A. MICALI

Algèbres intègres et sans torsion

Bulletin de la S. M. F., tome 94 (1966), p. 5-13
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1966__94__5_0>

Bull. Soc. math. France,
94, 1966, p. 5 à 14.

ALGÈBRES INTÈGRES ET SANS TORSION

PAR

ARTIBANO MICALI.

1. Préliminaires.

Les anneaux seront commutatifs à élément unité, les modules unitaires, et les algèbres associatives, mais non nécessairement commutatives.

Nous réserverons le terme intègre pour les algèbres commutatives et le qualificatif sans diviseurs de zéro pour les algèbres non commutatives.

Soient A un anneau, M un A-module, $T(M)$, $S(M)$, $E(M)$ les algèbres tensorielle, symétrique, extérieure de ce A-module (*cf.* [3]). Nous désignerons par U l'un quelconque des foncteurs T, S, E et par $U_q(M)$ le sous-A-module de $U(M)$ des éléments homogènes de degré $q \geq 0$.

On sait que, si I (resp. J) est l'idéal bilatère de $T(M)$ engendré par les tenseurs $x \otimes y - y \otimes x$ (resp. $x \otimes x$) quand x et y parcourent M,

$$S_q(M) = T_q(M)/T_q(M) \cap I,$$
$$E_q(M) = T_q(M)/T_q(M) \cap J.$$

Si l'anneau A est intègre de corps des fractions K, $t(M)$ désigne le sous-module de torsion de M; c'est le noyau de l'application naturelle de M dans $M \otimes_A K$.

L'exactitude de la suite

$$0 \to t(U(M)) \to U(M) \to U(M) \otimes_A K \to U(M) \otimes_A (K/A) \to 0$$

conduit au lemme suivant :

LEMME 1. — *Soient A un anneau intègre, M un A-module. Le A-module $T(M)$ [resp. $S(M)$] est sans torsion si et seulement si la A-algèbre $T(M)$ [resp. $S(M)$] est sans diviseurs de zéro (resp. intègre).*

Il résulte alors du fait que, si le A-module M est plat, il en est de même de $U(M)$ (*cf.* [4]), que si l'anneau A est intègre et si le A-module M est plat, $T(M)$ [*resp.* $S(M)$] est sans diviseurs de zéro (resp. intègre).

Nous verrons plus loin que, si $\varphi : M' \to M$ est une application A-linéaire injective, il n'est pas toujours vrai que le morphisme $U(\varphi) : U(M') \to U(M)$ de A-algèbres graduées prolongeant φ soit injectif. Il est utile de chercher le noyau de $U(\varphi)$.

Proposition 1. — *Soient A un anneau intègre, $\varphi : M' \to M$ une application A-linéaire injective et $U(\varphi) : U(M') \to U(M)$ son prolongement. On a :*

(i) $\mathrm{Ker}\,(U(\varphi)) \subset t(U(M'))$. *Donc si* $t(U(M')) = 0$, $U(\varphi)$ *est injectif.*

(ii) *Si* $t(U(M)) = 0$, $\mathrm{Ker}\,(U(\varphi)) = t(U(M'))$.

La démonstration (*cf.* [4]) utilise le lemme suivant :

Lemme 2. — *Soient A un anneau, $\varphi : M' \to M$ une application A-linéaire injective telle que $\varphi(M')$ soit facteur direct dans M. Alors, le prolongement $U(\varphi) : U(M') \to U(M)$ est un morphisme injectif de A-algèbres graduées.*

2. Algèbres intègres et sans torsion.

Soient A un anneau intègre et S son spectre premier muni de la topologie spectrale (*cf.* [1]).

Proposition 2. — *Une A-algèbre B est sans torsion si et seulement si la $A_\mathfrak{p}$-algèbre (ou la A-algèbre) $B_\mathfrak{p}$ est sans torsion pour tout $\mathfrak{p}$ de S.*

On peut se limiter aux idéaux maximaux de A car, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal contenant un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $(B_\mathfrak{m})_\mathfrak{p} = B_\mathfrak{p}$. Le résultat se déduit alors du lemme de globalisation (*cf.* [1]).

Bien entendu, la proposition reste valable si B est seulement un A-module.

Corollaire. — *Soient A un anneau intègre et M un A-module. La A-algèbre $U(M)$ est sans torsion si et seulement si $U(M_\mathfrak{p})$ est sans torsion pour tout $\mathfrak{p}$ dans S.*

Théorème 1. — *Soient A un anneau intègre et B une A-algèbre commutative noethérienne. La A-algèbre B est intègre si et seulement si $B_\mathfrak{p}$ est intègre pour tout $\mathfrak{p}$ dans S.*

Il suffit évidemment de montrer que si B est localement intègre, B est intègre, et à cet effet que le spectre de B est connexe ou encore que les seuls idempotents de B sont 0 et 1 (*cf.* [1]). Soit e un idempotent de B. Si $e_\mathfrak{p}$ est l'image de e dans $B_\mathfrak{p}$, $e_\mathfrak{p} = 0$ ou 1. Soit donc U_0 (resp. U_1) l'ensemble des éléments $\mathfrak{p}$ de S tels que $e_\mathfrak{p} = 0$ (resp. 1). Il est clair que $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ et $S = U_0 \cup U_1$. Mais S est irréductible et donc connexe, et U_0 et U_1 sont des ouverts de S. Donc S est, soit U_0, soit U_1. Le lemme de globalisation achève la démonstration.

Remarque. — Le théorème reste vrai sans hypothèse de commutativité de B.

On sait que si M' est un sous-module d'un A-module M, le fait que $U(M)$ soit sans torsion n'implique pas la même propriété pour $U(M')$. Donnons-en un exemple dans le cas de l'algèbre symétrique. D'autres exemples seront donnés ultérieurement pour les autres algèbres universelles.

Exemple. — Soient k un corps, $A = k[x, y]$ l'algèbre affine de la courbe d'équation $x^3 = y^2$ et $\mathfrak{p} = (x, y) A$, l'idéal premier de l'origine. L'anneau A est intègre, et il en est donc de même de $S(A)$. Mais, $S(\mathfrak{p})$ n'est pas intègre.

On a, toutefois, le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Soient A un anneau intègre et M un A-module tel que $U(M)$ soit sans torsion. Si M' est un sous-module de M, $U(M')$ est sans torsion si et seulement si $U(M'_{\mathfrak{p}})$ est sans torsion pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A contenant le radical de M'.*

Rappelons que le radical $R(M')$ de M' (par rapport à M) est l'idéal de A des éléments c de A pour lesquels il existe un entier $n \geqq 1$ (dépendant de c) avec $c^n M \subset M'$.

Si l'idéal premier $\mathfrak{p}$ ne contient pas $R(M')$, $M_{\mathfrak{p}} = M'_{\mathfrak{p}}$ et donc par hypothèse $U(M'_{\mathfrak{p}}) = U(M_{\mathfrak{p}})$ est sans torsion. Le théorème résulte alors du corollaire de la proposition 2.

COROLLAIRE. — *Soient A un anneau intègre et $\mathfrak{a}$ un idéal de A. L'Algèbre $U(\mathfrak{a})$ est sans torsion si et seulement si $U(\mathfrak{a} A_{\mathfrak{p}})$ est sans torsion pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A contenant $R(\mathfrak{a})$.*

En particulier, si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de A, $U(\mathfrak{q})$ est sans torsion si et seulement si $U(\mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}})$ est sans torsion pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A contenant $\mathfrak{q}$. Si donc $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A, $U(\mathfrak{m})$ est sans torsion si et seulement si $U(\mathfrak{m} A_{\mathfrak{m}})$ est sans torsion. Mais il n'est pas vrai, en général, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier non maximal de A, que $U(\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}})$ sans torsion implique $U(\mathfrak{p})$ sans torsion.

3. **Intégrité de l'algèbre symétrique.**

Le problème de la caractérisation des algèbres symétriques intègres est ouvert. On a déjà remarqué que si l'anneau A est intègre et le A-module M est plat, $S(M)$ est intègre. L'exemple qui suit montre que ces conditions ne caractérisent pas les algèbres symétriques intègres.

Exemple. — Soient k un corps,

$$A = k[t_1, \ldots, t_n]_{(t_1, \ldots, t_n)} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{m} = (t_1, \ldots, t_n) A$$

l'idéal maximal de l'anneau local A.

Soit M le A-module engendré par des éléments $e_1, \ldots, e_n$ liés par la relation $\sum_{i=1}^{n} t_i e_i = 0$. Comme les éléments t_i sont dans $\mathfrak{m}$, les éléments $e_1, \ldots, e_n$ forment un système minimal de générateurs. Donc, M n'est ni libre ni même projectif puisque A est local et donc non plat. On montre que si B est la k-algèbre $k[t_1, \ldots, t_n; x_1, \ldots, x_n]$, où les éléments t_i et x_j sont liés par la relation $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i = 0$, $S(M) = B_{\mathfrak{m}}$ et est donc intègre.

On connaît le résultat suivant (*cf.* [6]) :

THÉORÈME 3. — *Un anneau local noethérien A d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est régulier si et seulement si $S(\mathfrak{m})$ est intègre.*

Soient A un anneau noethérien intègre non nécessairement local et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Si $S(\mathfrak{p})$ est intègre, $S(\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = S(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$ l'est aussi et, d'après le théorème 3, ceci implique que l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier.

En revanche, le fait que l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ soit régulier n'implique pas, en général, si l'idéal premier $\mathfrak{p}$ n'est pas maximal, l'intégrité de $S(\mathfrak{p})$.

Exemple. — Soient k un corps, $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ et $\mathfrak{p}$ un idéal premier *homogène* de A ayant $a_1, \ldots, a_m$ pour système minimal de générateurs homogènes. Si $S(\mathfrak{p})$ est intègre, les éléments $a_1, \ldots, a_m$ sont algébriquement indépendants sur k (*cf.* [6]). En conséquence, si $m > n$, $S(\mathfrak{p})$ ne peut être intègre. Or, MACAULAY a montré l'existence d'idéaux satisfaisant à cette condition (*cf.* [5]). D'autre part, on sait que $A_{\mathfrak{p}}$ est local régulier, car A est régulier.

La réciproque est toutefois vraie si $\mathfrak{p}$ est maximal.

THÉORÈME 4. — *Soit A un anneau noethérien intègre.*

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de A, $A_{\mathfrak{p}}$ est local régulier si et seulement si $S(\mathfrak{p})$ est intègre. L'anneau A est régulier si et seulement si $S(\mathfrak{p})$ est intègre pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de A.

Un problème ouvert est celui de la caractérisation des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A pour lesquels $S(\mathfrak{p})$ soit intègre.

On peut donner une interprétation géométrique du théorème 4. Prenant pour A l'algèbre affine $k[V]$ d'une k-variété irréductible V et pour $\mathfrak{p}$ l'idéal premier des fonctions appartenant à A et s'annulant en le point p de V, on voit que *le point p est simple si et seulement si $S(\mathfrak{p})$ est intègre.*

4. Sur l'algèbre tensorielle.

LEMME 3. — *Soient A un anneau intègre, $\mathfrak{a}$ un idéal de A, $\alpha : \mathfrak{a} \to T(\mathfrak{a})$ l'injection canonique, x et y deux éléments de $\mathfrak{a}$. L'élément*

$$\alpha(x) \otimes \alpha(y) - \alpha(y) \otimes \alpha(x)$$

appartient au sous-module de torsion $t(T(\mathfrak{a}))$ de $T(\mathfrak{a})$.

En particulier, si cet élément est non nul, le module $t(T(\mathfrak{a}))$ n'est pas réduit à o.

Puisque $x\,\alpha(y) = y\,\alpha(x)$ pour tout couple d'éléments de $\mathfrak{a}$, on a en effet

$$x(\alpha(x) \otimes \alpha(y) - \alpha(y) \otimes \alpha(x)) = y(\alpha(x) \otimes \alpha(x) - \alpha(x) \otimes \alpha(x)) = 0.$$

PROPOSITION 3. — *Soient A un anneau et M un A-module de type fini. L'épimorphisme $T(M) \to S(M)$ est bijectif si et seulement si M est localement monogène.*

L'assertion est évidente si A est un corps et il suffit de la montrer dans le cas où l'anneau A est local. Or, si k est le corps résiduel, l'égalité $S(M) = T(M)$ implique l'égalité $S(M \otimes k) = T(M \otimes k)$. Il en résulte que le k-espace vectoriel $M \otimes k = M/\mathfrak{m}M$, si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A, est de dimension 1 et donc que M est monogène en vertu du lemme de Nakayama.

THÉORÈME 5. — *Soit A un anneau local noethérien intègre d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'anneau A est de valuation discrète.*
(ii) *L'algèbre $T(\mathfrak{m})$ est sans diviseurs de zéro.*
(iii) *Le A-module $T_2(\mathfrak{m})$ est sans torsion.*

Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) étant claires, il nous suffit de montrer que si $T_2(\mathfrak{m})$ est sans diviseurs de zéro, l'anneau A est de valuation discrète.

Or, si I est l'idéal bilatère de $T(\mathfrak{m})$ engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x$, où x et y parcourent $\mathfrak{m}$, il résulte du lemme 3 que I est contenu dans $t(T_2(\mathfrak{m}))$. L'hypothèse faite sur $T_2(\mathfrak{m})$ montre donc que $S(\mathfrak{m}) = T(\mathfrak{m})$. Il résulte alors de la proposition 3 que l'idéal $\mathfrak{m}$ est principal et, par suite, que A est de valuation discrète.

Si l'anneau A noethérien intègre n'est plus nécessairement local, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Si $T(\mathfrak{p})$ est sans torsion, il en est de même de $T(\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = T(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$ et, par suite, $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète. La réciproque n'est pas vraie (*cf.* § 7). Elle l'est toutefois si l'idéal premier $\mathfrak{p}$ est maximal.

THÉORÈME 6. — *Soient A un anneau noethérien intègre, $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de A. L'algèbre $T(\mathfrak{p})$ est sans torsion si et seulement si l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ est de valuation discrète.*

Dans le cas des idéaux, il est facile de donner des exemples d'algèbres tensorielles avec torsion. Soient, en effet, k un corps, $A = k[X_1, \ldots, X_n]$, où $X_1, \ldots, X_n$ sont des indéterminées, $\mathfrak{p}$ un idéal premier *homogène* de A admettant $a_1, \ldots, a_m$ pour système minimal de générateurs homogènes. Si $T(\mathfrak{p})$ est sans torsion, $T(\mathfrak{p}) = S(\mathfrak{p})$ est intègre. Il suffit donc de prendre $m > n$ pour que $T(\mathfrak{p})$ ait de la torsion.

L'interprétation géométrique du théorème 6 est que, si $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier d'un point d'une k-variété V, la condition $T(\mathfrak{p})$ sans torsion est équivalente au fait que l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ du point est de valuation discrète.

La condition que $T(\mathfrak{p})$ soit sans torsion pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A signifie donc que V est une courbe algébrique sans singularités.

5. **Sur l'algèbre extérieure.**

Soient A un anneau, M un A-module. Si $E_q(M) = 0$, on a l'inclusion $T_q(M) \subset J$ et donc $T_q(M) \cap I \subset J \cap I = 0$ et donc $S_q(M) = T_q(M)$. Par conséquent, la condition $E_q(M) = 0$ pour tout $q \geqq 2$ implique $S(M) = T(M)$. Si, de plus, M est de type fini, ceci signifie que M est localement monogène.

LEMME 4. — *Soient A un anneau intègre et $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Les A-modules $E_q(\mathfrak{a})$ sont de torsion pour tout entier $q \geqq 2$.*

Soit, en effet, $\alpha : \mathfrak{a} \to E(\mathfrak{a})$ l'injection canonique. Pour tout vecteur de la forme $\alpha(x) \wedge \alpha(y) \neq 0$, où x et y sont dans $\mathfrak{a}$, on a

$$x(\alpha(x) \wedge \alpha(y)) = y(\alpha(x) \wedge \alpha(x)) = 0,$$

car $x\alpha(y) = y\alpha(x)$. Ceci nous montre que $E_2(\mathfrak{a})$ est un A-module de torsion. Démonstration analogue en degrés supérieurs.

THÉORÈME 7. — *Soit A un anneau local noethérien intègre d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'anneau A est de valuation discrète.*

(ii) *L'algèbre $E(M)$ est sans torsion.*

(iii) *Le A-module $E_2(\mathfrak{m})$ est sans torsion.*

Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) étant claires, il suffit de montrer que (iii) implique (i). Or, si $E_2(\mathfrak{m})$ est sans torsion, $E_2(\mathfrak{m}) = 0$ (lemme 4), donc $E_q(\mathfrak{m}) = 0$ pour tout entier $q \geqq 2$. La remarque faite en début de paragraphe montre alors que l'idéal $\mathfrak{m}$ est principal et donc que l'anneau A est de valuation discrète.

Soient maintenant A un anneau noethérien intègre, non nécessairement local, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Supposons que le A-module $E(\mathfrak{p})$ soit sans torsion. Il en est alors de même du A-module $E(\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}} = E(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$. Il en résulte que l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ est de valuation discrète. La réciproque n'est pas vraie : le fait que l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ soit de valuation discrète n'entraîne pas que le A-module $E(\mathfrak{p})$ soit sans torsion (*cf.* § 7). Elle est toutefois vraie si l'idéal $\mathfrak{p}$ est maximal.

THÉORÈME 8. — *Soient A un anneau noethérien intègre, $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de A. Le A-module $E(\mathfrak{p})$ est sans torsion si et seulement si l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ est de valuation discrète.*

Il suffit de remarquer que $E(\mathfrak{p})$ est sans torsion si et seulement s'il en est de même de $E(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$.

6. **Syzygies et intégrité.**

Soient A un anneau et $\{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini d'éléments de A. Nous dirons qu'un élément $(c_1, \ldots, c_n)$ du A-module libre A^n est une *syzygie* de l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_n\}$ si $\sum_{i=1}^{n} c_i a_i = 0$. L'ensemble des syzygies de $\{a_1, \ldots, a_n\}$ est muni d'une structure de sous-A-module de A^n. Si $\mathfrak{a}$ est l'idéal $(a_1, \ldots, a_n)A$, une syzygie de l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_n\}$ est aussi appelée, par abus de langage, une syzygie de l'idéal $\mathfrak{a}$.

Soient M le A-module des syzygies de l'idéal $\mathfrak{a}$ et T le sous-A-module de M engendré par les syzygies $(0, \ldots, 0, a_j, 0, \ldots, 0, -a_i, 0, \ldots, 0)$, où $i<j$ et où a_j (resp. $-a_i$) est à la $i^{\text{ième}}$ (resp. $j^{\text{ième}}$) place. Un élément de T sera appelé une *syzygie triviale.* On vérifie facilement que pour que la syzygie $(c_1, \ldots, c_n)$ soit triviale, il faut et il suffit qu'on puisse écrire

$$c_i = \sum_{j=i+1}^{n} b_{i,j} a_j - \sum_{j=i}^{i-1} b_{j,i} a_j \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad \text{avec } b_{i,j} \text{ dans } A.$$

Ceci nous montre que $T \subset \mathfrak{a}A^n$. Soit, d'autre part, $\varphi : A^n \to \mathfrak{a}$ l'application A-linéaire définie par $\varphi(e_i) = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, où $e_1, \ldots, e_n$ est la base canonique du A-module libre A^n. Il est clair que $M = \mathrm{Ker}(\varphi)$ et donc que $T \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. On en déduit l'inclusion $T \subset \mathfrak{a}A^n \cap \mathrm{Ker}(\varphi)$. On dira que l'idéal $\mathfrak{a}$ est *syzygétique* (faute de mieux !...) si $T = \mathfrak{a}A^n \cap \mathrm{Ker}(\varphi)$.

On a le résultat suivant (*cf.* [7]) :

LEMME 5. — *Soient A un anneau intègre, $\mathfrak{a}$ un idéal syzygétique de A. Si pour toute syzygie $(c_1, \ldots, c_n)$ de l'idéal $\mathfrak{a}$, l'appartenance de c_1 à l'idéal $\mathfrak{a}$ entraîne celle de c_i $(i = 2, \ldots, n)$, la A-algèbre $S(\mathfrak{a})$ est intègre.*

7. Étude d'un exemple.

Nous avons déjà vu dans les paragraphes 4 et 5 que, si A est un anneau noethérien intègre et si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, l'absence de torsion pour $T(\mathfrak{p})$ ou $E(\mathfrak{p})$ implique que l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ est de valuation discrète. Nous donnons ci-dessous un contre-exemple à la réciproque.

Soient k un corps, $A = k[x, y, z]$ la k-algèbre affine du cône $z^2 - xy = 0$ et $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de l'axe des y, donc engendré par x et z. Il est clair que l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ est de valuation discrète d'idéal maximal $zA_{\mathfrak{p}}$: c'est l'anneau local d'une sous-variété simple de codimension 1.

Montrons que les A-modules $T(\mathfrak{p})$ et $E(\mathfrak{p})$ ont de la torsion.

En ce qui concerne $T(\mathfrak{p})$, il suffit de montrer, par exemple, que l'élément $x \otimes z - z \otimes x$ est non nul. Soit I l'idéal bilatère de $T(\mathfrak{p})$ engendré par les éléments $u \otimes v - v \otimes u$, où u et v parcourent $\mathfrak{p}$. Le sous-A-module $I \cap T_2(\mathfrak{p})$ de $T_2(\mathfrak{p})$ est engendré par l'élément $x \otimes z - z \otimes x$. Or, $I \cap T_2(\mathfrak{p})$ est le noyau de l'application naturelle de $T_2(\mathfrak{p})$ dans $\mathfrak{p}^2$. Il suffit de montrer que ce noyau est non nul. L'application A-linéaire $A \times A \to \mathfrak{p}$ définie par $(a, c) \mapsto ax + cz$ est un épimorphisme dont le noyau N est engendré par les couples $(-z, x)$ et $(-y, z)$. Ce noyau est donc isomorphe à $\mathfrak{p}$ en tant que A-module par l'isomorphisme défini par $x \mapsto (-z, x)$ et $y \mapsto (-y, z)$. On obtient ainsi la suite exacte de A-modules

$$0 \to \mathfrak{p} \to A^2 \to \mathfrak{p} \to 0.$$

Il en résulte pour un A-module M l'égalité

$$\operatorname{Tor}_1^A(\mathfrak{p}, M) = \operatorname{Ker}(\mathfrak{p} \otimes_A M \to A^2 \otimes_A M)$$

et en particulier

$$\operatorname{Tor}_1^A(\mathfrak{p}, A/\mathfrak{p}) = \operatorname{Ker}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 \to A^2/\mathfrak{p}A^2).$$

Or, si M est un A-module, on a l'égalité

$$\operatorname{Tor}_2^A(A/\mathfrak{p}, M) = \operatorname{Tor}_1^A(\mathfrak{p}, M),$$

obtenue à partir de la suite exacte $0 \to \mathfrak{p} \to A \to A/\mathfrak{p} \to 0$.

En particulier,

$$\operatorname{Tor}_2^A(A/\mathfrak{p}, A/\mathfrak{p}) = \operatorname{Tor}_1^A(\mathfrak{p}, A/\mathfrak{p}).$$

Puisque $\operatorname{Tor}_2^A(A/\mathfrak{p}, A/\mathfrak{p}) = \operatorname{Ker}(T_2(\mathfrak{p}) \to \mathfrak{p}^2)$, il suffit de montrer que $\operatorname{Ker}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 \to A^2/\mathfrak{p}A^2)$ est non nul. A cet effet, considérons l'élément $u = (-z, x) + c(-y, z)$ de N, où c est élément de $\mathfrak{p}$. Si e_1, e_2 est la base canonique du A-module libre A^2, cet élément peut encore s'écrire sous la forme $u = -(z + cy)e_1 + (x + cz)e_2$. Donc l'image de u dans $A^2/\mathfrak{p}A^2$ est 0. Si l'image de u dans $N/\mathfrak{p}N$ était nulle, on aurait $(-z, x)$ dans $\mathfrak{p}N$, soit x dans $\mathfrak{p}^2$. C'est absurde. Nous avons ainsi montré que $T_2(\mathfrak{p})$ a de la torsion.

Il résulte du lemme 5 que $S(\mathfrak{p})$ est intègre. Si, de plus, le corps k est de caractéristique o, le fait que $T_2(\mathfrak{p}) = S_2(\mathfrak{p}) \oplus E_2(\mathfrak{p})$ entraîne que $E_2(\mathfrak{p})$ a de la torsion.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre commutative*, chap. 1 et 2. — Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290; Bourbaki, 27).

[2] Cartan (H.) et Eilenberg (S.). — *Homological algebra*. — Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[3] Chevalley (Claude). — *Fundamental concepts of algebra*. — New York, Academic Press, 1956 (Pure and applied Mathematics, 7).

[4] Lazard (Daniel). — Sur les modules plats, *C. R. Acad. Sc.*, t. 258, 1964, p. 6313-6316.

[5] Macaulay (F. S.). — *The algebraic theory of modular systems*. — Cambridge, Cambridge University Press, 1916; New York, Stechert-Hafner, 1964 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 19).

[6] Micali (Artibano). — Sur les algèbres universelles, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 14, 1964, nº 2, p. 33-88.

[7] Samuel (P.), Salmon (P.) et Micali (A.). — Intégrité et factorialité des algèbres symétriques, *Actas do 4º Coloquio Brasileiro de Matematica* [1963, Poços de Caldas] (à paraître).

[8] Samuel (Pierre). — *Méthodes d'algèbres abstraites en géométrie algébrique*. — Berlin, Springer-Verlag, 1955 (Ergebnisse der Mathematik... Neue Folge, 4).

(Manuscrit reçu le 20 octobre 1965.)

Artibano Micali,
Instituto de Pesquisas Matematicas,
Universidade de Sao Paulo,
Caixa postal 8174-B,
Sao Paulo (Brésil).