \tilde{g}$ de $\mathrm{B} \cap G$, B étant le groupe des transformations (9); $B \cap G$ est formé des transformations (9) avec $\lambda = \pm 1$. Il y a donc une suite exacte

$$1 \to B \cap G \to \Gamma_u \to GO'(Q_1) \to 1. \tag{12}$$

L'image de $\Gamma_u \cap G$ dans $GO'(Q_1)$ est $O'(Q_1)$.

Les remarques 1° à 3° permettent de déterminer la structure des stabilisateurs en tant que groupes algébriques.

Dans le reste de ce paragraphe, on suppose donnés un corps de base parfait k et une algèbre de Jordan exceptionnelle X_k sur k (possédant les propriétés habituelles), et l'on note X la variété algébrique définie sur k correspondante (pour rapprocher cette notation de celle qu'on a suivie jusqu'à présent, on pourrait considérer X comme étant l'algèbre de Jordan $K \otimes_k X_k$ sur une extension algébriquement close K de k). Γ sera le groupe *algébrique* des similitudes de la forme det, ν l'homomorphisme de Γ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$, G le noyau de ν, etc. On sait que G est un groupe algébrique semi-simple de type E_6 ([11], theorem 3).

Soit $x_0 \in X_k$. Le stabilisateur de x_0 dans Γ (resp. dans G) est un sous-groupe k-fermé de Γ (resp. de G).

Si $\det(x_0) \neq 0$, la remarque 1° ci-dessus et le numéro 3(*a*) de [10] montrent que le stabilisateur de x_0 est le groupe des automorphismes d'une algèbre de Jordan définie sur k. Ce stabilisateur est donc un groupe algébrique semi-simple de type F_4 ([11], theorem 3).

Si $\det(x_0) = 0$, $x_0 \times x_0 \neq 0$, on a la suite exacte (11), où les groupes et les homomorphismes sont définis sur k. Γ_0 est un groupe connexe et son radical est B. C'est, entre autres, le module algébrique de Γ_0 qui nous intéresse. Rappelons que le module algébrique Δ d'un groupe algébrique connexe H défini sur k peut être déterminé au moyen de la formule

$$\omega(a^{-1}xa) = \Delta(a)\,\omega(x),$$

où ω est n'importe quelle jauge sur H (*voir* [15], § 4).

Le module algébrique de Γ_0 peut être calculé dans le radical B de Γ_0. Les transformations de B sont de la forme (9); si $t(\lambda)$ [resp. $u(c)$] est la transformation (9) avec $c = 0$ (resp. $\lambda = 1$), on a $t(\lambda)^{-1}u(c)\,t(\lambda) = u(\lambda c)$, Comme le déterminant de la transformation $c \to \lambda c$ de E_1 est $\lambda^{16} = \nu(t(\lambda))^8$. le module de Γ_0 est le caractère $g \to \nu(g)^8$ de ce groupe.

Le groupe $B \cap G$ a deux composantes connexes dont l'une est un groupe unipotent. Le groupe $\Gamma_0 \cap G$ est pourtant connexe. Pour le voir, il suffit de produire un sous-groupe connexe de $\Gamma_0 \cap G$ qui contient la transformation (9) avec $c = 0$, $\lambda = -1$. Comme, d'après la proposition 3, les éléments x de R tels que $Q_1(x) \neq 0$ sont tous conjugués pour G, leurs stabilisateurs sont conjugués dans G (sur une clôture algébrique de k) et il suffit de prouver la connexion de l'un quelconque de ces stabilisateurs. On a donc le droit de remplacer x_0 par un élément de C (qui n'est plus nécessairement rationnel sur k). Le groupe S des transformations $u \to u$, $v \to \mu^2 v$, $\bar{v} \to \mu^{-2}\bar{v}$, $c \to c$, $y_+ \to \mu y_+$, $y_- \to \mu^{-1} y_-$ est alors contenu dans le stabilisateur de x_0 dans G, est connexe et rencontre les deux composantes de $B \cap G$.

La connexion de $\Gamma_0 \cap G$ étant démontrée, on en déduit que $\Gamma_0 \cap G$ est une extension du groupe « spin » d'une forme quadratique en 9 variables par un groupe unipotent.

Le dernier cas à examiner est celui où $x_0 = u$. On a la suite exacte (12). L'image par $g \to \tilde{g}$ du tore S considéré dans le cas précédent est contenue dans $\Gamma_u \cap G$; Γ_u et $\Gamma_u \cap G$ sont donc connexes. Le radical de Γ_u est produit semi-direct de la composante connexe de $B \cap G$ et du tore formé des transformations $u \to u$, $x \to \lambda^2 x$, $y \to \lambda y$. Le module de Γ_u se trouve être identique au caractère $g \to \nu(g)^4$ de Γ_u. Le stabilisateur $\Gamma_u \cap G$ de x_0 dans G est une extension du groupe $\mathrm{Spin}(Q_1)$ par un groupe unipotent.

5. Corps finis.

Soit K un corps fini à q éléments (et de caractéristique $\neq 2,3$). On veut calculer le nombre d'éléments de chacun des ensembles $U(i)$ $(i \in K)$, V, introduits au paragraphe 3.

Choisissons un idempotent primitif u. Pour $z = \xi u + x + y$ ($\xi \in K$, $x \in R$, $y \in E_1$), on a

$$z \times z = Q_1(x)\, u + y \times y + \xi \bar{x} - 2 \bar{x} y \tag{13}$$

[formules (2) du § 1], et $z \times z = 0$ équivaut à

$$\begin{cases} Q_1(x) = 0, \\ y \times y + \xi \bar{x} = 0, \\ \bar{x} y = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Les solutions de ce système d'équations se divisent en trois types :

(*a*) $\xi \neq 0$, $x = -\xi^{-1} \overline{y \times y}$, y quelconque; le nombre de ces solutions est $q^{16}(q-1)$;

(*b*) $\xi = 0$, $y \times y = 0$, $y \neq 0$, $\bar{x} y = 0$;

(*c*) $\xi = 0$, $y = 0$, $Q_1(x) = 0$; parmi celles-ci il y a $(q^5 - 1)(q^4 + 1)$ solutions non nulles.

Utilisant les notations du paragraphe 1, posons

$$\bar{x} = \eta v + \zeta \bar{v} + c, \qquad y = a_+ c' + a_- c'' \qquad (\eta, \zeta \in K;\ c, c', c'' \in C).$$

Alors, d'après les formules du paragraphe 1, on a

$$\begin{cases} y\bar{x} = \frac{1}{2} \eta a_- c'' + \frac{1}{2} \zeta a_+ c' + \alpha_1 a_-(\bar{c}' \star c) + \alpha_2 a_+(c \star \bar{c}''), \\ y \times y = \beta_1 N(c')\, v + \beta_2 N(c'')\, \bar{v} + \beta_3 c' \star c'', \end{cases} \tag{15}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ sont des constantes appartenant à K^* qui dépendent de a_+ et a_-. Pour calculer le nombre des solutions (*b*), nous démontrons un lemme.

LEMME 2. — *Supposons donné un élément y de E tel que $y \times y = 0$, $y \neq 0$. Alors les éléments x de R tels que $\bar{x} y = 0$ forment un sous-espace linéaire de R de dimension 5.*

Écrivons, en effet, x et y comme ci-dessus; la condition $y \times y = 0$ s'exprime par

$$c' \star c'' = 0, \qquad N(c') = N(c'') = 0,$$

et l'équation $\bar{x} y = 0$ s'écrit

$$\alpha_1 \bar{c}' \star c = -\frac{1}{2} \eta c'', \qquad \alpha_2 c \star \bar{c}'' = -\frac{1}{2} \zeta c'. \tag{16}$$

Comme $y \neq 0$, c' et c'' ne sont pas tous deux nuls, et pour des raisons de symétrie il suffira de considérer le cas où l'on a $c' \neq 0$. Choisissant alors $a \in C$ tel que $c'' = \bar{c}' \star a$ [ce qui est possible parce que $c' \star c'' = 0$, $N(c') = 0$], la première des équations (16) est équivalente à

$$c \in -\frac{1}{2}\alpha_1^{-1}\eta a + c' \star C.$$

Si $c = -\frac{1}{2}\alpha_1^{-1}\eta a + c' \star b$, on a

$$c \star \bar{c}'' = -\frac{1}{2}\alpha_1^{-1}\eta N(a) c' + c' \star (b \star \bar{a}) \star c';$$

comme $c' \star C \star c' = Kc'$, il existe alors un élément ζ de K et un seul tel que $\alpha_2 c \star \bar{c}'' = -\frac{1}{2}\zeta c'$. La dimension de l'espace des solutions (η, ζ, c) de (16) est donc égale à $1 + \dim c' \star C = 5$, et le lemme 2 est démontré (pour les résultats concernant l'algèbre d'octaves C qu'on utilise dans ce paragraphe et le suivant, *voir* [12]).

Le nombre des $y \in E_1$ tels que $y \times y = 0$, $y \neq 0$, est facile à calculer : il y a $(q^4 - 1)(q^3 + 1)$ éléments c' de C tels que $N(c') = 0$, $c' \neq 0$, et pour chacun de ces éléments c', il y a q^4 éléments c'' tels qu'on ait $c' \star c'' = 0$, $N(c'') = 0$, puisque ces éléments sont de la forme $c'' = \bar{c}' \star a$, avec $a \in C$. Le nombre cherché est donc $(q^4 + 1)(q^4 - 1)(q^3 + 1) = (q^8 - 1)(q^3 + 1)$. Compte tenu du lemme 2, cela donne pour le nombre des solutions du type (*b*) de l'équation $z \times z = 0$:

$$q^5(q^8 - 1)(q^3 + 1).$$

Au total, le nombre des $z \in X$ tels que $z \times z = 0$, $z \neq 0$, est

$$(q^8 + q^4 + 1)(q^9 - 1).$$

Pour calculer le nombre des $z \in X$ tels que $\det(z) = i$ $(i \in K)$, on utilise la formule (3) du paragraphe 1. Si $Q_1(x) \neq 0$, ξ est déterminé par x et y; cela donne $q^{20}(q - 1)(q^5 - 1)$ solutions. Pour $Q_1(x) = 0$, l'équation se réduit à

$$[x, y \times y] = i.$$

Si $i \neq 0$, *cela entraîne* $y \times y \neq 0$. Il résulte des calculs faits ci-dessus qu'il y a $q^3(q^5 - 1)(q^8 - 1)$ éléments $y \in E_1$ tels que $y \times y \neq 0$. Choisissant un tel y, $y \times y$ est un vecteur isotrope pour Q_1, et le nombre des x tels que $Q_1(x) = 0$, $[x, y \times y] = i$, est q^8. Il y a donc $q^{12}(q^5 - 1)(q^8 - 1)$ solutions pour lesquelles on a $Q_1(x) = 0$.

Si, au contraire, $i = 0$, il y a deux cas à distinguer, à savoir le cas où $y \times y \neq 0$ et le cas contraire. Il y a $q^3(q^5 - 1)(q^8 - 1)$ éléments y tels que $y \times y \neq 0$, et à un tel y correspondent $q^8 + q^5 - q^4$ éléments x.

Et il y a $q^{11}+q^8-q^3$ éléments y tels que $y\times y=0$, à chacun desquels correspondent $q^9+q^5-q^4$ éléments x. Cela donne

$$q.(q^8+q^5-q^4).q^3(q^5-1)(q^8-1)+q.(q^9+q^5-q^4).(q^{11}+q^8-q^3)$$

solutions de $\det(z)=0$ pour lesquelles on a $Q_1(x)=0$.

On trouve finalement pour le nombre d'éléments de $U(i)$:

$$\begin{array}{ll} q^{12}(q^5-1)(q^9-1) & \text{si } i\neq 0, \\ q^4(q^8+q^4+1)(q^5-1)(q^9-1) & \text{si } i=0. \end{array}$$

Une partie de ces résultats se trouve dans ([4], § 4).

6. Congruences modulo π^n.

Dans ce paragraphe, K est un corps complet pour une valuation discrète à corps résiduel fini. On suppose naturellement que K n'est pas discret et que 6 est une unité dans K. Soit π une uniformisante de K, et soit q le nombre d'éléments du corps résiduel de K.

Dans les lemmes 3 et 5 ci-après on suppose qu'on s'est donné un réseau dans X tel que tout « se réduise bien » modulo π; dans le cas du lemme 3, par exemple, cela veut dire que, après réduction modulo π, il vient une algèbre de Jordan sur le corps résiduel qui vérifie les conditions (*a*) à (*f*) du paragraphe 1; il existe toujours de tels réseaux, mais peu nous importe ici : nous n'avons à appliquer le lemme 3 (ainsi que le lemme 5, d'ailleurs) qu'à « presque tout » complété d'un corps de nombres algébriques ou de fonctions algébriques.

LEMME 3.

(*a*) *Le nombre des solutions modulo* π^n *de la congruence*

$$x\times x\equiv 0 \quad (\pi^n), \qquad x\not\equiv 0 \quad (\pi) \tag{17}$$

est

$$A_n=q^{17(n-1)}(q^8+q^4+1)(q^9-1) \qquad (n>0).$$

(*b*) *Le système*

$$x\times x\equiv 0 \quad (\pi^n), \qquad x\not\equiv 0(\pi), \qquad \det(x)\equiv\alpha\pi^{2n} \quad (\pi^{2n+1}), \tag{18}$$

où $n>0$, *a* $B_n(\alpha)$ *solutions modulo* π^{n+1},

$$\begin{array}{ll} B_n(\alpha)=A_n.q^{17}(q^9+q^5-q^4) & \text{si } \alpha\equiv 0(\pi), \\ B_n(\alpha)=A_n.q^{17}(q^9-q^4) & \text{si } \alpha\not\equiv 0 \quad (\pi). \end{array}$$

Démonstration. — A_1 a été calculé au paragraphe 5. Soit x_0 une solution de (17). Pour que $x_0+\pi^n x$ satisfasse à la congruence (17) avec $n+1$ au lieu de n, il faut et il suffit qu'on ait

$$x_0\times x\equiv -\frac{1}{2}\pi^{-n}x_0\times x_0 \quad (\pi).$$

D'après la formule (4) du paragraphe 1, on a $\varphi\left(x_0, -\frac{1}{2}\pi^{-n}x_0\times x_0\right)=0$. On a donc à résoudre une équation du type $a\times x = b$ sur le corps $\mathbf{F}_q$ où a et b vérifient les conditions $a\times a = 0$, $a\neq 0$, $\varphi(a, b) = 0$. Or, on a le lemme suivant (valable pour une algèbre de Jordan exceptionnelle X sur un corps quelconque de caractéristique $\neq 2,3$).

LEMME 4. — *Si a et b sont deux éléments de X tels que $a\times a = 0$, $a\neq 0$, $\varphi(a, b) = 0$, les solutions de l'équation $a\times x = b$ forment une variété linéaire de dimension* 17.

Il suffit de démontrer cela pour un idempotent primitif a : si a était nilpotent, on changerait la multiplication dans X comme cela a été expliqué au paragraphe 5 de [8]; le nouveau produit est $(x, y)\to g^{-1}(g(x)\,g(y))$, où $g\in\Gamma$ est choisi de telle manière que $g(a)$ soit un idempotent primitif de X; l'équation $a\times x = b$ se transforme en une équation du même type pour la nouvelle structure d'algèbre de Jordan sur X, les conditions sur a et b restant également du même type, comme on le voit facilement à l'aide des formules (7) et (8) du paragraphe 3, mais a est maintenant un idempotent primitif.

Soit donc $a = u$ un idempotent primitif. Comme on l'a remarqué à la fin du paragraphe 1, $\varphi(a, b) = 0$ entraîne que $b\in R$. Les solutions de l'équation $a\times x = b$ sont alors les éléments de la variété linéaire $2\,\overline{b} + Ku + E_1$ [form. (2)].

Le lemme 4 est démontré, et la partie (*a*) du lemme 3 aussi.

Prouvons (*b*). Soit x_0 tel que $x_0\times x_0\equiv 0(\pi^n)$, $x_0\not\equiv 0(\pi)$. Pour que $x' = x_0 + \pi^n x$ satisfasse à $\det(x')\equiv\alpha\pi^{2n}(\pi^{2n+1})$, il faut et il suffit qu'on ait

$$[x\times x, x_0] + [x, \pi^{-n}x_0\times x_0] + \pi^{-2n}\det(x_0)\equiv\alpha\quad(\pi).$$

C'est-à-dire qu'on doit résoudre une équation sur $\mathbf{F}_q$ du type

$$[x\times x, a] + [x, b] + \gamma = \alpha, \tag{19}$$

où $a\times a = 0$, $a\neq 0$, $\varphi(a, b) = 0$, $b\times b = \gamma a$. Ici encore, il suffit de considérer le cas où a est un idempotent primitif u. On a alors $b\in R$, $\gamma = Q_1(b)$, et (19) s'écrit, si x_R est la composante de x dans R :

$$Q_1\left(x_R + \overline{b}\right) = \alpha.$$

Il y a $q^9 - q^4$, resp. $q^9 + q^5 - q^4$, choix possibles pour x_R à mesure que $\alpha\neq 0$, resp. $\alpha = 0$, d'où le lemme 3 (*b*).

LEMME 5. — *Pour $y\in E_1$, la congruence $y\times y\equiv 0(\pi^n)$, $y\not\equiv 0(\pi)$ a $q^{11(n-1)}(q^8 - 1)(q^3 + 1)$ solutions modulo π^n ($n > 0$).*

Démonstration. — Posant $y = a_+ c' + a_- c''$, on a à résoudre le système de congruences

$$c' \bigstar c'' \equiv 0 \quad (\pi^n), \qquad N(c') \equiv N(c'') \equiv 0 \qquad (\pi^n),$$

où c' et c'' ne doivent pas être tous deux $\equiv 0(\pi)$. Lorsque c' est choisi de manière que $N(c') \equiv 0(\pi^n)$, $c' \not\equiv 0(\pi)$, c'' doit être de la forme $c'' = \bar{c}' \bigstar a + \pi^n b$ $(a, b \in C)$; c'est-à-dire que pour c'' il y a q^{4n} classes modulo π^n possibles, parmi lesquelles il y en a $q^{4(n-1)}$ qui sont $\equiv 0(\pi)$ [parce que $\bar{c}' \bigstar a \equiv 0(\pi)$ entraîne qu'il existe $d \in C$ tel que $\bar{c}' \bigstar a \equiv \pi \bar{c}' \bigstar d(\pi^n)$]. Le lemme 5 s'en déduit aussitôt.

Chapitre II.

Démonstration du théorème.

7. Notations.

Dans ce chapitre et le suivant, k sera un corps de nombres algébriques (pour les corps de fonctions algébriques, *voir* le § 11). Le complété de k pour une place v de k est noté k_v, l'anneau des adèles de k est noté A. On choisit, une fois pour toutes, un caractère χ du groupe additif de A tel que le bicaractère $\chi(xy)$ mette A en dualité avec lui-même et cela de telle manière que le sous-groupe discret k de A se corresponde à lui-même par dualité. Les caractères χ_v sur k_v sont alors définis par la formule

$$\chi(x) = \prod_v \chi_v(x_v) \qquad \text{si} \quad x = (x_v) \in A.$$

Chaque fois que Z est une variété algébrique définie sur k, on désignera par Z_v l'ensemble des points de Z rationnels sur k_v et par Z_v^0 le sous-ensemble de Z_v formé des points « à coordonnées entières ». Si ω est une jauge sur Z, et si $\lambda = (\lambda_v)$ est un système de facteurs de convergence pour Z, on note $|\lambda\omega|_A$ la mesure de Tamagawa sur l'espace adélique Z_A déduite de ω et λ.

X_k sera une algèbre de Jordan exceptionnelle sur k possédant les propriétés énumérées au chapitre I, § 1, et X sera la variété algébrique définie sur k correspondante. G et Γ sont le groupe algébrique des automorphismes et le groupe algébrique des similitudes de la forme cubique det; pour tout $i \in k$, $U(i)$ est le sous-ensemble algébrique de X défini par $\det(x) = i$, $x \times x \neq 0$, et V est le sous-ensemble algébrique de X défini par $x \times x = 0$, $x \neq 0$. On a vu au chapitre I que les orbites par G des points de X_k sont les $U(i)$ $(i \in k)$, V et $\{0\}$.

8. **L'intégrale** $I(\Phi)$.

Soit $\xi \in X_k$, $\xi \neq 0$, et soit H le stabilisateur de ξ dans G. H est un groupe algébrique défini sur k, et la variété G/H est isomorphe à l'orbite U de ξ par G. Plus précisément, l'application $\varphi : g \to g(\xi)$ de G sur l'orbite de ξ définit par passage au quotient un k-isomorphisme de G/H sur U. Les résultats du chapitre I, § 3, montrent que l'ensemble U_A est réunion d'un nombre fini d'orbites de G_A qui sont toutes ouvertes dans U_A; de plus, chaque orbite de G_A dans U_A contient un point de X_k, et deux points de X_k appartiennent à une même orbite pour G_k si et seulement s'ils appartiennent à une même orbite pour G_A. On en conclut d'abord que l'application adélique attachée à φ applique G_A sur un ouvert de U_A, de sorte qu'il existe trois systèmes de facteurs de convergence (λ_v) (μ_v), (ν_v), pour G, H, U respectivement, tels que $\lambda_v = \mu_v \nu_v$; et de plus, si dg, dh sont des jauges invariantes sur les groupes G, H et si dg/dh est la jauge invariante par G sur U qui s'en déduit (G et H sont unimodulaires), on a

$$|\lambda\, dg|_A = |\nu\, dg/dh|_A |\mu\, dh|_A$$

(on démontre cela comme le théorème 2.4.4 de [13]). Or, les résultats du paragraphe 5 montrent que toutes les variétés $U(i)$, V admettent (1) comme système de facteurs de convergence (*voir* [13], theorem 2.2.5). Comme, par exemple, le stabilisateur d'un point de $U(0)_k$ admet les facteurs de convergence (1), (1) est un système de facteurs de convergence pour G et pour les stabilisateurs de tous les points de X_k.

Pour $F \in L^1(G_A/H_k)$, on a

$$\int_{G_A/H_A} |\theta|_A \int_{H_A/H_k} F(gh)\,|dh|_A = \int_{G_A/G_k} \sum_{G_k/H_k} F(g\gamma)\,|dg|_A,$$

si θ est une jauge invariante par G sur U (par exemple, dg/dh). Prenant $F(g) = \Phi(g(\xi))$, Φ une fonction convenable sur X_A, il vient

$$\tau(H) \int_{G_A/H_A} \Phi(g(\xi))\,|\theta|_A = \int_{G_A/G_k} \sum_{G_k/H_k} \Phi(g\gamma(\xi))\,|dg|_A,$$

où $\tau(H)$ est le nombre de Tamagawa de H. Identifiant G_A/H_A et G_k/H_k aux orbites de ξ par G_A et G_k respectivement, on obtient la formule

$$\tau(H) \int_{G_A \cdot \xi} \Phi\,|\theta|_A = \int_{G_A/G_k} \sum_{\eta \in G_k \cdot \xi} \Phi(g(\eta))\,|dg|_A. \tag{20}$$

Pour tout $i \in k$, soit (ξ_{ij}) un système de représentants appartenant à X_k des orbites de G_A dans $U(i)_A$, et soit (ξ_j) un tel système pour V_A. Soient H_{ij}, H_j les stabilisateurs de ξ_{ij}, ξ_j dans G. Pour tout $i \in k$, soit θ_i une jauge invariante sur $U(i)$, et soit ω une jauge invariante sur V. On peut prendre $\xi_{ij} = \gamma_i(\xi_{1j})$ $(i \in k^*)$, $\gamma_i \in \Gamma_k$ tel que $\nu(\gamma_i) = i$. Alors $H_{ij} = \gamma_i H_{1j} \gamma_i^{-1}$, donc $\tau(H_{ij}) = \tau(H_{1j})$ pour $i \in k^*$. $\tau(H_{0j})$ et $\tau(H_j)$ sont respectivement égaux au nombre de Tamagawa du groupe « spin » d'une forme quadratique en 9, resp. 10, variables; ces nombres sont donc 1 (*cf.* Weil [13] et Ono [5]). $\tau(H_{1j})$ et $\tau(G)$ sont finis, d'après la théorie de la réduction dans les groupes semi-simples (*voir* [3]).

Substituons ξ_{ij}, resp. ξ_j, à ξ dans (20), et ajoutons les résultats pour tous i, j; si l'on pose

$$(21) \qquad I(\Phi) = \int_{G_A/G_k} \sum_{\xi \in X_k} \Phi(g(\xi)) \, | dg |_A,$$

il vient

$$(22) \qquad \begin{aligned} I(\Phi) = & \sum_{i \in k} \sum_j \tau(H_{ij}) \int_{G_A \cdot \xi_{ij}} \Phi \, | \theta_i |_A \\ & + \sum_j \tau(H_j) \int_{G_A \cdot \xi_j} \Phi \, | \omega |_A + \tau(G) \, \Phi(0), \end{aligned}$$

pourvu que cela ait un sens. Or, on démontrera plus loin que toute fonction Φ de l'espace de Schwartz-Bruhat $\mathcal{S}(X_A)$ attaché à X_A (qui est défini dans [1], § 9) induit sur chaque orbite de G_A une fonction intégrable pour la mesure de Tamagawa et que, pour $\Phi \in \mathcal{S}(X_A)$ la série au second membre de (22) converge absolument. Les raisonnements habituels, partant de fonctions Φ positives, montrent alors que la formule (22) est valable pour $\Phi \in \mathcal{S}(X_A)$.

Choisissant les ξ_{ij} comme il a été dit plus haut, la formule (22) s'écrit sous la forme suivante :

$$(23) \quad I(\Phi) = \sum_{i \in k^*} \int_{U(i)_A} \varepsilon \Phi \, | \theta_i |_A + \int_{U(0)_A} \Phi \, | \theta_0 |_A + \int_{V_A} \Phi \, | \omega |_A + \tau(G) \, \Phi(0);$$

ε est défini par $\varepsilon(x) = \tau(H_{1j})$ si $x \in G_A \Gamma_k \xi_{1j}$.

Il y a maintenant une convention à faire. Si $[x, y]$ désigne comme autrefois la forme bilinéaire donnée sur notre algèbre de Jordan, nous conviendrons d'identifier l'espace vectoriel X_k à son dual au moyen de $[x, y]$. Ensuite, le groupe additif de X_A est identifié à son dual au moyen du bicaractère $\chi([x, y])$. La mesure de Tamagawa sur X_A est autoduale par rapport à cette identification, c'est-à-dire lorsqu'on définit la transformation de Fourier dans X_A par

$$\hat{\Phi}(y) = \int_{X_A} \Phi(x) \, \chi([x, y]) \, | dx |_A,$$

on a $\hat{\hat{\Phi}}(x) = \Phi(-x)$. Nous ferons la même convention pour tout sous-espace non isotrope de X_k, la forme bilinéaire à utiliser étant alors la restriction de $[x, y]$.

Ceci dit, on a

LEMME 6. — *$I(\Phi) = I(\hat{\Phi})$ pour $\Phi \in \mathcal{S}(X_A)$.*

On sait que l'espace $\mathcal{S}(X_A)$ est invariant par la transformation de Fourier (c'est justement sa raison d'existence). Et, pour $\Phi \in \mathcal{S}(X_A)$, la formule de Poisson est applicable à la série dans le second membre de (21); cette formule donne

$$\sum_{\xi \in X_k} \Phi(g(\xi)) = \sum_{\xi \in X_k} \hat{\Phi}(\tilde{g}(\xi)) \qquad (g \in G_A),$$

$g \to \tilde{g}$ étant l'automorphisme de G qui est défini au paragraphe 3. Comme la mesure $|dg|_A$ est évidemment invariante par $g \to \tilde{g}$, l'assertion du lemme s'ensuit.

On va maintenant remplacer la fonction Φ dans (23) par la fonction $x \to \Phi(g(x))$, où g est un élément de Γ_A, et appliquer le lemme 6. Dans les intégrales sur $U(0)_A$ et V_A, on fera un changement de variable, tenant compte des résultats du paragraphe 4 concernant les modules des sous-groupes de stabilité. La transformée de Fourier de la fonction $x \to \Phi(g(x))$ est la fonction $x \to |\nu(g)|^{-9} \hat{\Phi}(\tilde{g}(x))$. On trouve l'égalité suivante :

$$(24) \quad \sum_{i \in k^*} \int_{U(i)_A} \varepsilon(x)\, \Phi(g(x))\, |\theta_i(x)|_A + |\nu(g)|^{-8} \int_{U(0)_A} \Phi\, |\theta_0|_A + |\nu(g)|^{-4} \int_{V_A} \Phi\, |\omega|_A + \tau(G)\, \Phi(0)$$
$$= |\nu(g)|^{-9} \sum_{i \in k^*} \int_{U(i)_A} \varepsilon(x)\, \hat{\Phi}(\tilde{g}(x))\, |\theta_i(x)|_A + |\nu(g)|^{-1} \int_{U(0)_A} \hat{\Phi}\, |\theta_0|_A + |\nu(g)|^{-5} \int_{V_A} \hat{\Phi}\, |\omega|_A + |\nu(g)|^{-9} \tau(G)\, \hat{\Phi}(0).$$

9. Approximations.

Voici une amélioration du cas $n = 1$ du lemme 6 de WEIL [15].

LEMME 7. — *Soit X un espace vectoriel défini sur un corps de nombres algébriques k, et écrivons $X_A = X_\infty \times X'$, où X_∞ est le produit direct des X_v pour v infini, et X' le produit direct restreint des autres X_v. Soit E un sous-ensemble fermé de X_A qui ne contient aucun point de la forme $(0, x')$.*

Soit, enfin, C une partie compacte de $\mathcal{S}(X_A)$, et N un nombre réel positif. Alors il existe une fonction Φ_0 appartenant à $\mathcal{S}(X_A)$ telle qu'on ait

$$|\tau^N \Phi(a_\tau x)| \leqq \Phi_0(x)$$

chaque fois que $\Phi \in C$, $\tau \geqq 1$, $x \in E$, a_τ désignant l'idèle de k qui a la composante τ à chaque place à l'infini et 1 aux autres places.

Démonstration. — Choisissons une base de X_∞ sur $\mathbf{R}$, et soit $r(x_\infty)$ la somme des carrés des coordonnées de x_∞ par rapport à cette base. Il est connu qu'on peut trouver une fonction $\Phi_\infty \in \mathcal{S}(X_\infty)$ et un sous-groupe ouvert et compact de X', dont la fonction caractéristique soit nommée Φ', de manière à avoir

$$|\Phi(x)| \leqq \Phi_\infty(x_\infty)\,\Phi'(x')$$

pour tout $x = (x_\infty, x') \in X_A$ et tout $\Phi \in C$. Puis, il existe une suite de nombres réels (a_i) telle que, pour tout $i \in \mathbf{N}$, on ait

$$\tau^N r(x_\infty)^i \Phi_\infty(\tau x_\infty) \leqq a_i \qquad \text{si} \quad x = (x_\infty, x') \in E, \quad \Phi'(x') \neq 0, \quad \tau \geqq 1.$$

En effet, pour $i \geqq N/2$, on a

$$\tau^N r(x_\infty)^i \Phi_\infty(\tau x_\infty) \leqq r(\tau x_\infty)^i \Phi_\infty(\tau x_\infty) \qquad \text{si} \quad \tau \geqq 1, \quad x_\infty \in X_\infty;$$

pour $i = 0$, on a

$$\tau^N \Phi_\infty(\tau x_\infty) = r(x_\infty)^{-\frac{1}{2}N} r(\tau x_\infty)^{\frac{1}{2}N} \Phi_\infty(\tau x_\infty),$$

et si l'on suppose que $x = (x_\infty, x') \in E$ et que $\Phi'(x') \neq 0$, x_∞ reste au large de 0 (s'il existait une suite (x_n), $x_n \in E$, telle que $\lim (x_n)_\infty = 0$ et que $\Phi'(x'_n) \neq 0$ pour tout n, on pourrait supposer en outre, en vertu de la compacité du support de Φ', que la suite (x'_n) convergeait; E contiendrait alors un point de la forme $(0, x')$); l'existence des a_i étant démontrée pour $i = 0$ et pour i suffisamment grand, les autres majorants existent *a fortiori*.

Si φ est une fonction de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ telle que

$$\varphi(r) \geqq \inf_{i \geqq 0} a_i |r|^{-i}$$

(l'existence d'une telle fonction est démontrée dans [14], lemme 4), on a, pour $x = (x_\infty, x') \in E$, $\tau \geqq 1$,

$$\tau^N \Phi_\infty(\tau x_\infty)\,\Phi'(x') \leqq \varphi(r(x_\infty))\,\Phi'(x').$$

On peut donc prendre

$$\Phi_0(x) = \varphi(r(x_\infty))\,\Phi'(x') \qquad (x \in X_A).$$

Retournons aux intégrales du paragraphe 8. On veut voir ce qui se passe dans l'égalité (24) lorsque $|\nu(g)|$ tend vers l'infini.

LEMME 8. — *Pour toute fonction Φ de $\mathcal{S}(X_A)$ et tout nombre réel N, on a*

$$\sum_{i\in k^\star}\int_{U(i)_A}\varepsilon(x)\,\Phi(g(x))\,|\,\theta_i(x)\,|_A = O(|\,\nu(g)\,|^{-N}) \qquad \textit{pour} \quad |\,\nu(g)\,|\to\infty.$$

Démonstration. — On voit facilement que la formule

$$F(g)=\sum_{i\in k^\star}\int_{U(i)_A}\varepsilon(x)\,\Phi(g(x))\,|\,\theta_i(x)\,|_A$$

définit, par passage au quotient, une fonction sur

$$\Gamma_A/G_A\Gamma_k = A^\star/k^\star = \mathbf{R}_+^\star\times A_0^\star/k^\star,$$

la première de ces identifications étant effectuée au moyen de l'isomorphisme déduit de l'application ν de Γ_A sur $A^\star$, et la seconde au moyen de la décomposition $t = a_\tau t_0$ $(t\in A^\star,\ t_0\in A_0^\star)$. $A^\star$ désigne, bien entendu, le groupe des idèles de k muni de sa topologie de groupe adélique attaché au groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ (et non pas de celle induite par la topologie de A), et $A_0^\star$ désigne le sous-groupe de $A^\star$ formé des éléments de module 1. Si C est une partie compacte de $A_0^\star$ telle que $A_0^\star = Ck^\star$, et si γ désigne l'application adélique attachée à la section γ définie au début du paragraphe 3, tout élément g de Γ_A s'écrit sous la forme

$$g=\gamma(c)\,\gamma(a_{\tau^3})\,h=\gamma(c)\,a_\tau h', \qquad \text{avec} \quad c\in C, \quad \tau\in\mathbf{R}_+^\star, \quad h \text{ et } h'\in G_A\Gamma_k.$$

Pour g de cette forme, on a $F(g) = F(\gamma(c)\,a_\tau)$. D'après le lemme 7, il existe $\Phi_0\in\mathcal{S}(X_A)$ tel que

$$|\,\tau^N\Phi(\gamma(c)\,a_\tau x)\,|\leqq\Phi_0(x) \qquad \text{pour} \quad c\in C, \quad \tau\geqq 1, \quad \det(x)\in k^\star.$$

Donc, si $d = [k:Q]$,

$$|F(g)|\leqq|\,\nu(g)\,|^{-N/3d}\sum_{i\in k^\star}\int_{U(i)_A}\varepsilon(x)\,\Phi_0(x)\,|\,\theta_i(x)\,|_A,$$

et le lemme est démontré.

Afin d'approximer la somme sur $k^\star$ dans le second membre de (24), on se servira de la formule de Poisson. Pour cela, on va appliquer d'abord la proposition 1 de WEIL [15] à l'application det : $X_v\to k_v$. Cette proposition entraîne l'existence d'une famille $(\mu_i)_{i\in k_v}$ de mesures positives sur X_v telle que le support de μ_i soit contenu dans l'ensemble des $x\in X_v$ tels que $\det(x) = i$, et que, pour toute fonction Φ continue à support compact sur X_v, la fonction F_Φ sur k_v définie par $F_\Phi(i) = \int\Phi\,d\mu_i$

soit continue et satisfasse à $\int F_\Phi \,|\, di\,|_v = \int \Phi \,|\, dx\,|_v$. La famille (μ_i) est déterminée de façon unique par ces conditions. Pour $\Phi \in \mathcal{S}(X_v)$, la fonction F_Φ (définie comme ci-dessus) est continue, intégrable sur k_v, satisfait à $\int F_\Phi \,|\, di\,|_v = \int \Phi \,|\, dx\,|_v$ et a pour transformée de Fourier la fonction $\hat{F}_\Phi$ donnée par

$$\hat{F}_\Phi(i) = \int_{X_v} \Phi(x)\,\chi_v(i \det(x))\,|\,dx\,|_v \tag{25}$$

(ici encore, nous identifions X_v à son dual au moyen du bicaractère $\chi_v([x, y])$, et $|\,dx\,|_v$ est autoduale relativement à cette identification, comme $|\,di\,|_v$ l'est relativement à l'identification de k_v et de son groupe dual au moyen de $\chi_v(xy)$; pour plus de détails, *voir* [15], § 3).

Tout cela est valable sous l'hypothèse suivante :

(A) Quelle que soit $\Phi \in \mathcal{S}(X_v)$, la fonction $\hat{F}_\Phi$ définie par (25) est intégrable sur k_v, et l'intégrale $\int |\,\hat{F}_\Phi\,|.|\,di\,|_v$ converge uniformément sur toute partie compacte de $\mathcal{S}(X_v)$.

La vérification de cette hypothèse est reportée au chapitre III.

LEMME 9. — *Les mesures μ_i sont portées par les ensembles $U_v(i) = \{x \in X_v : \det(x) = i,\ x \times x \neq 0\}$.*

Démonstration. — Pour $i \neq 0$, il n'y a rien à démontrer. L'ensemble des zéros de det est réunion des trois ensembles $U_v(0) = U(0)_v$, V_v et $\{0\}$; V_v est une orbite pour Γ_v (propos. 2), $U(0)_v$ comprend une ou deux orbites de Γ_v (propos. 3). μ_0 s'écrit de manière unique comme somme de mesures portées respectivement par les (trois ou quatre) orbites de Γ_v (*cf.* le lemme 16 de [15]). Chacune de ces mesures doit satisfaire, comme μ_0, à la relation

$$d\mu(g(x)) = |\,\nu(g)\,|^8\, d\mu(x) \qquad (g \in \Gamma_v). \tag{26}$$

En effet, lorsqu'on substitue $\Phi(g^{-1}(x))$ à $\Phi(x)$ dans la formule $\int F_\Phi \,|\, di\,|_v = \int \Phi \,|\, dx\,|_v$, l'unicité des μ_i fait voir que

$$d\mu_{i\nu(g)}(g(x)) = |\,\nu(g)\,|^8\, d\mu_i(x) \quad \text{pour tout } i.$$

Mais, d'après le paragraphe 4, les modules des sous-groupes de stabilité de Γ_v sont respectivement : $|\,\nu(g)\,|^8$ pour les orbites dans $U_v(0)$, $|\,\nu(g)\,|^4$ pour V_v et 1 pour $\{0\}$. Donc, seules les orbites dans $U_v(0)$ peuvent porter une mesure satisfaisant à (26), et le lemme est démontré.

Il est clair que l'application det de X sur la droite affine est submersive en tout point x tel que $x \times x \neq 0$, donc, en particulier, en tous les points de $\bigcup_{i \in k} U(i)$. On peut donc considérer, sur chaque $U(i)$, la jauge θ_i définie par

$$(27) \qquad \theta_i(x) = \left(\frac{dx}{d(\det(x))}\right)_i$$

(cela veut dire que, quel que soit $x_0 \in U(i)$, $\theta_i(x)$ coïncide au voisinage de x_0 avec la forme induite sur $U(i)$ par n'importe quelle forme différentielle $\eta(x)$ dans X satisfaisant au voisinage de x_0 à la relation $dx = \eta(x) \wedge d(\det(x))$; *cf.* [15], § 5). Ce sont ces formes θ_i qu'on peut utiliser au paragraphe 8, si l'on veut.

De même, prenant k_ν comme corps de base et considérant det comme un morphisme de variétés définies sur k_ν, on définit des jauges $\theta_{\nu, i}$ $(i \in k_\nu)$ par une formule analogue à (27). Les formes différentielles $\theta_{\nu, i}$ déterminent des mesures $|\theta_{\nu, i}|_\nu$ sur $U(i)_\nu$, et l'on a

$$\int_{X'_\nu} \Phi \, |dx|_\nu = \int_{k_\nu} \left(\int_{U_\nu(i)} \Phi \, |\theta_{\nu, i}|_\nu \right) |di|_\nu$$

pour Φ continue à support compact dans $X'_\nu = \{x \in X_\nu : x \times x \neq 0\}$. La famille des mesures $|\theta_{\nu, i}|_\nu$ sur X'_ν, de supports respectifs $U_\nu(i)$, est évidemment la seule qui possède ces propriétés. Comme $X_\nu - X'_\nu$ est de mesure nulle pour $|dx|_\nu$, le lemme 9 montre alors qu'on a

$$\mu_i = |\theta_{\nu, i}|_\nu \qquad \text{pour} \quad i \in k_\nu.$$

Passons ensuite au cas adélique. Nous avons à appliquer les propositions 1 et 2 de [15] à notre cas. Voici l'hypothèse de la deuxième de ces propositions.

(B) Quels que soient $\Phi \in \mathcal{S}(X_A)$ et $a \in A$, la série $\sum_{i \in k} |\hat{F}_\Phi(a + i)|$ est convergente, et elle l'est uniformément sur toute partie compacte de $\mathcal{S}(X_A) \times A$.

$\hat{F}_\Phi$ désigne ici la fonction définie par

$$(28) \qquad \hat{F}_\Phi(i) = \int_{X_A} \Phi(x) \chi(i \det(x)) \, |dx|_A \qquad (i \in A).$$

Sous cette hypothèse, la proposition 1 de [15] est valable pour l'application det de X_A dans A, et de plus, on a, pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{S}(X_A)$,

$$(29) \qquad \sum_{i \in k} F_\Phi(i) = \sum_{i \in k} \hat{F}_\Phi(i),$$

si $i \to F_\Phi(-i)$ est la transformée de Fourier de la fonction $\hat{F}_\Phi$ définie par (28). Comme dans le cas local, $F_\Phi(i)$ est l'intégrale de Φ pour une certaine mesure, sur X_A cette fois, et l'on démontre exactement de la même façon que dans [15] (§ 42-43) que, *pour* $i \in k$, on a

$$F_\Phi(i) = \int_{U(i)_A} \Phi \mid \theta_i \mid_A, \tag{30}$$

où θ_i est la jauge sur $U(i)$ définie par (27) [on a déjà vu que (1) est un système de facteurs de convergence pour $U(i)$].

La validité de (B) sera démontrée au chapitre III.

Quand on substitue à $F_\Phi(i)$, resp. $\hat{F}_\Phi(i)$, dans (29) le second membre de (30), resp. (28), et qu'on remplace ensuite $\Phi(x)$ par $|\nu(g)|^{-9}\Phi(\tilde{g}(x))$ $(g \in \Gamma_A)$, on obtient, après quelques changements de variable dans les intégrales :

$$\begin{aligned} |\nu(g)|^{-9} \sum_{i \in k^*} \int_{U(i)_A} \Phi(\tilde{g}(x)) \mid \theta_i(x) \mid_A \\ = \sum_{i \in k^*} \int_{X_A} \Phi(x)\, \chi(i\nu(g)\det(x)) \mid dx \mid_A \\ + \hat{\Phi}(0) - |\nu(g)|^{-1} \int_{U(0)_A} \Phi \mid \theta_0 \mid_A \end{aligned} \tag{31}$$

pour $\Phi \in \mathcal{S}(X_A)$, $g \in \Gamma_A$.

10. Les nombres de Tamagawa et la formule de Siegel.

LEMME 10. — *Si ξ_{1j_0} est l'un quelconque des éléments ξ_{1j} introduits au paragraphe* 8, *il existe une fonction $\Phi \in \mathcal{S}(X_A)$ telle que*

1° $\Phi(x) = 0$ *pour* $x \in \bigcup_{j \neq j_0} \Gamma_A(\xi_{1j})$;

2° $\int_{X_A} \Phi \mid dx \mid_A \neq 0$.

Démonstration. — Écrivons $X_A = X_\infty \times X'$, et soit Y l'ensemble des $x \in X_A$ tels que $\det(x)$ soit un élément inversible de A. Soit Y_∞, resp. Y', la projection de Y sur X_∞, resp. X'; alors $Y = Y_\infty \times Y'$. Écrivons encore $\Gamma_A = \Gamma_\infty \times \Gamma'$. D'après le chapitre I, § 3, Y_∞ est réunion de $2^\varkappa$ orbites pour Γ_∞, qui sont toutes ouvertes dans Y_∞ ($\varkappa$ est le nombre des places de k où l'algèbre d'octaves est sans diviseurs de zéro), et Γ' opère transitivement sur Y'. Comme Y_∞ est ouvert dans X_∞, il existe une fonction positive non identiquement nulle $\Phi_\infty \in \mathcal{S}(X_\infty)$ de support contenu dans $\Gamma_\infty(\xi_{1j_0})$. Si Φ' est la fonction caractéristique d'un sous-groupe ouvert et compact de X', la fonction $\Phi(x) = \Phi_\infty(x_\infty)\,\Phi'(x')$ répond à la question.

Nous allons maintenant comparer les résultats des paragraphes 8 et 9. D'une part, la formule (24) et le lemme 8 donnent [quand on remplace $\Phi(x)$ par $\hat{\Phi}(-x)$ dans (24)] :

$$(32)\quad \begin{cases} |\nu(g)|^{-9} \sum_{i \in k^*} \int_{U(i)_A} \varepsilon(x)\,\Phi(\tilde{g}(x))\,|\theta_i(x)|_A \\ \quad = \tau(G)\,\hat{\Phi}(0) - |\nu(g)|^{-1} \int_{U(0)_A} \Phi\,|\theta_0|_A + O(|\nu(g)|^{-4}) \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad |\nu(g)| \to \infty. \end{cases}$$

D'autre part, on a la formule (31). Prenons Φ comme dans le lemme 10. Le premier membre de (32) est alors égal au premier membre de (31) multiplié par $\tau(H_{1j})$. Si l'on sait que

$$|\nu(g)| \sum_{i \in k^*} \int_{X_A} \Phi(x)\,\chi(i\nu(g)\det(x))\,|dx|_A$$

tend vers zéro lorsque $|\nu(g)|$ tend vers l'infini, et l'on démontrera cela au chapitre III, on en conclut que $\tau(G) = \tau(H_{1j})$ pour tout j, et puis que $\tau(G) = 1$.

La combinaison des formules (23) et (31) donne la formule

$$\int_{G_A/G_k} \sum_{\xi \in X_k} \Phi(g(\xi))\,|dg|_A$$
$$= \sum_{i \in k} \int_{X_A} \Phi(x)\,\chi(i \det(x))\,|dx|_A + \int_{V_A} \Phi\,|\omega|_A + \Phi(0).$$

11. Les corps de fonctions algébriques.

A l'exception des lemmes 7 et 8 tout ce qu'on a dit aux paragraphes précédents reste valable pour un corps de fonctions algébriques de dimension 1 sur un corps fini *sous l'hypothèse que les nombres de Tamagawa de G et des sous-groupes de stabilité sont finis* et modulo les démonstrations d'assertions concernant la géométrie algébrique énoncées aux chapitres I et II. Comme on espère que ces assertions sont exactes pour un corps de fonctions algébriques aussi, on indiquera ci-dessous les modifications nécessaires dans le cas d'un corps de fonctions algébriques. Avec quelques modifications évidentes (non indiquées, celles-ci), les démonstrations du chapitre III sont valables pour un corps de fonctions algébriques.

Si le corps de base k est un corps de fonctions algébriques, les ensembles $U(i)_A$, V_A sont des orbites de G_A, de sorte que les notations des paragraphes 8 à 10 se simplifient un peu. Le lemme 8 reste exact, et peut être démontré suivant la même méthode.

Soit, en effet, q le nombre d'éléments du corps des constantes de k, soit a un élément de $A^\star$ tel que $|a_\nu|_\nu = q^d$, avec $d > 0$, pour une place choisie v, tandis que les autres composantes de a sont égales à 1, et soit C une partie compacte de $A^\star$ telle que tout idèle de module compris entre 1 et q^{3d} appartienne à $Ck^\star$. Pour $g \in \Gamma_A$, il existe alors un nombre entier n et un élément c de C tels que $\nu(g) \in a^{3n}ck^\star$, et g s'écrit sous la forme $g = \gamma(c)\gamma(a^{3n})h = \gamma(c)a^n h'$ avec h, $h' \in G_A\Gamma_k$. Enfin, on voit facilement qu'il existe une fonction $\Phi_0 \in \mathcal{S}(X_A)$ telle qu'on ait

$$q^{nN}|\Phi(\gamma(c)a^n x)| \leq \Phi_0(x)$$

pour $c \in C$, $n \geq 0$, $\det(x) \in k^\star$ (il suffit, en effet, de démontrer cela pour la fonction caractéristique Φ d'un sous-groupe ouvert et compact de X_A).

CHAPITRE III.

Questions de convergence.

12. **Remarques générales.**

Pour compléter la démonstration du théorème, il reste à vérifier les points suivants :

(*a*) la convergence de (22) (§ 8);

(*b*) la condition (A) (§ 9);

(*c*) la condition (B) (§ 9);

(*d*) l'assertion suivante faite au paragraphe 10 :

$$(33)\qquad |\nu(g)|\sum_{i\in k^\star}\int_{X_A}\Phi(x)\chi(i\nu(g)\det(x))\,|dx|_A \to 0 \qquad \text{si} \quad |\nu(g)|\to\infty.$$

Les démonstrations seront données aux paragraphes 13 à 15. Voici quelques conventions de langage et de notation. On rencontrera souvent, dans les numéros à suivre, l'expression « pour presque tout v ». Cela veut dire qu'on exclut un nombre fini de places. Exclues sont *toujours* : les places archimédiennes de k, les places non archimédiennes qui divisent 2 ou 3. De plus, il y a toujours un nombre fini de places à exclure quand on fait usage d'un réseau dans X_k et des ensembles X^0_ν définis à partir de ce réseau. Au début du paragraphe 13, par exemple, on choisira une base de X_k sur k formée d'un idempotent primitif $u \in X_k$, d'une base de R_k sur k et d'une base de $E_{1,k}$ sur k; le réseau engendré par cette base de X_k est localisé et l'on utilise le fait que $y\times y \in R^0_\nu$ si $y \in E^0_{1,\nu}$; comme la composition $\times$ est définie sur k, cela est vrai pour v en dehors d'un ensemble fini de places; etc.

On désignera par q_v ou q le nombre d'éléments du corps résiduel de k_v si v est une place finie de k, et par π_v ou π une uniformisante de k_v. On écrira quelquefois, pour abréger, $|dt|$ au lieu de $|dt|_v$, etc., χ au lieu de χ_v. Les valeurs absolues sur les corps k_v et le module sur A^* sont le plus souvent notés sans l'indice v, resp. A; k_v^0 désigne l'anneau des entiers de k_v si v est finie.

13. **La convergence de** $I(\Phi)$.

Il résulte de ce qu'on a dit aux paragraphes 8-9 que la convergence de (22) est une conséquence de la validité de (B) et du lemme suivant :

LEMME 11. — *Chaque fonction Φ de $\mathcal{S}(X_A)$ induit sur V_A une fonction intégrable pour la mesure $|\omega|_A$.*

On va donner une démonstration du lemme 11 par des calculs explicites. Il faut avant tout déterminer la mesure $|\omega|_A$. Or, l'application de $\mathbf{G}_m \times E_1$ dans V définie par

$$(t, y) \to tu - t^{-1}\overline{y \times y} + y$$

est un isomorphisme de la première variété sur un ouvert de V (*cf.* [8], p. 76). La forme différentielle induite par ω sur c et ouvert s'exprime en les coordonnées (t, y) par

$$f(t, y)\, dt \wedge dy,$$

où $f(t, y)$ est une fonction numérique partout définie et partout $\neq 0$ sur $\mathbf{G}_m \times E_1$. Cela entraîne déjà que $f(t, y)$ est indépendant de y et est de la forme ct^m, $c \in k^*$, $m \in \mathbf{Z}$. En outre, on connaît le comportement de ω sous les opérations de Γ. En particulier, pour $s \in \mathbf{G}_m$, on a

$$\omega \circ \gamma(s) = s^4 \omega,$$

donc

$$s^{-1} f(s^{-1} t, y) = s^4 f(t, y),$$

et

$$f(t, y) = ct^{-5}.$$

Choisissant provisoirement Φ de la forme

$$\Phi(x) = \prod_v \Phi_v(x_v) \qquad \text{pour} \quad x = (x_v) \in X_A, \tag{34}$$

où $\Phi_v \in \mathcal{S}(X_v)$ pour tout v et où Φ_v est la fonction caractéristique de X_v^0 pour presque tout v, on a, puisque $V_v^0 \subset X_v^0$ pour presque tout v,

$$\int_{V_v^0} \Phi_v |\omega|_v = \int_{V_v^0} |\omega|_v, \qquad \int_{V_v} \Phi_v |\omega|_v \geq \int_{V_v^0} |\omega|_v \quad \text{pour presque tout } v.$$

Donc, d'après la définition de la mesure de Tamagawa :

$$(35) \qquad \int_{V_A} \Phi \,|\,\omega\,|_A = \prod_v \int_{V_v} \Phi_v \,|\,\omega\,|_v,$$

si l'on suppose $\Phi_v \geqq 0$ pour tout v. On a donc à démontrer les assertions suivantes :

1° les intégrales qui constituent les facteurs du produit au second membre de (35) convergent;

2° ledit produit converge.

LEMME 12. — *Pour presque tout v, on a*

$$\int_{V_v} \Phi_v \,|\,\omega\,|_v = (1 - q^{-4})^{-1}(1 - q^{-9}).$$

Démonstration. — Il est évident qu'il existe un ensemble fini S de places de k tel que, pour $v \notin S$, on ait, si W désigne l'ouvert de V_v formé des éléments $tu - t^{-1}\overline{y \times y} + y$ $(t \in k_v^*,\ y \in E_{1,v})$,

$$\int_{V_v} \Phi_v \,|\,\omega\,|_v = \int_{W} \Phi_v \,|\,\omega\,|_v = \int_{W \cap X_v^0} |\,\omega\,|_v = \int_{t \in k_v^0} |\,t\,|^{-5}\,|\,dt\,| \int_{\substack{y \in E_{1,v}^0 \\ y \times y \in t R_v^0}} |\,dy\,|$$

$$= \sum_{n \geqq 0} q^{5n} \int_{|t| = q^{-n}} |\,dt\,| \int_{\substack{y \in E_{1,v}^0 \\ y \times y \equiv 0\,(\pi^n)}} |\,dy\,|.$$

L'intégrale sur t dans cette somme est égale à $q^{-n}(1 - q^{-1})$. Appelant J_n l'intégrale sur y dans la même somme, on a

$$(36) \quad J_n = \int_{\substack{y \times y \equiv 0\,(\pi^n) \\ y \not\equiv 0\,(\pi)}} |\,dy\,| + q^{-16} J_{n-2} \qquad \text{pour} \quad n \geqq 1 \quad (J_{-1} = J_0 = 1).$$

Le lemme 5 du paragraphe 6 montre immédiatement que l'intégrale dans (36) est égale à $q^{-5n}(1 + q^{-3})(1 - q^{-8})$. Par conséquent,

$$J_n = q^{-5n}(1 - q^{-8})(1 - q^{-3})^{-1}(1 - q^{-6m}) + q^{-16m}, \qquad \text{où} \quad m = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Un calcul trivial donne la formule voulue.

LEMME 13. — *L'intégrale* $\int_{V_v} \Phi_v \,|\,\omega\,|_v$ *converge pour tout v.*

Démonstration. — Reprenons les notations du paragraphe 4. Si u est un idempotent primitif de X_k, on a une suite exacte de groupes algébriques définis sur k :

$$(37) \qquad 1 \to B \cap G \to \Gamma_u \cap G \to O^+(Q_1) \to 1.$$

Posons $H = \Gamma_u \cap G$. Soit T le tore des transformations

$$(38) \qquad u \to s^4 u, \quad x \to s^{-2}x, \quad y \to sy \qquad (x \in R,\, y \in E_1)$$

de G. T normalise H et TH est un sous-groupe k-fermé de G dont le radical est $T(B \cap G)$; $T \cap H$ est fini. La suite exacte (37) fait voir que H possède un sous-groupe fermé résoluble de dimension $16 + 25 = 41$. Comme la dimension d'un sous-groupe de Borel de G est 42, $P = TH$ est un sous-groupe parabolique de G. Si $p = th$, où t est la transformation (38), et où $h \in H$, on a $p(u) = s^4 u$. $T_v H_v$ est évidemment un sous-groupe d'indice fini de P_v. Sur toute classe à gauche suivant ce sous-groupe ouvert la mesure invariante à droite de P_v est le produit d'une mesure de Haar sur T_v, d'une mesure de Haar dh sur H_v et d'un facteur $\beta(t)$ tel qu'on ait $d(tht^{-1}) = \beta(t)\, dh$ (β est la restriction à T_v de l'inverse du module topologique de P_v). On voit facilement, à l'aide des formules (9) et (38) pour les éléments de B et T, qu'on a $\beta(t) = s^{48}$, si t est la transformation (38).

Pour démontrer le lemme 13, il suffit de montrer que l'intégrale $\int_{G_v/H_v} \Phi_v(g(u))\, |\omega|_v$ converge. Comme G_v/P_v est compact, G_v est réunion d'un nombre fini de classes ouvertes $K_v g_i P_v$ ($g_i \in G_v$), où K_v est un sous-groupe compact maximal de G_v si v est une place à l'infini de k et où $K_v = G_v^0$ dans le cas contraire. Sur $K_v g_i P_v$ la mesure de Haar de G_v est le produit d'une mesure de Haar dk de K_v par une mesure invariante à droite $d_r p$ sur P_v. On est donc ramené à montrer la convergence de

$$\int\int_{K_v \times P_v/H_v} \Phi_v(kg_i\, p(u))\, dk\, d_r\dot{p},$$

ou, tenant compte de la structure de P_v, celle de

$$\int\int_{K_v \times T_v} \Phi_v(kg(u)s^4)\, |s|_v^{47}\, dk\, |ds|_v \qquad (g \in G_v),$$

qui est évidente.

Les lemmes 12 et 13 démontrent le lemme 11 pour Φ de la forme (34). Le cas général en résulte, parce que toute fonction Φ de $\mathcal{S}(X_A)$ est somme de fonctions de la forme

$$\Phi_\infty(x_\infty) \prod_{v \text{ fini}} \Phi_v(x_v),$$

où $\Phi_\infty \in \mathcal{S}(X_\infty)$ (X_∞ étant le produit des X_v pour v infini), où $\Phi_v \in \mathcal{S}(X_v)$ pour tout v fini et où Φ_v est la fonction caractéristique de X_v^0 pour presque tout v; toute fonction de $\mathcal{S}(X_\infty)$ est majorée par une fonction de la forme

$$\prod_{v \text{ infini}} \Phi_v(x_v),$$

où $\Phi_v \in \mathcal{S}(X_v)$.

14. Conditions (A) et (B) : approximations locales.

Le but de ce paragraphe est d'approximer les intégrales

$$\int_{X_v} \Phi_v(x)\,\chi_v(i\det(x))\,|dx|_v.$$

LEMME 14. — *Pour presque tout v, on a, pour $i \in k_v$,*

$$\int_{X_v^0} \chi_v(i\det(x))\,|dx|_v = \begin{cases} 1 \quad \text{si } |i| \leqq 1, \\ |i|^{-5}(1-q^{-4})^{-1}(1-q^{-9}-|i|^{-4}q^{-4}(1-q^{-5})) \\ \qquad \text{si } |i| > 1. \end{cases}$$

Démonstration. — Le résultat pour $|i| \leqq 1$ se voit en observant que $\det(X_v^0) \subset k_v^0$ pour presque tout v. L'existence de la section γ : $\mathbf{G}_m \to \Gamma$ (chap. I, § 3) montre, pour presque tout v, que l'intégrale ne dépend que de l'ordre de i. Prenant $i = \pi^{-m}$, $m > 0$, l'intégrale s'écrit

$$I_m = \int_{X_v^0} \chi_v(\pi^{-m}\det(x))\,|dx|_v = \sum_{\substack{b \in k_v^0 \\ b \bmod \pi^m}} \chi_v(\pi^{-m} b) \int_{\substack{x \in X_v^0 \\ \det(x) \equiv b\,(\pi^m)}} |dx|_v.$$

La dernière intégrale ne dépend que de l'ordre de b; d'autre part, on a

$$\sum_{\substack{b \text{ d'ordre } \delta \\ b \bmod \pi^m}} \chi_v(\pi^{-m} b) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqq \delta < m-1, \\ -1 & \text{si} \quad \delta = m-1. \end{cases}$$

Donc,

$$(39) \qquad I_m = \int_{\det(x) \equiv 0\,(\pi^m)} |dx|_v - \int_{\det(x) \equiv \pi^{m-1}\,(\pi^m)} |dx|_v.$$

Comme on a évidemment

$$\int_{\substack{\det(x) \equiv \alpha\pi^{m-1}\,(\pi^m) \\ x \equiv 0\,(\pi)}} |dx|_v = q^{-27} \int_{\det(x) \equiv \alpha\pi^{m-4}\,(\pi^{m-3})} |dx|_v,$$

(39) donne

$$(40) \qquad I_m = \int_{\substack{\det(x) \equiv 0\,(\pi^m) \\ x \not\equiv 0\,(\pi)}} |dx|_v - \int_{\substack{\det(x) \equiv \pi^{m-1}\,(\pi^m) \\ x \not\equiv 0\,(\pi)}} |dx|_v + q^{-27} I_{m-3}$$

pour $m > 0$ $(I_{-2} = I_{-1} = I_0 = 1)$.

Démontrons maintenant un sous-lemme.

Lemme 15. — *Le volume de l'ensemble des* $x \in X_\nu^0$ *tels que* $\det(x) \equiv \alpha\pi^{m-1}$ (π^m), $x \times x \not\equiv 0 \left(\pi^{\left[\frac{1}{2}m\right]}\right)$, $x \not\equiv 0\ (\pi)$ *est indépendant de l'élément* α *de* k_ν^0.

Soit, en effet, d un nombre entier tel que $0 \leqq d < \left[\frac{1}{2}m\right]$, et soit x_0 un élément de X_ν^0 satisfaisant à $\det(x_0) \equiv 0\ (\pi^{m-1})$, $x_0 \not\equiv 0\ (\pi)$, et tel que $x_0 \times x_0$ soit d'ordre d. On a alors, pour $x \in X_\nu^0$,

$$\det(x_0 + \pi^{m-d-1}x) \equiv \det(x_0) + \pi^{m-d-1}[x_0 \times x_0, x] \quad (\pi^m),$$

et l'on voit facilement que $x' = x_0 + \pi^{m-d-1}x$ satisfait déjà aux mêmes conditions que x_0. Pour satisfaire à $\det(x') \equiv \alpha\pi^{m-1}(\pi^m)$, on a à résoudre la congruence

$$\pi^{-m+1}\det(x_0) + [\pi^{-d}x_0 \times x_0, x] \equiv \alpha \quad (\pi).$$

Comme $\pi^{-d}x_0 \times x_0 \not\equiv 0\ (\pi)$, le nombre de solutions de cette congruence est indépendant de α, d'où le lemme.

Le lemme 15 montre que la formule (40) se simplifie comme suit :

$$(41) \qquad I_m = \int_{\substack{\det(x) \equiv 0\ (\pi^m) \\ x \times x \equiv 0\ \left(\pi^{\left[\frac{1}{2}m\right]}\right) \\ x \not\equiv 0\ (\pi)}} |dx|_\nu - \int_{\substack{\det(x) \equiv \pi^{m-1}\ (\pi^m) \\ x \times x \equiv 0\ \left(\pi^{\left[\frac{1}{2}m\right]}\right) \\ x \not\equiv 0\ (\pi)}} |dx|_\nu + q^{-27} I_{m-3}.$$

La formule $(x \times x) \times (x \times x) = \det(x)\, x$ fait voir qu'on a $\det(x) \equiv 0(\pi^{2k})$ chaque fois que $x \times x \equiv 0(\pi^k)$, $x \not\equiv 0\ (\pi)$. Si m est pair, la deuxième intégrale au second membre de (41) est donc nulle, tandis que dans la première on peut supprimer « $\det(x) \equiv 0\ (\pi^m)$ ». Utilisant la notation du lemme 3 (§ 6), on a

$$I_m - q^{-27} I_{m-3} = \begin{cases} q^{-27m/2} A_{\frac{1}{2}m} & \text{si } m \text{ est pair}, \\ q^{-27(m+1)/2}\left(B_{\frac{1}{2}(m-1)}(0) - B_{\frac{1}{2}(m-1)}(1)\right) & \text{si } m \text{ est impair}. \end{cases}$$

Les formules du lemme 3 et celles du paragraphe 5 donnent enfin

$$I_m = q^{-5m}(1 + q^{-4} + q^{-8})(1 - q^{-9}) + q^{-27} I_{m-3} \qquad (m \geqq 2),$$
$$I_1 = q^{-5}(1 + q^{-4} - q^{-9}),$$

d'où

$$I_m = q^{-5m}(1 - q^{-4})^{-1}(1 - q^{-9} - q^{-4m-4} + q^{-4m-9}) \qquad (m \geqq 1).$$

Cela achève la démonstration du lemme 14.

LEMME 16. — *Soit v une place quelconque de k. Soit C_0 une partie compacte de $\mathcal{S}(X_v)$. Il existe deux nombres réels positifs α, c avec $\alpha > 2$ tels qu'on ait, quels que soient $\Phi \in C_0$ et $i \in k_v$,*

$$\left| \int_{X_v} \Phi(x)\chi_v(i \det(x)) \, | dx |_v \right| \leq c \min(1, | i |^{-\alpha}).$$

(La meilleure valeur pour α est sans doute 5, *cf.* le lemme 14, mais il nous suffit de savoir qu'on peut prendre $\alpha > 2$.)

Avant d'aborder la démonstration du lemme 16, rappelons une formule de la théorie de la transformation de Fourier. Énoncée pour un sous-espace Y de X_v, la formule en question dit :

$$(42) \quad \int_Y \Psi(x)\chi_v(f(x)) \, | dx |_v = \gamma(f) \, | \rho |^{-\frac{1}{2}} \int_Y \hat{\Psi}(x)\chi_v(-f(\rho^{-1}(x))) \, | dx |_v,$$

si f est une forme quadratique non dégénérée sur Y et si Ψ est une fonction de $\mathcal{S}(Y)$; ρ est défini par $f(x+y) - f(x) - f(y) = [x, \rho(y)]$, où $[\ ,\ ]$ désigne comme toujours la forme bilinéaire de l'algèbre de Jordan; Y est identifié à son dual de la manière expliquée au paragraphe 9; $\gamma(f)$ enfin est un nombre complexe de valeur absolue 1 (*voir* WEIL [14], corollaire 1 au théorème 2). Quant aux $\gamma(f)$, il nous suffira de savoir que l'application $f \to \gamma(f)$ détermine un caractère du groupe de Witt de k_v, et que $\gamma(f)^8 = 1$ pour toute forme quadratique non dégénérée f sur k_v; cela aussi est démontré dans [14].

Ceci dit, décomposons X_v au moyen d'un idempotent u : $X_v = k_v u + R + E_1$, R et E_1 étant les sous-espaces de X_v qu'on connaît. On va appliquer la formule (42), d'abord à la forme quadratique $x \to aQ_1(x)$ sur R ($a \in k_v^*$), puis à la forme $y \to [x, y \times y]$ sur E_1 [$x \in R$ tel que $Q_1(x) \neq 0$]. Dans le premier cas, ρ est l'application $x \to a\bar{x}$, donc $| \rho | = | a |^{10}$, et $\gamma(f) = 1$ [parce que $aQ_1(x)$ est, soit une forme hyperbolique, soit une forme d'indice 1 en 10 variables sur $\mathbf{R}$], de sorte qu'on a, pour $\Psi \in \mathcal{S}(R)$,

$$(43) \quad \int_R \Psi(x)\chi_v(aQ_1(x)) \, | dx |_v = | a |^{-5} \int_R \hat{\Psi}(x)\chi_v(-a^{-1}Q_1(x)) \, | dx |_v.$$

Dans le second cas, on a $\rho(y) = 2x \times y$, $\rho^{-1}(y) = 2Q_1(x)^{-1}\bar{x} \times y$ [formule (2) de [11], p. 452], $| \rho | = | Q_1(x) |^8$, $\gamma(f) = 1$ (parce que la forme quadratique $y \to [x, y \times y]$ est équivalente à une forme $(c_1, c_2) \to \alpha N(c_1) + \beta N(c_2)$ sur $C \times C$), par conséquent :

$$(44) \quad \int_{E_1} \Psi(y)\chi_v([x, y \times y]) \, | dy |_v = | Q_1(x) |^{-4} \int_{E_1} \hat{\Psi}(y)\chi_v(-Q_1(x)^{-1}[\bar{x}, y \times y]) \, | dy |_v$$

pour $\Psi \in \mathcal{S}(E_1)$.

Considérons maintenant l'intégrale figurant dans l'énoncé du lemme 16. Remplaçons-y x par z, et posons ensuite

$$z = au + x + y \qquad (a \in k_v,\ x \in R,\ y \in E_1).$$

Prenant Φ de la forme $\Phi(z) = \Phi_1(a)\,\Phi_2(x)\,\Phi_3(y)$, il vient

$$(45)\quad \int \Phi(z)\,\chi_v(i\det(z))\,|dz|_v$$
$$= \int \Phi_1(a)\,\Phi_2(x)\,\Phi_3(y)\,\chi(iaQ_1(x) + i[x, y\times y])\,|da|.|dx|.|dy|$$

(on supprime maintenant les indices v, pour simplifier la notation).

Comme $Q_1(y\times y) = 0$ pour $y \in \mathrm{E}_1$, on a

$$aQ_1(x) + [x, y\times y] = aQ_1(x + a^{-1}\overline{y\times y}),$$

de sorte qu'une translation de la variable x permet d'appliquer la formule (43); le second membre de (45) devient alors

$$(46)\quad |i|^{-5}\int\Big(\int \Phi_1(a)\,\hat{\Phi}_2(x)\,\Phi_3(y)$$
$$\times\chi(-i^{-1}a^{-1}Q_1(x) + a^{-1}[\bar{x}, y\times y])\,|a|^{-5}|dx|\Big)\,|da|.|dy|.$$

La formule (44) s'applique immédiatement à (45) et donne pour le second membre de (45) l'expression

$$(47)\quad |i|^{-8}\int\Big(\int \Phi_1(a)\,\Phi_2(x)\,\hat{\Phi}_3(y)$$
$$\times\chi(iaQ_1(x) - i^{-1}Q_1(x)^{-1}[\bar{x}, y\times y])$$
$$\times|Q_1(x)|^{-4}|dy|\Big)\,|da|.|dx|.$$

Admettons pour le moment le lemme suivant :

LEMME 17. — *Soit Y un espace vectoriel de dimension finie > 2 sur un corps localement compact non discret K. Supposons donnés une forme quadratique non dégénérée Q sur Y et un nombre réel $m > 1$. Soit dy une mesure de Haar sur Y. Alors, pour toute fonction Φ de $\mathcal{S}(Y)$, il existe un nombre réel $c(\Phi)$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble intégrable W de Y de volume $\leq \varepsilon$ et tel que*

$$\int_{Y-W} |\Phi(y)|.|Q(y)|^{-m}\,dy \leq c(\Phi)\,\varepsilon^{-(m-1)}.$$

Soient δ, ε deux nombres réels > 0. Soit W comme dans l'énoncé du lemme 17 lorsqu'on y prend $K = k_v$, $Y = R$, $Q = Q_1$, $m = 4$, $dy = |dx|$, $\Phi = \Phi_2$. Écrivons

$$\int \Phi(z)\,\chi(i\det(z))\,|dz| = \int_{|a|\geq\delta} + \int_{\substack{|a|<\delta\\ x\notin W}} + \int_{\substack{|a|<\delta\\ x\in W}}.$$

Pour approximer la première de ces intégrales, on utilise l'expression (46) (où maintenant la variable a est restreinte à l'ensemble $|a| \geqq \delta$); cette expression montre qu'on a

$$\left| \int_{|a| \geqq \delta} \right| \leqq c_1(\Phi) \, |i|^{-5} \int_{|a| \geqq \delta} |a|^{-5} \, |da| \leqq c_1(\Phi) \, |i|^{-5} . c_2 \, \delta^{-4}.$$

De même, l'expression (47) donne pour la deuxième intégrale :

$$\left| \int_{\substack{|a| < \delta \\ x \notin W}} \right| \leqq c_3(\Phi) \, |i|^{-8} \, \delta \int_{x \notin W} |\Phi_2(x)| . |Q_1(x)|^{-4} \, |dx| \leqq c_4(\Phi) \, |i|^{-8} \, \delta \varepsilon^{-3}.$$

La troisième intégrale enfin est prise sous sa forme originelle, et admet évidemment la majoration

$$\left| \int_{\substack{|a| < \delta \\ x \in W}} \right| \leqq c_5(\Phi) \, \delta \varepsilon.$$

Ajoutant les trois majorations et choisissant $\delta = |i|^{-\frac{3}{5}}$, $\varepsilon = |i|^{-2}$, on trouve finalement

$$\left| \int \Phi(z) \, \chi_v(i \det(z)) \, |dz|_v \right| \leqq c_6(\Phi) \, |i|^{-\alpha},$$

où $\alpha = 13/5 > 2$. La même intégrale est d'ailleurs majorée par $c_7(\Phi) = \int |\Phi(z)| . |dz|_v$.

Indiquons brièvement comment le lemme 16 s'en déduit. Lorsque Φ parcourt un compact C_0 de $\mathcal{S}(X_v)$, Φ et ses transformées de Fourier partielles relatives à R et à E_1 restent dans un compact C_1 de $\mathcal{S}(X_v)$; les fonctions de C_1 sont majorées par une fonction, ne dépendant que de C_1, de la forme $\Phi_1(a) \, \Phi_2(x) \, \Phi_3(y)$. Quand on reprend, pour une fonction Φ de C_0 quelconque, l'analyse faite ci-dessus et qu'on introduit dans les intégrales qui s'obtiennent par les transformations de Fourier partielles le majorant $\Phi_1(a) \, \Phi_2(x) \, \Phi_3(y)$, on trouve le résultat cherché.

Nous esquissons enfin une démonstration du lemme 17 pour K de caractéristique $\neq 2$.

Soit $y \rightarrow \| y \|$ une norme sur Y. Il existe deux constantes c', c'' telles qu'on ait, pour tous η et β :

$$(48) \qquad \int_{\substack{\|y\| \leqq \beta \\ |Q(y)| < \eta}} dy \leqq c' \eta \beta^{n-2}, \qquad \int_{\substack{\|y\| \leqq \beta \\ |Q(y)| \geqq \eta}} |Q(y)|^{-m} \, dy \leqq c'' \eta^{1-m} \beta^{n-2},$$

où n désigne la dimension de l'espace vectoriel Y. Cela se voit facilement par des calculs directs : si K est à valuation discrète, on choisit pour norme sur Y le maximum des valeurs absolues des coordonnées par rapport à une base qui est telle que Q s'écrive $Q(y) = Q_1(y_1) + \pi Q_2(y_2)$, où Q_1 et Q_2 sont deux formes quadratiques sur le sous-espace engendré par les p premiers, resp. les $n-p$ derniers, vecteurs de base telles que, pour $i=1, 2$, Q_i soit entière sur le réseau engendré par les vecteurs de base correspondants et que son déterminant relatif aux mêmes vecteurs de base soit une unité; les nombres connus des solutions des congruences $Q_i(y_i) \equiv \alpha_i(\pi^k)$ donnent tout de suite les deux approximations. Si $K = \mathbf{R}$, on écrit $Q(y) = Q_1(y_1) - Q_2(y_2)$, où Q_1 et Q_2 sont définies positives; on peut alors prendre $Q_1^{\frac{1}{2}}$ et $Q_2^{\frac{1}{2}}$ comme norme dans les deux sous-espaces et introduire des coordonnées polaires dans ces sous-espaces; le résultat s'ensuit par des calculs élémentaires. Si $K = \mathbf{C}$, on écrit $Q(y) = Q_1(y) + iQ_2(y)$, et les calculs sont, dans ce cas encore, élémentaires.

Si K est à valuation discrète, les inégalités (48) démontrent déjà le lemme, puisque Φ est alors à support compact. Si $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, posons

$$W_k = \{ y \in Y;\ k-1 \leqq \| y \| \leqq k,\ | Q(y) | < \varepsilon k^{-n} \}, \qquad W = \bigcup_{k>0} W_k,$$

et soit M_k le maximum de $|\Phi(y)|$ sur l'ensemble des y tels que $k-1 \leqq \|y\| \leqq k$. On a alors

$$\operatorname{vol}(W) \leqq \sum_{k>0} \operatorname{vol}(W_k) \leqq \sum_{k>0} \int_{\substack{\|y\| < k \\ |Q(y)| < \varepsilon k^{-n}}} dy \leqq c' \varepsilon \sum_{k>0} k^{-2},$$

$$\int_{Y-W} |\Phi(y)| . |Q(y)|^{-m} dy \leqq \sum_{k>0} \int_{\substack{k-1 \leqq \|y\| \leqq k \\ |Q(y)| \geqq \varepsilon k^{-n}}} |\Phi(y)| . |Q(y)|^{-m} dy$$
$$\leqq \sum_{k>0} M_k \int_{\substack{\|y\| < k \\ |Q(y)| \geqq \varepsilon k^{-n}}} |Q(y)|^{-m} dy$$
$$\leqq c'' \varepsilon^{1-m} \sum_{k>0} M_k k^{mn-2};$$

la dernière somme converge puisque M_k décroît plus vite que toute puissance de k. Cela démontre le lemme 17.

15. **Fin de la démonstration.**

Le lemme 16 montre déjà que la condition (A) est satisfaite.

On voit facilement que la fonction $x \to \Phi(x)\chi(a \det(x))$ reste dans un compact de $\mathcal{S}(X_A)$ lorsque Φ parcourt un compact de $\mathcal{S}(X_A)$ et a un compact de A, de sorte que, pour démontrer (B), il suffit de montrer la convergence uniforme sur tout compact de $\mathcal{S}(X_A)$ de la série

$$\sum_{i\in k^*}\left|\int_{X_A}\Phi(x)\,\chi(i\det(x))\,|dx|_A\right|. \tag{49}$$

C'est ce qu'on va faire maintenant. Si Φ est de la forme (34), on a

$$\begin{aligned}&\int_{X_A}\Phi(x)\,\chi(i\det(x))\,|dx|_A\\ &=\prod_v\int_{X_v}\Phi_v(x)\,\chi_v(i\det(x))\,|dx|_v\\ &=\prod_{v\in S}\int_{X_v}\Phi_v(x)\,\chi_v(i\det(x))\,|dx|_v\prod_{\substack{v\notin S\\ |i|_v>1}}|i|_v^{-3}(1+O(q_v^{-4})),\end{aligned}$$

où S est un ensemble fini de places de k suffisamment grand pour qu'on puisse appliquer le lemme 14; $1+O(q_v^{-4})$ désigne un facteur compris entre 1 et $1+2\,q_v^{-4}$. Le lemme 16, appliqué aux places de S affirme l'existence d'une constante $c(\Phi)$ telle qu'on ait

$$\left|\prod_{v\in S}\int_{X_v}\Phi_v(x)\,\chi_v(i\det(x))\,|dx|_v\right|\leq c(\Phi)\prod_{v\in S}\min(1,\ |i|_v^{-\alpha}). \tag{50}$$

Les termes de la série (49) sont alors majorés par

$$c_1(\Phi)\prod_{v\in S}\min(1,\ |i|_v^{-\alpha})\prod_{\substack{v\notin S\\ |i|_v>1}}|i|_v^{-3},$$

donc aussi par

$$c_1(\Phi)\prod_v\min(1,\ |i|_v^{-\alpha}),$$

où le produit est étendu à toutes les places de k [$c_1(\Phi)$ ne dépend que de Φ]. Nous allons établir la convergence de la série

$$\sum_{i\in k^*}\prod_v\min(1,\ |i|_v^{-\alpha})\qquad(\alpha>2). \tag{51}$$

Lemme 18. — *Il existe un ensemble fini S_0 de places de k comprenant toutes les places à l'infini et tel que tout élément i de k^* puisse s'écrire sous la forme $i=tn^{-1}$, où t et n sont des entiers de k et où* $\max(|t|_v,\ |n|_v)=1$ *pour $v\notin S_0$; de plus, on peut choisir t et n de manière que, pour $v\in S_0$, v finie,* $\max(|t|_v, |n|_v)$ *soit borné inférieurement par une constante >0, lorsque i parcourt k^*.*

Choisissons en effet, des représentants entiers $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_h$ des classes d'idéaux de k, et soit S_0 l'ensemble formé des places à l'infini de k et des places qui correspondent aux facteurs premiers des idéaux $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_h$. Si i est un élément de k^*, l'idéal principal (i) peut s'écrire $(i) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$, où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux entiers premiers entre eux. Comme $\mathfrak{a}^{-1}$ et $\mathfrak{b}^{-1}$ sont équivalents à un même $\mathfrak{a}_j$, on aura

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}_j = (t'),\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}_j = (n), \qquad \text{avec} \quad t', n \in k^*,$$

donc $(i) = (t')(n)^{-1}$ et $i = tn^{-1}$, $t't^{-1}$ étant une unité de k. Si les entiers t et n sont tous deux divisibles par un idéal premier $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ divise $\mathfrak{a}_j$, appartient donc à S_0, et l'exposant d'une puissance de $\mathfrak{p}$ qui divise t et n est borné.

Écrivant dans les termes de la série (51) $i = tn^{-1}$ comme dans le lemme 18, il vient

$$\prod_{\nu} \min(1, |i|_\nu^{-\alpha}) = \prod_{\nu} |n|_\nu^{\alpha} \min(|n|_\nu^{-\alpha}, |t|_\nu^{-\alpha})$$
$$= \prod_{\nu \in S_0} \min(|n|_\nu^{-\alpha}, |t|_\nu^{-\alpha}) \leq c' \prod_{\nu \in S_\infty} \min(|n|_\nu^{-\alpha}, |t|_\nu^{-\alpha}),$$

où S_∞ désigne l'ensemble des places à l'infini de k. Si $S_\infty = S' \cup S''$ est une partition de S_∞, on a, pour n donné,

$$\sum_{\substack{|t|_\nu \leq |n|_\nu\ (\nu \in S') \\ |t|_\nu > |n|_\nu\ (\nu \in S'')}} \prod_{\nu \in S''} |t|_\nu^{-\alpha} \leq c'' \prod_{\nu \in S'} |n|_\nu \prod_{\nu \in S''} |n|_\nu^{1-\alpha},$$

où c'' est indépendant de n. D'où, en multipliant par $\prod_{\nu \in S'} |n|_\nu^{-\alpha}$ et en sommant sur toutes les partitions de S_∞ :

$$\sum_{t} \prod_{\nu \in S_\infty} \min(|n|_\nu^{-\alpha}, |t|_\nu^{-\alpha}) \leq c''' \prod_{\nu \in S_\infty} |n|_\nu^{1-\alpha},$$

donc, comme $\prod_{\nu \in S_\infty} |n|_\nu = N(n)$,

$$\sum_{i \in k^*} \prod_{\nu} \min(1, |i|_\nu^{-\alpha}) \leq c' \sum_{(n)} \sum_{t} \prod_{\nu \in S_\infty} \min(|n|_\nu^{-\alpha}, |t|_\nu^{-\alpha})$$
$$\leq c' c''' \sum_{(n)} N(n)^{1-\alpha} < \infty.$$

La convergence de la série (49) pour Φ de la forme (34) est donc assurée. Si C_0 est une partie compacte de $\mathcal{S}(X_A)$, il existe un ensemble fini S

de places de k contenant toutes les places à l'infini et tel que les fonctions de C_0 soient de la forme

$$\Phi_S(x_S)\prod_{v\notin S}\Phi_v(x_v),$$

où $\Phi_S\in\mathcal{S}(X_S)$, X_S étant le produit des X_v pour $v\in S$ et où Φ_v est la fonction caractéristique de X_v^0 pour $v\notin S$; de plus, les Φ_S restent dans un compact de $\mathcal{S}(X_S)$ (*cf.* BRUHAT [1], § 9). Au lieu de (50) on aura maintenant une inégalité

$$\left|\int_{X_S}\Phi_S(x_S)\prod_{v\in S}\chi_v(i\det(x))\prod_{v\in S}|dx|_v\right|\leqq c(\Phi)\prod_{v\in S}\min(1,|i|_v^{-\alpha});$$

cela se démontre au moyen du théorème de Fubini en utilisant le lemme 16. L'uniformité en Φ de la majoration est établie en même temps en utilisant le fait que les fonctions d'un compact de $\mathcal{S}(X_S)$ sont majorées par une fonction de $\mathcal{S}(X_S)$ qu'on peut prendre de la forme $\prod_{v\in S}\Phi_v(x_v)$. Ceci achève la démonstration de (B).

La dernière chose à faire est de déduire (33) des approximations de ce numéro. Posons, pour $s\in A^*$,

$$F(s)=\sum_{i\in k^*}\int_{X_A}\Phi(x)\chi(is\det(x))|dx|_A;$$

F est une fonction sur A^* invariante sur les classes suivant k^*. Soit C une partie compacte de A_0^* telle que $A_0^*=Ck^*$, et écrivons $s=a_\tau c\lambda$, avec $\tau\in\mathbf{R}_+^*$, $c\in C$, $\lambda\in k^*$ (notations du § 9). Alors, d'après les approximations faites ci-dessus, on a

$$|F(s)|=|F(a_\tau c)|\leqq c_1(\Phi)\sum_{i\in k^*}\prod_v\min(1,|(ia_\tau c)_v|_v^{-\alpha}).$$

Le compact C est contenu dans un ensemble de la forme

$$\prod_{v\in S_1}C_v\times\prod_{v\notin S_1}k_v^{(1)},$$

où C_v est un compact de k_v^* et où $k_v^{(1)}$ désigne le groupe des unités de k_v (S_1 est fini et contient toutes les places à l'infini de k).

Pour $v\notin S_1$, on a $|(ia_\tau c)_v|_v=|i|_v$, et pour $v\in S_1$,

$$|(ia_\tau c)_v|_v\geqq\gamma_v|(ia_\tau)_v|_v,$$

γ_ν étant une constante > 0. Il existe donc une constante γ telle que

$$\prod_{\nu} \min(1, |(ia_\tau c)_\nu|_\nu^{-\alpha}) \leq \gamma \prod_{\nu \in S_\infty} \min(1, |i\tau|_\nu^{-\alpha}) \prod_{\nu \notin S_\infty} \min(1, |i|_\nu^{-\alpha}).$$

Quand on écrit $i = tn^{-1}$ comme dans le lemme 18, le dernier membre de cette inégalité devient

$$\gamma \prod_{\nu \in S_\infty} \min(|n|_\nu^{-\alpha}, |t\tau|_\nu^{-\alpha}) \prod_{\nu \notin S_\infty} \min(|n|_\nu^{-\alpha}, |t|_\nu^{-\alpha}) \leq \gamma' \prod_{\nu \in S_\infty} \min(|n|_\nu^{-\alpha}, |t\tau|_\nu^{-\alpha}),$$

et, par conséquent,

$$|F(s)| \leq \gamma' c_1(\Phi) \sum_{(t)} \sum_{n} \prod_{\nu \in S_\infty} \min(|n|_\nu^{-\alpha}, |t\tau|_\nu^{-\alpha}).$$

Soit $S_\infty = S' \cup S''$ une partition de S_∞. On a, pour t donné,

$$\sum_{\substack{|n|_\nu \leq |t\tau|_\nu \, (\nu \in S') \\ |n|_\nu > |t\tau|_\nu \, (\nu \in S'')}} \prod_{\nu \in S''} |n|_\nu^{-\alpha} \leq c'' \prod_{\nu \in S'} |t\tau|_\nu \prod_{\nu \in S''} |t\tau|_\nu^{1-\alpha}.$$

Donc

$$|F(s)| \leq \gamma'' \sum_{(t)} \prod_{\nu \in S_\infty} |t\tau|_\nu^{1-\alpha} = \gamma'' \sum_{(t)} N(t)^{1-\alpha} |a_\tau|^{1-\alpha}.$$

Comme $|s| = |a_\tau|$, cela veut dire que $F(s) = O(|s|^{1-\alpha})$ et (33) est démontré, puisqu'on peut prendre $\alpha > 2$.

Appendice.

La fonction-zêta.

Tous les termes dans la formule (24) (chap. II, § 8) peuvent être considérés comme fonctions de $t = \nu(g)$. Une intégration par rapport à t va nous donner l'équation fonctionnelle de la fonction-zêta de la forme cubique det.

Désignons par Y le sous-ensemble algébrique $\det(x) \neq 0$ de X. La variété Y admet le système de facteurs de convergence $\lambda = ((1 - q_\nu^{-1})^{-1})$, comme on le voit par exemple à l'aide des résultats du paragraphe 5. Si dx est une jauge sur X, $\det(x)^{-9}\, dx$ est une jauge invariante par Γ

sur Y et la mesure de Tamagawa $|\lambda \det(x)^{-9}\, dx|_A$ sur Y_A est invariante par Γ_A. La fonction-zêta de la forme det est définie par

$$Z_\Phi(s) = \int_{Y_A} \Phi(x)\,|\det(x)|^{s-9}\,|\lambda\, dx|_A \tag{52}$$

($\Phi \in \mathcal{S}(X_A)$, $s \in \mathbf{C}$). Nous démontrerons que cette intégrale converge pour $\operatorname{Re}(s) > 9$.

Y_A est réunion d'un nombre fini d'orbites pour Γ_A dont chacune est ouverte dans Y_A et est isomorphe au quotient de Γ_A par le groupe H_A, où H est le stabilisateur algébrique d'un point appartenant à X_k de l'orbite en question. Procédant comme au paragraphe 8, on transforme l'intégrale qui définit $Z_\Phi(s)$ en une intégrale sur Γ_A/Γ_k; quand on y remplace les nombres de Tamagawa des stabilisateurs H qui apparaissent par leur valeur 1, il vient

$$Z_\Phi(s) = \int_{\Gamma_A/\Gamma_k} \sum_{\xi \in Y_k} \Phi(g(\xi))\,|\nu(g)|^s\,|\lambda\, dg|_A,$$

où dg désigne une jauge invariante sur Γ.

LEMME 19. — *Soient G un groupe localement compact dénombrable à l'infini, G' un sous-groupe fermé distingué de G et Γ un sous-groupe discret de G. Posons $G'' = G/G'$, $\Gamma' = \Gamma \cap G'$, $\Gamma'' = \Gamma G'/G'$ $(= \Gamma/\Gamma')$. Supposons G et G'' unimodulaires et soient dg, dg', dg'' des mesures de Haar sur G, G', G'' respectivement telles que $dg = dg''.dg'$. Alors on a, pour $F \in L^1(G/\Gamma)$,*

$$\int_{G/\Gamma} F(g)\, dg = \int_{G''/\Gamma''} dg'' \int_{G'/\Gamma'} F(gg')\, dg' \qquad (g'' = gG').$$

Démonstration. — On a, si f est une fonction de $L^1(G/\Gamma')$,

$$\int_{G/\Gamma'} f(g)\, dg = \int_{G/\Gamma} dg \sum_{\Gamma/\Gamma'} f(g\gamma) = \int_{G''} dg'' \int_{G'/\Gamma'} f(gg')\, dg',$$

d'où, pour F de la forme $F(g) = \sum_{\Gamma/\Gamma'} f(g\gamma)$,

$$\int_{G/\Gamma} F(g)\, dg = \int_{G''} dg'' \int_{G'/\Gamma'} f(gg')\, dg'.$$

D'autre part, $\int_{G''} \varphi(g'')\, dg'' = \int_{G''/\Gamma''} dg'' \sum_{\Gamma''} \varphi(g''\gamma'')$, donc

$$\int_{G/\Gamma} F(g)\, dg = \int_{G''/\Gamma''} dg'' \sum_{\gamma'' \in \Gamma''} \int_{G'/\Gamma'} f(g\gamma g')\, dg' \qquad (g'' = g\,G',\ \gamma'' = \gamma\Gamma').$$

Il résulte des hypothèses que le module de l'automorphisme $g' \to \gamma^{-1} g' \gamma$ ($\gamma \in \Gamma$) de G' est 1, de sorte que

$$\int_{G'/\Gamma'} f(g\gamma g')\, dg' = \int_{G'/\Gamma'} f(gg'\gamma)\, dg',$$

et

$$\int_{G/\Gamma} F(g)\, dg = \int_{G''/\Gamma''} dg'' \int_{G'/\Gamma'} \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma'} f(gg'\gamma)\, dg' = \int_{G''/\Gamma''} dg'' \int_{G'/\Gamma'} F(gg')\, dg'.$$

Le lemme résulte de là.

Appliquons le lemme 19 aux groupes Γ_A, G_A, $\Gamma_A / G_A = A^*$ et à leurs sous-groupes discrets Γ_k, G_k, $\Gamma_k / G_k = k^*$ (les isomorphismes de Γ_A / G_A sur A^* et de Γ_k / G_k sur k^* sont déterminés par l'application ν de Γ sur $\mathbf{G}_m$; rappelons que ν admet une section globale définie sur k). Pour les mesures de Haar on prendra $|\lambda\, dg|_A$, $|dg'|_A$, $|\lambda t^{-1}\, dt|_A$; dg (resp. dg') désigne ici une jauge invariante sur Γ (resp. G). Le lemme 19 donne alors

$$\int_{\Gamma_A/\Gamma_k} F(g)\, |\lambda\, dg|_A = \int_{A^*/k^*} |\lambda t^{-1}\, dt|_A \int_{G_A/G_k} F(gg')\, |dg'|_A.$$

Prenant $F(g) = \sum_{\xi \in Y_k} \Phi(g(\xi))\, |\nu(g)|^s$, il vient

$$Z_\Phi(s) = \int_{A^*/k^*} |t|^{s-1}\, |\lambda\, dt|_A \int_{G_A/G_k} \sum_{\xi \in Y_k} \Phi(gg'(\xi))\, |dg'|_A. \tag{53}$$

Posons

$$\Psi(t) = \int_{G_A/G_k} \sum_{\xi \in Y_k} \Phi(gg'(\xi))\, |dg'|_A \qquad (t = \nu(g)).$$

D'après le paragraphe 8, on a

$$\Psi(t) = \sum_{i \in k^*} \int_{U(i)_A} \Phi(g(x))\, |\theta_i(x)|_A.$$

Le lemme 8 montre que $\Psi(t) = O(|t|^{-N})$ pour $|t| \to \infty$ (N quelconque), et l'on déduit de l'égalité (24) que $\Psi(t) = O(|t|^{-9})$ pour $|t| \to 0$. On démontre alors facilement que le second membre de (53) converge pour $\mathrm{Re}(s) > 9$; le second membre de (52) converge donc aussi pour $\mathrm{Re}(s) > 9$.

Soient f^+, f^- deux fonctions sur $\mathbf{R}_+^*$ définies par $f^+(\tau) = 1$ si $\tau > 1$, $f^+(1) = \frac{1}{2}$, $f^+(\tau) = 0$ si $\tau < 1$; $f^+ + f^- = 1$. Posons

$$Z_\Phi^+(s) = \int_{Y_A} f^+(|\det(x)|)\, \Phi(x)\, |\det(x)|^{s-9}\, |\lambda\, dx|_A;$$

$Z_{\Phi}^{-}(s)$ étant défini de manière analogue, on a $Z_\Phi = Z_\Phi^+ + Z_\Phi^-$. Il est clair que Z_Φ^+ est une fonction entière. Les calculs précédents montrent encore qu'on a

$$Z_\Phi^-(s) = \int_{A^*/k^*} f^-(|t|)\,|t|^{s-1}\,|\lambda\,dt|_A \sum_{i\in k^*} \int_{U(i)_A} \Phi(g(x))\,|\theta_i(x)|_A.$$

En multipliant les deux membres de (24) par $f^-(|t|)\,|t|^{s-1}$ et en intégrant ensuite sur A^*/k^* par rapport à la mesure $|\lambda\,dt|_A$, on trouve, lorsqu'on tient compte de ce qu'on a

$$\int_{A^*/k^*} \psi(|t|)\,|\lambda\,dt|_A = h_k \int_0^\infty \psi(\tau)\,d\tau$$

[h_k étant le résidu en 1 de la fonction-zêta de k; *voir* [13], theorem 3.1.1 (iii)] l'égalité suivante :

$$Z_\Phi^-(s) = Z_{\hat\Phi}^+(9-s) - h_k\left(\frac{1}{s-8}\int_{U(0)_A} \Phi\,|\theta_0|_A + \frac{1}{s-4}\int_{V_A} \Phi\,|\omega|_A + \frac{1}{s}\Phi(0)\right)$$
$$+ h_k\left(\frac{1}{s-1}\int_{U(0)_A} \hat\Phi\,|\theta_0|_A + \frac{1}{s-5}\int_{V_A} \hat\Phi\,|\omega|_A + \frac{1}{s-9}\hat\Phi(0)\right).$$

Cela donne le prolongement analytique de $Z_\Phi(s)$ et en même temps l'équation fonctionnelle

$$Z_\Phi(s) = Z_{\hat\Phi}(9-s).$$

Remarque. — Pour Φ de la forme $\Phi(x) = \prod \Phi_v(x_v)$ on peut faire un « calcul multiplicatif » pour $Z_\Phi(s)$, comme cela a été fait dans [13] pour les fonctions-zêta de groupes classiques. On peut ainsi calculer de deux façons différentes le résidu en 9 de la fonction Z_Φ; si l'on n'utilise pas le résultat de ce Mémoire, cette méthode permet de montrer que le nombre de Tamagawa de G est égal au nombre de Tamagawa du stabilisateur dans G de tout point $\xi \in X_k$ tel que $\det(\xi) \neq 0$ (on ne trouve cependant pas que ces nombres de Tamagawa sont égaux à 1).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bruhat (François). — Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p-adiques, *Bull. Soc. math. France*, t. 89, 1961, p. 43-75.

[2] Freudenthal (Hans). — Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene, I, *Proc. Konkl. ned. Akad. Wet.*, Series A, t. 57, 1954, p. 218-230.

[3] Godement (Roger). — Domaines fondamentaux des groupes arithmétiques, *Séminaire Bourbaki*, t. 15, 1962-1963, n° 257, 25 pages.

[4] Jacobson (N.). — Some groups of transformations defined by Jordan algebras, III, *J. für reine und angew. Math.*, t. 207, 1961, p. 61-85.

[5] Ono (T.). — On the relative theory of Tamagawa numbers, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 70, 1964, p. 325-326.

[6] Serre (Jean-Pierre). — *Cohomologie galoisienne.* — Berlin, Springer-Verlag, 1964 (Lectures Notes in Mathematics, 5).

[7] Springer (T. A.). — On a class of Jordan algebras, *Proc. Konkl. ned. Akad. Wet.*, Series A, t. 62, 1959, p. 254-264.

[8] Springer (T. A.). — The projective octave plane, *Proc. Konkl. ned. Akad. Wet.*, Series A, t. 63, 1960, p. 74-101.

[9] Springer (T. A.). — The classification of reduced exceptional simple Jordan algebras, *Proc. Konkl. ned. Akad. Wet.*, Series A, t. 63, 1960, p. 414-422.

[10] Springer (T. A.). — Characterization of a class of cubic forms, *Proc. Konkl. ned. Akad. Wet.*, Series A, t. 65, 1962, p. 259-265.

[11] Springer (T. A.). — On the geometric algebra of the octave planes, *Proc. Konkl. ned. Akad. Wet.*, Series A, t. 65, 1962, p. 451-468.

[12] Van der Blij (F.) et Springer (T. A.). — The arithmetics of octaves and of the group G_2, *Proc. Konkl. ned. Akad. Wet.*, Series A, t. 62, 1959, p. 406-418.

[13] Weil (André). — *Adeles and algebraic groups.* Notes by M. Demazure and T. Ono. — Princeton, Institute for advanced Study, 1961.

[14] Weil (André). — Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, *Acta Math.*, t. 111, 1964, p. 143-211.

[15] Weil (André). — Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques. *Acta Math.*, t. 113, 1965, p. 1-87.

(Manuscrit reçu le 1er août 1965.)

J. G. M. Mars,
Institut de Mathématique
de l'Université d'Utrecht,
Boothstraat I*c*,
Utrecht (Pays-Bas).