Bulletin de la S. M. F.

L. Gruson

Théorie de Fredholm p-adique

Bulletin de la S. M. F., tome 94 (1966), p. 67-95

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1966__94__67_0>

Bull. Soc. math. France,
94, 1966, p. 67 à 95.

THÉORIE DE FREDHOLM p-ADIQUE

PAR

LAURENT GRUSON.

Introduction. — La base de ce travail est un article de SERRE [13] où sont étudiées les applications linéaires complètement continues d'espaces de Banach ultramétriques : il y est notamment démontré que la théorie de Fredholm s'applique aux endomorphismes complètement continus d'espaces de Banach *libres* (i. e. sommes directes de droites).

On peut lever cette restriction en faisant appel à quelques résultats simples sur les espaces de Banach ultramétriques. On peut également adopter une présentation voisine de celle de GROTHENDIECK [6] : cette présentation se simplifie grâce aux propriétés du produit tensoriel topologique — en particulier, il n'y a pas à distinguer ici entre applications nucléaires et applications complètement continues.

Sommaire :

1. Généralités sur les espaces de Banach ultramétriques.
2. Préliminaires d'algèbre extérieure.
3. Produits tensoriels topologiques.
4. Théorie de Fredholm.
5. Extension aux espaces « localement convexes ».

Le paragraphe 1 est réduit au minimum : il présente le langage utilisé dans la suite. Le paragraphe 2 est une esquisse algébrique de la théorie, relative aux endomorphismes de rang fini d'un module libre sur un anneau commutatif. Après l'étude des produits tensoriels (§ 3) on aborde la théorie de Riesz au paragraphe 4, en prolongeant par continuité les calculs du paragraphe 2. On propose aussi une démonstration fondée uniquement sur les résultats de [13] et du paragraphe 1. Le paragraphe 5 tente l'extension aux espaces « localement convexes » par l'intermédiaire d'une caractérisation des applications complètement continues.

Notations. — Sauf au paragraphe 2, on se place sur un corps valué complet Q, non archimédien. On note :

R son anneau de valuation (d'idéal maximal m, de corps résiduel k);

$x \mapsto |x|$, sa valeur absolue;

G l'image de cette valeur absolue dans $\mathbf{R}_+$ (exception faite du point O) : c'est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$.

1. Généralités sur les espaces de Banach ultramétriques.

1. La catégorie (enc).

Un *espace de Banach* sur Q est un espace vectoriel normé complet, dont la norme vérifie « l'inégalité ultramétrique » :

$$|x+y| \leqq \sup(|x|, |y|).$$

On désigne par (enc) la catégorie dont les objets sont les espaces de Banach sur Q, les morphismes sont les applications linéaires diminuant la norme, avec la composition usuelle.

Si E et F sont deux espaces de Banach, on désigne par Hom (E, F) l'ensemble des morphismes de E dans F; il est muni naturellement d'une structure de R-module.

On désigne par ${}^sE$ l'espace vectoriel sous-jacent à E.

La catégorie (enc) possède un objet nul. Si $u : E \to F$ est un morphisme de (enc), il possède un noyau [à savoir, $u^{-1}(o)$ muni de la norme induite] et un conoyau [à savoir, $F/\overline{u(E)}$ muni de la norme quotient]. De même, une famille $(E_i)_{i\in I}$ d'espaces de Banach possède une somme directe et un produit direct :

— la somme directe $\coprod_{i\in I} E_i$ est l'espace vectoriel des familles $(x_i) \in \prod_{i\in I} ({}^sE_i)$, tendant vers zéro en norme (suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I), muni de la norme : $|(x_i)| = \sup(|x_i|)$;

— le produit direct $\prod_{i\in I} E_i$ est l'espace vectoriel des familles $(x_i) \in \prod_{i\in I} ({}^sE_i)$, bornées en norme, muni de la norme : $|(x_i)| = \sup(|x_i|)$. Lorsque $E_i = E$, on le note E^I.

La catégorie (enc) est donc additive, et possède des limites projectives et inductives quelconques. Elle n'est pas abélienne.

On dit qu'un morphisme de (enc) est strict, si le morphisme canonique de sa coimage dans son image est un isomorphisme. Dire que

$u : E \to F$ est strict, revient donc à dire que, pour tout $y \in u(E)$, on a l'égalité suivante :

$$|y| = \inf_{u(x)=y} (|x|).$$

Lorsque u est un monomorphisme, cette condition signifie que u est injectif et préserve la norme; lorsque u est un épimorphisme, cette condition signifie que u est surjectif et que la norme de F est quotient de celle de E.

Les morphismes stricts de (enc) vérifient les axiomes de HELLER [8]; les suites exactes courtes correspondantes sont les séquences (u, v) de morphismes de (enc), telles que u soit noyau de v et v soit conoyau de u. Dans la suite, on parlera de suites exactes et de foncteurs exacts en se référant à cette structure.

Soit (E_i, u_{ij}) un système inductif de (enc). Sa limite inductive est le séparé complété de l'espace vectoriel $\varinjlim ({}^sE_i)$, muni de la plus grande semi-norme ultramétrique pour laquelle les $u_i : ({}^sE_i) \to \varinjlim ({}^sE_i)$ soient des rétractions. Cette semi-norme est explicitée par la formule suivante :

$$(1) \qquad |x| = \inf_{(x_i)_{i \in I}} \left(\sup_{i \in I}(|x_i|)\right),$$

où $(x_i)_{i \in I}$ parcourt l'ensemble des éléments de $\coprod_{i \in I} ({}^sE_i)$ tels que $x = \sum_{i \in I} u_i(x_i)$. En particulier :

PROPOSITION 1. — *Dans la catégorie* (enc), *les limites inductives filtrantes sont exactes.*

Démonstration. — Comme les limites inductives commutent aux conoyaux, il reste à vérifier que la limite inductive d'un système inductif filtrant $(f_i) : (E_i, u_{ij}) \to (F_i, v_{ij})$ de monomorphismes stricts est un monomorphisme strict.

Soit $f : (E, u_i) \to (F, v_i)$ la limite inductive du système d'espaces vectoriels sous-jacent : il suffit de voir que f préserve la semi-norme explicitée par la formule (1) ci-dessus.

Soient $x \in E$, $y = f(x)$, et supposons $|y| < |x|$. Il existe un indice i et un point $y_i \in F_i$, tels que $v_i(y_i) = y$ et $|y_i| < |x|$, puisque le système est filtrant. D'autre part, il existe un indice $j \geq i$, tel que $v_{ji}(y_i)$ tombe dans $f_j(u_j^{-1}(x))$: d'où une contradiction, ces derniers points étant de norme $\geq |x|$.

2. Le foncteur L.

Soient E et F deux espaces de Banach. On désigne par $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme suivante :

$$|u| = \inf(A \mid (A \in \mathbf{R}_+) \quad \text{et} \quad (\forall x)((x \in E) \Rightarrow (|u(x)| \leq A . |x|))).$$

C'est un espace de Banach, dont la boule unité est $\mathrm{Hom}(E, F)$. Soit $v \in \mathrm{Hom}(F, G)$: l'application $v \mapsto v \circ u$ est un morphisme de $L(E, F)$ dans $L(E, G)$ — et de même dans l'autre sens.

On définit ainsi un foncteur :

$$L : \quad (\mathrm{enc})^0 \times (\mathrm{enc}) \to (\mathrm{enc})$$

qui commute aux limites projectives (car aux noyaux et aux produits). De plus, la donnée

$$E \mapsto L(E, .); \qquad u \mapsto L(u, .)$$

définit un foncteur pleinement fidèle de $(\mathrm{enc})^0$ dans $Hom((\mathrm{enc}), (\mathrm{enc}))$, comme on le vérifie immédiatement.

Par abus de langage, on dit qu'un foncteur $\varphi : (\mathrm{enc}) \to (\mathrm{enc})$ est représentable, lorsqu'il est isomorphe à un foncteur $L(E, .)$. E est alors déterminé à isomorphisme unique près; on l'appellera représentant de φ.

Exemple. — Soit I un ensemble. Le foncteur

$$E \mapsto E'$$

de (enc) dans elle-même, est représentable par la somme directe $c(I)$ d'une famille, indexée par I, d'espaces de Banach égaux à Q. On appelle espace de Banach *libre*, un espace de Banach isomorphe à un $c(I)$ convenable : le cardinal de I est alors bien déterminé (*cf.* [9]). On peut montrer que tout sous-espace fermé d'un espace de Banach libre est libre.

3. La catégorie (enct).

On désigne par (enct) la catégorie dont les objets sont les espaces de Banach, les morphismes sont les applications linéaires continues. C'est une catégorie additive avec noyaux et conoyaux; le foncteur d'inclusion de (enc) dans (enct) commute aux noyaux et aux conoyaux.

Un *morphisme strict* de (enct) est un morphisme tel que le morphisme canonique de sa coimage dans son image soit un isomorphisme. D'après le théorème des homomorphismes de Banach, un morphisme $u : E \to F$ de (enct) est strict si et seulement si $u(E)$ est fermé dans F. La classe des morphismes stricts de (enct) vérifie les axiomes de Heller [8]. On peut montrer que les projectifs correspondants sont les objets isomorphes à un $c(I)$ convenable : en particulier, la catégorie (enct) possède assez de projectifs.

La catégorie (enct) n'est pas abélienne, et ne possède ni sommes directes ni produits directs infinis.

4. **Dualité. Corps maximalement complets.**

Conformément aux notations usuelles, on désignera le foncteur $L(.,Q)$, de (enc)^0 dans (enc), par :

$$E \mapsto E' \quad \text{(dual de } E);$$
$$u \mapsto {}^t u \quad \text{(transposée de } u).$$

Ce foncteur commute aux limites projectives, mais n'est pas exact en général.

On dit que le corps Q est maximalement complet, lorsqu'il est linéairement compact sur son anneau de valuation. Il revient au même de dire que toute suite décroissante de boules de Q est d'intersection non vide.

Il est bien connu (*cf.* [14]) que cette condition équivaut à la validité du théorème de Hahn-Banach sur Q, i. e. au fait que Q soit un objet injectif de (enc). Elle équivaut aussi au fait que le foncteur $L(.,Q)$ soit exact. On trouve dans [14] (ainsi que dans [1], chap. III) quelques applications de ce résultat.

Tout corps muni d'une valuation discrète est maximalement complet. Un corps muni d'une valuation dense n'est pas nécessairement maximalement complet, mais admet toujours une extension valuée maximalement complète (*cf.* [10] pour un exposé détaillé).

5. **Espaces de Banach décomposables.**

Un espace de Banach est dit *décomposable*, lorsqu'il est somme directe d'espaces de Banach de dimension 1. Les espaces libres sont décomposables; la réciproque est fausse si $G \neq \mathbf{R}_+^*$.

PROPOSITION 2. — *Lorsque Q est maximalement complet, tout espace de Banach de type dénombrable* (i. e. *admettant une suite totale*) *est décomposable.*

Démonstration. — Si E est de dimension infinie et de type dénombrable, il existe une suite croissante $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de sous-espaces fermés de E, telle que $V_0 = 0$, V_n soit de codimension 1 dans V_{n+1}, et $\left(\bigcup_{n\geq 0} V_n\right)$ soit dense dans E.

Si Q est maximalement complet, tout espace de Banach de dimension finie est décomposable et injectif dans (enc) (on le voit par récurrence sur la dimension). Pour tout $n \geqq 0$, V_n est donc facteur direct dans V_{n+1}. Posant $V_{n+1} = V_n \amalg W_n$, on conclut que E est somme directe des W_n.

COROLLAIRE. — *Si Q est maximalement complet, tout espace de Banach est limite inductive filtrante d'espaces de Banach décomposables de dimension finie.*

(On peut montrer que la proposition 2 est caractéristique des corps maximalement complets. Par contre, le corollaire sera étendu au cas général dans le numéro suivant.)

6. **Espaces de Banach faiblement projectifs.**

Un espace de Banach E est dit *faiblement projectif* lorsque le foncteur $L(E, .)$ est exact de (enc) dans elle-même. Cela signifie que E possède la propriété de relèvement suivante :

Quels que soient l'épimorphisme strict de (enc), $u : F \to G$; le nombre $M > 0$; et l'application linéaire continue de norme $< M$, $v : E \to G$, il existe une application linéaire continue de norme $< M$, $v' : E \to F$, telle que $v = u \circ v'$.

Les espaces faiblement projectifs sont stables par somme directe (évident, et l'on peut montrer qu'ils le sont aussi par sous-objet). Tout espace de Banach de dimension 1 est faiblement projectif : donc les espaces décomposables sont faiblement projectifs.

PROPOSITION 3. — *Supposons Q de valuation dense; soit E un espace de Banach de dimension infinie et de type dénombrable. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un morphisme bijectif de* (enc) : $u : c(\mathbf{N}) \to E$, *tel que* $|u^{-1}| \leqq (1+\varepsilon)$.

Démonstration. — Choisissons une suite $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ comme dans la proposition 2, et une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres > 0, telle que $\prod_{n \geqq 0} (1+\varepsilon_n)^2 \leqq (1+\varepsilon)$.

Posons

$$(1+\eta) = \prod_{n \geqq 0} (1+\varepsilon_n).$$

On peut trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de E, telle que :

$$x_n \in V_{n+1} - V_n; \qquad |x_n| \leqq 1; \qquad d(x_n, V_n) \geqq 1/(1+\varepsilon_n).$$

Posons $W_n = Qx_n$. L'espace vectoriel $\left(\bigcup_{n \geqq 0} V_n\right)$ est somme directe des W_n, et par le choix de la suite (ε_n), le projecteur canonique de $\left(\bigcup_{n \geqq 0} V_n\right)$ sur W_n est de norme $\leqq (1+\eta)$. Il se prolonge donc en un projecteur p_n de E sur W_n, de norme $\leqq (1+\eta)$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définit un morphisme $u : c(\mathbf{N}) \to E$, injectif et d'image dense. Pour montrer que u vérifie la condition de l'énoncé, il reste à vérifier, pour tout élément $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $c(\mathbf{N})$, l'inégalité suivante :

$$|u((y_n))| \geqq |(y_n)|/(1+\varepsilon).$$

Soit i un entier tel que $|(y_n)| = |y_i|$. Par construction, on a $(p_i \circ u)((y_n)) = y_i . x_i$, donc

$$|(p_i \circ u)((y_n))| \geqq |(y_n)|/(1+\eta), \qquad \text{donc} \quad |u((y_n))| \geqq |(y_n)|/(1+\varepsilon).$$

COROLLAIRE. — *Sans hypothèse sur le corps de base, tout espace de Banach de type dénombrable est faiblement projectif.*

Dans le même ordre d'idées, signalons encore le résultat suivant, qui étend au cas général le corollaire de la proposition 2 :

PROPOSITION 4. — *Supposons Q de valuation dense. Tout espace de Banach est limite inductive filtrante d'espaces libres de dimension finie.*

Démonstration. — Soient E un espace de Banach, $\mathfrak{M}$ l'ensemble des sous-R-modules de type fini de la boule unité de E : cet ensemble est filtrant croissant, de réunion la boule unité de E. Pour tout $M \in \mathfrak{M}$, soit E_M l'espace vectoriel $Q \otimes M$, muni de la norme « jauge de M » (pour laquelle M est boule unité). C'est un espace de Banach libre de dimension finie (car M est libre : *cf.* [4], chap. VI, § 3, lemme 1). Lorsque M varie, les espaces de Banach E_M forment un système inductif filtrant de (enc), dont la limite est E.

2. Préliminaires d'algèbre extérieure.

R désigne un anneau commutatif à élément unité, et $\mathrm{Mod}(R)$ désigne la catégorie des R-modules.

Un *morphisme de rang fini* de $\mathrm{Mod}(R)$ est un morphisme qui se factorise par un module de type fini. Si E et F sont deux modules, on note $\mathrm{Hom}_f(E, F)$ l'ensemble des morphismes de rang fini de E dans F. Les morphismes de rang fini forment un idéal bilatère de $\mathrm{Mod}(R)$.

Dans ce qui suit, on s'intéresse principalement aux endomorphismes de rang fini d'un module libre : plus précisément, on cherche à interpréter la donnée du prolongement extérieur d'un tel endomorphisme.

1. Développement de $\Lambda^n(f+g)$.

Soient E et F deux modules, $(p_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ une suite d'entiers; posons $p = \sum_{1 \leqq i \leqq n} p_i$. Pour tout $i \in (1, n)$, soit $u_i : \Lambda^{p_i} E \to \Lambda^{p_i} F$ une application linéaire. On définit le *produit antisymétrique réduit* des u_i de la façon suivante :

Considérons l'application multilinéaire de E^p dans $\Lambda^p F$ définie par la formule suivante :

$$(1) \qquad \varphi((x_r)) = \sum_{(H_i)} \varepsilon_{(H_i)} \cdot \bigwedge_{1 \leq i \leq n} u_i(x_{H_i}),$$

où $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ parcourt l'ensemble des familles, indexées par $(1, n)$, de parties deux à deux disjointes de $(1, p)$, telles que pour tout $i \in (1, n)$, H_i ait p_i éléments; $\varepsilon_{(H_i)}$ est la signature de l'unique permutation de $(1, p)$ qui induise, pour tout $i \in (1, n)$, une application croissante de H_i sur $(p_1 + \ldots + p_{i-1} + 1,\ p_1 + \ldots + p_{i-1} + p_i)$; x_{H_i} est le produit extérieur de la suite $(x_r)_{r \in H_i}$.

L'application φ est alternée : il faut voir que l'expression (1) s'annule lorsqu'il existe un entier $r \in (1, p-1)$ tel que $x_r = x_{r+1}$. Lorsqu'un des ensembles H_i contient à la fois r et $(r+1)$, le terme correspondant à (H_i) s'annule. Lorsque ce n'est pas le cas, en désignant par σ la transposition de $(1, p)$ qui échange r et $(r+1)$, les termes qui correspondent respectivement à (H_i) et à $(\sigma(H_i))$ se détruisent (car $\varepsilon_{(\sigma(H_i))} = -\varepsilon_{(H_i)}$ et $x_{(\sigma(H_i))} = x_{(H_i)}$).

L'application φ se factorise donc par une application linéaire de $\Lambda^p E$ dans $\Lambda^p F$, notée $b_{(p_i)}((u_i))$, et qu'on appelle produit antisymétrique réduit de la suite (u_i). Ce produit est une application multilinéaire de $\prod_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Hom}(\Lambda^{p_i} E, \Lambda^{p_i} F)$ dans $\operatorname{Hom}(\Lambda^p E, \Lambda^p F)$. Son intérêt pour la suite provient du développement suivant :

$$(2) \qquad \Lambda^p\Bigl(\sum_{1 \leq i \leq n} f_i\Bigr) = \sum_{p_1 + \ldots + p_n = p} b_{(p_i)}((\Lambda^{p_i} f_i))$$

qui résulte immédiatement de la définition.

Ce produit possède, d'autre part, la propriété suivante (qui sera appelée « fonctorialité par extension des scalaires ») :

Soient $\rho : R_1 \to R_2$, un homomorphisme d'anneaux; ρ_* le foncteur « restriction des scalaires », ρ^* le foncteur « extension des scalaires » (qui est adjoint à gauche de ρ_*).

Pour tout entier $n \geq 0$, soit φ_n le morphisme fonctoriel de Λ^n dans $\rho_* \circ \Lambda^n \circ \rho^*$ [provenant des applications multilinéaires alternées canoniques de E^n dans $\rho_*(\Lambda^n(\rho^*(E)))$].

Soient E et F deux R_1-modules, $u : \Lambda^n E \to \Lambda^n F$ une application R_1-linéaire, $v : \Lambda^n(\rho^*(E)) \to \Lambda^n(\rho^*(F))$ une application R_2-linéaire. On dit que u et v sont compatibles avec φ_n, lorsque le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n E & \xrightarrow{(\varphi_n)_E} & \rho_*(\Lambda^n(\rho^*(E))) \\ \downarrow u & & \downarrow \rho_*(v) \\ \Lambda^n F & \xrightarrow{(\varphi_n)_F} & \rho_*(\Lambda^n(\rho^*(F))) \end{array}$$

La propriété qu'on a en vue est que le produit antisymétrique réduit préserve la compatibilité : c'est évident sur la définition.

2. Dualité.

E désigne maintenant un R-module projectif de rang n. La multiplication extérieure à gauche définit une application linéaire de $\Lambda^p E$ dans $\mathrm{Hom}(\Lambda^{n-p}E, \Lambda^n E)$ (qui, à $x \in \Lambda^p E$, fait correspondre l'application $y \mapsto x \wedge y$, de $\Lambda^{n-p}E$ dans $\Lambda^n E$).

LEMME 1. — *Cette application est un isomorphisme de R-modules.*

Par localisation, on se ramène au cas où E est libre : le lemme est alors conséquence de [2] (chap. III, § 8, prop. 4).

En appliquant à $\Lambda^{n-p}E$ le foncteur $\mathrm{Hom}(., \Lambda^n E)$, on déduit de cet isomorphisme un anti-homomorphisme d'algèbres :

$$i_p : \quad \mathrm{End}(\Lambda^{n-p}E) \to \mathrm{End}(\Lambda^p E)$$

caractérisé par l'identité suivante :

$$(1) \qquad x \wedge u(y) = (i_p(u))(x) \wedge y.$$

Sur cette identité, on vérifie d'abord qu'en partant de la multiplication extérieure à droite, on obtient le même anti-homomorphisme; puis, en échangeant les rôles de p et $(n-p)$, que i_p et i_{n-p} sont des anti-isomorphismes réciproques.

Les anti-isomorphismes i_p sont fonctoriels (au sens du n° 1).

PROPOSITION 1.

1° *Le diagramme d'anti-isomorphismes :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}(\Lambda^p E) & \xrightarrow{u \mapsto {}^t u} & \mathrm{End}(\Lambda^p(E^*)) \\ \downarrow i_{n-p} & & \downarrow i_{n-p} \\ \mathrm{End}(\Lambda^{n-p}E) & \xrightarrow{u \mapsto {}^t u} & \mathrm{End}(\Lambda^{n-p}(E^*)) \end{array}$$

est commutatif.

2° *Pour tout $f \in \mathrm{End}(E)$, $i_0(\Lambda^n f)$ est le déterminant de f* [noté $\mathrm{dét}(f)$]; *de plus, pour tout $p \in (1, n)$, on a l'identité :*

$$(\Lambda^p f).(i_p(\Lambda^{n-p}f)) = (i_p(\Lambda^{n-p}f)).(\Lambda^p f) = \mathrm{dét}(f).$$

L'assertion 1° provient de la définition des i_p, et de [2] (chap. III, § 8, prop. 4). L'assertion 2° se démontre en appliquant la formule (1) et le lemme 1 à f et à sa transposée, puis en appliquant l'assertion 1°.

3. Les applications g_{qp} et h_{qp}.

E désignant de nouveau un R-module quelconque, la formule (2) du n° 1 permet d'écrire, pour tout $f \in \mathrm{End}(E)$, le développement suivant :

$$\Lambda^q(1+f) = 1 + \ldots + g_{qp}(\Lambda^p f) + \ldots \qquad (q \geqq 0),$$

où, pour tout entier $p \geqq 0$, on a désigné par g_{qp} l'application linéaire de $\mathrm{End}(\Lambda^p E)$ dans $\mathrm{End}(\Lambda^q E)$, égale à 0 lorsque $p > q$, à $b_{(p,(q-p))}(.,1)$ lorsque $p \leqq q$. Ces applications sont fonctorielles au sens du n° 1.

Lorsque E est projectif de rang n, on note P_q l'application de $\mathrm{End}(E)$ dans $\mathrm{End}(\Lambda^q E)$, définie par la formule :

$$P_q(f) = i_q(\Lambda^{n-q}(1+f)) \qquad (q \geqq 0).$$

On peut écrire le développement suivant :

$$P_q(f) = 1 + \ldots + h_{qp}(\Lambda^p f) + \ldots \qquad (q \geqq 0),$$

où, pour tout entier $p \geqq 0$, on a désigné par h_{qp} l'application linéaire $i_q . g_{(n-q)p}$ de $\mathrm{End}(\Lambda^p E)$ dans $\mathrm{End}(\Lambda^q E)$.

Les résultats du n° 2 entraînent la *formule de Fredholm* :

$$P_0(f) = \text{dét}(1+f),$$
$$(\Lambda^q(1+f)).P_q(f) = P_q(f).(\Lambda^q(1+f)) = \text{dét}(1+f) \qquad (q \geqq 0)$$

et la formule de multiplicativité suivante :

$$P_q(u+v+uv) = P_q(v).P_q(u).$$

PROPOSITION 2 (calcul des h_{qp}).

1° *L'application* h_{0p} : $\mathrm{End}(\Lambda^p E) \to R$, *coïncide avec la forme trace.*

2° *Pour tout* $u \in \mathrm{End}(E)$, *on a la formule de récurrence :*

$$(1) \qquad \sum_{r=0}^{p} ((g_{qr}(\Lambda^r u)).(h_{q(p-r)}(\Lambda^{p-r} u))) = \mathrm{Tr}(\Lambda^p u).$$

Démonstration. — Par localisation, on se ramène au cas où E est libre. Pour prouver le 1°, on part de la formule connue :

$$(2) \qquad \text{dét}(1+u) = 1 + \ldots + \mathrm{Tr}(\Lambda^p u) + \ldots$$

et l'on applique la méthode standard : soit T une indéterminée; le $R[T]$-module $R[T] \otimes E$ est libre de rang n; posons $v = R[T] \otimes u$.

En appliquant à Tv la formule (2) et en prenant le coefficient de T^p, on obtient l'identité :

$$\mathrm{Tr}(\Lambda^p v) = h_{0p}(\Lambda^p v),$$

d'où, par caractère fonctoriel [en utilisant l'homomorphisme de $R[T]$ dans R, dont le noyau est l'idéal (T)], l'identité analogue en remplaçant v par u. L'assertion 1° résulte alors du fait que le R-module $\mathrm{End}(\Lambda^p E)$ est engendré par ses éléments qui sont de la forme $(\Lambda^p u)$ [$u \in \mathrm{End}(E)$].

L'assertion 2° se prouve de façon analogue, le rôle de la formule (2) étant tenu par la formule de Fredholm.

4. **Extension aux modules libres quelconques.**

Soit L un module libre quelconque. On se propose de prolonger les applications h_{qp} du n° 3 en des applications linéaires

$$h_{qp} : \quad \mathrm{End}_f(\Lambda^p L) \to \mathrm{End}(\Lambda^q L).$$

Soit $u \in \mathrm{End}_f(\Lambda^p L)$. Désignons par $\mathcal{M}$ l'ensemble des sous-modules M de L, libres, de type fini, tels que L/M soit libre et que $\Lambda^p M$ contienne $\mathrm{Im}(u)$. Cet ensemble est filtrant croissant de réunion L. Pour tout $M \in \mathcal{M}$, on note u_M la restriction de u à $\Lambda^p M$.

LEMME 2. — *Soient M et M' deux éléments de $\mathcal{M}$ tels que $M \subset M'$. On a l'égalité*

$$(h_{qp}(u_{M'}))_M = h_{qp}(u_M).$$

Démonstration. — La propriété de l'énoncé est manifestement vraie pour les applications g_{qp} : la formule de récurrence (1) du n° 3 [jointe au fait que le module $\mathrm{End}_f(\Lambda^p L)$ est engendré par ses éléments qui sont de la forme $(\Lambda^p u)$ $(u \in \mathrm{End}_f(L))$] permet de se ramener au cas $p = 0$, qui résulte des propriétés de la forme trace.

D'après le lemme 2, il existe un endomorphisme unique $h_{qp}(u)$ de $\Lambda^q L$, qui coïncide sur chaque $M \in \mathcal{M}$ avec $h_{qp}(u_M)$. L'application

$$u \mapsto h_{qp}(u) : \quad \mathrm{End}_f(\Lambda^p L) \to \mathrm{End}(\Lambda^q L)$$

est linéaire et fonctorielle au sens du n° 1.

Pour tout $u \in \mathrm{End}_f(L)$, le prolongement extérieur de u est de rang fini, donc s'écrit comme élément de $\bigoplus_{p \geq 0} (\mathrm{End}_f(\Lambda^p L))$. On définit une application P_q comme composée de la séquence :

$$\mathrm{End}_f(L) \xrightarrow{u \mapsto \Lambda u} \bigoplus_{p \geq 0} (\mathrm{End}_f(\Lambda^p L)) \xrightarrow{(h_{qp})_{p \geq 0}} \mathrm{End}(\Lambda^q L)$$

[nommément : $P_q(u) = 1 + \ldots + h_{qp}(\Lambda^p u) + \ldots$]. Par « passage à la limite » à partir du cas où L est de rang fini (lemme 2) on obtient alors les *formules de Fredholm* :

$$(\Lambda^q(1 + u)).P_q(u) = P_q(u).(\Lambda^q(1 + u)) = P_0(u)$$

et la *formule de multiplicativité* :

$$P_q(u+v+uv) = P_q(v).P_q(u).$$

Interprétation des formes h_{0p} : $\mathrm{End}_f(\Lambda^p E) \to R$. — Pour tout module libre L, l'application bilinéaire canonique de $L^* \times L$ dans $\mathrm{End}(L)$ définit un isomorphisme de $L^* \otimes L$ sur $\mathrm{End}_f(L)$. On peut donc prolonger à $\mathrm{End}_f(L)$ les définitions et propriétés de la forme trace ([2], chap. II, § 4, n° 3). De plus, le lemme 2 et la proposition 2 entraînent que sur $\mathrm{End}_f(\Lambda^p L)$, la forme h_{0p} coïncide avec la forme trace. En écrivant $\mathrm{dét}(1+f)$ au lieu de $P_0(f)$, on obtient donc une extension de la formule (2) du n° 3 :

$$\mathrm{dét}(1+f) = 1 + \ldots + \mathrm{Tr}(\Lambda^p f) + \ldots \qquad [f \in \mathrm{End}_f(L)].$$

Application. — Soient L et L' deux modules libres, $u \in \mathrm{Hom}(L, L')$, $v \in \mathrm{Hom}_f(L', L)$. On a l'égalité

$$\mathrm{dét}(1+(uv)) = \mathrm{dét}(1+(vu)).$$

Remarques.

1° Soient L un R-module libre de rang infini, $\mathrm{End}_{f'}(L)$ la R-algèbre obtenue par adjonction d'un élément unité à $\mathrm{End}_f(L)$. On peut la considérer comme plongée dans $\mathrm{End}(L)$. Les applications P_q sont en fait à valeurs dans $\mathrm{End}_{f'}(\Lambda^q L)$ (on le voit par récurrence sur q); de plus, leurs images dans R [par l'homomorphisme de $\mathrm{End}_{f'}(L)$ dans R dont le noyau est $\mathrm{End}_f(L)$] coïncident toutes avec l'application P_0.

2° Les résultats de ce numéro s'étendent aux modules projectifs quelconques.

3. Produits tensoriels topologiques.

1. Applications multilinéaires continues.

Soient $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$, F des espaces de Banach. On désigne par $\mathrm{Mult}((E_i)_{1 \leq i \leq n}, F)$ l'espace vectoriel des applications multilinéaires continues de $\prod_{1 \leq i \leq n} E_i$ dans F, muni de la norme :

$$|u| = \inf\Big(A \mid (A \in \mathbf{R}_+) \text{ et } (\forall x)\Big(\Big(x \in \prod_{1 \leq i \leq n} E_i\Big) \Rightarrow \Big(|u(x)| \leq A \prod_{1 \leq i \leq n} |x_i|\Big)\Big)\Big).$$

C'est un espace de Banach. Avec la composition des applications, on définit donc un foncteur de $\left(\left(\prod_{1 \leq i \leq n} (\text{enc})^{\circ}\right) \times (\text{enc})\right)$ dans (enc) qui commute aux limites projectives. Pour $n = 1$, on retombe sur le foncteur L défini au paragraphe 1, nº 2; de plus, on a des isomorphismes fonctoriels du type suivant :

$$\mathrm{Mult}((E_i)_{1 \leq i \leq n}, F) \xrightarrow{\sim} L(E_1, \mathrm{Mult}((E_i)_{2 \leq i \leq n}, F)).$$

2. **Produit tensoriel de deux espaces de Banach.**

Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach. On va montrer, suivant Grothendieck [5], que le foncteur $\mathrm{Mult}((E_1, E_2), .)$ est représentable (au sens du § 1, nº 2) :

Théorème 1. — *Il existe un couple $(E_1 \hat{\otimes} E_2, \varphi)$, déterminé à isomorphisme unique près, vérifiant la condition suivante :*

(PTT) *$E_1 \hat{\otimes} E_2$ est un espace de Banach, φ est une application bilinéaire de norme ≤ 1 de $E_1 \times E_2$ dans $E_1 \hat{\otimes} E_2$; de plus, pour tout espace de Banach F, la composition avec φ définit un isomorphisme de* (enc) :

$$L(E_1 \hat{\otimes} E_2, F) \to \mathrm{Mult}((E_1, E_2), F).$$

Le couple $(E_1 \hat{\otimes} E_2, \varphi)$ est appelé produit tensoriel de E_1 et E_2. Ce produit possède les propriétés usuelles d'associativité et de commutativité; si $f_i : E_i \to F_i$ $(i = 1, 2)$ sont deux morphismes de (enc), *il existe un morphisme unique $f_1 \hat{\otimes} f_2 : E_1 \hat{\otimes} E_2 \to F_1 \hat{\otimes} F_2$, qui rende commutatif le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \xrightarrow{(f_1, f_2)} & F_1 \times F_2 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ E_1 \hat{\otimes} E_2 & \xrightarrow{f_1 \hat{\otimes} f_2} & F_1 \hat{\otimes} F_2 \end{array}$$

Ces données définissent un foncteur de (enc) $\times$ (enc) *dans* (enc) *qui commute aux limités inductives. De plus :*

1º *Ce foncteur est exact.*

2º *Pour tout système projectif $(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$ de* (enc), *et tout espace de Banach F, le morphisme canonique :*

$$\left(\varprojlim E_\alpha\right) \hat{\otimes} F \to \varprojlim \left(E_\alpha \hat{\otimes} F\right)$$

est un monomorphisme strict.

3° *L'espace vectoriel topologique sous-jacent à* $E_1 \hat{\otimes} E_2$ *ne dépend que des espaces vectoriels topologiques sous-jacents respectivement à* E_1 *et* E_2.

4° *L'application linéaire canonique de* $({}^sE_1) \otimes ({}^sE_2)$ *dans* $E_1 \hat{\otimes} E_2$ *est injective d'image dense.*

Démonstration. — Sur $({}^sE_1) \otimes ({}^sE_2)$, on met la semi-norme suivante :

$$p(z) = \inf_{z=\sum x_i \otimes y_i} \left(\sup_i (|x_i|.|y_i|)\right).$$

On prend pour $E_1 \hat{\otimes} E_2$ le séparé complété de cet espace semi-normé et pour φ l'application bilinéaire provenant de l'application bilinéaire canonique : $({}^sE_1) \times ({}^sE_2) \to ({}^sE_1) \otimes ({}^sE_2)$. On vérifie immédiatement la propriété (PTT) : l'associativité, la commutativité et le caractère fonctoriel se déduisent aussitôt de (PTT).

Le foncteur obtenu commute aux limites inductives, puisqu'il « représente » un foncteur commutant aux limites projectives.

Preuve du 1°. — Pour prouver que le foncteur $E \hat{\otimes}.$ est exact, on le vérifie lorsque E est décomposable de dimension finie, puis on passe au cas général par les propositions 4 et 1 du paragraphe 1, en remarquant que le produit tensoriel commute aux limites inductives.

Preuve du 2°. — On procédera en trois étapes :

— lorsque F est de dimension finie et décomposable, il est clair que le morphisme canonique : $\left(\varprojlim E_\alpha\right) \hat{\otimes} F \to \varprojlim \left(E_\alpha \hat{\otimes} F\right)$ est un *isomorphisme*;

— lorsque F est de dimension finie, la même conclusion est valable. Il suffit en effet de le vérifier en valuation dense. Dans ce cas, pour tout scalaire λ vérifiant $|\lambda| < 1$, il existe un ensemble fini I et un morphisme bijectif $u : c(I) \to F$, tel que $\lambda(u^{-1})$ diminue la norme. Appliquant à u chacun des foncteurs en présence, on obtient un morphisme de $\varprojlim \left(E_\alpha \hat{\otimes} F\right)$ dans $\left(\varprojlim E_\alpha\right) \hat{\otimes} F$, qui, composé dans chaque sens avec le morphisme canonique, donne l'homothétie de rapport λ^2. D'où le résultat en faisant tendre $|\lambda|$ vers 1;

— dans le cas général, on vérifie que l'application canonique de $\left(\varprojlim E_\alpha\right) \hat{\otimes} F$ dans $\varprojlim \left(E_\alpha \hat{\otimes} F\right)$ conserve la norme des points qui proviennent de ${}^s\left(\varprojlim E_\alpha\right) \otimes ({}^sF)$. Un tel point z provient d'un point de

$\left(\varprojlim E_\alpha\right) \hat{\otimes} F_1$, où F_1 est un sous-espace de dimension finie de F. Sur le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \left(\varprojlim E_\alpha\right) \hat{\otimes} F_1 & \longrightarrow & \varprojlim \left(E_\alpha \hat{\otimes} F_1\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left(\varprojlim E_\alpha\right) \hat{\otimes} F & \longrightarrow & \varprojlim \left(E_\alpha \hat{\otimes} F\right) \end{array}$$

on vérifie immédiatement l'assertion, compte tenu de ce que chaque foncteur en présence commute aux monomorphismes stricts.

Le point 3° est trivial. Le point 4° s'en déduit, puisque par 1° on peut supposer E_1 et E_2 de dimension finie, auquel cas chaque norme est équivalente à une norme libre.

COROLLAIRE 1. — *Le produit tensoriel défini dans le théorème* 1 *représente* (*sans abus de langage*) *le foncteur de* (enct) *à valeurs dans* (Ens) *sous-jacent à* $\mathrm{Mult}((E_1, E_2), .)$. *Il définit un foncteur de* (enct) $\times$ (enct) *dans* (enct), *qui est exact et commute aux conoyaux.*

C'est évident.

COROLLAIRE 2. — *Soient* (E_i, F_i) $(i = 1, 2)$ *des espaces de Banach. Le morphisme canonique :*

$$L(E_1, F_1) \hat{\otimes} L(E_2, F_2) \to L\left(E_1 \hat{\otimes} E_2, F_1 \hat{\otimes} F_2\right)$$

est un monomorphisme strict.

(En effet, c'est un isomorphisme lorsque E_1 et E_2 sont de dimension finie et décomposables. On passe de là au cas général par la proposition 4 du paragraphe 1 et l'assertion 2° du théorème 1).

COROLLAIRE 3 (*définition des puissances extérieures complétées*). — *Soient E et F deux espaces de Banach, n un entier : on désigne par* $\mathrm{Alt}(E^n, F)$ *le sous-espace fermé de* $\mathrm{Mult}(E^n, F)$ *dont les éléments sont les applications alternées : avec la composition des applications, on obtient un foncteur* (*non additif*) *de* $(\mathrm{enc})^0 \times (\mathrm{enc})$ *dans* (enc).

Le foncteur $\mathrm{Alt}(E^n, .)$ *est représentable* (au sens du § 1, n° 2) *par un couple* $(\Lambda^n E, \varphi)$ *formé d'un espace de Banach* $\Lambda^n E$ *et d'une application multilinéaire alternée de norme* ≤ 1, $\varphi : E^n \to \Lambda^n E$. *Du foncteur* $\mathrm{Alt}(., .)$ *on déduit donc un foncteur* (*non additif*) *de* (enc) *dans elle-même, noté :* $E \mapsto \Lambda^n E$, $u \mapsto \Lambda^n u$.

1° *Ce foncteur commute aux limites inductives filtrantes.*

2° *Si* $u : E \to F$ *est un monomorphisme strict* (*resp. épimorphisme, épimorphisme strict*), *il en est de même de* $\Lambda^n u$.

3° *Le morphisme déduit de* $\varphi : \hat{\otimes}^n E \to \Lambda^n E$ *est un épimorphisme strict.*

4° *L'espace vectoriel topologique sous-jacent à* $\Lambda^n E$ *ne dépend que de l'espace vectoriel topologique sous-jacent à* E.

5° *L'application linéaire canonique de* $\Lambda^n({}^sE)$ *dans* $\Lambda^n E$ *est injective d'image dense.*

(La démonstration est semblable à celle du théorème 1. On considère sur $\Lambda^n({}^sE)$ la semi-norme quotient de la norme p introduite sur $\otimes^n({}^sE)$ (théorème 1), et l'on prend pour $\Lambda^n E$ le séparé complété de cet espace semi-normé. C'est le représentant cherché : on en déduit le caractère fonctoriel et les assertions 1° et 3°. L'assertion 4° est triviale. Pour vérifier les assertions 2° et 5°, on se ramène au cas où E est de dimension finie et décomposable, ce qui est immédiat.)

3. Applications linéaires complètement continues.

Un cas particulier du corollaire 1 du théorème 1 est le résultat suivant :

Proposition 1. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach. Le morphisme canonique de* $E' \hat{\otimes} F$ *dans* $L(E, F)$ *est un monomorphisme strict; son image* $C(E, F)$ *est l'adhérence dans* $L(E, F)$ *de l'ensemble des applications linéaires continues de rang fini.*

Définition. — On dit qu'une application linéaire continue de E dans F est complètement continue (ou nucléaire) lorsqu'elle est élément de $C(E,F)$.

Cette définition ne fait intervenir que les topologies de E et F; les applications complètement continues forment un idéal bilatère de (enct).

Le foncteur $C(E, .)$, isomorphe au foncteur $E' \hat{\otimes} .$, commute aux limites inductives et est exact. Le foncteur $C(., F)$ commute aux monomorphismes stricts, et est exact si Q est maximalement complet.

Proposition 2 (*définition de la forme trace sur* $C(E, E)$. — *Soient* E *un espace de Banach,* $u \mapsto \operatorname{Tr}(u)$ *la forme linéaire sur* $C(E)$ *provenant de la forme bilinéaire canonique sur* $E' \times E$.

1° *Cette forme induit la forme trace usuelle sur les endomorphismes continus de rang fini.*

2° *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach,* $u \in L(E, F)$, $v \in C(F, E)$. *On a* $\operatorname{Tr}(uv) = \operatorname{Tr}(vu)$.

3° *Pour tout* $u \in C(E)$, *on a :* $\operatorname{Tr}(u) = \operatorname{Tr}({}^tu)$.

Démonstration. — Le point 1° est immédiat; le point 2° s'en déduit par passage à la limite, en approchant v par des applications linéaires continues de rang fini. Le point 3° résulte de ce que le morphisme canonique de $E' \hat{\otimes} E$ dans $E'' \hat{\otimes} E'$ (provenant du morphisme canonique de E dans E'') transforme une application nucléaire en sa transposée.

4. Théorie de Fredholm.

Soient E un espace de Banach, u un endomorphisme complètement continu de E; posons $v = 1 + u$. On se propose de montrer l'existence d'une décomposition de Riesz associée à v. L'idée de la démonstration consiste à prolonger à u les applications P_q du paragraphe 2, et à utiliser les formules de Fredholm pour obtenir des renseignements sur le noyau et le conoyau de v.

1. Prolongement des applications $\mathbf{P}_q$.

On procède en deux étapes, correspondant aux deux termes de la séquence d'applications :

$$\mathrm{End}_f(E) \xrightarrow{u \mapsto \Lambda u} \bigoplus_{p \geq 0} (\mathrm{End}_f(\Lambda^p E)) \xrightarrow{(h_{qp})_{p \geq 0}} \mathrm{End}(\Lambda^q E)$$

dont le composé est l'application P_q.

LEMME 1. — *Soit E un espace de Banach, et soit*

$$0 \to H \to E \xrightarrow{\varphi} E/H \to 0$$

une suite exacte courte de (enc), *H étant de dimension finie h. Pour toute suite $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points de E, on a l'inégalité*

$$|x_1 \wedge \ldots \wedge x_n| \leq \sup_J \left(\left(\left| \bigwedge_{i \in J} x_i \right| \right) \cdot \left(\left| \bigwedge_{i \in \complement J} \varphi(x_i) \right| \right) \right),$$

où J parcourt l'ensemble des parties de $(1, n)$, de cardinal $\leq h$.

Démonstration. — Soit ε un nombre > 0. Pour tout $i \in (1, n)$, posons $x_i = y_i + z_i$, où $y_i \in H$ et $|z_i| \leq |\varphi(x_i)| + \varepsilon$. Dans le développement de $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} x_i$ suivant cette somme, les termes non nuls ne font pas intervenir plus de h des points y_i. Comme le produit extérieur diminue la norme, on obtient l'inégalité en faisant tendre ε vers 0.

PROPOSITION 1. — *Soient E et F deux espaces de Banach, ΛE et ΛF leurs « algèbres extérieures complétées » $\left(\Lambda E = \prod_{p \geq 0} (\Lambda^p E) \right.$, muni de la structure d'algèbre de Banach déduite de la multiplication extérieure$\left. \right)$. Le prolongement extérieur définit une application continue de $C(E, F)$ dans $C(\Lambda E, \Lambda F)$.*

Démonstration. — Soit $u \in C(E, F)$. Il existe un épimorphisme strict φ de source F, dont le noyau soit de dimension finie h, et tel que $|\varphi \circ u| < 1$.

Soit B la boule de $L(E, F)$, de centre u et de rayon $\inf(|u|, 1)$. Soient v et v' deux éléments de B : on va montrer l'inégalité suivante :

$$(1) \qquad |(\Lambda^n v - \Lambda^n v')| \leqq |u|^h . |(v - v')|.$$

[Cette inégalité exprime une propriété « de continuité uniforme » par rapport à n, des applications Λ^n au voisinage d'un point de $C(E, F)$. La proposition 1 se déduit aussitôt de cette inégalité et du fait que le prolongement extérieur d'une application de rang fini est de rang fini.]

On prouve d'abord l'inégalité suivante, relative à une suite $(x_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ de points de E et un entier $i \in (1, n)$:

$$\begin{aligned} &|(v(x_1) \wedge \ldots \wedge v(x_{i-1})) \wedge (v(x_i) - v'(x_i)) \\ &\qquad \wedge (v'(x_{i+1}) \wedge \ldots \wedge v'(x_n))| \leqq |u|^h . |v - v'| . |x_1| \ldots |x_n|. \end{aligned}$$

Celle-ci se déduit du lemme 1 appliqué à φ et à la suite de points $(v(x_1), \ldots, v(x_{i-1}), v'(x_{i+1}), \ldots, v'(x_n))$. Faisant la somme de ces inégalités pour $1 \leqq i \leqq n$, puis appliquant la propriété universelle des puissances extérieures complétées, on obtient (1).

Corollaire. — *Soit $u \in C(E, F)$. La suite des nombres $(|\Lambda^n u|)$ est à décroissance rapide.*

On applique la proposition 1 aux homothétiques de u.

La proposition 1 permet de prolonger la première application de la séquence ci-dessus. Pour prolonger la seconde, i. e. les applications h_{qp}, on commence par remarquer que les « produits antisymétriques réduits » (§ 2, nº 1) induisent des applications multilinéaires, de norme $\leqq 1$, de $\prod_{1 \leqq i \leqq n} L(\Lambda^{p_i} E, \Lambda^{p_i} F)$ dans $L(\Lambda^p E, \Lambda^p F)$: c'est évident sur la définition, en utilisant la propriété universelle des puissances extérieures complétées. Reste à prouver le lemme suivant :

Lemme 2. — *Pour tout espace de Banach E de dimension finie n, les applications $i_p : L(\Lambda^{n-p} E) \to L(\Lambda^p E)$ sont des isomorphismes de* (enc).

Démonstration. — Si E est libre, cet énoncé exprime le « caractère fonctoriel » (§ 2, nº 1) des applications i_p, pour l'inclusion de R dans Q, et la boule unité de E. On se ramène au cas où E est libre en tensorisant par une extension valuée convenable de Q.

Résumons les résultats qui précèdent :

Proposition 2. — *Pour tout entier $q \geqq 0$, soit P_q l'application composée de la séquence :*

$$C(E) \xrightarrow{u \mapsto \Lambda u} \prod_{p \geqq 0} (C(\Lambda^p E)) \xrightarrow{(h_{pq})_{p \geqq 0}} L(\Lambda^q E).$$

1° *Sur les endomorphismes continus de rang fini, cette application induit l'application P_q du paragraphe 2.*

2° *On la calcule par la formule de récurrence :*

$$\sum_{r=0}^{p}((g_{qr}(\Lambda^r u)).(h_{q(p-r)}(\Lambda^{(p-r)} u))) = \mathrm{Tr}(\Lambda^p u),$$
$$P_q(u) = 1 + \ldots + h_{qp}(\Lambda^p u) + \ldots$$

(*la dernière série étant convergente*).

3° *On a les identités :*

$$(\Lambda^q(1+u)).P_q(u) = P_q(u).(\Lambda_q(1+u)) = P_0(u) \quad (\textit{formule de Fredholm});$$
$$P_q(u+v+uv) = P_q(v).P_q(u).$$

Remarque. — Supposons E de dimension infinie, et soit $C'(E)$ la Q-algèbre de Banach obtenue par adjonction à $C(E)$ d'un élément unité : on peut la considérer comme plongée dans $L(E)$. L'application P_q est à valeurs dans $C'(\Lambda^q E)$, et son image [par la représentation de $C'(\Lambda^q E)$ dans Q dont le noyau est $C(\Lambda^q E)$] est l'application P_0.

Pour retrouver les notations usuelles, introduisons les fonctions $t \mapsto P_q(-tu)$, de Q dans $L(\Lambda^q E)$. Ce sont des fonctions entières (cor. de la prop. 1).

La fonction $t \mapsto P_0(-tu)$, de Q dans Q, prend le nom de déterminant de Fredholm de u; on la note

$$\mathrm{dét}(1-tu) = 1 + \ldots + (-1)^p.\mathrm{Tr}(\Lambda^p u).t^p + \ldots.$$

La fonction $t \mapsto P_1(-tu)$, de Q dans $L(E)$, prend le nom de résolvante de Fredholm de u; on la calcule par les formules de récurrence :

$$v_0 = 1; \qquad v_p - u.v_{p-1} = (-1)^p.\mathrm{Tr}(\Lambda^p u);$$
$$P_1(-tu) = 1 + \ldots + v_p.t^p + \ldots.$$

Elle vérifie l'identité

$$(1-tu).P_1(-tu) = P_1(-tu).(1-tu) = \mathrm{dét}(1-tu).$$

2. Décomposition de Riesz et alternative de Fredholm.

Reprenons les notations du début de ce paragraphe. On se propose de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.

1° *Pour que $v = 1 + u$ soit inversible, il faut et il suffit que $P_0(u) \neq 0$.*

2° *Lorsque $P_0(u) = 0$, l'espace E se décompose en somme directe topologique de deux sous-espaces fermés stables par u :*

$$E = N \amalg F,$$

de façon que v soit nilpotent (resp. inversible) sur N (resp. F). De plus, cette décomposition est unique, et N est de dimension finie.

On peut suivre la démonstration de SERRE ([13], prop. 12), qui consiste essentiellement en un calcul des projecteurs associés à la décomposition; pour vérifier que la dimension de N est finie, il suffit d'appliquer le lemme 4 ci-dessous.

Indiquons ici une autre démonstration, peut-être susceptible de généralisation (*cf.* Remarque ci-dessous).

Supposons d'abord $P_0(u) \neq 0$. La formule de Fredholm

$$v . P_1(u) = P_1(u) . v = P_0(u)$$

montre que v est inversible.

Supposons maintenant $P_0(u) = 0$. Montrons d'abord que le conoyau de v [au sens de (enct)] n'est pas nul.

Sinon, les formules de Fredholm

$$P_q(u) . (\Lambda^q v) = P_0(u)$$

montrent que tous les $P_q(u)$ sont nuls (§ 3, cor. 3 du th. 1) : c'est impossible en vertu du lemme suivant :

LEMME 3. — $\sup_q(|P_q(u)|) \geqq 1$.

Si u est de rang fini, on peut supposer E de dimension finie n, auquel cas $P_n(u)$ est l'identité de $\Lambda^n E$: d'où le lemme dans ce cas. Dans le cas général, on remarque que la fonction numérique $u \mapsto \sup(|P_q(u)|)$ est continue, puisque la suite des fonctions $|P_q|$ est équicontinue (prop. 1).

Pour tout entier k, désignons par N_k le noyau de v, et par F_k l'image [au sens de (enct)] de v. Notons le lemme suivant :

LEMME 4. — *Soient V un espace vectoriel sur un corps K, u un endomorphisme de V, n un entier > 0. Supposons que $(1 - \Lambda^n u)$ soit un endomorphisme injectif de $\Lambda^n V$. Le noyau de $(1 - u)$ est de dimension $< n$, et la suite $(\operatorname{Ker}((1-u)^p))_{p \geqq 0}$ a moins de n termes distincts.*

Soit $(x_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ une suite de n vecteurs de $\operatorname{Ker}(1 - u)$. On a

$$\bigwedge_{1 \leqq i \leqq n} x_i = (\Lambda^n u)\Big(\bigwedge_{1 \leqq i \leqq n} x_i\Big).$$

L'hypothèse implique donc que $\bigwedge_{1 \leqq i \leqq n} x_i$ soit nul. De même, soit x un point de V, annulé par $(1-u)^n$ et non par $(1-u)^{n-1}$. On a

$$\bigwedge_{0 \leqq p \leqq n-1} ((1-u)^p(x)) = (\Lambda^n u)\Big(\bigwedge_{0 \leqq p \leqq n-1} ((1-u)^p(x))\Big) \neq 0,$$

ce que l'hypothèse rend impossible.

D'après ce lemme, le corollaire de la proposition 1 et le fait que $C(E)$ soit un idéal bilatère de $L(E)$, on voit que la suite $(N_k)_{k \geq 0}$ est une suite croissante stationnaire d'espaces de dimension finie. Le même raisonnement appliqué à $({}^t u)$ montre qu'il en est de même de la suite $((E/F_k)')_{k \geq 0}$.

Comme (E/F_k) est de type dénombrable [le morphisme canonique de $\mathrm{Im}(u)$ dans (E/F_k) étant un épimorphisme strict], la proposition 3 du paragraphe 1 entraîne que $(F_k)_{k \geq 0}$ soit une suite décroissante stationnaire de sous-espaces de codimension finie de E. Posons

$$N = \bigcup_{k \geq 0} N_k, \qquad F = \bigcap_{k \geq 0} F_k.$$

Soient u_F et v_F les restrictions de u et v à F. L'application linéaire u_F est complètement continue; donc v_F, qui est de conoyau nul par construction, est inversible. En particulier, F_k est l'image *algébrique* de v^k.

On peut donc appliquer le lemme d'algèbre habituel ([2], chap. VIII, § 2, lemme 2) : il montre que E est somme directe de N et F, que v_N est nilpotent et que v_F est inversible. On a donc prouvé l'existence de la décomposition; son unicité est immédiate, et le fait que N soit de dimension finie a été prouvé en cours de route.

Remarque. — On peut se demander si l'énoncé du théorème 1 reste valable lorsqu'on suppose seulement l'existence d'un entier $n > 0$ tel que $| \Lambda^n u | < 1$ (au lieu de la complète continuité). Il est en tout cas facile de se ramener à montrer, sous l'hypothèse précédente, que si $v = 1 + u$ est de conoyau nul [au sens de (enct)], il est surjectif.

COROLLAIRE 1 (*alternative de Fredholm*). — *L'endomorphisme* $v = 1 + u$ *est strict* [*au sens de* (enct)]; *son noyau et son conoyau sont de dimensions finies et égales.*

C'est évident sur la décomposition précédente.

Remarque. — On peut donner les précisions suivantes :

— la dimension du « sous-espace propre » $\mathrm{Ker}(v)$ est le plus petit entier q tel que $P_q(u) \neq 0$. L'image de $P_q(u)$ est alors la droite de $\Lambda^q E$, attachée au sous-espace $\mathrm{Ker}(v)$ de E;

— la dimension du « sous-espace spectral » N est l'ordre de multiplicité de (-1) pour la fonction entière $t \mapsto \det(1 - tu)$.

Ces propriétés se démontrent, à partir des propriétés correspondantes relatives aux endomorphismes de rang fini, par emploi de la « formule de multiplicativité ».

COROLLAIRE 2 (*théorèmes de Schwartz*). — *On se place sur la catégorie* (enct); *soient* E *et* F *deux espaces de Banach,* $u \in L(E, F)$, $v \in C(E, F)$.

1° *Si* u *est un monomorphisme strict,* $u + v$ *est un morphisme strict dont le noyau est de dimension finie.*

2° *Si u est un épimorphisme strict, $u+v$ est un morphisme strict dont le conoyau est de dimension finie.*

Démonstration.

1° On peut supposer sans inconvénient que Coker u est de type dénombrable, ce qui implique que u soit facteur direct. Il existe alors $w \in C(F)$, tel que $v = w \circ u$. L'assertion résulte du théorème 1 appliqué à w.

2° Par l'exactitude du foncteur $C(E, .)$, on peut écrire $v = u \circ w$, où $w \in C(E)$. L'assertion résulte du théorème 1 appliqué à w.

3. **Autre méthode, fondée sur les résultats de** [13].

On peut démontrer le théorème 1 en appliquant les résultats de [13], aux espaces de type dénombrable (ce qui est possible d'après la proposition 3 du paragraphe 1). Esquissons la démonstration :

On part des définitions et notations de [13]. Soient E un espace de Banach, u un endomorphisme complètement continu de E, $\mathfrak{N}$ l'ensemble des sous-espaces fermés de type dénombrable de E qui contiennent $u(E)$. L'ensemble $\mathfrak{N}$ est non vide, filtrant croissant, de réunion E. Tout espace $N \in \mathfrak{N}$ est stable par u; notons u_N la restriction de u à N.

Pour tout $N \in \mathfrak{N}$, on sait définir la fonction entière $t \mapsto \text{dét}(1 - tu_N)$ ([13], § 5); de plus, cette fonction est indépendante de N ([13, cor. 2 de la prop. 7); on retombe ainsi sur le déterminant de Fredholm défini au n° 1. Sur cette définition, on vérifie les assertions de [13] (corollaires des prop. 7 et 9).

On définit ensuite la résolvante de Fredholm de u comme la série formelle :

$$P(t, u) = \sum_{p \geq 0} v_p . t^p$$

dont les coefficients v_p sont définis par récurrence comme dans [13], § 6. Pour montrer que cette série définit une fonction entière de t, on doit vérifier, pour tout nombre $M > 0$, l'inégalité :

$$\sup_{m \geq 0} (M^m . |v_m|) < +\infty.$$

Raisonnons par l'absurde : dans le cas contraire, il existerait une suite $(x_m)_{m \geq 0}$ de points de la boule unité de E, telle que

$$\sup (M^m . |v_m(x_m)|) = +\infty.$$

En considérant un espace $N \in \mathfrak{N}$ contenant cette suite, on obtient une contradiction avec la proposition 10 de [13].

Ces propriétés permettent d'étendre au cas général les raisonnements du paragraphes 7 de [13] (en remplaçant l'emploi du lemme 2 par celui de la proposition 9) : d'où le théorème 1 du numéro précédent, copié sur la proposition 12 de [13].

4. Spectre d'un endomorphisme complètement continu.

Pour simplifier, on supposera ici le corps Q algébriquement clos. Soient E un espace de Banach de dimension infinie, A une sous-algèbre de $C(E)$, commutative et fermée, B l'algèbre de Banach unitaire associée à A [considérée comme plongée dans $L(E)$]. Soit X l'ensemble des idéaux maximaux réguliers de A.

PROPOSITION 3. — *Tout $m \in X$ est un hyperplan fermé de A.*

Démonstration. — Soit m' l'idéal maximal de B, dont m est la trace sur A. L'idéal m' est fermé (car il ne peut être dense, l'ensemble des éléments inversibles de B étant ouvert) et tout revient à voir qu'il est de codimension finie dans B. Il existe un élément u de A tel que $1 + u \in m'$; soit $E = N \amalg F$ la décomposition de Riesz correspondante. Le calcul des projecteurs associés ([13], prop. 12) montre que ceux-ci sont éléments de B : ils définissent donc une décomposition $B = B' \amalg B''$, où B' est une sous-algèbre de $L(N)$ et $B'' \subset m'$. L'assertion en résulte aussitôt.

Soit $b(X)$ le produit (dans la catégorie des algèbres de Banach) d'une famille, indexée par X, d'algèbres de Banach égales à Q. La famille des représentations de A dans A/m, lorsque m parcourt X, définit une représentation de A dans $b(X)$, notée $u \mapsto \hat{u}$. D'après le théorème 1, pour tout $u \in A$, l'image de $\hat{u}$ (considérée comme application de X dans Q) est l'ensemble des inverses des zéros du déterminant de Fredholm de u. Ceci étant :

PROPOSITION 4. — *L'application $u \mapsto \hat{u}$ est une représentation de A dans l'algèbre de Banach $c(X)$, dont le noyau est l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents de A, et dont l'image est dense. De plus, on a l'égalité*

$$|\hat{u}| = \lim_{n \to +\infty} \left(|u^n|^{\frac{1}{n}} \right).$$

Démonstration. — Soit $u \in A$, prouvons que $\hat{u} \in c(X)$. Il faut voir que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'image réciproque par $|\hat{u}|$ de $[\varepsilon, \mapsto[$ est finie. On sait déjà (*cf.* [10]) que l'ensemble des zéros de $\det(1 - tu)$ contenus dans le disque de rayon $1/\varepsilon$ est fini; il suffit donc de voir que si α est un tel zéro, l'image réciproque par $\hat{u}$ de $1/\alpha$ est finie. Soit $E = N \amalg F$ la décomposition de Riesz associée à $(-\alpha u)$, et soit p le projecteur de E sur N qu'elle définit. Si $\hat{u}(m) = 1/\alpha$, le projecteur p n'appartient pas à m, ce qui n'est possible que pour un nombre fini d'idéaux m.

Prouvons maintenant l'égalité de l'énoncé (le reste de la proposition en est une conséquence immédiate). Il suffit de vérifier l'inégalité

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \left(| u^n |^{\frac{1}{n}} \right) \leqq | \hat{u} |.$$

La fonction dét$(1 - tu)$ est inversible dans l'algèbre des fonctions strictement holomorphes sur le disque « ouvert » de rayon $1/|\hat{u}|$: en effet, elle ne s'annule pas sur ce disque, et l'on peut appliquer la proposition 4 de [10]. La fonction $(\text{dét}(1 - tu))^{-1}.P_1(-tu)$ est donc strictement holomorphe sur ce disque; son développement en série est $1 + \ldots + u^n.t^n + \ldots$, d'où l'inégalité.

5. Extension aux espaces « localement convexes ».

Lorsque le corps de base est localement compact, Serre a démontré ([13], § 3, prop. 5) que les notions d'application complètement continue et d'application compacte coïncident. On se propose de généraliser ce résultat, et de tenter l'extension aux espaces « localement convexes » qu'il suggère.

1. Espaces localement convexes sur un corps ultramétrique.

Soit E un Q-espace vectoriel. On dit qu'une partie de E est disquée (resp. convexe) si c'est un sous-R-module de E (resp. une variété R-linéaire affine de E). L'espace E est un convexe, et l'intersection d'une famille de disques (resp. convexes) est un disque (resp. convexe); on peut donc parler de l'enveloppe disquée (resp. convexe) d'une partie de E.

Soit D un disque de E : on lui associe un espace semi-normé E_D, à savoir l'espace vectoriel $Q \otimes D$ muni de la semi-norme « jauge de D »

$$j_D(x) = \inf_{x \in \lambda M} (|\lambda|).$$

On dit que D est séparant (resp. complétant) si E_D est séparé (resp. est un espace de Banach).

Remarque. — La boule unité de E_D est toujours D lorsque la valuation de Q est discrète. En valuation dense, c'est seulement une extension de D par un k-espace vectoriel.

Une topologie localement convexe sur E est une topologie vectorielle ([3], chap. I, déf. 1) admettant un système fondamental de voisinages disqués de o. Une telle donnée équivaut à la donnée d'un filtre ayant une base formée de disques absorbants.

Une bornologie de type convexe sur E est une famille de parties de E, stable par inclusion, réunion finie, enveloppe disquée, et dont la réunion est E (« bornés » de E). On dit qu'une bornologie est séparée (resp. complète) si tout disque borné est séparant (resp. contenu dans un disque borné complétant).

On définit ainsi deux catégories :

(elc) : objets = espaces localement convexes; morphismes = applications linéaires continues (avec la composition usuelle).

(ebc) : objets = espaces vectoriels munis d'une bornologie de type convexe; morphismes = applications linéaires bornées (i. e. transformant bornés en bornés) avec la composition usuelle.

Chacune de ces catégories est additive, et possède des limites inductives et projectives quelconques.

2. **La bornologie précompacte.**

Le procédé ci-dessous définit un certain nombre de foncteurs de (elc) dans (ebc), commutant aux espaces vectoriels sous-jacents :

Soit $B(R)$ la catégorie des R-modules bornés (i. e. d'annulateur non nul). Soit C une sous-catégorie pleine de $B(R)$, stable par somme directe finie, sous-objet et quotient. A tout espace localement convexe E, on associe la bornologie sur E pour laquelle les disques bornés sont ceux dont l'image dans E/V est objet de C, quel que soit le voisinage disqué V de o. Toute application linéaire continue est bornée pour les bornologies associées. On définit ainsi un foncteur β_C : (elc) $\rightarrow$ (ebc), qui commute aux limites projectives.

Lorsque $C = B(R)$, on obtient la « bornologie canonique » de E [1]. Lorsque C est la catégorie des modules de torsion qui sont sous-modules de modules de type fini, on obtient la « bornologie précompacte » de E : sur un corps localement compact, c'est la bornologie des parties précompactes de E. On note π le foncteur correspondant.

Proposition 1 (« *caractère dénombrable de la bornologie précompacte* »). — *Soit E un espace localement convexe. Pour qu'une partie P de E soit bornée pour $\pi(E)$, il faut et il suffit que toute suite extraite de P le soit.*

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire. Pour prouver qu'elle est suffisante, on raisonne par l'absurde. Supposons P non bornée pour $\pi(E)$, et soit α un scalaire de valeur absolue < 1. Il existe alors un voisinage disqué V de o, et une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de P, telle que :

$$x_{n+1} \notin (\alpha^{-1} D_n) + V,$$

où D_n désigne l'enveloppe disquée de la suite $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$. Supposons qu'il existe un disque de type fini D, tel que $(x_n)_{n \geq 0} \subset D + (\alpha V)$. Pour tout entier $n \geq 0$, soit y_n un point de D tel que

$$x_n + (\alpha V) = y_n + (\alpha V).$$

Soient (D'_n) (resp. D') les enveloppes disquées des suites $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ [resp. $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$]. D'après le lemme 1 ci-dessous, D étant de type fini, il existe un entier n tel que $\alpha D' \subset D'_n$. D'autre part :

$$(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset D' + V \subset (\alpha^{-1} D'_n) + V = (\alpha^{-1} D_n) + V,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Reste à prouver le lemme suivant :

Lemme 1. — *Soit M un module sans torsion, sous-module d'un module de type fini. Pour tout scalaire α de valeur absolue < 1, il existe un sous-module L de M, de type fini, tel que $\alpha M \subset L$.*

En considérant $Q \otimes M$ muni de la jauge de M, comme un espace de Banach de dimension finie, on est ramené à la proposition 3 du paragraphe 1.

On relie la notion de bornologie précompacte aux applications complètement continues par la proposition suivante :

Proposition 2. — *Soient E et F deux espaces de Banach, $u \in L(E, F)$. Pour que u soit complètement continue, il faut et il suffit qu'elle transforme la boule unité B de E en une partie bornée de $\pi(F)$.*

Démonstration. — *Nécessité* : soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'applications linéaires continues de rang fini, convergeant vers u. Pour tout entier $n \geq 0$, soit D_n un disque de type fini de F, contenant $u_n(B)$. L'hypothèse entraîne que, pour tout voisinage V de o, il existe un entier n tel que $u(B) \subset D_n + V$.

Suffisance. — Si $u(B)$ est borné dans $\pi(F)$, il existe une suite croissante $(V_n)_{n \geq 0}$ de sous-espaces de dimension finie de F, telle que (en désignant par φ_n le morphisme canonique de F sur F/V_n) la suite $(|\varphi_n \circ u|)$ tende vers zéro. Comme $\mathrm{Im}(u)$ est de type dénombrable, la suite $(\varphi_n \circ u)$ se relève en une suite (w_n) de $L(E, F)$, qui tend vers zéro (§ 1, cor. de la prop. 3). De plus, $\mathrm{Im}(u - w_n) \subset V_n$, donc $(u - w_n)$ est de rang fini.

Corollaire. — *La restriction à* (enct) *du foncteur π est un foncteur exact.*

Cela résulte de l'exactitude du foncteur $C(E, .)$.

Applications.

1° Soit $u : E \to F$ un morphisme de (elc). On dit que u est semi-compact, s'il existe un disque borné *complétant* D de $\pi(F)$, tel que $u^{-1}(D)$ soit un voisinage de o dans E. Les morphismes semi-compacts forment un idéal bilatère de (elc).

Soient E un elc, u un endomorphisme semi-compact de E. Alors la théorie de Riesz s'applique à u : on passe à E_D par un lemme connu ([7], chap. V, § 2, prop. 5) et l'on applique les résultats du paragraphe 4.

2° Supposons que la valuation de Q soit discrète. Soient E et F deux elc *séparés*, u et v deux morphismes de E dans F. On suppose que u est un monomorphisme strict d'image fermée, et que v est semi-compact. Alors le premier théorème de Schwartz est vrai; nommément :

Le morphisme $u + v$ est strict d'image fermée, et son noyau est de dimension finie.

En effet, soit D un disque borné complétant de $\pi(F)$, tel que $v^{-1}(D)$ soit un voisinage de o dans E. Comme E_D est un objet injectif de (enc) (théorème de Monna-Fleischer), il existe un endomorphisme semi-compact w de F, tel que $v = w \circ u$. En utilisant une décomposition de Riesz relative à w, on obtient l'énoncé précédent.

3. Cas des corps maximalement complets.

Proposition 3. — *On suppose Q maximalement complet. Soient E un* elc *séparé, D un disque borné (pour la bornologie canonique). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *D est borné pour $\pi(E)$, et complet (pour la topologie induite par E);*

2° *D est linéairement compact (pour la topologie induite par E).*

Démonstration. — Il s'agit de voir que tout R-module contenu dans un module de type fini est borné et linéairement compact, et réciproquement. La première assertion est immédiate, puisque Q lui-même est linéairement compact.

Réciproquement, si D est linéairement compact, on peut affirmer qu'il est extension essentielle d'un module de type fini M ([4], chap. II, § 2, ex. 20 (a)). Le module M se plonge dans un quotient d'un module de la forme Q^n (n entier $\geq$ o). Il suffit de montrer qu'un tel quotient est un R-module injectif; comme il est divisible et linéairement compact, cela résulte du lemme suivant :

Lemme 2 (Fleischer). — *Sur un anneau de Prüfer, les modules injectifs sont les modules divisibles qui possèdent la propriété suivante : toute base de filtre, formée de translatés d'annulateurs d'idéaux de R, est d'intersection non vide.*

Ce lemme est démontré dans [11].

On voit apparaître une nouvelle analogie avec les parties compactes d'un espace localement convexe réel ou complexe. Cette analogie est renforcée par la proposition suivante :

Proposition 4. — *Soient E un* elc *séparé, D un disque borné pour $\pi(E)$ et complet. Toute topologie linéaire séparée sur D, moins fine que la topologie induite par E, lui est identique.*

Démonstration. — Soient V un voisinage disqué de o dans E, α un scalaire de valeur absolue < 1. L'image de $V \cap D$ dans le module $D/((\alpha V) \cap D)$ est l'annulateur de α. Soit $\mathfrak{T}$ une topologie linéaire séparée sur D, moins fine que la topologie induite par E. Le disque $((\alpha V) \cap D)$ est fermé pour $\mathfrak{T}$, donc, sur le module $D/((\alpha V) \cap D)$, la topologie quotient de $\mathfrak{T}$ est séparée. D'après le lemme 3 ci-dessous, cela entraîne que $(V \cap D)/((\alpha V) \cap D)$ est un voisinage de o pour cette topologie, donc que $(V \cap D)$ est un voisinage de o pour $\mathfrak{T}$.

Reste à prouver le lemme suivant :

Lemme 3. — *Soit M un module sans torsion, sous-module d'un module de type fini. Soit $\mathcal{F}$ un filtre de $Q \otimes M$, d'intersection M, et ayant une base formée de R-modules. Pour tout scalaire α de valeur absolue > 1, $(\alpha M) \in \mathcal{F}$.*

Ce lemme se déduit par dualité du lemme 1.

Si E est un elc séparé, les disques de E, bornés pour $\pi(E)$ et complets pour la topologie induite par E, définissent une bornologie fonctorielle en E, qui est appelée bornologie compacte dans [1]; elle intervient dans l'étude de la dualité (*cf.* [14] ou [1]).

Soit $u : E \to F$ un morphisme d'elc séparés. On dit que u est compact, s'il existe un disque de F, borné pour $\pi(F)$ et complet, dont l'image réciproque par u soit un voisinage de o dans E. Un morphisme compact est semi-compact, donc la théorie de Riesz s'applique aux endomorphismes compacts d'un elc séparé.

Applications.

1° *Premier théorème de Schwartz.* — Soient E et F deux elc séparés, $u : E \to F$ un monomorphisme strict d'image fermée, $v : E \to F$ un morphisme compact. Alors $u + v$ est un morphisme strict d'image fermée, dont le noyau est de dimension finie.

La démonstration est la même que celle du n° 2, compte tenu du fait que tout disque D de F, borné pour $\pi(F)$ et complet, est tel que E_D soit un objet injectif de (enc) (d'après [9]).

2° *Un résultat de Hily.* — On suppose Q (maximalement complet et) de valuation dense. Hily [9] a démontré le résultat suivant :

Soit E un espace de Banach injectif (autrement dit, tel que toute suite décroissante de boules soit d'intersection non vide). Alors toute suite bornée de formes linéaires continues sur E, convergeant simplement, converge aussi en norme.

On se propose d'en déduire le résultat suivant :

Si F est un espace de Banach libre, toute application linéaire continue de E dans F est complètement continue.

Pour cela, on se ramène au cas où F est de type dénombrable (par la prop. 1). Soit $u \in L(E, F)$: pour prouver que u est complètement continue, il suffit de voir que sa transposée l'est. Cela revient à vérifier que, si B est la boule unité de E', munie de la topologie faible, la restriction de ${}^t u$ à B est continue lorsque E' est muni de sa norme (en effet, B est linéairement compact). Comme B est métrisable (puisque F est de type dénombrable) on est ramené à voir que ${}^t u$ transforme suites convergentes de B en suites convergentes de E', ce qui résulte de l'énoncé de HILY.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] *Séminaire Banach*, Séminaire tenu à l'École Normale Supérieure en 1962-1963 sous la direction de C. HOUZEL (multigr.).

[2] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre.* — Paris, Hermann (Act. scient. et ind.).

[3] BOURBAKI (Nicolas). — *Espaces vectoriels topologiques.* — Paris, Hermann (Act. scient. et ind.).

[4] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre commutative.* — Paris, Hermann (Act. scient. et ind.).

[5] GROTHENDIECK (Alexander). — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* — Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs of the American mathematical Society, 16).

[6] GROTHENDIECK (Alexander). — La théorie de Fredholm, *Bull. Soc. math. France*, t. 84, 1956, p. 319-384.

[7] GROTHENDIECK (Alexander). — *Espaces vectoriels topologiques*, 3e éd. — Sao Paulo, Publicacao da Sociedade de Matematica de Sao Paulo, 1964.

[8] HELLER (A.). — Homological algebra in abelian categories, *Annals of Math.*, Series 2, t. 68, 1958, p. 484-525.

[9] HILY (Jacques). — Espaces de Banach ultramétriques, *Séminaire Delange-Pisot*, 6e année, 1964-1965, no 7 (à paraître).

[10] LAZARD (Michel). — *Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet.* — Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 14, p. 47-76).

[11] MATLIS (E.). — Injective modules over Prüfer rings, *Nagoya math. J.*, t. 15, 1959, p. 57-69.

[12] MATLIS (E.). — *Cotorsion modules.* — Providence, American mathematical Society, 1964 (Memoirs of the American mathematical Society, 49).

[13] SERRE (Jean-Pierre). — *Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques.* — Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Études Scientifiques, 12).

[14] VAN TIEL (J.). — *Espaces localement K-convexes* (Thèse Univ. Amsterdam, 1965).

(Manuscrit reçu le 21 juin 1965.)

Laurent GRUSON,
Attaché de Recherches au C. N. R. S.,
3, avenue des Châlets,
Paris, 16e.