BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN LERAY
JACQUES-LOUIS LIONS

Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder

Bulletin de la S. M. F., tome 93 (1965), p. 97-107
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1965__93__97_0>

Bull. Soc. math. France,
93, 1965, p. 97 à 107.

QUELQUES RÉSULTATS DE VIŠIK SUR LES PROBLÈMES ELLIPTIQUES NON LINÉAIRES PAR LES MÉTHODES DE MINTY-BROWDER ;

PAR

JEAN LERAY et JACQUES-LOUIS LIONS.

Dans des Notes aux *Doklady* de 1961, puis dans un travail récent détaillé, VIŠIK ([5], [6]) a donné une méthode générale de résolution pour *certains* problèmes elliptiques non linéaires [*cf.* hypothèses du paragraphe 2]. I. M. VIŠIK montre l'existence d'une solution de certains problèmes aux limites :

1° en construisant une solution approchée en dimension finie;

2° en passant à la limite par utilisation d'inégalités *a priori* et de *résultats de compacité.*

D'un autre côté, MINTY ([2], [3], [4]) a observé — et appliqué à des équations intégrales — que des *hypothèses de monotonie* convenables permettent d'éviter les résultats de compacité; BROWDER [1] a ensuite observé que les idées de MINTY pouvaient s'appliquer aux équations elliptiques considérées par VIŠIK et a développé cette idée dans une série de travaux, sans arriver, semble-t-il, à un énoncé contenant tous ceux de VIŠIK.

L'obtention d'un tel énoncé est l'objet de cet exposé; le paragraphe 1 donne un résultat « abstrait » général, le paragraphe 2 des exemples.

Notons que, *de toutes façons*, les résultats donnés ici ne dispensent *nullement* de la lecture du travail de VIŠIK, notamment en ce que, avec des hypothèses supplémentaires sur les coefficients, I. M. VIŠIK obtient des informations supplémentaires sur la régularité de la solution.

L. SCHWARTZ [qui nous a suggéré de remplacer dans (1.1) $\mathrm{Re}(A(v), v)$ par $|(A(v), v)|$ nous a communiqué une démonstration d'un résultat moins général que le théorème 1, mais sans hypothèse de séparabilité sur V. Des résultats de ce type, avec des démonstrations différentes, se trouvent également dans MINTY.

1. Résultats généraux.

1. — Soit V un espace de Banach *séparable* et *réflexif*, sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$; soit [1] V' son dual (ou anti-dual). Soit $\| \ \|$ (resp. $\| \ \|_*$) la norme dans V (resp. V'); si $v \in V$, $v' \in V'$, (v', v) désigne la valeur de v' en v.

Une application, en général non linéaire, d'un Banach X dans un Banach Y est dite *bornée* si elle transforme les ensembles bornés de X en ensembles bornés de Y.

Le but du paragraphe est de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit $v \to A(v)$ un opérateur borné de $V \to V'$, continu de tout sous-espace de V de dimension finie dans V' faible. On suppose que A est coercitif au sens suivant :*

$$\lim_{\|v\| \to \infty} \frac{(A(v), v)}{\|v\|} = \infty. \tag{1.1}$$

Alors, si l'une des hypothèses I, II ci-après a lieu, A est surjectif.

HYPOTHÈSE I. — $A(v)$ est *monotone*, i. e. $\operatorname{Re}(A(u) - A(v), u - v) \geqq 0$, $\forall u, v \in V$.

HYPOTHÈSE II. — Il existe une application bornée : $(u, v) \to A(u, v)$ de $V \times V \to V'$ telle que $A(u, u) = A(u)$, $\forall u \in V$, vérifiant les conditions :

(i) [Continuité et monotonie en v] : $\forall u \in V$, $v \to A(u, v)$ est continue de toute droite de V dans V' faible, et

$$\operatorname{Re}(A(u, u) - A(u, v), u - v) \geqq 0, \qquad \forall u, v \in V;$$

(ii) [Continuité de $A(u, v)$ en u] : Soit u_μ une suite telle que $u_\mu \to u$ dans V faible et $(A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u) \to 0$; alors $\forall v \in V$, $A(u_\mu, v) \to A(u, v)$ dans V' faible;

(iii) [Continuité de $(A(u, v), u)$ en u] : Soit u_μ une suite telle que $u_\mu \to u$ dans V faible et $A(u_\mu, v) \to v'$ dans V' faible; alors

$$(A(u_\mu, v), u_\mu) \to (v', u).$$

2. Le cas où V est de dimension finie.

Lorsque V est de dimension finie, on montre le résultat en utilisant seulement (1.1). Par changement de norme (ne modifiant pas l'hypo-

[1] Le dual d'un Banach séparable est séparable : V' sera donc séparable.

thèse) on se ramène au cas où $V = V' = \mathbf{R}^N$ (cas réel pour simplifier); soit B_K la boule $\|v\| \leqq K$ de bord $S_K = \{v \mid \|v\| = K\}$. Grâce à (1.1), pour K quelconque, on peut choisir R assez grand pour que

(2.1) $(A(v), v) \geqq KR, \qquad \forall v \in S_R$ (changer A en $-A$ si nécessaire).

Alors pour $\theta \in]0, 1[$, et $v \in S_R$, on a

$$\left|\left(\theta A(v) + (1-\theta)\frac{K}{R}v, v\right)\right| \geqq KR,$$

donc

$$\left\|\theta A(v) + (1-\theta)\frac{K}{R}v\right\| \geqq K, \qquad \forall v \in S_R,$$

et donc le degré topologique sur B_K de la restriction de $\theta A + (1-\theta)\frac{K}{R}I$ à $B_R(I =$ identité sur $V)$ est égal à 1, d'où le résultat.

Note. — Si $V = \mathbf{C}^N$, on commence par déformer A, pour obtenir (2.1) : *cf.* BROWDER.

3. **Solutions approchées** u_m.

Soit $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ une suite de V telle que, pour tout m, $w_1, \ldots, w_m$ soient linéairement indépendants, et que, V_m désignant l'espace engendré par $w_1, \ldots, w_m$, $\bigcup_m V_m$ soit dense dans V.

On va vérifier :

(3.1) $\begin{cases} f \text{ étant donné dans } V', \text{ il existe } u_m \in V_m \text{ tel que} \\ \qquad (A(u_m), w) = (f, w), \qquad \forall w \in V_m. \end{cases}$

En effet, si $\theta_1, \ldots, \theta_m \in V'$ avec $(\theta_i, w_j) = \delta^i_j$, définissons $P_m \in \mathcal{L}(V'; V')$ par

$$P_m v' = \sum_{j=1}^{m} (v', w_j)\,\theta_j.$$

Alors (3.1) équivaut à

$$B_m(u_m) = P_m f,$$

où

$$B_m(v) = P_m(A(v)).$$

Si V'_m est l'espace engendré par $\theta_1, \ldots, \theta_m$, B_m applique V_m dans V'_m; comme $(B_m(v), v) = (A(v), v)$, la condition analogue à (1.1) est satisfaite; d'où (3.1) en appliquant le n° 2.

4. Passage à la limite.

De (3.1) résulte que

$$|(A(u_m), u_m)| = |(f, u_m)| \leqq \|f\|_* \|u_m\|,$$

d'où, en utilisant (1.1) (les c désignent des constantes diverses),

$$\|u_m\| \leqq c.$$

Alors $\|A(u_m)\|_* \leqq c$, et, V étant réflexif, on peut extraire u_μ telle que

$$(4.1) \quad \begin{cases} u_\mu \to u & \text{dans } V \text{ faible;} \\ A(u_\mu) \to \chi & \text{dans } V' \text{ faible.} \end{cases}$$

Appliquant (3.1) pour $m = \mu$, on en déduit que $\chi = f$. Donc

$$(4.2) \quad A(u_\mu) \to f \quad \text{dans } V' \text{ faible.}$$

Comme $\|A(u_\mu, u)\|_* \leqq c$, on peut supposer (par nouvelle extraction, mais on ne change pas les indices) que

$$(4.3) \quad A(u_\mu, u) \to u' \quad \text{dans } V' \text{ faible.}$$

Vérifions que

$$(4.4) \quad (A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u) \to 0.$$

En effet,

$$(A(u_\mu, u_\mu), u_\mu) = (f, u_\mu) \to (f, u)$$

et, d'après (4.2),

$$(A(u_\mu, u_\mu), u) \to (f, u);$$

d'après (iii),

$$(A(u_\mu, u), u_\mu) \to (u', u)$$

et enfin, d'après (4.3),

$$(A(u_\mu, u), u) \to (u', u).$$

Tout ceci entraîne (4.4).

D'après (4.1), (4.4) et (ii),

$$(4.5) \quad A(u_\mu, v) \to A(u, v) \quad \text{dans } V' \text{ faible}$$

et

$$(4.6) \quad (A(u_\mu, v), u_\mu) \to (A(u, v), u).$$

Mais alors on a :

$$(4.7) \quad X_\mu^v = (A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, v), u_\mu - v) \to (f - A(u, v), u - v).$$

Mais, d'après (i), $\mathrm{Re}\, X_\mu^v \geqq 0$. Donc (4.7) donne

(4.8) $$\mathrm{Re}(f - A(u, v), u - v) \geqq 0, \qquad \forall v \in V.$$

Posant $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in V$, il en résulte

$$\mathrm{Re}(f - A(u, u - \lambda w), w) \geqq 0, \quad \forall w \in V \quad \text{et} \quad \lambda > 0;$$

faisant tendre λ vers zéro, en utilisant (i), il vient

$$\mathrm{Re}(f - A(u), w) \geqq 0, \qquad \forall w \in V,$$

donc

$$f = A(u),$$

ce qui démontre le théorème.

2. Applications à un type d'équation aux dérivées partielles contenant l'équation d'Euler du calcul des variations.

1. Notations.

Ω = ouvert de $\mathbf{R}^n$, borné; les fonctions considérées sont *à valeurs réelles*

$$W_p^m(\Omega) = \{ u \mid D^\alpha u \in L_p(\Omega), \mid \alpha \mid \leqq m \}, \qquad 1 < p < \infty;$$

$$\| u \| = \left(\sum_{|\alpha| \leqq m} \| D^\alpha u \|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}};$$

$\mathring{W}_p^m(\Omega)$ = adhérence dans $W_p^m(\Omega)$ du sous-espace des fonctions à support compact dans Ω;

$$\mathring{W}_p^m(\Omega) \subset V \subset W_p^m(\Omega),$$

V *fermé* dans $W_p^m(\Omega)$, inclusions strictes ou non;

V', dual de V, n'est un espace de distributions sur Ω que si $V = \mathring{W}_p^m(\Omega)$.

Notons que V est séparable et réflexif.

On suppose que

(1.1) l'application identique est compacte de $V \to W_p^{m-1}(\Omega)$.

Cette hypothèse a, par exemple, *toujours* lieu si $V = \mathring{W}_p^m(\Omega)$, et elle a lieu si $V = W_p^m(\Omega)$, Ω ayant la propriété du cône.

Les fonctions A_α. — Soit N_1 (resp. N_2) le nombre de dérivations D^β dans $\mathbf{R}^n$ d'ordre $\leqq m - 1$ (resp. d'ordre $= m$); soit $A_\alpha(x, \eta, \xi)$ une famille de fonctions ($|\alpha| \leqq m$) définies sur $\Omega \times \mathbf{R}^{N_1} \times \mathbf{R}^{N_2}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$; ces fonctions sont de Carathéodory, i. e. :

pour presque tout $x \in \Omega$, $(\eta, \xi) \to A_\alpha(x, \eta, \xi)$ est continue sur $\mathbf{R}^{N_1} \times \mathbf{R}^{N_2}$;
pour tout $(\eta, \xi) \in \mathbf{R}^{N_1} \times \mathbf{R}^{N_2}$, $x \to A_\alpha(x, \eta, \xi)$ est mesurable.

On pose

$$D^k u = \{ D^\beta u, \ |\beta| = k \};$$
$$\delta u = \{ u, Du, \ldots, D^{m-1} u \};$$
$$A_\alpha(x, \delta u, D^m v): \quad x \to A_\alpha(x, \delta u(x), D^m v(x)).$$

On suppose que

$$(1.2) \quad \begin{cases} \forall u \in W_p^m(\Omega), \quad v \in W_p^m(\Omega), \\ \text{on a} \\ A_\alpha(x, \delta u, D^m v) \in L_{p'}(\Omega), \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1. \end{cases}$$

D'après M. A. Krasnosel'skij [2], on peut donner la condition nécessaire et suffisante pour que (1.2) ait lieu. Notons seulement ceci, de vérification facile : (1.2) a lieu si

$$(1.3) \quad |A_\alpha(x, \eta, \zeta)| \leqq c[\,|\eta|^{p-1} + |\zeta|^{p-1} + k(x)], \qquad k \in L_{p'}(\Omega).$$

On peut améliorer (i. e. augmenter) l'exposant de $|\eta|$ dans (1.3) en utilisant les inégalités de Sobolev.

L'opérateur A. — Pour $u, w \in V$, on définit

$$(1.4) \quad a(u, w) = \sum_{|\alpha| \leqq m} \int_\Omega A_\alpha(x, \delta u, D^m u) D^\alpha w \, dx,$$

ce qui a un sens, puisque $A_\alpha(x, \delta u, D^m u) \in L_{p'}(\Omega)$ et $D^\alpha w \in L_p(\Omega)$. La forme $w \to a(u, w)$ est linéaire continue sur V, donc de la forme

$$(1.5) \quad a(u, w) = (A(u), w), \qquad A(u) \in V'.$$

Le problème aux limites. — Pour f donné dans V', on cherche u dans V, satisfaisant à

$$(1.6) \quad A(u) = f$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1.6') \quad a(u, w) = (f, w), \qquad \forall w \in V.$$

C'est un problème avec conditions aux limites de Dirichlet (resp. Neumann, resp. « mêlées ») si $V = \mathring{W}_p^m(\Omega)$ [resp. $W_p^m(\Omega)$, resp. $\mathring{W}_p^m(\Omega) \subset V \subset W_p^m(\Omega)$ avec inclusions strictes].

---

(2) Krasnosel'skij (M. A.). — *Topological methods in the theory of non linear integral equations* [traduction de l'édition russe de 1956]. — Oxford, London, New York, 1964 (International Series of Monographs on pure and applied Mathematics, 45).

2. Théorème 2. — *On suppose que* (1.1) *et* (1.3) *ont lieu, ainsi que*

$$(2.1)\qquad \frac{|a(v, v)|}{\|v\|} \to \infty \quad \text{si} \quad \|v\| \to \infty;$$

$$(2.2)_1\qquad \begin{cases} \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta, \xi)\xi_\alpha/[\,|\xi| + |\xi|^{p-1}] \to \infty \quad \text{si} \quad \xi \to \infty, \\ x \text{ fixé, p.p. dans } \Omega, \text{ et pour } |\eta| \text{ borné,} \end{cases}$$

$$(2.2)_2\qquad \begin{cases} \sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha(x, \eta, \xi^\star) - A_\alpha(x, \eta, \xi)][\xi_\alpha^\star - \xi_\alpha] > 0 \quad \text{si} \quad \xi^\star \neq \xi, \\ \text{p.p. dans } \Omega. \end{cases}$$

Conclusion. — Il existe $u \in V$, *solution du problème aux limites* (1.6).

Remarques.

1° Il est facile de donner des conditions *suffisantes* pour que (2.1) ait lieu. Par exemple, l'hypothèse

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta, \xi)\xi_\alpha \geqq |\xi|^p \qquad \text{pour} \quad |\xi| > \text{Cte},$$

et les inégalités de Sobolev impliquent que (2.1) a lieu quand Ω *est suffisamment petit et régulier* et que $V = \mathring{W}_p^m(\Omega)$, car alors

$$\|u\| \sim \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2° On peut remplacer (sans changer la conclusion) (η, ξ) par ζ et (2.2) par

$$(2.3)\qquad \sum_{|\alpha|\leqq m} [A_\alpha(x, \zeta) - A_\alpha(x, \zeta^\star)][\zeta_\alpha - \zeta_\alpha^\star] \geqq 0;$$

on prendra alors $A(u, v) = A(v)$; ce cas est plus simple à établir que celui de l'énoncé du théorème 2.

3. Lemmes.

Lemme 3.1. — *Si* $u_\mu \to u$ *dans* $W_p^{m-1}(\Omega)$ *fort et* $v \in W_p^m(\Omega)$, *on a*

$$A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m v) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m v)$$

dans $L_{p'}$ *fort* (*cf.* Krasnosel'skij, *loc. cit.* en 1).

Lemme 3.2. — *Soit* $g \in L_q(\Omega)$, $g_\nu \in L_q(\Omega)$, $\|g_\nu\|_{L_q(\Omega)} \leqq c$; $1 < q < \infty$; *si* $g_\nu \to g$ *p. p., alors* $g_\nu \to g$ *dans* $L_q(\Omega)$ *faible.*

Démonstration. — Soit

$$E(N) = \{x \mid x \in \Omega, \mid g_\nu(x) - g(x) \mid \leq 1, \forall \nu \geq N\}.$$

$E(N)$ croît avec N et $\operatorname{mes}(E(N)) \to \operatorname{mes}\Omega$; alors l'ensemble des fonctions $\varphi_N \in L_{q'}(\Omega)$, nulles (p. p.) hors de $E(N)$, est, lorsque $N \to \infty$, dense dans $L_{q'}(\Omega)$. Or

$$\int_\Omega \varphi_N(x)\,[g_\nu(x) - g(x)]\,dx \to 0$$

lorsque $\nu \to \infty$ (φ_N fixée); d'où le résultat.

LEMME 3.3. — *Soit u_μ, $u \in W_p^m(\Omega)$, $\| u_\mu \| \leq c$, $u_\mu \to u$ dans V faible. On pose*

$$\begin{aligned} F_\mu &= F(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu, D^m u) \\ &= \sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu) - A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u)][D^\alpha u_\mu - D^\alpha u], \end{aligned}$$

et l'on suppose que

$$\int_\Omega F(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu, D^m u)\,dx \to 0.$$

Alors

(3.1) $\quad A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m u)$ *dans $L_{p'}(\Omega)$ faible.*

Démonstration. — Grâce à $(2.2)_2$, $F_\mu \geq 0$; donc de toute sous-suite de $\{\mu\}$ on peut extraire une sous-suite $\{\nu\}$ telle que

(3.2) $\quad \delta u_\nu(x) \to \delta u(x),\ F_\nu(x) \to 0$ p. p. dans Ω.

Fixons x non exceptionnel dans (3.2) et tel que $k(x) < \infty$ [k donné dans (1.3)]; notons $\eta = \delta u(x)$, $\eta_\nu = \delta u_\nu(x)$, $\xi = D^m u(x)$ et $\xi^\star$ l'une quelconque des limites de $D^m u_\nu(x) = \xi_\nu$. Alors

$$F_\nu(x) \geq \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta_\nu, \xi_\nu)\xi_{\nu\alpha} - c(|\xi_\nu|^{p-1} + |\xi_\nu| + 1)$$

et si l'on avait $|\xi^\star| = \infty$, alors, vu $(2.2)_1$, on aurait $F_\nu(x) \to \infty$ contrairement à (3.2). Donc $|\xi^\star| < \infty$.

Alors (3.2) et la continuité en η, ξ des A_α impliquent

$$\sum_{|\alpha|=m} [A_\alpha(x, \eta, \xi^\star) - A_\alpha(x, \eta, \xi)][\xi^\star_\alpha - \xi_\alpha] = 0,$$

donc, vu $(2.2)_2$,

$$\xi^\star = \xi.$$

Donc

$$A_\alpha(x, \delta u_\nu(x), D^m u_\nu(x)) \to A_\alpha(x, \delta u(x), D^m u(x)) \quad \text{p. p. dans } \Omega,$$

et, vu le lemme 3.2,

$$(3.3) \qquad A_\alpha(x, \delta u_\nu, D^m u_\nu) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m u) \quad \text{dans } L_{p'}(\Omega) \text{ faible.}$$

Pour que de toute suite extraite de $\{\mu\}$ on puisse extraire une suite donnant lieu à (3.3) (donc avec une limite *indépendante* de la suite extraite), il faut que (3.1) ait lieu.

4. Démonstration du théorème 2.

Il est commode de poser

$$a_1(u, v, w) = \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega A_\alpha(x, \delta u, D^m v) D^\alpha w\, dx,$$

$$a_2(u, w) \quad = \sum_{|\alpha|\leq m-1} \int_\Omega A_\alpha(x, \delta u, D^m u) D^\alpha w\, dx.$$

Alors

$$a(u, v, w) = a_1(u, v, w) + a_2(u, w)$$

définit $A(u, v) \in V'$ par

$$a(u, v, w) = (A(u, v), w).$$

Il est facile de voir que tous ces opérateurs sont bornés. L'hypothèse (2.1) est évidemment équivalente à (1.1) de sorte que pour montrer le théorème, il suffit, en vertu du théorème 1, de vérifier que les hypothèses II, (i), (ii), (iii) ont lieu.

Vérification de (i). — On a

$$(A(u, u) - A(u, v), u - v) = [a_1(u, u, u-v) - a_1(u, v, u-v)]$$

et ceci est ≥ 0 d'après (2.2); il reste à montrer que

$$a(u, v_1 + \lambda v_2, w) \to a(u, v_1, w) \qquad \text{si } \lambda \to 0, \quad u, v_i, w \in V.$$

Cela résulte de ce que

$$A_\alpha(x, \delta^{m-1} u, D^m(v_1 + \lambda v_2)) \to A_\alpha(x, \delta^{m-1} u, D^m v_1)$$

dans $L_{p'}(\Omega)$ faible (il y a même convergence dans $L_{p'}$ fort!), ce qui suit par exemple du lemme 3.2.

Vérification de (ii). — Soit u_μ une suite telle que $u_\mu \to u$ dans V faible et

$$(A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u) \to 0.$$

Avec les notations du lemme 3.3,

$$(A(u_\mu, u_\mu) - A(u_\mu, u), u_\mu - u) = \int_\Omega F_\mu\, dx$$

et donc, d'après le lemme 3.3,

$$A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m u_\mu) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m u) \quad \text{dans } L_{p'}(\Omega) \text{ faible,}$$

et, pour $|\alpha| = m$, $A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m v) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m v)$ dans $L_{p'}(\Omega)$ faible (et même fort). Donc

$$a(u_\mu, v, w) \to a(u, v, w), \qquad \forall w \in V,$$

donc $A(u_\mu, v) \to A(u, v)$ dans V' faible.

C. Q. F. D.

Vérification de (iii). — Soit $u_\mu \to u$ dans V faible, $A(u_\mu, v) \to v'$ dans V' faible. Alors (lemme 3.1) $A_\alpha(x, \delta u_\mu, D^m v) \to A_\alpha(x, \delta u, D^m v)$ dans $L_{p'}(\Omega)$ fort, donc

$$(4.1) \qquad a_1(u_\mu, v, u_\mu) \to a_1(u, v, u).$$

Par ailleurs,

$$|a_2(u_\mu, u_\mu - u)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m-1} \|D^\alpha(u_\mu - u)\|_{L_0(\Omega)}$$

et donc, d'après (1.1), $a_2(u_\mu, u_\mu - u) \to 0$.

Grâce à (4.1),

$$a_2(u_\mu, u) = (A(u_\mu, v), u) - a_1(u_\mu, v, u) \to (v', u) - a_1(u, v, u),$$

donc

$$a_2(u_\mu, u_\mu) = a_2(u_\mu, u_\mu - u) + a_2(u_\mu, u) \to (v', u) - a_1(u, v, u).$$

Alors

$$(A(u_\mu, v), u_\mu) = a_1(u_\mu, v, u_\mu) + a_2(u_\mu, u_\mu) \to (v', u),$$

et (iii) suit.

5. **Remarques.**

1° Dans le cas où les coefficients $A_\alpha(x, \eta, \xi)$ ont une croissance *plus rapide que polynomiale*, il faut remplacer les espaces de Sobolev $W_p^m(\Omega)$, construits *à partir de* $L_p(\Omega)$, par des espaces analogues construits à partir d'*espaces d'Orlicz sur* Ω.

Noter aussi que les A_α n'ont pas tous forcément « même croissance »; on peut donc être conduit à introduire au lieu de $W_p^m(\Omega)$ des espaces

$$W_{p_\alpha}^m(\Omega) = \{ u \mid D^\alpha u \in L_{p_\alpha}(\Omega),\ |\alpha| \leq m,\ p_\alpha \textit{ dépendant de } \alpha \};$$

remarque analogue encore en remplaçant $L_{p_\alpha}(\Omega)$ par un *espace d'Orlicz dépendant de* α. Pour tout cela, *cf.* VIŠIK [7].

2° Si la frontière Γ de Ω est assez régulière, on peut également introduire dans (1.4) des *intégrales de surface.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BROWDER (F. E.). — Variational boundary value problems for quasi-linear elliptic equations of arbitrary order, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 50, 1963, p. 31-37, 592-598 et 794-798 ; *Non linear elliptic boundary value problems* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 69, 1963, p. 862-874).

[2] MINTY (G. J.). — Monotone (non linear) operators in Hilbert space, *Duke math. J.*, t. 29, 1962, p. 341-346.

[3] MINTY (G. J.). — On the maximal domain of a monotone function, *Michigan math. J.*, t. 8, 1961, p. 135-137.

[4] MINTY (G. J.). — On a « monotonicity » method for the solution of non linear equations in Banach spaces, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 50, 1963, p. 1038-1041.

[5] VIŠIK (M. I.). — *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 138, 1961, p. 518-521.

[6] VIŠIK (M. I.). — *Trudy Moskovskogo Matematičeskogo Obščestva*, t. 12, 1963, p. 125-184.

[7] VIŠIK (M. I.). — *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 151, 1963, p. 758-761.

(Manuscrit reçu le 30 juin 1964.)

Jean LERAY,
Professeur au Collège de France,
12, rue Pierre-Curie, Sceaux (Seine).

Jacques-Louis LIONS,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris,
42, rue du Hameau, Paris, 15e.