

BULLETIN DE LA S. M. F.

M.-P. MALLIAVIN-BRAMERET

Modules sur les anneaux locaux réguliers

Bulletin de la S. M. F., tome 94 (1966), p. 261-268

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1966__94__261_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1966__94__261_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODULES SUR LES ANNEAUX LOCAUX RÉGULIERS

PAR

MARIE-PAULE MALLIAVIN-BRAMERET.

Tous les anneaux considérés sont supposés commutatifs noethériens et possèdent un élément unité. Tous les modules sur de tels anneaux sont unitaires et de type fini. Par *dimension* d'un anneau R , nous entendrons toujours la dimension de Krull de R et nous la noterons $\dim R$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de R , la dimension de l'anneau $R_{\mathfrak{p}}$ est appelée la *hauteur* de $\mathfrak{p}$ [notation $ht(\mathfrak{p})$]. Étant donné un R -module M , nous notons dhM ou $dh_R M$ la *dimension homologique* de M . Une suite $x_1, x_2, \dots, x_k$ d'éléments de R est appelée une *M -suite* si x_i n'est pas diviseur de zéro pour le module $M/(x_1 M + \dots + x_{i-1} M)$, et si $M/(x_1 M + \dots + x_{i-1} M) \neq (0)$. La borne supérieure des longueurs d'une M -suite (finie ou $+\infty$) est appelée la *codimension* de M (en notation : $\text{codim}_R M$ ou $\text{codim } M$).

Définition. — Si R est un anneau local régulier de dimension ≥ 1 , M un R -module et q un entier, $1 \leq q \leq \dim R$, on dit que M vérifie la *condition* (a_q) si toute R -suite de longueur $\leq q$ est une M -suite.

Pour une définition, dans un cadre plus général, de la condition (a_q) , on se rapportera à [7] et [8]. En particulier, on démontre (proposition 1 de [7]) que, l'anneau R étant local régulier, la condition (a_q) est équivalente à la condition (b_q) suivante :

(b_q) Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R , on a $dh_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \leq \sup[ht(\mathfrak{p}) - q, 0]$.

La condition (a_1) signifie simplement que M est un R -module sans torsion. Si n est la dimension de R , la condition (a_n) signifie que le module M est libre. D'après la proposition 1 de [8], la condition (a_2) signifie que M est réflexif, c'est-à-dire que l'homomorphisme canonique de M dans son bidual M^{**} est un isomorphisme.

Dans les théorèmes 2 et 4, nous encadrons la condition (a_q) , vérifiée par un module M sur un anneau local régulier R , par des conditions d'annulation de $\text{Tor}_i^R(M, R/\mathfrak{p})$, où les $\mathfrak{p}$ sont certains idéaux premiers de R . En particulier, la condition (a_q) peut être ainsi complètement caractérisée. On peut aussi traduire la condition (a_{n-1}) en considérant le module produit tensoriel de $(n-1)$ copies de M (voir théorèmes 5 et 6), et en s'inspirant de la caractérisation suivante donnée par M. AUSLANDER (cf. [2], théorème 4) : un module M sur un anneau local régulier R de dimension n est libre si et seulement si le produit tensoriel de n copies de M est sans torsion.

On a de façon immédiate le lemme suivant :

LEMME 1. — Soient R un anneau local régulier de dimension $n > 1$, q un entier, $1 \leq q \leq n-1$, et $0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ une suite exacte de R -modules où L est libre et $N \neq (0)$. Alors si M vérifie la condition (a_q) , le module N vérifie la condition (a_{q+1}) .

Nous aurons à utiliser le corollaire du lemme suivant, dont on trouvera une démonstration dans un cadre plus général dans [4] (théorème 1.3) (voir aussi lemme 1 de [5]).

LEMME 2. — Soient A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}(A)$, a un élément de $\mathfrak{m}(A)$ non diviseur de zéro dans A , M un A -module non nul tel que $aM = (0)$. Alors, si $dh_{A/aA}(M) = n < \infty$, on a $dh_A(M) = n + 1$.

COROLLAIRE. — Soient A un anneau local, $a_1, a_2, \dots, a_q$ une A -suite de longueur q , $\mathfrak{a}$ l'idéal de A qu'elle engendre, M un $A/\mathfrak{a}$ -module non nul. Alors si $dh_{A/\mathfrak{a}}(M) = n < \infty$, on a $dh_A(M) = n + q$.

Démonstration. — A partir du lemme 2, on procède par récurrence sur q . Supposons $q > 1$ et le corollaire démontré pour $q-1$. Posons $\bar{A} = A/\mathfrak{b}$, où $\mathfrak{b} = Aa_1 + \dots + Aa_{q-1}$. La classe $\bar{a}_q$ de a_q modulo $\mathfrak{b}$ appartient à l'idéal maximal de $\bar{A}$ et n'est pas diviseur de zéro dans $\bar{A}$. Les anneaux $A/\mathfrak{a}$ et $\bar{A}/\bar{a}_q\bar{A}$ sont isomorphes. D'après le lemme 2, l'égalité $dh_{\bar{A}/\bar{a}_q\bar{A}}(M) = n < \infty$ entraîne que $dh_{\bar{A}}(M) = n + 1$. D'où, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $dh_A(M) = n + q$.

Rappelons le résultat suivant, dont on pourra trouver la démonstration dans [3] (proposition 1.4) :

LEMME 3. — Soient R un anneau local et M un R -module. Si $x_1, \dots, x_q$ est une M -suite, alors $dh_RM/(x_1M + \dots + x_qM) = q + dh_RM$. (On pose $q + \infty = \infty$.)

Enfin, il vient d'être prouvé le résultat suivant (cf. corollaire 2 du théorème 3 de [6]) :

THÉORÈME 1. — Soient R un anneau local régulier, M et N deux R -modules. Si $\text{Tor}_i^R(M, N) = (0)$, alors $\text{Tor}_j^R(M, N) = (0)$, pour $j \geq i$.

THÉOREME 2. — Soient R un anneau local régulier de dimension $n \geq 1$, et M un R -module. Si $\text{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0)$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R de hauteur inférieure ou égale à $n - s$, où s est un entier compris entre 0 et n , alors M vérifie la condition (a_{n-s}) .

Démonstration. — Si $s = 0$, alors $\text{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{m}) = (0)$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de R et, par suite, M est libre. Supposons que $s > 0$ et que le théorème soit démontré pour $s - 1$. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de R de hauteur $n - 1$. Alors, le $R_{\mathfrak{q}}$ -module $M_{\mathfrak{q}}$ est tel que $\text{Tor}_1^{R_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}, R_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}) = (0)$, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}$ de $R_{\mathfrak{q}}$ de hauteur $\leq n - s = \dim(R_{\mathfrak{q}}) - (s - 1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $M_{\mathfrak{q}}$ vérifie la condition $(a_{ht(\mathfrak{q}) - (s-1)})$. On a donc, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R de hauteur $\leq n - 1$, l'inégalité

$$dh_{R/\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}) \leq \sup[ht(\mathfrak{p}) - (n - s), 0].$$

Il suffit donc de prouver que $dh_R(M)$ est au plus égal à s . Supposons M non libre; alors, pour toute suite exacte de R -modules : $0 \rightarrow N \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ dans laquelle F est libre, on a $dh_R(N) = dh_R(M) - 1$. De plus, puisque, d'après le théorème 1, on a $\text{Tor}_2^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0)$, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de hauteur $\leq n - s$, on a aussi, $\text{Tor}_1^R(N, R/\mathfrak{p}) = (0)$, pour tout tel idéal $\mathfrak{p}$. Il suffit donc de prouver que l'égalité $dh_R(M) = s + 1$ est impossible. Supposons donc que $dh_R(M) = s + 1$, alors $dh_R(N) = s$, et comme, d'après le début de la démonstration, on a

$$dh_{R/\mathfrak{p}}(N_{\mathfrak{p}}) \leq \sup[ht(\mathfrak{p}) - (n - s), 0]$$

pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur $\leq n - 1$, il s'ensuit que N vérifie la condition (a_{n-s}) . Soit $\mathfrak{p}$ un idéal de R engendré par un sous-système de longueur $n - s$ d'un système régulier de paramètres. De la suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0,$$

résulte la suite exacte

$$0 \rightarrow N/\mathfrak{p}N \rightarrow F/\mathfrak{p}F \rightarrow M/\mathfrak{p}M \rightarrow 0.$$

Puisque $\mathfrak{p}$ est engendré par une R -suite, on a, d'après le lemme 2,

$$dh_R(F/\mathfrak{p}F) = n - s + dh_{R/\mathfrak{p}}(F/\mathfrak{p}F).$$

Puisque toute R -suite est une F -suite, on a, d'après le lemme 3,

$$dh_R(F/\mathfrak{p}F) = n - s.$$

Par conséquent, $dh_{R/\mathfrak{p}}(F/\mathfrak{p}F) = 0$ et $F/\mathfrak{p}F$ est un $R/\mathfrak{p}$ -module libre.

Puisque $N/\mathfrak{p}N$ est un sous-module d'un module libre, on a

$$dh_{R/\mathfrak{p}}(N/\mathfrak{p}N) \leq \dim(R/\mathfrak{p}) - 1.$$

D'où, d'après le corollaire du lemme 2,

$$dh_R(N/pN) \leq \dim(R/p) - 1 + n - s.$$

Enfin, puisque toute R -suite de longueur au plus $n - s$ est une N -suite, on a, d'après le lemme 3,

$$dh_R(N) = dh_R(N/pN) - (n - s) \leq \dim(R/p) - 1 = s - 1,$$

ce qui contredit le fait que $dh_R(N) = s$. Par conséquent, M vérifie la condition (a_{n-s}) .

Pour démontrer une réciproque affaiblie du résultat précédent, nous aurons besoin du théorème suivant (cf. théorème 1.2 de [1]) :

THÉORÈME 3. — Soient R un anneau local, M et N deux R -modules $\neq (0)$ tels que $dh_R(M) < \infty$. Soit q le plus grand entier ≥ 0 tel que $\text{Tor}_q^R(M, N) \neq (0)$. Alors, si ou bien $\text{codim}_R \text{Tor}_q^R(M, N) \leq 1$ ou bien $q = 0$, on a

$$\text{codim}_R(N) = \text{codim}_R \text{Tor}_q^R(M, N) + dh_R(M) - q.$$

THÉORÈME 4. — Soient R un anneau local régulier de dimension $n \geq 1$ et M un R -module. Si M vérifie la condition (a_q) , où q est un entier compris entre 1 et n , on a $\text{Tor}_1^R(M, R/p) = (0)$ pour tout idéal premier p de R de hauteur $\leq q$ et tel que $dh_R(R/p) = ht(p)$.

Démonstration. — Posons $s = n - q$. Si $s = 0$, le module M est libre et l'on a $\text{Tor}_1^R(M, N) = (0)$ pour tout R -module N . Supposons $s > 0$ et le théorème démontré jusqu'à $s - 1$. Soit p un idéal premier de R de hauteur $\leq q$. Si q est un idéal premier de R tel que $p \not\subseteq q$, alors $\text{Tor}_1^{R_q}(M_q, R_p/pR_q)$ est nul. Si $p \subseteq q$ et si $dh_R(R/p) = ht(p)$, alors on a aussi

$$dh_{R_q}(R_q/pR_q) = ht(pR_q) = ht(p);$$

en effet, on a, d'après la proposition 1.6 de [3], l'inégalité

$$dh_{R_q}(R_q/pR_q) \leq dh_R(R/p);$$

d'autre part, puisque l'anneau R_q est local régulier, on a, d'après la proposition 2.5 de [3], l'inégalité $ht(pR_q) \leq dh_{R_q}(R_q/pR_q)$. Supposons l'idéal q différent de l'idéal maximal de R . Alors le R_q -module M_q vérifie la condition $(a_{ht(q)-t}) = (a_q)$ avec $t \leq s$. Puisque

$$ht(pR_q) \leq q = ht(q) - t,$$

on a, d'après l'hypothèse de récurrence, l'égalité

$$\text{Tor}_1^{R_q}(M_q, R_q/pR_q) = (0).$$

Par suite, s'il n'est pas nul, le module $\text{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p})$ est de codimension 0. Soit $0 \rightarrow N \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ une suite exacte de R -modules dans laquelle F est libre. Alors, d'après le lemme 1, le module N vérifie la condition $(a_{q+1}) = (a_{n-(s-1)})$; donc, d'après l'hypothèse de récurrence on a

$$\text{Tor}_1^R(N, R/\mathfrak{p}) = (0)$$

et, par suite,

$$\text{Tor}_i^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0) \text{ pour } i \geq 2.$$

Il résulte alors du théorème 3 que $\text{codim}(R/\mathfrak{p}) = dh(M) - 1$; ou encore d'après l'hypothèse faite sur $\mathfrak{p}$, $dh(M) = n + 1 - ht(\mathfrak{p})$; comme on a aussi $dh(M) \leq n - q$, il en résulte que $ht(\mathfrak{p}) \geq q + 1$, ce qui contredit le choix de $\mathfrak{p}$. Par suite, on a

$$\text{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0).$$

COROLLAIRE. — Soient R un anneau local régulier de dimension $n > 1$ et M un R -module. Alors M vérifie la condition (a_{n-1}) si et seulement si l'on a $\text{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0)$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R de hauteur égale à $n - 1$.

Démonstration. — Si $\text{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0)$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur $n - 1$, alors $M_{\mathfrak{p}}$ est un $R_{\mathfrak{p}}$ -module libre pour tout tel idéal et, par suite, $M_{\mathfrak{q}}$ est un $R_{\mathfrak{q}}$ -module libre pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de hauteur inférieure ou égale à $n - 1$. On termine la démonstration comme dans le théorème 2. Si M vérifie la condition (a_{n-1}) on démontre que $\text{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0)$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur $n - 1$ comme dans le théorème 4 en utilisant le fait que, pour un tel idéal $\mathfrak{p}$, on a $\text{codim}_R(R/\mathfrak{p}) = 1$.

Soient R un anneau, M un R -module et i un entier ≥ 1 ; nous noterons $\bigotimes_R^i M$ le module produit tensoriel de i copies de M .

Nous utilisons, pour la démonstration du théorème 5, le résultat suivant : (cf. [1], lemme 3.1) :

LEMME 4. — Soient R un anneau local régulier, M et N deux R -modules tels $M \otimes_R N$ soit sans torsion. Alors :

- (i) Les modules M et N sont sans torsion;
- (ii) On a $\text{Tor}_1^R(M, N) = (0)$;
- (iii) On a $dh_R(M) + dh_R(N) = dh_R(M \otimes_R N) \leq \dim R$, en supposant que $\dim R \geq 1$.

THÉORÈME 5. — Soient R un anneau local régulier de dimension ≥ 1 et M un R -module. Si, pour un entier $q \geq 1$, le module $\bigotimes_R^q M$ est sans torsion, alors M vérifie la condition (a_q) .

Démonstration.— Puisque $\bigotimes_R^q M$ est sans torsion, les R_p -modules $\bigotimes_{R_p}^q M_p$ sont sans torsion, pour tout idéal premier p de R . Alors, d'après le lemme 4, on a, pour $i = 1, \dots, q-1$,

$$\mathrm{Tor}_1^{R_p}(M_p, \bigotimes_{R_p}^i M_p) = (0)$$

et le module $\bigotimes_{R_p}^i M_p$ est sans torsion; de plus $dh_{R_p}(\bigotimes_{R_p}^q M_p) = q dh_{R_p}(M_p)$ est inférieure à $ht(p) - 1$ [ou à 0 si $ht(p) < 1$]. Par conséquent, si $ht(p) \leq q$, alors

$$dh_{R_p}(M_p) = 0 \leq \sup[ht(p) - q, 0].$$

Si $ht(p) = q + s$, avec $s > 0$ et si $s \not\leq dh_{R_p}(M_p)$, on a $qs < (q + s) - 1$; d'où $s(q - 1) < q - 1$, ce qui est impossible. Par conséquent, on a

$$dh_{R_p}(M_p) \leq \sup[ht(p) - q, 0]$$

pour tout idéal premier p de R ; par suite, M vérifie la condition (a_q) .

LEMME 5. — Soient R un anneau local régulier de dimension $n \geq 1$ et M un R -module. Si M vérifie la condition (a_{n-1}) et si $\mathrm{Tor}_1^R(M, \bigotimes_R^i M) = (0)$, pour $i = 1, 2, \dots, s$, où $s \leq n - 2$, alors le module $\bigotimes_R^{s+1} M$ vérifie la condition (a_{n-1-s}) .

Démonstration. — Soit p un idéal premier de l'anneau R . Alors, l'anneau R est local régulier et l'on a

$$\mathrm{Tor}_1^{R_p}(M_p, \bigotimes_{R_p}^i M_p) = (0), \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, s.$$

D'après le théorème 1, on a aussi

$$\mathrm{Tor}_j^{R_p}(M_p, \bigotimes_{R_p}^i M_p) = (0), \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, s \text{ et tout } j \geq 1.$$

Il résulte du théorème 3 que

$$\begin{aligned} & dh_{R_p}(M_p \otimes_{R_p} (\bigotimes_{R_p}^i M_p)) \\ &= dh_{R_p} M_p + dh_{R_p}(\bigotimes_{R_p}^i M_p) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

Par suite, $dh_{R_p}(\bigotimes_{R_p}^{s+1} M_p) = (s + 1) dh_{R_p} M_p$. Puisque M vérifie la condition (a_{n-1}) , on a $dh_{R_p} M_p = 0$ pour tout idéal premier p différent de l'idéal maximal de R et $dh_R(M) \leq 1$. Par conséquent,

$$dh_{R_p}(\bigotimes_{R_p}^{s+1} M_p) = 0,$$

pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R différent de l'idéal maximal et

$$dh_R\left(\bigotimes_R^{s+1} M\right) \leq s + 1.$$

Comme $s + 1 = n - (n - s - 1)$, on a

$$dh_R\left(\bigotimes_R^{s+1} M\right) \leq \sup[\dim R - (n - s - 1), 0].$$

Par conséquent $\bigotimes_R^{s+1} M$ vérifie (a_{n-1-s}) .

THÉORÈME 6. — Soient R un anneau local régulier de dimension $n \geq 2$ et M un R -module. Alors, si M vérifie la condition (a_{n-1}) , le module $\bigotimes_R^{n-1} M$ est sans torsion.

Démonstration. — On a une suite exacte $0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$, dans laquelle N et L sont libres. Il suffit, d'après le lemme 5, de prouver que $\text{Tor}_1^R\left(M, \bigotimes_R^i M\right) = (0)$ pour $i = 1, 2, \dots, n-2$. On peut supposer que $n > 2$. Si pour un entier k compris entre 1 et $n-2$, $\text{Tor}_1^R\left(M, \bigotimes_R^k M\right)$ n'est pas nul, alors M n'est pas libre et l'on a $dh_R M = 1$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de R différent de l'idéal maximal, alors $M_{\mathfrak{p}}$ est un $R_{\mathfrak{p}}$ -module libre et l'on a $\left(\text{Tor}_1^R\left(M, \bigotimes_R^k M\right)\right)_{\mathfrak{p}} = (0)$. Par suite, la codimension du module $\text{Tor}_1^R\left(M, \bigotimes_R^k M\right)$ est 0. D'autre part, il résulte de la suite exacte $0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$, où N et L sont libres, que $\text{Tor}_i^R\left(M, \bigotimes_R^k M\right) = (0)$, pour $i \geq 2$. Donc, d'après le théorème 3, on a

$$\text{codim}_R\left(\bigotimes_R^k M\right) = dh_R(M) - 1.$$

Il en résulte, puisque R est régulier de dimension n et que $dh(M) = 1$, que $dh_R\left(\bigotimes_R^k M\right) = n$. Comme $n > 1$, on a nécessairement $k > 1$. Choisissons pour k le plus petit entier pour lequel $\text{Tor}_1^R\left(M, \bigotimes_R^k M\right)$ n'est pas nul, alors

$$\text{Tor}_1^R\left(M, \bigotimes_R^{k-1} M\right) = (0).$$

D'où d'après le lemme 5, le module $\bigotimes_R^k M$ vérifie la condition (a_{n-k}) . Par suite $dh_R\left(\bigotimes_R^k M\right) \leq k$ et $n \leq k$, ce qui contredit le fait que $k \leq n-2$.

Il résulte alors du corollaire du théorème 4 et des théorèmes 5 et 6 le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — Soient R un anneau local régulier de dimension $n \geq 2$ et M un R -module. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le module M vérifie la condition (a_{n-1}) ;
- (ii) Le module $\bigotimes_R^{n-1} M$ est sans torsion;
- (iii) On a $\text{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0)$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R de hauteur $n - 1$.

En particulier, sur un anneau local régulier R de dimension 3, un module M est réflexif si et seulement si le module $M \otimes_R M$ est sans torsion et, aussi si et seulement si $\text{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{p}) = (0)$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R de hauteur 2.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] AUSLANDER (M.). — Modules over unramified regular rings, *Illinois J. Math.*, t. 5, 1961, p. 631-647.
- [2] AUSLANDER (M.). — Modules over unramified regular local rings, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* [1962, Stockholm]; p. 230-233. — Uppsala, Almqvist and Wiksells, 1963.
- [3] AUSLANDER (M.) et BAUCHSBAUM (D. A.). — Homological dimension in local rings, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 85, 1957, p. 390-405.
- [4] KAPLANSKY (I.). — *Homological dimension of rings and modules*. Mathematics, Lecture Notes, University of Chicago.
- [5] KAPLANSKY (I.). — R -sequences and homological dimension, *Nagoya math. J.*, t. 20, 1962, p. 195-199.
- [6] LICHTENBAUM (S.). — On the vanishing of Tor in regular local rings, *Illinois J. Math.* (à paraître).
- [7] SAMUEL (P.). — Modules réflexifs et anneaux factoriels, *Séminaire Dubreil-Pisot Algèbre et Théorie des Nombres*, 17^e année, 1963-1964, n° 8, 4 pages.
- [8] SAMUEL (P.). — Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs, *Bull. Soc. math. France*, t. 92, 1964, p. 237-249.

(Manuscrit reçu le 17 mai 1966.)

M^{me} Marie-Paule MALLIAVIN-BRAMERET,
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Caen,
252, rue de Rivoli, Paris, 1^{er}.