BULLETIN DE LA S. M. F.

YVONNE CHOQUET-BRUHAT

Uniformisation de la solution d'un problème de Cauchy non linéaire, à données holomorphes

Bulletin de la S. M. F., tome 94 (1966), p. 25-48
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1966__94__25_0>

Bull. Soc. math. France,
94, 1966, p. 25 à 48.

UNIFORMISATION DE LA SOLUTION D'UN PROBLÈME DE CAUCHY NON LINÉAIRE, A DONNÉES HOLOMORPHES

PAR

YVONNE CHOQUET-BRUHAT.

Introduction.

Nous nous proposons d'étendre certains résultats de Jean LERAY [3] et de L. GÅRDING, T. KOTAKÉ et J. LERAY [1] (¹) sur la solution d'un problème de Cauchy linéaire à données holomorphes au cas d'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

Nous montrons que pour un système d'équations aux dérivées partielles quasi-linéaire, à coefficients holomorphes, régulier au sens de Cauchy-Kovalevski, généralisé par LERAY-GÅRDING, il existe une application holomorphe uniformisant la solution du problème de Cauchy donné sur une variété analytique S pouvant admettre des points caractéristiques. En général, u est algébroïde et le support K de ses singularités est un ensemble analytique de codimension 1.

Dans le cas où les coefficients principaux ne dépendent pas des dérivées de l'ordre maximum permis des inconnues, nous montrons que K est une variété analytique si l'ensemble T des points caractéristiques de S est une variété analytique dont le plan tangent en un point ne contient jamais le « vecteur bicaractéristique projeté » en ce point (vecteur défini à partir des données de Cauchy). u est alors une fonction algébroïde se ramifiant sur K, comme dans le cas linéaire, mais K dépend ici des données de Cauchy.

Le cas général se ramène au précédent (ainsi que le cas non linéaire) par dérivation des équations aux dérivées partielles données, mais on est alors conduit à faire sur les données de Cauchy une hypothèse un

(¹) L'article de GÅRDING, KOTAKÉ, LERAY [1] sera désigné dans la suite par G. K. L.

peu plus restrictive. Nous étudions directement le cas général, suivant une suggestion de J. Leray, dont nous le remercions vivement, en nous inspirant de la méthode utilisée par G. K. L. pour la construction du développement asymptotique : l'hypothèse à faire sur les données de Cauchy est un peu moins restrictive que la précédente.

I. Uniformisation portant sur un paramètre.

A. Premiers résultats concernant les systèmes généraux.

1. Définitions.

Nous désignons par X une variété analytique complexe de dimension complexe l, par x un point de X; $x^0, x^1, \ldots, x^{l-1}$ sont les coordonnées locales de x. Soit $u(x)$ une fonction sur X; on désignera encore par $u(x) = u(x^0, \ldots, x^{l-1})$ (²) son expression dans des coordonnées locales, et l'on posera

$$\frac{\partial u}{\partial x^\lambda} = \partial_\lambda u = u_\lambda.$$

On désignera par $D^m u$ l'ensemble des dérivées partielles de u, dans les coordonnées locales envisagées, d'ordre $\leqq m$.

Nous considérons un système de N équations aux dérivées partielles sur X, non linéaires, dépendant du paramètre numérique complexe $\xi \in \mathbf{C}$, aux N inconnues $u^k(\xi, x)$ (fonctions sur $\mathbf{C} \times X$, à valeurs complexes), qu'on écrit

$$(1.1) \qquad Fu = 0,$$

en posant $u = \{u^1, \ldots, u^N\}$ et en désignant par $u \to Fu$ une application (non linéaire) de l'espace $(\times \mathbf{C}_\omega)^N$ des suites $\{u^k(\xi, x)\}$ de N fonctions analytiques (contenues dans certains polycylindres que nous préciserons) sur un ouvert de $\mathbf{C} \times X$ dans lui-même, ayant dans chaque système de coordonnées locales une expression de la forme

$$(1.2) \qquad F^j\{u^k\} \equiv F^j(x, \xi, D^{B_{jk}} u^k(\xi, x)),$$

où $F^j(x, \xi, D^{B_{jk}} u^k)$ désigne une fonction holomorphe de tous ses arguments $x^0, \ldots, x^{l-1}, \xi, \partial_0 u^1, \ldots, \partial_{l-1}^{B_{jN}} u^N$. Les B_{jk} sont un ensemble fini de nombres entiers $\geqq 0$, la sommation doit être effectuée sur k; les B_{jk} ne dépendent pas des coordonnées locales.

(²) Pour être correct il faudrait écrire $u(x) \circ \varphi$, où φ désigne l'homéomorphisme associé aux coordonnées locales, mais la convention précédente allège les notations et ne prêtera pas, ici, à confusion.

REMARQUE. — On peut évidemment, de façon plus générale, considérer un système d'équations aux dérivées partielles où les inconnues sont des tenseurs u sur X; un tel système est donné par une application $u \to Fu$ de l'espace des sections analytiques (dépendant analytiquement du paramètre ξ) du fibré des tenseurs considérés dans lui-même, qui soit donnée dans chaque système de coordonnées locales par des expressions de la forme (1.2), où les u^k désignent cette fois les composantes du tenseur u. Il est facile de former de tels systèmes d'équations aux dérivées partielles pour des tenseurs (ou des systèmes de tenseurs) sur une variété analytique X si elle est munie d'une connexion linéaire analytique.

D'après VOLEVIČ [5], étant donnée une matrice quelconque d'éléments B_{jk} (entiers ≥ 0), il est toujours possible de trouver des entiers m_k et $n_j \geq 0$, tels que

$$B_{jk} \leq m_k - n_j \qquad (j, k = 1, \ldots, N); \tag{1.3}$$

$$\sup_{\pi} \sum_k B_{\pi(k)k} = \sum_k m_k - \sum_j n_j, \tag{1.4}$$

où π désigne une permutation quelconque des entiers $1, \ldots, N$. Le système (1.2) peut donc toujours s'écrire sous la forme

$$F_j(x, \xi, D^{m_k - n_j} u^k) = 0. \tag{1.5}$$

2. Problème de Cauchy.

Les *données de Cauchy* sont :

— Une *sous-variété analytique* S, connexe, de $\mathbf{C} \times X$ de codimension 1 dont l'équation dépend linéairement de ξ et s'écrit

$$\xi - s(x) = 0, \tag{2.1}$$

avec

$$\operatorname{grad} s(x) \neq 0. \tag{2.2}$$

— *N fonctions holomorphes $w^k(\xi, x)$.*

Le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $u^k(\xi, x)$ de (1.5) telle que $u^k(\xi, x) - w^k(\xi, x)$ s'annule m_k fois sur S, c'est-à-dire, dans chaque système de coordonnées locales

$$\{ \partial^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} u^k(\xi, x) - \partial^p_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} w^k(\xi, x) \}_{\xi = s(x)} = 0 \qquad (p = 1, \ldots, m_k - 1). \tag{2.3}$$

Ce problème n'est évidemment possible que si $F_j(x, \xi, D^{m_k - n_j} w^k)$ s'annule n_j fois sur S, ce que nous supposerons.

Les fonctions F_j seront désormais supposées holomorphes dans un voisinage donné de S dans $\mathbf{C}\times X$, et pour $|\partial^p_{\alpha_1\ldots\alpha_p} u^k - \{\partial^p_{\alpha_1\ldots\alpha_p} w^k\}_{\xi=s(x)}| < M$, constante > 0 donnée.

3. Système du premier ordre.

Pour pouvoir uniformiser la solution $u^k(\xi, x)$, commençons par mettre (1.5), dans un système de coordonnées locales, sous forme d'un système du 1^er^ ordre. Pour cela, nous dérivons d'abord n_j fois l'équation $F_j = 0$ par rapport à une des variables x^λ. Nous avons supposé $\operatorname{grad} s(x) \neq 0$, nous nous placerons dans un ouvert U du système de coordonnées locales où, par exemple,

$$\frac{\partial s}{\partial x^0} \neq 0, \tag{3.1}$$

et nous dériverons par rapport à x^0. On voit ainsi que toute solution analytique de (1.5) vérifie dans U le système

$$(\partial_0)^{n_j} F_j \equiv \Phi_j(x, D^{m_k} u^k, \xi) = 0, \tag{3.2}$$

où Φ_j est holomorphe en tous ses arguments.

Ce système est quasi linéaire (c'est-à-dire linéaire par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé, m_k) si tous les n_j sont positifs (non nuls) pour les F_j qui n'étaient pas déjà quasi linéaires; on peut donc toujours se ramener au cas quasi linéaire, et nous écrirons (3.2) :

$$a^{\alpha_1\ldots\alpha_{m_k}}_{j,k}(x, \xi, D^{m_k-1} u^k)\, \partial_{\alpha_1\ldots\alpha_{m_k}} u^k + b_j(x, \xi, D^{m_k-1} u^k) = 0. \tag{3.3}$$

Prenons pour nouvelles inconnues les dérivées des u^k d'ordre $\leq m_k - 1$, en posant

$$\partial^p_{\alpha_1\ldots\alpha_p} u^k = u^k_{\alpha_1\ldots\alpha_p}. \tag{3.4}$$

Pour simplifier l'écriture nous introduisons des indices $I, J, \ldots$ numérotant les $u^k_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$; rappelons que deux ensembles $\begin{Bmatrix} k \\ \alpha_1\ldots\alpha_p \end{Bmatrix}$, ne différant que par l'ordre des $\alpha_1\ldots\alpha_p$, doivent être considérés comme donnant le même numéro, c'est-à-dire le même indice I. Les dérivées d'ordre $m_k - 1$ jouant un rôle différent des dérivées d'ordre inférieur, nous poserons

$$u^I = u^k_{\alpha_1\ldots\alpha_p}, \qquad p = m_k - 1;$$
$$v^J = u^k_{\alpha_1\ldots\alpha_p}, \qquad p < m_k - 1.$$

Si les $u^k_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ sont les dérivées $p^{\text{ièmes}}$ de u^k, elles vérifient les équations suivantes :

$$\partial_0 u^k_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = u^k_{0\alpha_1\ldots\alpha_p}, \qquad p \leq m_k - 2; \tag{3.5 a}$$

$$\partial_0 u_{i\alpha_1\ldots\alpha_p} = \partial_i u_{0\alpha_1\ldots\alpha_p}, \qquad p = m_k - 2 \tag{3.5 b}$$

(x^i désigne une variable x^λ différente de x^0) et les équations (3.3), peuvent s'écrire

(3.5 c) $a_{j,k}^{\alpha_1 \dots \alpha_{m_k-1}\lambda}(x, u^I, v^J, \xi)\, \partial_\lambda u^k_{\alpha_1 \dots \alpha_{m_k-1}} + b_j(x, u^I, v^J, \xi) = 0.$

On a ainsi montré que, dans l'ouvert U, toute solution analytique de (1.1) vérifiait un système de N' équations à N' inconnues du 1er ordre de la forme

3.6 a) $$\partial_0 v^I = v^{I'} \quad \text{ou} \quad u^{I'};$$

(3.6 b) $$\partial_0 u^I = \partial_i u^{H'};$$

(3.6 c) $$a^\lambda_{j,K}(x, \xi, u^I, v^I)\, \partial_\lambda u^K + b_j(x, \xi, u^I, v^I) = 0.$$

Si les inconnues u^k vérifiaient les conditions de Cauchy (2.3) leurs dérivées $p^{\text{ièmes}}$ u^I et v^I prennent sur S les valeurs suivantes :

(3.7 a) $v^I(s(x), x) \equiv u^k_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(s(x), x) = \{\partial^p_{\alpha_1 \dots \alpha_p} w^k\}_{\xi = s(x)}, \qquad p < m_k - 1;$

(3.7 b) $u^I(s(x), x) \equiv u^k_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(s(x), x) = \{\partial^p_{\alpha_1 \dots \alpha_p} w^k\}_{\xi = s(x)}, \qquad p = m_k - 1.$

4. **Composition avec une application holomorphe** (*cf.* G. K. L, § 11).

Composons les équations (3.6) avec une application holomorphe de $\mathbf{C} \times X$ dans lui-même

(4.1) $$t, x \to \xi(t, x), x$$

que nous prendrons telle que

(4.2) $$\xi(0, x) = s(x).$$

Posons

$$v^I \circ \xi = v^I(\xi(t, x), x) = f^I(t, x),$$
$$u^I \circ \xi = u^I(\xi(t, x), x) = g^I(t, x);$$

on a évidemment pour toute fonction $f(t, x)$ transformée d'une fonction $u(\xi, x)$ (c'est-à-dire $f = u \circ \xi$)

$$\partial_\lambda f = \partial_\lambda u \circ \xi + (\partial_\xi u \circ \xi)\, \xi_\lambda;$$
$$\partial_t f = (\partial_\xi u \circ \xi)\, \xi_t.$$

Donc

$$\xi_t (\partial_\lambda u \circ \xi) = \xi_t\, \partial_\lambda f - \xi_\lambda\, \partial_t f.$$

Après produit par ξ_t les composés de (3.6) avec ξ s'écrivent donc

(4.3 a) $$\xi_0\, \partial_t f^I = \xi_t (\partial_0 f^I - f^{I'}) \quad \text{ou} \quad \xi_t(\partial_0 f^I - g^{I'});$$

(4.3 b) $$\xi_0\, \partial_t g^I - \xi_i\, \partial_t g^{H'} = \xi_t(\partial_0 g^I - \partial_i g^{H'});$$

(4.3 c) $$\xi_\lambda a^\lambda_{j,k}(x, \xi, g^I, f^I)\, \partial_t g^K + \xi_t(a^\lambda_{j,K} \partial_\lambda g^K + b_j) = 0.$$

Si les fonctions u^I et v^I vérifiaient (3.7), et $\xi(t, x)$ (4.2), alors, pour $t = 0$, les f^I et g^I prennent les valeurs connues suivantes :

(4.4 *a*) $$f^I(0, x) = v^I(s(x), x) = \varphi^I(x);$$

(4.4 *b*) $$g^I(0, x) = u^I(s(x), x) = \psi^I(x).$$

5. Déterminant caractéristique.

Désignons par A le déterminant des N'' inconnues $\partial_t g^I$ dans les N'' équations (4.3 *b*), 4.3 *c*), le calcul montre que

$$A(x, \xi, g', f^{I'}, \xi_\lambda) \equiv \xi_0^{N'''} \operatorname{dét}\left(a_{j,k}^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m_k}} \xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_{m_k}}\right),$$

$$N''' = N'' - \sum_{k=1}^{N} m_k.$$

Rappelons que le système considéré est déduit du système général (1.5) par n_j dérivations par rapport à x^0, c'est-à-dire que la matrice des termes principaux, d'ordre m_k en u^k dans chaque $(\partial_0)^{n_j} F_j$, a pour éléments

$$\frac{\partial F_j}{\partial\left(\partial_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m_k - n_j}}^{m_k - n_j} u^k\right)} \partial_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m_k - n_j}}^{m_k - n_j} (\partial_0)^{n_j} u^k.$$

Donc le déterminant

$$A' = \det\left(a_{j,k}^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m_k}} \xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_{m_k}}\right)$$

est en fait

$$A' = (\xi_0)^{\sum_j n_j} \overline{A},$$

où $\overline{A}$ désigne le déterminant que nous appellerons déterminant caractéristique du système (1.5)

$$\overline{A} = \det\left(\frac{\partial F_j}{\partial\left(\partial_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m_k - n_j}}^{m_k - n_j} u^k\right)} \xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_{m_k - n_j}}\right).$$

Ce déterminant $\overline{A}$ est indépendant du choix des coordonnées (pour un ensemble donné de fonctions u^k) : on sait en effet qu'il en est ainsi dans le cas linéaire (*cf.* G. K. L; § 2), donc aussi dans le cas quasi linéaire (quand les u^k sont donnés) on obtient aisément la conclusion dans le cas non linéaire par l'intermédiaire de la considération du système quasi linéaire $v^\lambda \partial_\lambda F^j = 0$, de déterminant caractéristique $(v^\lambda \xi_\lambda)^N \overline{A}$, où v^λ désigne un vecteur tangent à X. Un raisonnement analogue montre que, comme dans le cas linéaire, $\overline{A}$ est d'autre part indépendant du choix des indices m_k et n_j (bien qu'il n'en soit pas ainsi de ses éléments).

Nous dirons qu'un système d'équations aux dérivées partielles est régulier au sens de CAUCHY-KOVALEVSKI généralisé par LERAY-GÅRDING si son déterminant caractéristique n'est pas identiquement nul. Nous ne considérerons désormais que de tels systèmes.

6. Problème de Cauchy au voisinage d'un point non caractéristique.

Nous avons supposé que, dans l'ouvert $U \subset X$ considéré, $\dfrac{\partial s}{\partial x_0} \neq 0$. Supposons, d'autre part, qu'en un point $\bar{x} \in U \cap S$, pour les données de Cauchy (2.3), le déterminant $\bar{A}$ ne soit pas nul :

$$\bar{A}(x, s(x), \varphi^{\mathrm{I}}(x), \psi^{\mathrm{J}}(x), \partial_\lambda s(x)) \neq 0 \quad \text{pour } x = \bar{x},$$

c'est-à-dire [4]

$$\det\left(\left\{\frac{\partial F^j}{\partial\left(\partial^{m_k-n_j}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m_k-n_j}} u^k\right)}\right\}_{\substack{u^k = w^k \\ \xi = s(x)}} \partial_{\alpha_1} s(x) \ldots \partial_{\alpha_{m_k-n_j}} s(x)\right) \neq 0.$$

Le point $\bar{x}$ est alors dit *non caractéristique* pour les données de Cauchy (2.3) et le système (1.2); nous supposerons désormais qu'il existe de tels points sur S, c'est-à-dire que S n'est pas une « variété caractéristique » pour ce problème de Cauchy.

Soit alors $\xi(t, x)$ une fonction quelconque holomorphe dans un voisinage du point $t = 0$, $x = \bar{x}$, telle que

$$\xi(0, x) = s(x),$$

donc aussi telle que

$$\xi_0(0, x) \equiv \partial_0 \xi(0, x) \neq 0.$$

Les équations (4.3 *a*), (4.3 *b*) et (4.3 *c*) transformées des équations (3.6) par l'application $(t, x) \to (\xi(t, x), x)$ forment au point $t = 0$, $x = \bar{x}$, pour les données de Cauchy (4.4 *a*), un système de Cauchy-Kovalevski qu'on peut écrire

$$\partial_t f^I = \Phi^I(t, x, Df^J, Dg^H),$$
$$\partial_t g^J = \Psi^J(t, x, Df^I, Dg^H),$$

où Φ^I et Ψ^J sont des fonctions holomorphes de tous leurs arguments.

Le problème de Cauchy (4.4) relativement au système (4.3) a donc une solution holomorphe unique au voisinage du point $(0, \bar{x})$.

---

[4] Nous avons supposé $n_j > 0$ pour les équations F^j non quasi linéaires : les éléments du déterminant ci-dessous ne dépendent donc bien que des dérivées de w^k d'ordre $< m_k$, donc, sur S, des données de Cauchy.

Il suffit de choisir $\xi(t, x)$ tel que $\partial_t \xi \neq 0$ pour déduire de la solution $g^I(t, x)$, $f^I(t, x)$, qu'on vient de déterminer, une solution holomorphe $u^I(\xi, x)$, $v^I(\xi, x)$, dans un voisinage Ω du point $(s(\bar{x}), x)$, pour le problème (3.6), (3.7). Cette solution est évidemment unique puisque sa transformée par ξ est unique.

Montrons que *ces fonctions* u^I et v^I *donnent une solution* (qui sera *unique*) *des équations données*, c'est-à-dire que les $u^k_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} (p < m_k)$ sont les dérivées $p^{\text{ièmes}}$ des u^k, et que les u^k vérifient (1.5).

Pour montrer que les $u^k_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ $(p < m_k)$ sont les dérivées partielles d'ordre p de u^k, il suffit de remarquer que, compte tenu des propriétés de symétrie des $u^k_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$, les équations (3.5 *a*) entraînent d'abord

$$u^k_{\underbrace{0 \ldots 0}_{m_k - 1}} = (\partial_0)^{m_k - 1} u^k.$$

Puis, d'après (3.5 *b*),

$$\partial_0 u_{i \underbrace{0 \ldots 0}_{m_k - 2}} - \partial_i u_{\underbrace{00 \ldots 0}_{m_k - 1}} = \partial_0 (u_{i 0 \ldots 0} - \partial_i (\partial_0)^{m_k - 2} u^k) = 0.$$

Donc, d'après le théorème d'unicité de Cauchy-Kovalevski et les conditions de Cauchy sur $\xi = s(x)$ (rappelons que $\partial_0 s(x) \neq 0$)

$$u_{i 0 \ldots 0} = \partial_i (\partial_0)^{m_k - 2} u^k.$$

On démontre aisément, par un procédé analogue, que les $u^k_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m_k - 1}}$, solutions de (3.5 *b*) et vérifiant les conditions de Cauchy (3.7), sont les dérivées partielles d'ordre $m_k - 1$ des u^k; on démontre ensuite la propriété correspondante pour $u^k_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ $(p < m_k - 1)$ par récurrence sur p. Les fonctions u^k, et leurs dérivées partielles, vérifient dans Ω, par construction, le système

$$(\partial_0)^{n_j} F^j = 0.$$

Or on a supposé (*cf.* § 2)

$$\{ (\partial_0)^q F^j \}_{\xi = s(x)} = 0 \qquad (q = 0, \ldots, n_j - 1).$$

D'où, d'après le théorème de Cauchy-Kovalevski, $(\partial_0 s(x) \neq 0)$, dans Ω

$$F^j = 0.$$

Nous avons donc démontré le :

THÉORÈME I (CAUCHY-KOVALEVSKI généralisé). — *Le problème de Cauchy* (1.5), (2.2) *admet une solution holomorphe unique dans un voisinage du point* $\bar{x}$, *non caractéristique pour les données de Cauchy, de la variété initiale* $\xi = s(x)$.

Remarquons qu'un prolongement analytique de ces fonctions vérifie évidemment les équations données, dans leur domaine d'holomorphie.

7. Problème de Cauchy avec points caractéristiques.

Considérons un point de S, caractéristique pour les données de Cauchy choisies, c'est-à-dire tel que

$$(7.1)\qquad \overline{A}(x, s(x), \varphi^I, \psi^J, \partial_\alpha s(x)) \equiv \det\left\{\frac{\partial F^j}{\partial(\partial_{\alpha_1\ldots\alpha_{m_k\ldots n_j}} u^k)}\right\}_{\substack{u^k=w^k\\ \xi=s(x)}} \partial_{\alpha_1} s \ldots \partial_{\alpha_{m_k\ldots n_j}} s = 0.$$

Pour pouvoir résoudre (4.3 b), (4.3 c) en $\partial^t g^I$, adjoignons (*cf.* G. K. L.) au système (4.3) l'équation aux dérivées partielles du premier ordre en la fonction $\xi(t, x)$

$$(7.2)\qquad \partial_t \xi + h\overline{A}(x, \xi, g^I, f^J, \partial_\alpha \xi) = 0,$$

où h désigne une fonction arbitraire mais fixée, holomorphe non nulle, de x, ξ, g^I, f^J, $\partial_\alpha \xi$.

Désignons par $\alpha_I{}^{J\lambda}(x, \xi, g^H, f^K)\, \xi_\lambda$ les éléments de la matrice des coefficients des $\partial_t g^I$ dans les équations (4.3 b), (4.3 c) qui s'écrivent ainsi

$$(7.3)\qquad \alpha_I{}^{J\lambda} \xi_\lambda \partial_t g^I = \xi_t \{ \alpha_I{}^{J\lambda} \partial_\lambda g^I + b^J(x, \xi, f^H, g^K) \}.$$

On a posé (§ 5)

$$(7.4)\qquad A = \det(\alpha_I{}^{J\lambda}\xi_\lambda) = \xi_0^N \overline{A};$$

désignons par $A_I{}^J$ le mineur relatif à l'élément $\alpha_I{}^{J\lambda}\xi_\lambda$ de ce déterminant. $A_I{}^J$ est une fonction holomorphe de ses arguments x, ξ, g^H, f^K, ξ_λ. Multiplions les équations (7.3) par $A_J{}^K$, et sommons sur l'indice K, on obtient

$$(7.5)\qquad A\, \partial_t g^K = \xi_t (A_J{}^K \alpha_I{}^J \partial_\lambda g^I + b^J(x, \xi, f^H, g^{H'})).$$

Soit, compte tenu de (7.2),

$$(7.6)\qquad \partial_t g^K + h\xi_0^{-N}(A_J{}^K \alpha_I{}^J \partial_\lambda g^I + b^I(x, \xi, f^H, g^{H'})) = 0,$$

alors que (4.3 a) s'écrit toujours

$$(7.7)\qquad \begin{cases} \partial_t f^I = \xi_t \xi_0^{-1}(\partial_0 f^I - f^{I'}) & \text{si } I = \left\{\begin{matrix} k \\ \alpha_1 \ldots \alpha_p \end{matrix}\right\}, \quad p < m_k - 2, \\ \partial_t f^I = \xi_t \xi_0^{-1}(\partial_0 f^I - g^{I'}) & \text{si } I = \left\{\begin{matrix} k \\ \alpha_1 \ldots \alpha_{m_k-2} \end{matrix}\right\}. \end{cases}$$

Les équations (7.6), (7.7) et (7.2) avec les données de Cauchy (4.4), et $\xi(0, x) = s(x)$ [avec $\partial_0 s(x) \neq 0$], forment un système de Cauchy-Kovalevski : il résulte de raisonnements classiques qu'elles admettent pour t petit, c'est-à-dire dans un voisinage $V_0 \subset \mathbf{C} \times U$ de $0 \times U$ [U, domaine d'une carte locale où $s(x) = s(x^0, \ldots, x^{l-1})$ est holomorphe], une solution holomorphe unique $\xi(t, x)$, $f^I(t, x)$, $g^I(t, x)$. Il résulte de l'unicité (et du fait que $\bar{A}$ ne dépend pas des coordonnées locales) que $\xi(t, x)$ est une fonction scalaire de x, ainsi que $f^k(t, x)$ [transformé de $u^k(\xi, x)$]; les f^I et g^I dépendent des coordonnées locales de x suivant des lois (combinaisons linéaires) liées à leur définition à partir de dérivées. Si S est défini à l'aide d'une fonction $s(x)$ holomorphe dans un ouvert $\omega \subset X$ réunion de plusieurs cartes locales, $\xi(t, x)$ et $f^k(t, x)$ sont des fonctions holomorphes dans un voisinage V de $0 \times \omega$ dans $\mathbf{C} \times X$. L'ensemble de $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times X$ défini par

$$\xi = \xi(t, x), \qquad (t, x) \in V$$

est alors une sous-variété analytique Σ de $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times V$. Désignons par φ l'application holomorphe (projection) de $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times X$ dans $\mathbf{C} \times X$ définie par

$$(\xi, t, x) \rightarrow (\xi, x).$$

Le couple (Σ, φ) est une surface de Riemann au-dessus de $\mathbf{C} \times X$.

Rappelons, d'autre part, que la solution $f^I(t, x)$, $g^I(t, x)$ construite ainsi est, au voisinage d'un point non caractéristique de S, la transformée par l'application $(t, x) \rightarrow (\xi(t, x), x)$ de la solution $u^k(\xi, x)$ du problème de Cauchy (1.5), (2.3) et de ses dérivées partielles d'ordre $\leq m_k - 1$, puisque l'application considérée vérifie $\partial_t \xi = -h\bar{A} \neq 0$ en un point non caractéristique : la fonction $u^k(\xi, x)$ est alors la transformée par φ de la fonction $f^k(t, x)$ considérée comme fonction holomorphe sur la surface de Riemann Σ. D'où finalement le

Théorème II (*Uniformisation*). — *La solution $u^k(\xi, x)$ du problème de Cauchy* (1.5), (2.3) *en un point non caractéristique se prolonge en une fonction holomorphe sur la surface de Riemann* $(\Sigma; \varphi)$.

D'après la construction donnée, où les $f^I(t, x)$ et $g^I(t, x)$ sont aussi holomorphes, on a le corollaire suivant (qui ne peut s'énoncer que dans une carte locale si l'on parle des dérivées partielles ordinaires; on obtiendrait des résultats globaux en munissant X d'une connexion analytique) :

Corollaire. — *Il existe, au voisinage de tout point de S, une application (dépendant des données de Cauchy) $\xi \rightarrow \xi(t, x)$, $\xi(0, x) = s(x)$ et des fonctions $f^k_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(t, x)$ $(p \leq m_k - 1)$ holomorphes pour t petit, telles que $f^k_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(t, x)$ soient les uniformisées par $\xi(t, x)$ de la solution $u^k(\xi, x)$ du problème de Cauchy* (1.5), (2.2) *et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $m_k - 1$.*

8. Support des singularités de $u^k(\xi, x)$.

La fonction $u^k(\xi, x)$ a été définie au paragraphe 1 comme fonction holomorphe sur la surface de Riemann (Σ, φ). Il lui correspond une fonction [que nous noterons encore $u^k(\xi, x)$] sur $D \subset \mathbf{C} \times X$ (D est le voisinage de S dans $\mathbf{C}\times X$ image par φ de Σ), holomorphe en tout point où l'application inverse de φ est holomorphe. D'après le théorème classique des fonctions implicites, le support des singularités de $u^k(\xi, x)$ dans D est donc l'image par φ de l'ensemble des points de Σ, où

$$\partial_t \xi(t, x) = 0. \tag{8.1}$$

Rappelons que

$$\partial_t \xi(0, x) = -\alpha(x), \tag{8.2}$$

où $\alpha(x)$ est la fonction holomorphe suivante :

$$\alpha(x) = h\bar{A}(x, s(x), \varphi^I, \psi^J, \partial_\alpha s(x)). \tag{8.3}$$

Supposons que l'ensemble des points caractéristiques de S :

$$\alpha(x) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \bar{A} = 0, \tag{8.4}$$

soit une sous-variété analytique régulière T, c'est-à-dire supposons que

$$\operatorname{grad} \alpha(x) \neq 0 \qquad \text{pour} \quad \alpha(x) = 0. \tag{8.5}$$

La fonction analytique $\partial_t \xi(t, x)$ s'annule alors une seule fois sur $\Sigma \cap S(t = 0, \xi = s(x))$, donc aussi dans un voisinage $\Sigma' \subset \Sigma$ de S : l'équation (8.1) définit dans ce voisinage une sous-variété analytique $\mathcal{K}$ de Σ. L'image K par φ de $\mathcal{K}$ sera une sous-variété analytique de $\mathbf{C}\times X$, en particulier si

$$\partial_t(\partial_t \xi(t, x)) = -\partial_t(h\bar{A}(t, x)) \neq 0 \qquad \text{pour} \quad \bar{A} \neq 0. \tag{8.6}$$

Nous reviendrons sur cette condition au paragraphe 10.

9. Allure de la solution $u^k(\xi, x)$ au voisinage d'un point non exceptionnel.

Appelons, suivant G. K. L., *point exceptionnel* de S un point $\bar{\xi}$, $\bar{x}$ tel que

$$\xi(t, \bar{x}) = \bar{\xi} \quad \text{quel que soit } t. \tag{9.1}$$

D'après le Vorbereitungsatz de Weierstrass, si $\bar{\xi}$, $\bar{x}$ n'est pas exceptionnel, l'équation

$$\xi(t, x) = \xi, \tag{9.2}$$

où x est voisin de $\bar{x}$ et ξ voisin de $\bar{\xi}$, équivaut à une équation

$$P(t, \xi, x) = 0, \tag{9.3}$$

où P est un polynome en t dont les coefficients sont fonctions holomorphes de ξ, x, le coefficient principal valant 1. Donc (9.2) définit une fonction algébroïde, $t(\xi, x)$, le support K de ses singularités s'obtient en annulant le discriminant du polynome. Par suite, on a, comme dans le cas linéaire, le théorème suivant :

THÉORÈME. — *$u^k(\xi, x)$ est, au voisinage d'un point non exceptionnel, une fonction algébroïde se ramifiant sur K, ensemble analytique de codimension 1.*

B. Cas de coefficients principaux ne dépendant pas des dérivées d'ordre $m_k - 1$ des u^k.

Nous allons préciser les résultats précédents, et caractériser les points non exceptionnels, sous des *hypothèses un peu plus restrictives*, soit sur les équations, soit sur les données de Cauchy (hypothèses qui sont finalement équivalentes) que nous énoncerons ainsi [5] : *les coefficients $a_{j,k}^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m_k}}$ des équations* (3.3) *ne contiennent pas les dérivées d'ordre $m_k - 1$ des u^k*, c'est-à-dire

$$(10.1) \qquad a_{j,k}^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m_k}} \equiv a_{j,k}^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m_k}}(x, \xi, D^{m_k-2}u^k).$$

Les coefficients $a_{j,k}^{\lambda}$ des équations (4.3) ne contiennent pas alors les fonctions g^I, et dans les équations écrites sous la forme (7.3) on a

$$(10.2) \qquad \alpha_I{}^{J\lambda} \equiv \alpha_I{}^{J\lambda}(x, \xi, f^K).$$

10. Étude géométrique de Σ.

Le déterminant A ne dépend pas des g^I, on choisira h n'en dépendant pas non plus, et l'on va étudier la fonction $\xi(t, x)$ en la considérant comme solution de (7.2), où les $f^k(t, x)$ sont des fonctions connues de t et de x. Choisissons h homogène de degré $\sum_k m_k - 1$ de manière que hA soit homogène du premier degré en $\partial_\lambda \xi$ (*cf.* G. K. L.). L'équation aux dérivés partielles du premier ordre (7.2), vérifiée par $\xi(t, x)$, s'écrit alors

$$(10.3) \qquad \partial_t \xi + \alpha(t, x, \xi, \partial_\lambda \xi) = 0,$$

où α est homogène de degré 1 en $\partial_\lambda \xi$. On a

$$([10.4) \qquad \alpha = h(x, \xi, f^I(t, x), \partial_\lambda \xi)\, \bar{A}(x, \xi, f^I(t, x), \partial_\lambda \xi).$$

---

[5] Il suffit, pour que ces conditions soient vérifiées, qu'on ait pu choisir les n_k, dans (1.5), tels que $\inf n_k > 1$ (mais ce choix peut ne pas être le meilleur possible pour que n_k soit le plus petit possible).

Les bandes caractéristiques de cette équation (courbes dites bicaractéristiques dans $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times X$ et plans tangents associés) sont les trajectoires du système différentiel :

$$
(10.5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx^\lambda}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial\xi_\lambda}} = dt = \frac{-d\xi_\lambda}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial x^\lambda}+\dfrac{\partial\alpha}{\partial\xi}\xi_\lambda} = \frac{-d\xi_t}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}+\dfrac{\partial\alpha}{\partial\xi}\xi_t},\\ &d\xi = \xi_\lambda\, dx^\lambda + \xi_t\, dt,\end{aligned}\right.
$$

qui vérifient (10.3) [dont le premier membre est évidemment une intégrale première de (10.5)]. D'après la théorie classique des équations aux dérivées partielles du premier ordre, la variété Σ, $\xi = \xi(t, x)$, est dans un voisinage de S, engendrée par les bicaractéristiques $x[t, y]$, $\xi[t, y]$ [6] issues des points y de S et dont le plan tangent associé est tangent à S; ces bicaractéristiques sont les supports dans $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times X$ des trajectoires de (10.5) prenant pour $t = 0$ les valeurs suivantes :

$$
(10.6)\qquad \left\{\begin{aligned} &x[0, y] = y, \qquad \xi[0, y] = s(y),\\ &\xi_\lambda[0, y] = \partial_\lambda s(y), \qquad \xi_t[0, y] = -\alpha(0, y, \partial_\lambda s(y)).\end{aligned}\right.
$$

Dans un voisinage de S ces bicaractéristiques engendrent bien une variété analytique $\Sigma'\subset\Sigma$ puisque aucune n'est tangente à S [qui est dans $t = 0$ et n'est caractéristique pour (10.3) en aucun point].

Remarque. — Grâce au choix de α, homogène de degré 1 en ξ_λ, le système (10.5) possède l'intégrale première $\xi = \mathrm{Cte}$ comme dans le cas linéaire; en effet, le long d'une trajectoire

$$
d\xi = \xi_\lambda\, dx^\lambda + \xi_t\, dt = \left(\xi_\lambda \frac{\partial\alpha}{\partial\xi_\lambda} - \alpha\right) dt = 0.
$$

Le long d'une bicaractéristique, on a donc

$$
\xi[t, y] = \xi[0, y] = s(y)
$$

et l'équation de Σ, dans un voisinage de S, est

$$
(10.7)\qquad \xi(t, x) = s(y[t, x]),
$$

où $y[t, x]$ désigne l'application inverse de $x[t, y]$ définie ci-dessus. Cette application inverse existe pour t petit, puisque $x[t, y]$ est l'identité pour $t = 0$. Le résultat est analogue à celui du cas linéaire, sauf que les bicaractéristiques dépendent ici, comme $f'(t, x)$ et $\xi(t, x)$, des données de Cauchy. La formule (10.7) sera utile au chapitre II.

---

[6] Fonction évidemment différente de $\xi(t, y)$.

11. Étude géométrique de K.

Dans le cas linéaire, en supposant de plus que les coefficients principaux ne dépendent pas de ξ, on a $\partial\alpha/\partial t = 0$, donc $\partial_t\xi = \text{Cte}$ sur une bicaractéristique, d'où la conclusion de G. K. L. : $\partial_t\xi \neq 0$ sur les bicaractéristiques où $\partial_t\xi \not\equiv 0$. Nous allons trouver ici la même conclusion bien que $\partial_t\xi = \text{Cte}$ ne soit plus une intégrale première de (10.5). En effet :

α [*cf.* (10.4)] ne dépend de t que par l'intermédiaire de $f^I(t, x)$, on a donc

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\partial\alpha}{\partial f^I}\frac{\partial f^I}{\partial t}.$$

D'où, compte tenu des équations (4.3 *a*) ([7]),

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\partial\alpha}{\partial f^I}\xi_0^{-1}(\partial_0 f^I - f^{I'})\xi_t. \tag{11.1}$$

On déduit alors de (10.5) et (11.1) que, le long d'une bicaractéristique, ξ_t vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficient holomorphe du type

$$\frac{d\xi_t}{dt} + \beta(t, x)\xi_t = 0. \tag{11.2}$$

Donc $\xi_t \neq 0$ sur toute bicaractéristique où $\xi_t \not\equiv 0$. Autrement dit,

$$\xi_t(t, x[t, y]) = 0$$

si et seulement si

$$\xi_t(0, x(0, y)) = \xi_t(0, y) = -\alpha(0, y, \partial_\lambda s(y)) = 0,$$

c'est-à-dire [*cf.* (10.4)] si

$$\bar{A}(y, s(y), \varphi^I(y), \partial_\lambda s(y)) = 0.$$

Donc, comme dans le cas linéaire, $\xi_t(t, x) = 0$ si et seulement si x est sur une bicaractéristique issue d'un élément de contact caractéristique $(y, s(y), \partial_\lambda s(y))$ de S, pour les données de Cauchy (2.3) et le système (1.5).

Remarque. — L'ensemble des points caractéristiques de S

$$\xi - s(x) = 0, \qquad t = 0$$

est défini par l'équation

$$c(x) \equiv \alpha(0, x, \partial_\lambda s(x)) = 0.$$

([7]) $f^{I'}$ est, pour $I' = \left\{\begin{matrix} k \\ \alpha_1 \ldots \alpha_{m_k-2} \end{matrix}\right.$, à remplacer par $g^{I'}$.

Il forme donc une sous-variété analytique T de S si grad $c \neq 0$ pour $c = 0$, ou si $c = 0$ est équivalent à une équation $c' = 0$ avec grad $c' \neq 0$ pour $c' = 0$ [par exemple $c = (c')^q$ avec grad $c' \neq 0$ pour $c' = 0$: la fonction c s'annule exactement q fois sur c]. L'ensemble $\mathcal{K} = (\xi_t = 0) \cap \Sigma'$ (Σ', voisinage de S dans Σ) est alors une sous-variété analytique de Σ.

On a vu (§ 8) que le support K des singularités de $u^k(\xi, x)$ dans $\mathbf{C} \times X$ est la projection de $\mathcal{K}$, par l'application $(t, \xi, x) \to (\xi, x)$ dans $\mathbf{C} \times X$, c'est-à-dire la projection des bicaractéristiques de (10.3) issues des éléments de contact caractéristiques de S. Ces courbes (dimension complexe 1) sont, en projection sur $\mathbf{C} \times X$, tangentes à S, et ont pour équations

$$(11.3) \qquad \begin{cases} \xi = s(y), \qquad t = 0; \\ x = x(\tau, y) \qquad (\tau, \text{ paramètre complexe}), \end{cases}$$

avec

$$c(y) \equiv \alpha(0, y, \partial_\lambda s(y)) = 0;$$

K est une variété analytique de dimension complexe l (dans un voisinage de S) si le vecteur tangent à la projection de la bicaractéristique ([8]) en un point $x \in T \subset S$, $\dfrac{\partial x^\lambda}{\partial \tau} = \dfrac{\partial \alpha}{\partial \xi_\lambda}$ d'après (10.5), n'est pas dans le plan tangent à T en ce point.

Les équations (11.3) permettent d'énoncer les résultats obtenus sous la forme suivante (dans un voisinage de S).

Théorème III.

1° *Le support K des singularités de la solution $u^k(\xi, x)$ est l'image par l'application*

$$(\tau, y) \to (s(y), x[\tau, y])$$

de l'ensemble T des points caractéristiques de $S(\xi)$, d'équation

$$\bar{A}(y, s(y), \varphi^I(y), \partial_\lambda s(y)) = 0.$$

2° *Si T est une variété analytique, dont le plan tangent en un point ne contient jamais le vecteur bicaractéristique projeté en ce point, K est aussi une variété analytique.*

Remarque. — Si $\bar{A} = 0$, $\dfrac{\partial \bar{A}}{\partial \xi_\lambda}$ et $\dfrac{\partial \alpha}{\partial \xi_\lambda}$ sont colinéaires. Le vecteur bicaractéristique projeté est dans le plan tangent à T en un point x si, en ce point,

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \xi_\lambda} \partial_\lambda \bar{A}(x, s(x), \varphi^I(x), \partial_\lambda s(x)) = 0.$$

([8]) On dira désormais, pour abréger « vecteur bicaractéristique projeté ».

Pour comparer avec la condition (8.6), écrivons (si g^I ne figure pas dans $\bar{A}$)

$$\partial_t\big(h\bar{A}(t, x)\big) = \frac{\partial \bar{A}}{\partial \xi_\lambda}\xi_{\lambda t} \qquad \text{pour} \quad \bar{A} = 0,$$

or

$$\xi_{\lambda t} = \partial_\lambda\, \xi_t(0, x) = \partial_\lambda\, \bar{A}(x, s(x), \varphi^I(x), \partial_\lambda\, s(x)) \qquad \text{pour} \quad \bar{A} = 0.$$

On retrouve donc la même condition.

12. **Propriété des points exceptionnels** (définition, § 9).

Théorème. — *En un point exceptionnel le vecteur bicaractéristique projeté tangent à S est aussi tangent à T (ensemble des points caractéristiques de S)*

Preuve. — Un point $\bar{\xi}$, $\bar{x}$ de S a été dit exceptionnel si

(12.1) $$\xi(t, \bar{x}) = \bar{\xi} \quad \text{quel que soit } t,$$

on a alors aussi

(12.2) $$\xi_t(t, \bar{x}) = 0 \quad \text{quel que soit } t$$

en particulier, pour $t = 0$,

(12.3) $$\xi_t(0, \bar{x}) = -\alpha(0, \bar{x}, \partial_\lambda\, s(\bar{x})) = 0.$$

Le point $\bar{x}$, $\bar{\xi}$ est donc caractéristique sur S, pour les données de Cauchy.

De même,

$$\partial_t(\xi_t(0, \bar{x})) = 0.$$

D'où la conclusion, d'après la remarque précédente, si T admet en $\bar{x}$ un plan tangent $\big[$c'est-à-dire $\partial_\lambda\big(\bar{A}(x)\big) \neq 0\big]$. Dans le cas général, inspirons-nous de la méthode G. K. L. du cas linéaire.

Considérons la fonction holomorphe $y[t, \bar{x}]$ définie au paragraphe 10 par l'application inverse de $y \to x[t, y]$. La courbe de $\mathbf{C} \times X$, $t \to \big(\bar{\xi}, y(t, \bar{x})\big)$ a pour vecteur tangent au point $\bar{x}$, $\bar{\xi}$ la projection du vecteur bicaractéristique tangente à S puisque, en ce point

$$\frac{dy^\lambda}{dt}(0, \bar{x}) = -\frac{dx^\lambda}{dt}(0, \bar{x}).$$

Or cette courbe est tracée sur T puisque, d'après le paragraphe 11, (12.2) entraîne

$$\xi_t(0, y(t, \bar{x})) = -\alpha(0, y(t, \bar{x}), \partial_\lambda\, s(y(t, \bar{x})) = 0$$

$\big[$le point t, $\bar{\xi}$, $\bar{x}$ est en effet sur la bicaractéristique issue du point $t = 0$, $\xi = \bar{\xi}$, $y = y(t,\bar{x})$ puisque $x(t, y(t, \bar{x})) = \bar{x}\big]$.

Exemples. — Les points d'une bande caractéristique tracée sur S (en projection sur $\mathbf{C}\times X$) sont exceptionnels.

Un point caractéristique de S, où le vecteur bicaractéristique projeté $\dfrac{\partial\alpha}{\partial\xi_\lambda}$ s'annule, est exceptionnel.

Remarque. — Un point caractéristique multiple $\Big($c'est-à-dire où simultanément α, $\partial_\lambda\alpha$ et $\dfrac{\partial\alpha}{\partial\xi_\lambda}$ s'annulent$\Big)$ est exceptionnel et les conclusion du théorème I sont peu intéressantes dans ce cas puisque, en un tel point, comme dans le cas linéaire,

$$x(t,\,y)=y,\qquad \xi_\lambda(t,\,y)=s_\lambda(y),\qquad \xi(t,\,y)=s(y)$$

et

$$u\circ\xi=u(s(y),\,y)$$

est donné.

13. Allure de la solution au voisinage d'un point non exceptionnel.

Théorème IV. — *Soit un point* $\xi,\ x\in\mathbf{C}\times X$ *au voisinage duquel* T *est une variété analytique d'équations*

$$f(x)=0,\qquad \xi-s(x)=0\qquad (\text{grad } f \text{ et grad } s \text{ non colinéaires})$$

et où le vecteur bicaractéristique projeté n'est pas tangent à T *(en particulier pas nul). On suppose de plus que* $\alpha(0,\,x,\,s(x),\,\partial_\lambda s(x))$ *s'annule exactement* q *fois sur* T. *Alors, dans un voisinage de ce point :*

1° *Le support* K *des singularités de* $u^k(\xi,\,x)$ *est une variété analytique, tangente à* S *le long de* T, *le contact étant d'ordre* q, *réunion des vraies bicaractéristiques issues des éléments de contact de* T.

2° (13.2) $u^k(\xi,\,x)=H^k\Big((\xi-k(x))^{\frac{1}{1+q}},\,\xi,\,x\Big)$,

où $H^k(t,\,\xi,\,x)$ *est une fonction holomorphe et* $\xi-k(x)=0$ *l'équation de* K.

Preuve. — L'équation de K

$$\xi-k(x)=0 \tag{13.3}$$

s'obtient en éliminant t, y entre les équations

$$f(y)=0,\qquad x=x[t,\,y],\qquad \xi=s(y),$$

le cylindre (13.3) de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times X$ n'est pas, comme dans le cas linéaire, une variété intégrale de l'équation aux dérivées partielles (10.3) dont les coefficients dépendent ici de t, on a cependant toujours

$$\alpha(0,\,x,\,s(x),\,\partial_\lambda k(x))=0$$

puisque le vecteur bicaractéristique projeté $\frac{\partial \alpha}{\partial \xi_\lambda}$ est tangent à K $\left(\text{et } \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_\lambda} \xi_\lambda = \alpha\right)$. On a vu, d'autre part, que le point de T était non exceptionnel. Le raisonnement de G. K. L. du paragraphe 29 s'applique alors.

Unicité. — La fonction $u^k(\xi, x)$ étant obtenue sous la forme (13.2), il est clair, d'après le principe du prolongement analytique, qu'elle ne dépend pas, non plus que K, du choix de h ni, plus généralement, de la méthode utilisée.

Remarque 1. — Si $\alpha = 0$, donc $\overline{A} = 0$, le système (10.5) se réduit à

$$\frac{dx^\lambda}{\frac{\partial \overline{A}}{\partial \xi_\lambda}} = -\frac{d\xi_\lambda}{\frac{\partial \overline{A}}{\partial x^\lambda} + \xi_\lambda \frac{\partial \overline{A}}{\partial \xi}} = \frac{d\xi}{0} = -\frac{d\xi_t}{\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} + \xi_t \frac{\partial \overline{A}}{\partial \xi}} = h\, dt,$$

où

$$\overline{A} = \overline{A}(x, \xi, f^I(t, x), \xi_\lambda).$$

La projection de ces trajectoires dans $\mathbf{C} \times X$ sera définie par intégration des $2l + 1$ premiers rapports si la projection de $f^I(t, x)$, $u^I(\xi, x)$, est définie (et holomorphe) sur ces trajectoires. Il en est ainsi sous les hypothèses du théorème III. Les projections, qui sont alors indépendantes de h ([9]), peuvent être considérées comme les vraies bicaractéristiques du système aux dérivées partielles donné (correspondant aux données de Cauchy), et seront appelées ainsi. On peut donc compléter le 1° du théorème III par :

« K est réunion des vraies bicaractéristiques, issues des éléments de contact de T ».

C. Cas général.

14. Considérons le système quasi linéaire général (3.3).

$$(14.1) \quad a_{j,k}^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m_k}}(x, \xi, D^{m_k - 1} u_k)\, \partial^{m_k}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m_k}} u^k + b_j(x, \xi, D^{m_k-1} u^k) = 0.$$

Pour l'écrire sous forme d'un système quasi linéaire où les coefficients principaux ne dépendent pas des dérivées d'ordre $m_k - 1$ des u^k, il suffit de le dériver par rapport à une variable x^λ [par exemple x^0, en

---

([9]) L'étude de cette propriété dans le cas général, et de l'homéomorphie des surfaces de Riemann définies par les applications uniformisantes correspondant à divers choix de h, est un problème ouvert, pour lequel on pourrait, semble-t-il, utiliser les méthodes de J. Leray [3].

supposant $\partial_0 s(x) \neq 0$]. Toute solution analytique de (14.1) vérifie un système de la forme

$$a_{j,k}^{\alpha_1\ldots\alpha_{m_k}}(x, \xi, D^{m_k-1}u)\,\partial_{0\alpha_1\ldots\alpha_{m_k}}^{m_k+1} u^k + c_j(x, \xi, D^{m_k}u^k) = 0$$

pour lesquelles les conclusions de B sont valables, si toutefois le problème de Cauchy est donné dans les mêmes termes, c'est-à-dire ici par des fonctions holomorphes $W^k(\xi, x)$ telles que $u^k(\xi, x) - W^k(\xi, x)$ s'annule $m^k + 1$ fois sur S (les W^k vérifient donc sur S le système différentiel donné) : l'existence de ces fonctions $W^k(\xi, x)$ ne résulte pas (dans le cas où S possède des points caractéristiques) de celle des fonctions $W^k(\xi, x)$ figurant dans le problème de Cauchy primitif : c'est donc pour une classe de données de Cauchy plus restreinte que les résultats de B sont valables pour (14.1); on obtient par ailleurs dans ce cas un résultat plus précis : les dérivées partielles d'ordre m_k (et non plus seulement $m_k - 1$) sont uniformisées par l'application $\xi \to \xi(t, x)$.

15. Pour étudier la nécessité de l'hypothèse restrictive sur les données de Cauchy, nous allons, suivant une suggestion de J. Leray, traiter directement le cas général. Nous obtiendrons les propriétés du support K des singularités, et l'uniformisation des dérivées d'ordre m_k, par un calcul analogue à celui qu'utilise G. K. L. pour obtenir le développement asymptotique de la partie singulière de la solution.

Considérons un système quelconque quasi linéaire d'équations aux dérivées partielles à coefficients analytiques (nous avons montré que le cas général se ramenait à celui-là)

$$a_I^{J\lambda}(x, \xi, u^H)\,\partial_\lambda u^I + b^I(x, \xi, u^H) = 0 \tag{15.1}$$

qui, par composition avec une application holomorphe $\xi(t, x)$, et multiplication par ξ_t, donne le système

$$a_I^{J\lambda}\,\xi_\lambda\,\partial_t g^I - \xi_t(a_I^{J\lambda}\,\partial_\lambda g^I + b^J(x, \xi, g^I)) = 0. \tag{15.2}$$

Les données de Cauchy

$$u^I(s(x), x) = \varphi^I(x) \quad \text{fonctions holomorphes}$$

donnent

$$g^I(0, x) = \varphi^I(x).$$

La méthode générale de A donne les fonctions holomorphes

$$\xi(t, x), \quad g^I(t, x), \quad \text{avec} \quad \xi_t + hA = 0, \quad A = \det(a_I^{J\lambda}\xi_\lambda).$$

Posons

$$\partial_t g^I = U^I.$$

THÉORÈME. — *Supposons que, pour* $t = 0$, $\frac{U^K}{\xi_t}$ *c'est-à-dire*

$$\frac{(a_I{}^{J\lambda}\,\partial_\lambda \varphi^I + b^J) A_J{}^K}{A(x, s(x), \varphi^I(x), \partial_\lambda s(x))}, \tag{15.3}$$

soient des fonctions holomorphes de x. Alors :

1° *les* $\frac{U^I}{\xi_t}$ *sont holomorphes pour t petit;*

2° $\xi_t \equiv 0$ (*et* $U^I \equiv 0$) *sur les bicaractéristiques issues des points caractéristiques de S* [*où* $\xi_t(0, x) = 0$ *et aussi, d'après l'hypothèse* (15.3), $U^I(0, x) = 0$].

Preuve. — 1° On déduit de (15.2) par dérivation

$$\partial_t \left\{ a_I{}^{J\lambda} \xi_\lambda \frac{U^I}{\xi_t} - a_I{}^{J\lambda}\,\partial_\lambda g^I - b^J \right\} = 0,$$

or

$$\partial_t\,\partial_\lambda g^I = \partial_\lambda U^I = \xi_t\,\partial_\lambda \left(\frac{U^I}{\xi_t}\right) + \frac{U^I}{\xi_t}\xi_{\lambda t};$$

$$\frac{\partial}{\partial t} a_I{}^{J\lambda} = \frac{\partial a_I{}^{J\lambda}}{\partial g^H} U^H + \frac{\partial a_I{}^{J\lambda}}{\partial \xi}\xi_t;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} b^J = \frac{\partial b^J}{\partial g^H} U^H + \frac{\partial b^J}{\partial \xi}\xi_t;$$

on constate que les termes en $\xi_{\lambda t}$ disparaissent, il reste

$$(a_I{}^{J\lambda}\xi_\lambda\,\partial_t - \xi_t\, a_I{}^{J\lambda}\,\partial_\lambda)\left(\frac{U^I}{\xi_t}\right) + \left(\frac{\partial a_I{}^{J\lambda}}{\partial g^H} U^H + \frac{\partial a_I{}^{J\lambda}}{\partial \xi}\xi_t\right) \times \left(\xi_\lambda \frac{U^I}{\xi_t} - \partial_\lambda g^I\right) - \frac{\partial b^J}{\partial \xi}\xi_t - \frac{\partial b^J}{\partial g^H} U^H = 0. \tag{15.5}$$

D'où l'on tire :

$$(\delta_I{}^K\,\partial_t + h A_J{}^K a_I{}^{J\lambda}\,\partial_\lambda)\left(\frac{U^I}{\xi_t}\right) = \mathcal{F}\left(t, x, \frac{U^I}{\xi_t}\right), \tag{15.6}$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction holomorphe. On déduit de ces équations le 1° du théorème.

2° Considérons les vecteurs h^I et $\bar{h}_J$ définis par G. K. L. (§ 3) vérifiant ([10]).

$$h^I a_I{}^{J\lambda}\xi_\lambda \simeq 0 \quad \text{modulo } A; \tag{15.7 a}$$

$$\bar{h}_J a_I{}^{J\lambda}\xi_\lambda \simeq 0 \quad \text{modulo } A; \tag{15.7 b}$$

$$A_I{}^J \simeq \bar{h}_I h^J \quad \text{modulo } A \tag{15.7 c}$$

($A_I{}^J$ est le mineur de $a_J^{I\lambda}\xi_\lambda$ dans A).

([10]) La notation $\simeq 0$ modulo A signifie que le quotient par A est une fonction holomorphe.

Reprenons, d'autre part, les équations (15.5), compte tenu du fait déduit de (15.2) et (15.7),

$$U^I = h^I V + \mathcal{H}^I \xi_t \qquad (\mathcal{H}^I \text{ fonction holomorphe}).$$

Il vient

$$\xi_t \left(\frac{a_{I'}{}^{J\lambda} \xi_\lambda \partial_t}{\xi_t} - a_{I'}{}^{J\lambda} \partial_\lambda \right) \left(\frac{h^I V}{\xi_t} + \mathcal{H}^I \right) \simeq 0 \quad \text{modulo } V, \xi_t,$$

d'où, par produit contracté avec $\bar{h}_J$, compte tenu de (15.4), en désignant par $\frac{d}{d\tau}$ la dérivation dans la direction d'une bicaractéristique $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial (A h)}{\partial \xi_\lambda} \right)$:

$$\text{(15.8)} \qquad \xi_t \frac{d}{d\tau} \left(\frac{V}{\xi_t} \right) \simeq 0 \quad \text{modulo } V, \xi_t.$$

D'autre part, d'après le système bicaractéristique [*cf.* (10.5)]

$$\text{(15.9)} \qquad \frac{d\xi_t}{d\tau} \simeq 0 \quad \text{modulo } V, \xi_t,$$

on déduit des équations différentielles (15.8) et (15.9) la conclusion 2°.

Remarque. — La condition (15.3) peut s'écrire, d'après (15.7 *c*),

$$h^K \bar{h}_J (a_{I'}{}^{J\lambda} \partial_\lambda \varphi^I + b^J) \simeq 0, \quad \text{modulo } A,$$

c'est-à-dire

$$\text{(15.10)} \qquad \bar{h}_J (a_{I'}{}^{J\lambda} \partial_\lambda \varphi^I + b^J) \simeq 0 \quad \text{modulo } A.$$

Rappelons que

$$\partial_\lambda \varphi^I = \{ \partial_\lambda w^I(\xi, x) + \xi_\lambda \partial_\xi w^I(\xi, x) \}_{\xi = s(x)}.$$

Donc, d'après (15.7 *b*), (15.10) est équivalent à

$$\text{(15.11)} \qquad \bar{h}_J (a_{I'}{}^{J\lambda} \partial_\lambda w^I + b^J) \simeq 0 \quad \text{modulo } A \text{ pour } \xi = s(x).$$

La condition trouvée est donc moins restrictive que celle trouvée au paragraphe 14, qui imposait à $u^I - w^I$ de s'annuler deux fois sur S, donc à w^I de vérifier, sur S, le système différentiel donné.

II. Uniformisation portant sur les variables indépendantes.

16. Considérons un système d'équations aux dérivées partielles général, sur une variété analytique complexe X, du type étudié au paragraphe 1, mais ne dépendant plus du paramètre ξ, se ramenant au système quasi linéaire

$$\text{(16.1)} \qquad a_{j,k}^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m_k}}(x, D^{m_k - 1} u^k)\, \partial_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m_k}} u^k + b_j(x, D^{m_h - 1} u^h) = 0.$$

Le problème de Cauchy sur la variété initiale S_0

$$(16.2)\qquad s(x) = 0, \qquad \text{grad } s(x) \neq 0$$

sera donné par les fonctions $w^k(x)$ et les conditions

$$(16.3)\qquad u^k(x) - w^k(x) \text{ s'annule } m_k \text{ fois sur } S_0.$$

On introduit la variété S dans $\mathbf{C}\times X$

$$(16.4)\qquad s(x) - \xi = 0$$

(X et ξ assez petits pour que S soit régulière).

On pose

$$(16.5)\qquad w^k(\xi, x) = w^k(x)$$

et l'on applique les résultats de I au problème de Cauchy ainsi obtenu. On trouve (théor. II, § 7) une surface de Riemann (Σ, φ) dans un voisinage de S telle que la solution $u^k(\xi, x)$ du problème de Cauchy (16.1), (16.4), (16.5) en un point non caractéristique se prolonge en une fonction holomorphe sur $\Sigma[\xi = \xi(t, x), \xi(0, x) = s(x)]$; l'application φ est la projection $(t, \xi, x) \to (\xi, x)$. Les résultats relatifs au problème de Cauchy (16.1), (16.2), (16.3) s'obtiennent en effectuant la section par $\xi = 0$; puisque $\xi(t, x)$ est une sous-variété analytique Σ_0 de Σ ($\text{grad}_x \xi = \text{grad } s(x) \neq 0$ pour $t = 0$) au voisinage de S les fonctions $g^I(t, x)$, $f^I(t, x)$ trouvées § 7 induisent sur Σ_0 des fonctions holomorphes et l'on a le théorème suivant :

Théorème.

1° *Il existe une surface de Riemann* (Σ_0, φ_0) *au-dessus d'un voisinage de S dans X*

$$\Sigma_0 : \quad \xi(t, x) = 0; \qquad \varphi_0 : \quad (t, x) \to x$$

telle que la solution $u^k(\xi, x)$ *du problème de Cauchy donné au voisinage d'un point non caractéristique (où l'application* φ_0^{-1} *est holomorphe) et ses dérivées partielles d'ordre* $\leq m_k - 1$ *se prolongent en des fonctions holomorphes sur* Σ_0, $\{ g^k(t, x), \xi(t, x) = 0 \}$.

2° *Au voisinage d'un point non exceptionnel de* S_0 *la solution* $u(x)$ *est algébroïde se ramifiant sur* K_0 *(section de K par* $\xi = 0$*).*

17. Dans le cas où les coefficients de (16.1) ne dépendent pas des dérivées d'ordre $m_k - 1$ des u^k, on peut encore utiliser les résultats de I pour préciser les propriétés de $u^k(x)$; en effet, on a vu que $\xi = \mathrm{Cte}$ était une intégrale première de (10.5), donc les bicaractéristiques issues des points de S_0 sont tracées dans la section $\xi = 0$. On a ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Considérons un point de S_0 au voisinage duquel l'ensemble T_0 des points caractéristiques de S_0 est une sous-variété analytique*

$$s(y) = 0, \qquad f(y) = 0$$

dont le plan tangent ne contient pas le vecteur bicaractéristique projeté $\dfrac{\partial \alpha}{\partial \xi_\lambda}$. *Supposons, d'autre part, que $\alpha(0, x, \partial_\lambda s(x))$ s'annule exactement q fois sur T_0. Alors, dans un voisinage de ce point :*

1° *le support K_0 des singularités de $u^k(x)$ est une variété analytique, tangente à S_0 le long de T_0, le contact étant d'ordre q;*

2° $u^k(x) = H^k\left([k(x)]^{\frac{1}{1+q}}, x\right)$, *où $H^k(t, x)$ est une fonction holomorphe, et $k(x) = 0$ l'équation de K_0.*

REMARQUES.

1° L'équation de K_0 s'obtient en éléminant t, y entre les équations

$$f(y) = 0, \qquad x = x[t, y], \qquad s(y) = 0.$$

2° La variété Σ_0 est engendrée par les bicaractéristiques issues des points de S_0 (avec plan tangent associé tangent à S_0), elle a donc pour équations paramétriques

$$t = t; \qquad x = x[t, y], \qquad \text{avec} \quad s(y) = 0.$$

Puisque $\mathrm{grad}\, s(y) \neq 0$, on exprime aisément $x[t, y]$, $s(y) = 0$ à l'aide des coordonnées locales d'un point z de S_0 : $(z^1, \ldots, z^{l-1}, t)$ sont alors des coordonnées locales sur Σ_0, toute fonction holomorphe sur Σ_0 s'exprimera donc dans ces coordonnées comme une fonction holomorphe, autrement dit :

THÉORÈME. — *L'application $x \to x[t, z]$ $(s(z) = 0)$ uniformise la solution $u^k(x)$ et ses dérivées partielles d'ordre $\leq m_k - 1$.*

18. Cas général.

La transposition des résultats des paragraphes 14, 15 est immédiate.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] GÅRDING (L.), KOTAKE (T.) et LERAY (J.). — Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes. Analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées (Problèmes de Cauchy I *bis* et VI), *Bull. Soc. math. France*, t. 92, 1964, p. 263-361.

[2] GÅRDING (L.). — Une variante de la méthode de majoration de Cauchy, *Congrès des Mathématiciens scandinaves*, 1964 (à paraître).

[3] LERAY (J.). — Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy (Problème de Cauchy I), *Bull. Soc. math. France*, t. 85, 1957, p. 389-429.

[4] LERAY (J.) et OHYA (Y.). — Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts, *Séminaire sur les équations aux dérivées partielles*, dirigé par J. Leray. — Paris, Collège de France, 1965; 1964-1965, fascicule 1, p. 20-71.

[5] VOLEVIČ (L. R.). — On general system of differential equations, *Soviet Math.*, t. 1, 1960, p. 458-465.

(Manuscrit reçu le 13 novembre 1965.)

Mme Yvonne CHOQUET-BRUHAT,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris,
16 avenue d'Alembert,
Antony (Hauts-de-Seine.)