M. DEMAZURE

Schémas en groupes réductifs

Bulletin de la S. M. F., tome 93 (1965), p. 369-413

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1965__93__369_0>

Bull. Soc. math. France,
93, 1965, p. 369 à 413.

SCHÉMAS EN GROUPES RÉDUCTIFS * ;

PAR

Michel DEMAZURE.

TABLE DES MATIÈRES.

(*) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1964.

Introduction. — CHEVALLEY ([2], « *BIBLE* [4] ») a montré que la classification des groupes algébriques semi-simples sur un corps algébriquement clos est indépendante de la caractéristique du corps. Plus précisément, CHEVALLEY associe [2] à tout groupe de Lie semi-simple complexe $G_{\mathbf{C}}$ et à tout corps k un k-groupe algébrique semi-simple $\mathrm{Chev}(k, G_{\mathbf{C}})$; puis il montre (*BIBLE*) que, si k est algébriquement clos, l'application $G_{\mathbf{C}} \mapsto \mathrm{Chev}(k, G_{\mathbf{C}})$ induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes de Lie semi-simples complexes sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de k-groupes algébriques semi-simples (1). En convenant d'appeler « de même type » deux k-groupes algébriques qui deviennent isomorphes sur une extension convenable du corps k, il revient au même de dire que pour tout corps k l'application $G_{\mathbf{C}} \mapsto \mathrm{Chev}(k, G_{\mathbf{C}})$ induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes de Lie semi-simples complexes sur l'ensemble des types de k-groupes algébriques semi-simples.

En 1960, CHEVALLEY [3] démontrait l'existence, pour tout groupe de Lie semi-simple complexe $G_{\mathbf{C}}$ donné, d'un schéma en groupes $\mathrm{Chev}(G_{\mathbf{C}})$ tel que, pour tout corps k, on ait

$$\mathrm{Chev}(k, G_{\mathbf{C}}) = \mathrm{Chev}(G_{\mathbf{C}}) \otimes_{\mathbf{Z}} k.$$

Il posait alors le problème suivant : caractériser les schémas du type $\mathrm{Chev}(G_{\mathbf{C}})$ à l'aide de conditions données *a priori*. Les résultats qui suivent permettent de donner une telle caractérisation (5.1.3) : $\mathrm{Chev}(G_{\mathbf{C}})$ est le seul schéma en groupes G « réductif », possédant un « tore maximal » et tel que $G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} = G_{\mathbf{C}}$.

Plus généralement, disons qu'un S-préschéma en groupes (où S est un préschéma de base quelconque) est *semi-simple* s'il est lisse et affine sur S, et si ses fibres géométriques sont des groupes algébriques connexes

---

(1) Nous employons dans cet article le signe $\mapsto$ en lieu et place du signe $\leadsto$ utilisé antérieurement. Rappelons brièvement que $f : E \to F$ signifie que f est une application de l'*ensemble* E dans l'*ensemble* F (ou plus généralement un morphisme d'une certaine catégorie), tandis que $f : x \mapsto y$ signifie que l'image par f de l'*élément* x de l'ensemble de départ de f est l'*élément* y de l'ensemble d'arrivée de f.

semi-simples. Nous montrerons que « localement pour la topologie étale », tout S-préschéma en groupes semi-simple peut être ramené à une forme standard dite « *déployée* », que deux S-préschémas en groupes semi-simples déployés sont isomorphes localement pour la topologie étale si et seulement s'ils sont isomorphes, et qu'ils le sont s'il existe un $s \in S$ tel que les fibres géométriques $G_{\bar{s}}$ et $G'_{\bar{s}}$ soient isomorphes. Il en résulte que pour tout préschéma S (non vide), l'application

$$G_{\mathbf{C}} \mapsto \operatorname{Chev}(G_{\mathbf{C}}) \times_{\operatorname{Spec}(\mathbf{Z})} S$$

induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes de Lie semi-simples complexes sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de S-préschémas en groupes semi-simples déployés (ou bien, sur l'ensemble des « types » de S-préschémas en groupes semi-simples).

Ces résultats seront obtenus en attachant à chaque S-préschéma en groupes semi-simple déployé un « système de racines » et en montrant que deux S-préschémas en groupes semi-simples déployés qui correspondent à des systèmes de racines isomorphes sont isomorphes. En fait, nous donnerons des énoncés plus larges, permettant de traiter les groupes réductifs et non seulement les groupes semi-simples d'une part, les isogénies entre ces groupes et non seulement les isomorphismes d'autre part.

En résumé, il s'agit donc de la généralisation de la théorie de *Bible* au cas d'un préschéma de base quelconque, obtenue par la confrontation de la théorie des groupes semi-simples de Chevalley et de la théorie des schémas de Grothendieck; je n'aurais pas pu mener à bien cette généralisation sans l'aide des écrits de Chevalley (*Bible* en particulier) et sans la fréquentation constante de Grothendieck; si cette généralisation se présente aujourd'hui sous une forme qu'on peut considérer comme satisfaisante, c'est donc essentiellement à eux qu'on le doit.

La situation actuelle de la théorie des schémas en groupes réductifs est la suivante : les résultats de *Bible* d'une part, et de Borel-Tits [6] (groupes paraboliques) d'autre part, s'étendent dans leur quasi-totalité aux préschémas en groupes réductifs déployés sur un préschéma de base quelconque (ou, ce qui revient au même, aux préschémas en groupes réductifs quelconques, pourvu que l'on s'autorise des extensions convenables du schéma de base); il en est de même de la plupart des résultats « arithmétiques » de Borel-Tits (conjugaison des paraboliques minimaux, trivialité locale des fibrations $G \to G/P$). Certaines questions se posent naturellement, par exemple : 1° l'étude des schémas de drapeaux et de leur cohomologie (théorème de Borel-Weil, représentations projectives); 2° l'étude plus approfondie de la classification des groupes réductifs non nécessairement déployés, et de leur cohomologie, sur un préschéma de base quelconque; dans le cas de l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers, les théorèmes de BOREL-HARISH CHANDRA donnent déjà des renseignements de finitude. J'espère revenir ultérieurement sur certaines de ces questions.

Les résultats de cette thèse, ainsi que ceux concernant les groupes paraboliques, ont été exposés (et rédigés) en détail au Séminaire de Géométrie algébrique de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, 1963/1964, dirigé par A. GROTHENDIECK et moi-même et consacré aux schémas en groupes; je remercie vivement l'I. H. E. S. de son accueil. Cette rédaction peut donc être considérée à la fois comme une introduction à la lecture de ce Séminaire et comme un Fascicule de Résultats de la partie consacrée aux groupes réductifs (exposés XIX à XXVI).

Je remercie MM. H. CARTAN, C. CHEVALLEY et A. GROTHENDIECK d'avoir bien voulu constituer le jury de cette thèse. Je remercie aussi MM. N. BOURBAKI, R. GODEMENT et J.-P. SERRE qui, avec ceux-ci, m'ont initié aux mathématiques.

§ 1. Rappels de théorie des schémas.

1.1. Structures algébriques ([SGAD] [5], exp. I).

Rappelons seulement les faits fondamentaux suivants. On note **Ens** la catégorie des ensembles, **Sch** la catégorie des préschémas, **Sch**^ la catégorie des foncteurs contravariants (aussi appelés *préfaisceaux* d'ensembles) sur **Sch** :

$$\mathbf{Sch}\hat{} = \mathbf{Hom}(\mathbf{Sch}^{o}, \mathbf{Ens}).$$

On a un foncteur canonique

$$h: \quad \mathbf{Sch} \to \mathbf{Sch}\hat{}$$

défini par $h(S)(T) = \mathrm{Hom}(T, S)$. Ce foncteur est *pleinement fidèle* et *commute aux limites projectives*. Un objet F de **Sch**^ isomorphe à $h(S)$ est dit *représentable* par l'objet S de **Sch**. Le foncteur h induit donc une équivalence entre **Sch** et la catégorie des foncteurs représentables.

Pour tout préschéma S, le foncteur $\mathbf{Sch}\hat{} \to \mathbf{Ens}$ qui associe $F(S)$ à F commute aux limites projectives : « les limites projectives dans **Sch**^ se calculent argument par argument ».

Il résulte des deux remarques précédentes le principe suivant. Toute définition ou construction de la théorie des ensembles s'exprimant à l'aide de limites projectives finies (ce qui est le cas le plus souvent dans l'étude des structures algébriques, pour les questions ne faisant pas intervenir de passage au quotient) se transportera à la catégorie **Sch**^ argument par argument. On définira ainsi, par exemple, foncteurs en groupes, normalisateurs, noyaux, foncteurs d'automorphismes, etc. Lorsque tous les foncteurs en cause seront représentables, on en déduira une définition ou construction dans la catégorie des préschémas.

Exemple d'un énoncé construit de la manière précédente : soient S un préschéma, G un S-foncteur en groupes; les automorphismes intérieurs définissent un homomorphisme de S-foncteurs en groupes

$$\mathrm{int}: \quad G \to \mathbf{Aut}_{S\text{-}\mathrm{gr}}(G)$$

dont le noyau est le centre $\mathbf{Cent}(G)$ de G.

1.2. Topologies dans la catégorie des schémas.

Pour l'étude générale des topologies sur les catégories, *voir* [SGAD], exp. IV. Nous nous contenterons ici d'énoncer les propriétés dont nous aurons besoin par la suite.

Rappelons qu'un diagramme d'ensembles $A \xrightarrow{f} B \overset{g,h}{\rightrightarrows} C$ est dit *exact* si f induit une bijection de A sur l'ensemble des $b \in B$ tels que $g(b) = h(b)$.

1.2.1. *Faisceaux.* — On dit que le préfaisceau d'ensembles

$$F: \quad \mathbf{Sch} \to \mathbf{Ens}$$

est un *faisceau pour la topologie de Zariski* si pour tout préschéma S et tout recouvrement $\{U_i\}$ de S par des sous-préschémas ouverts, le diagramme canonique

$$F(S) \to \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

est exact, et si F transforme isomorphismes en isomorphismes; en particulier, F transforme sommes directes de préschémas en produits d'ensembles. On dit que F est un *faisceau pour la topologie* (fpqc) [resp. *la topologie* (fppf), resp. *la topologie étale*] si F est un faisceau pour la topologie de Zariski et si, pour tout morphisme de préschémas $S' \to S$ qui est fidèlement plat et quasi compact (resp. fidèlement plat et localement de présentation finie, resp. étale et surjectif), le diagramme canonique

$$F(S) \to F(S') \rightrightarrows F(S' \times_S S')$$

est exact.

On a les implications suivantes :

F est représentable $\Rightarrow F$ est un faisceau (fpqc) $\Rightarrow F$ est un faisceau (fppf) $\Rightarrow F$ est un faisceau pour la topologie étale $\Rightarrow F$ est un faisceau pour la topologie de Zariski.

La seule assertion non triviale est en effet la première qui est la traduction du fait qu'un morphisme fidèlement plat et quasi compact de préschémas est un « épimorphisme effectif » de préschémas.

1.2.2. *Morphismes couvrants.* — Désignons par $\mathfrak{T}$ l'une quelconque des quatre topologies précédentes. On dit que le morphisme de préschémas $T \to S$ est *couvrant* pour la topologie $\mathfrak{T}$ si c'est un épimorphisme de $\mathfrak{T}$-faisceaux, c'est-à-dire si pour tout $\mathfrak{T}$-faisceau F, l'application canonique $F(S) \to F(T)$ est injective.

Par construction, un morphisme fidèlement plat et quasi compact (resp. fidèlement plat et localement de présentation finie, resp. étale et surjectif) est couvrant pour (fpqc) [resp. (fppf), resp. la topologie étale]. Réciproquement, un morphisme couvrant pour (fppf) (resp. la topologie étale) est majoré par un morphisme fidèlement plat et localement de présentation finie (resp. un morphisme étale et surjectif). Il en résulte par exemple qu'un morphisme $T \to \mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps algébriquement clos, n'est couvrant pour (fppf) que s'il possède une section (« Nullstellensatz »).

1.2.3. Soient S un préschéma et $P(S')$ une propriété éventuelle d'un S-préschéma variable S', telle que $P(S')$ entraîne $P(S'')$, pour tout diagramme $S'' \to S' \to S$. On dit que P est vraie sur S, *localement pour la topologie* $\mathfrak{T}$, si tout $s \in S$ possède un voisinage ouvert U tel qu'il existe un morphisme $U' \to U$ couvrant pour $\mathfrak{T}$ et tel que $P(U')$ soit vraie.

Dans le cas de la topologie de Zariski, on retrouve la notion usuelle; dans le cas de la topologie (fppf) (resp. étale), on peut dans la définition précédente remplacer « couvrant pour $\mathfrak{T}$ » par « fidèlement plat et de présentation finie ») (resp. par « étale et surjectif »).

1.2.4. Si G est un S-préschéma en groupes et si P est un S-préschéma à groupe d'opérateurs G, on dit que P est *fibré principal homogène* sous G pour la topologie $\mathfrak{T}$ si P est *localement trivial pour la topologie* $\mathfrak{T}$, c'est-à-dire localement isomorphe pour la topologie $\mathfrak{T}$ à G lui-même considéré comme préschéma à groupe d'opérateurs G par l'intermédiaire des translations.

L'ensemble des classes de fibrés principaux homogènes sous G est noté $H^1(S, G)$. Si $S' \to S$ est un morphisme $\mathfrak{T}$-couvrant, le sous-ensemble correspondant aux fibrés trivialisés par S' se note $H^1(S'/S, G)$; il peut se calculer par l'intermédiaire de cocycles, ..., comme en cohomologie galoisienne.

1.2.5. Fixons maintenant une convention : chaque fois qu'on ne précisera pas la topologie envisagée sur **Sch** (par exemple : soit f un morphisme couvrant), c'est qu'il s'agira de la topologie (fpqc), à l'exception de l'unique expression « localement », que nous réservons, suivant l'usage, à la topologie de Zariski.

Dans la suite de ce numéro, c'est donc de topologie (fpqc) que nous parlerons; bien entendu, il s'agira en fait de propriétés valables pour une topologie quelconque dans une catégorie quelconque.

1.2.6. Notons $\mathcal{F}$ la catégorie des faisceaux. Le foncteur d'inclusion

$$i : \quad \mathcal{F} \to \mathbf{Sch}^{\wedge}$$

possède un adjoint

$$a : \ \mathbf{Sch}^\wedge \to \mathcal{F}.$$

Le faisceau aF est dit *associé* au préfaisceau F. Le foncteur a commute aux limites projectives finies et aux limites inductives quelconques. Pour calculer une limite inductive dans $\mathcal{F}$, on commence donc par la calculer dans $\mathbf{Sch}^\wedge$, c'est-à-dire argument par argument, puis on prend le faisceau associé au préfaisceau trouvé. Par exemple, si G est un faisceau en groupes et H un sous-faisceau en groupes distingué, le faisceau en groupes quotient G/H est le faisceau associé au préfaisceau en groupes $S \mapsto G(S)/H(S)$.

1.2.7. La catégorie des faisceaux possède toutes les propriétés « géométriques » de la catégorie des ensembles : tout bimorphisme est un isomorphisme, tout épimorphisme est effectif universel, toute relation d'équivalence est effective universelle, etc.

1.2.8. Le foncteur canonique h : $\mathbf{Sch} \to \mathbf{Sch}^\wedge$ se factorise par un foncteur pleinement fidèle et commutant aux limites projectives

$$\mathbf{Sch} \to \mathcal{F}.$$

A partir de maintenant, nous *identifierons* la catégorie **Sch** avec son image dans $\mathcal{F}$. Dans les questions relatives aux limites projectives (structures algébriques, noyaux), cette identification est inoffensive, compte tenu du résultat précédent. En revanche, nous nous *interdisons* de considérer une limite inductive dans **Sch** qui n'en soit pas une dans $\mathcal{F}$. En fait, cette restriction n'est pas gênante en pratique, le foncteur précédent commutant à la plupart des limites inductives qu'on considère. Signalons par exemple le résultat suivant : si G est un S-préschéma en groupes, H un sous-préschéma en groupes invariant, et $G \to X$ un morphisme de S-préschémas en groupes, X s'identifie au faisceau-quotient G/H si et seulement si la suite $e \to H \to G \to X$ est exacte [c'est-à-dire si pour tout $S' \to S$ la suite $e \to H(S') \to G(S') \to X(S')$ est exacte] et si le morphisme $G \to X$ est couvrant.

1.2.9. Terminons par un exemple. Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes. Alors le centre $\mathbf{Cent}\,(G)$ de G est un faisceau, on peut considérer le faisceau en groupes quotient $G/\mathbf{Cent}\,(G)$. Le morphisme int de 1.1 induit un monomorphisme

$$G/\mathbf{Cent}(G) \to \mathbf{Aut}_{S\text{-}gr}(G).$$

Introduisant le conoyau, on a une suite exacte de S-faisceaux en groupes

$$e \to G/\mathbf{Cent}(G) \to \mathbf{Aut}_{S\text{-}gr}(G) \to \mathbf{Aut\ ext}(G) \to e.$$

1.3. Groupes constants et constants tordus.

1.3.1. Soient S un préschéma, E un ensemble; on note E_S le S-préschéma défini par

$$\mathrm{Hom}_S(E_S, T) = \mathrm{Hom}(E, \mathrm{Hom}_S(S, T));$$

on vérifie aussitôt qu'on a $E_{S'} = E_S \times_S S'$ pour tout $S' \to S$, et que

$$E_S(T) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{loc\,const}}(T, E),$$

ensemble des applications localement constantes de l'espace topologique S dans E.

Le foncteur $E \mapsto E_S$ commute aux limites projectives finies; il transforme donc groupes en S-foncteurs en groupes, ce qui est d'ailleurs clair sur la description précédente. Un S-préschéma en groupes isomorphe à E_S sera appelé *S-groupe constant associé* au groupe E.

1.3.2. Soient S un préschéma et G un S-préschéma en groupes. On dit que G est un *S-groupe constant tordu* si pour tout $s \in S$ il existe un ouvert U de S contenant s et un morphisme fidèlement plat et quasi compact $U' \to U$ tel que le U'-groupe $G_{U'}$ soit constant; il revient donc au même de dire que G est localement constant pour (fpqc). Si, dans la définition précédente chacun des $G_{U'}$ est associé à un groupe de type fini, on dit que G est *à engendrement fini* (N. B. — On fera attention au fait suivant : G n'est de type fini sur S que s'il est fini sur S, c'est-à-dire si les $G_{U'}$ sont associés à des groupes finis.)

Si G est un S-groupe constant tordu *commutatif* à engendrement fini, G est *localement constant pour la topologie étale* : on peut choisir les morphismes $U' \to U$ étales surjectifs ([SGAD], exp. X, 5.9).

1.3.3. Soit S un préschéma *normal* (ou plus généralement *géométriquement unibranche*). Soit G un S-groupe constant tordu commutatif à engendrement fini. Tout $s \in S$ possède un voisinage ouvert U tel qu'il existe un morphisme *étale fini surjectif* $U' \to U$ tel que $G_{U'}$ soit constant ([SGAD], exp. X, 5.14).

1.4. Groupes de type multiplicatif.

1.4.1. *Groupes diagonalisables.* — Soit M un groupe abélien. On note $D(M)$ le foncteur en groupes sur **Sch** défini par

$$D(M)(S) = \mathrm{Hom}_{gr}(M, \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^*).$$

Il est représentable par le préschéma $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}[M]$, où $\mathbf{Z}[M]$ désigne l'algèbre sur $\mathbf{Z}$ du groupe abélien M. Pour tout préschéma S, on note

$D_S(M) = D(M)_S$; un S-groupe isomorphe à un $D_S(M)$ est dit *diagonalisable.* On note en particulier

$$\mathbf{G}_m = D(\mathbf{Z}), \qquad \mathbf{G}_{m\,S} = D_S(\mathbf{Z}),$$

et la définition de $D_S(M)$ se traduit par

$$(1) \qquad D_S(M) = \mathbf{Hom}_{S\text{-gr}}(M_S, \mathbf{G}_{m\,S}).$$

On vérifie aussitôt que $D_S(M)$ est de type fini sur S lorsque M est de type fini, ce que nous supposerons vérifié dans la suite.

1.4.2. Soient M et N deux groupes abéliens de type fini; pour tout préschéma S, on a ([SGAD], exp. VIII, 1.5)

$$(2) \quad \mathbf{Hom}_{S\text{-gr}}(D_S(M), D_S(N)) = (\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(N, M))_S = \mathbf{Hom}_{S\text{-gr}}(N_S, M_S),$$

d'où, en particulier,

$$(3) \qquad \mathbf{Hom}_{S\text{-gr}}(D_S(M), \mathbf{G}_{m\,S}) = M_S,$$

et, en notant M^* le dual du groupe abélien M,

$$\mathbf{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathbf{G}_{m\,S}, D_S(M)) = M^*_S.$$

Les formules (1), (2) et (3) montrent que le foncteur

$$G \mapsto D_S(G) = \mathbf{Hom}_{S\text{-gr}}(G, \mathbf{G}_{m\,S})$$

réalise une *dualité* entre la catégorie des S-groupes diagonalisables de type fini et la catégorie des S-groupes constants commutatifs à engendrement fini.

1.4.3. Soient S un préschéma et G un S-préschéma en groupes. On dit que G est *de type multiplicatif* (resp. *de type multiplicatif quasi isotrivial,* resp. *de type multiplicatif localement isotrivial*) si tout $s \in S$ possède un voisinage ouvert U tel qu'il existe un morphisme $U' \to U$ fidèlement plat et quasi compact (resp. étale et surjectif, resp. étale, fini et surjectif) tel que le U'-groupe $G_{U'}$ soit diagonalisable. Un groupe de type multiplicatif est donc un groupe localement diagonalisable pour la topologie (fpqc).

On peut montrer ([SGAD], exp. X, 5.9) que le foncteur $G \mapsto D_S(G)$ réalise une *dualité* entre la catégorie des S-groupes de type multiplicatif et de type fini et la catégorie des S-groupes constants tordus commutatifs à engendrement fini.

Par 1.3.2 et 1.3.3, on en déduit qu'un groupe de type multiplicatif et de type fini est quasi isotrivial et même *localement isotrivial* si la base est *normale* (ou plus généralement géométriquement unibranche).

1.4.4. Comme Spec ($\mathbf{Z}$) est simplement connexe (c'est-à-dire ne possède pas de revêtement étale surjectif non trivial), on peut déduire des résultats précédents que tout $\mathbf{Z}$-groupe de type multiplicatif et de type fini est diagonalisable.

1.4.5. Si dans la définition de 1.4.3, chaque $G_{U'}$ est U'-isomorphe à $\mathbf{G}^n_{m\,U'}$ (pour un n convenable), on dit que G est un *tore*. Un tore diagonalisable (c'est-à-dire isomorphe à un $\mathbf{G}^n_{m\,S}$) est dit *trivial*. Un tore est donc localement trivial pour la topologie étale.

1.5. Tores maximaux.

1.5.1. Soient G un S-préschéma en groupes, *lisse* et *affine* sur S, H un S-groupe de type multiplicatif et de type fini, et $i : H \to G$ un monomorphisme de groupes. Alors i est une immersion fermée ([SGAD], exp. IX, 2.5); les foncteurs $\mathbf{Cent}_G(H)$ et $\mathbf{Norm}_G(H)$ sont représentables par des sous-préschémas en groupes fermés de G *lisses* sur S, et le faisceau-quotient $\mathbf{Norm}_G(H)/\mathbf{Cent}_G(H)$ est représentable par un S-préschéma en groupes quasi-fini, étale et séparé sur S ([SGAD], exp. XI, 5.3, 5.3 *bis*, 5.9, *ou* [SGAD], exp. XIX, 6.1).

1.5.2. Soient S et G comme ci-dessus, soit $s \in S$ et soit $H_{\bar{s}}$ un sous-groupe de type multiplicatif (resp. un sous-tore) de la fibre géométrique $G_{\bar{s}}$. Il existe un morphisme étale $S' \to S$, un point $s' \in S'$ au-dessus de s et un sous-groupe de type multiplicatif et de type fini (resp. un sous-tore) H de $G_{S'}$ tels que $H_{\bar{s}'} = H_{\bar{s}} \times_{\bar{s}} \bar{s}'$ ([SGAD], exp. XI, 4.1) (2).

1.5.3. Soient S et G comme ci-dessus, soit $s \in S$, et soient H et H' deux S-groupes de type multiplicatif et de type fini de G tels que $H_{\bar{s}}$ et $H'_{\bar{s}}$ soient conjugués par un élément de $G(\bar{s})$. Il existe un morphisme étale $S' \to S$ couvrant s, et un $g \in G(S')$ tels que $\mathrm{int}(g)H_{S'} = H'_{S'}$ ([SGAD], exp. XI, 5.4 *bis*).

1.5.4. On dit que le sous-préschéma en groupes T du S-préschéma en groupes G de type fini en est un *tore maximal* si c'est un tore et si pour chaque $s \in S$, $T_{\bar{s}}$ est un tore maximal du $\bar{s}$-groupe $G_{\bar{s}}$ (au sens habituel).

1.5.5. Si G est un S-préschéma en groupes lisse et affine, deux tores maximaux de G sont conjugués dans G, localement pour la topologie étale; c'est en effet ce qu'il résulte aussitôt de 1.5.3 et du théorème de conjugaison des tores maximaux sur un corps algébriquement clos [*Bible*, exp. 6, th. 4 (c)].

1.5.6. Un groupe de type multiplicatif et de type fini possède un unique tore maximal; il suffit en effet de le vérifier pour un groupe diagonalisable; or si tM est le groupe de torsion du groupe abélien de type

(2) On désigne par $\bar{s}$ le spectre d'une clôture algébrique du corps $\kappa(s)$.

fini M, le monomorphisme canonique $D_S(M/tM) \to D_S(M)$ définit l'unique tore maximal de $D_S(M)$.

1.5.7. Soit G un S-préschéma en groupes lisse et affine sur S, à fibres connexes. Soit s un point de S tel que les tores maximaux de $G_{\bar{s}}$ soient leur propre centralisateur. Il existe un morphisme étale $S' \to S$ couvrant s tel que $G_{S'}$ possède un tore maximal (qui soit même son propre centralisateur).

En effet, soit $T_{\bar{s}}$ un tore maximal de $G_{\bar{s}}$; quitte à faire une extension étale de la base, on peut par 1.5.2 supposer que $T_{\bar{s}}$ provient d'un soustore T de G. Considérons $C = \mathbf{Cent}_G(T)$ qui, en vertu de 1.5.1 est représentable par un S-préschéma lisse; C est à fibres connexes [*Bible*, exp. 6, th. 6 (*a*)], C et T sont lisses sur S, on a $T \subset C$ et $T_{\bar{s}} = C_{\bar{s}}$. Quitte à restreindre S, on peut supposer $T = C$, donc en particulier T maximal.

1.6. Groupes vectoriels.

1.6.1. Soient S un préschéma et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent. On note $\mathbf{W}(\mathcal{M})$ le foncteur en groupes sur $\mathbf{Sch}_{/S}$ défini par

$$\mathbf{W}(\mathcal{M})(S') = \Gamma(S', \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}).$$

Si $\mathcal{M} = \mathcal{O}_S^n$, $\mathbf{W}(\mathcal{M})$ est représentable par $\mathbf{Spec}\,\mathcal{O}_S[T_1, \ldots, T_n]$, ce qui montre que $\mathbf{W}(\mathcal{M})$ est représentable chaque fois que $\mathcal{M}$ est localement libre de rang fini.

1.6.2. L'application canonique

$$\Gamma(S', \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}) \times \Gamma(S', \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}) \to \Gamma(S', \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'})$$

définit pour tout couple $(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ un homomorphisme de foncteurs en groupes

$$\mathbf{W}(\mathcal{M}) \times_S \mathbf{W}(\mathcal{M}') \to \mathbf{W}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M}'),$$

jouissant des propriétés d'associativité évidentes. Il s'ensuit aussitôt que $\mathbf{W}(\mathcal{O}_S)$ est canoniquement muni d'une structure d'anneau et $\mathbf{W}(\mathcal{M})$ d'une structure de module sur cet anneau.

On notera $\mathbf{G}_{a\,S}$ le S-préschéma en groupes $\mathbf{W}(\mathcal{O}_S)$; on a

$$\mathbf{G}_{a\,S} \times_S S' = \mathbf{G}_{a\,S'}$$

et en particulier

$$\mathbf{G}_{a\,S} = (\mathbf{G}_a)_S, \qquad \text{où} \quad \mathbf{G}_a = \mathbf{G}_{a\,\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})}.$$

Un S-préschéma en groupes muni d'une structure de module sur $\mathbf{W}(\mathcal{O}_S)$ sera appelé *S-groupe vectoriel*. On a donc défini un foncteur

$$\mathcal{M} \mapsto \mathbf{W}(\mathcal{M})$$

de la catégorie des $\mathcal{O}_S$-Modules localement libres de rang fini dans la catégorie des S-groupes vectoriels.

1.6.3. Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_S$-Module inversible (c'est-à-dire localement libre de rang 1) sur le préschéma S. On notera $\mathbf{W}(\mathcal{L})^*$ le sous-préschéma ouvert de $\mathbf{W}(\mathcal{L})$ obtenu en en retirant la section unité. On a

$$\mathbf{W}(\mathcal{L})^*(S') = \Gamma\left(S', \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}\right)^*,$$

ensemble des sections f de $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ telles que $f(s') \neq 0$ pour tout $s' \in S'$.

En particulier $(\mathbf{G}_{a\,S})^*$ s'identifie naturellement à $\mathbf{G}_{m\,S}$. En général, les opérations de $\mathbf{G}_{m\,S}$ sur $\mathbf{W}(\mathcal{L})^*$ induites par les opérations de $\mathbf{W}(\mathcal{O}_S)$ sur $\mathbf{W}(\mathcal{L})$ munissent $\mathbf{W}(\mathcal{L})^*$ d'une structure de fibré principal homogène sous $\mathbf{G}_{m\,S}$. Tout fibré principal homogène sous $\mathbf{G}_{m\,S}$ est d'ailleurs de cette forme (« Théorème 90 »); plus précisément, l'application $\mathcal{L} \mapsto \mathbf{W}(\mathcal{L})^*$ induit l'isomorphisme bien connu

$$H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \xrightarrow{\sim} H^1(S, \mathbf{G}_{m\,S}).$$

1.6.4. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_S$-Module localement libre de rang fini et si $\mathcal{M}'$ est un sous-Module de type fini de $\mathcal{M}$, le morphisme canonique $\mathbf{W}(\mathcal{M}') \to \mathbf{W}(\mathcal{M})$ est un monomorphisme si et seulement si $\mathcal{M}'$ est localement facteur direct dans $\mathcal{M}$ (et donc en particulier localement libre).

1.6.5. Soient S un préschéma, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_S$-Module localement libre de rang fini, T un S-tore opérant linéairement sur $\mathcal{M}$ [c'est-à-dire opérant sur le S-groupe vectoriel $\mathbf{W}(\mathcal{M})$]. Soit $r : T \to \mathbf{G}_{m\,S}$ un caractère de T (c'est-à-dire un homomorphisme de groupes). Il existe un sous-Module $\mathcal{M}^r$ de $\mathcal{M}$, localement facteur direct dans $\mathcal{M}$, tel que pour tout $S' \to S$ on ait

$$\mathbf{W}(\mathcal{M}_r)(S') = \{ m \in \mathbf{W}(\mathcal{M})(S'),\ tm = r(t)m \text{ pour tout } t \in T(S''),\ S'' \to S' \}.$$

En particulier, si r est le caractère trivial, on notera $\mathcal{M}^T = \mathcal{M}^0$; c'est le faisceau des invariants de $\mathcal{M}$ sous T.

1.7. **Algèbres de Lie** ([SGAD], exp. II).

1.7.1. Soit S un préschéma. La $\mathcal{O}_S$-Algèbre $\mathcal{O}_S[X]/(X^2)$ est appelée Algèbre des nombres duaux sur S et son spectre I_S *schéma des nombres duaux* sur S; on a une section canonique $\varepsilon : S \to I_S$ (« définie par $X = 0$ »). Pour tout morphisme $S' \to S$, on a $I_{S'} = I_S \times_S S'$.

1.7.2. Si G est un S-foncteur en groupes, on note $Lie(G/S)$ le foncteur sur $\mathbf{Sch}_{/S}$ défini par

$$Lie(G/S)(S') = \operatorname{Ker}\{ G(I_{S'}) \xrightarrow{\varepsilon} G(S'). \}$$

Supposons G représentable, soient $\Omega^1(G/S)$ le faisceau des différentielles relatives de G par rapport à S et $\omega^1_{G/S}$ son image réciproque par la section unité de G. On vérifie aisément que

$$Lie(G/S)(S') = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{S'}}\left(\omega^1_{G/S} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}, \mathcal{O}_{S'}\right).$$

En particulier, si U est un ouvert de S, on a

$$Lie(G/S)(U) = \Gamma(U, \mathbf{Lie}(G/S)),$$

où $\mathbf{Lie}(G/S)$ est le $\mathcal{O}_S$-Module dual de $\omega^1_{G/S}$ (« faisceau des dérivations invariantes sur G »).

Si $\omega^1_{G/S}$ est *localement libre* de rang fini sur S (ce qui arrive en particulier si G est *lisse* sur S, ou si S est le spectre d'un corps et G localement de type fini sur S), la formation de $\mathbf{Lie}(G/S)$ commute à l'extension de la base et l'on peut écrire

$$Lie(G/S) = \mathbf{W}(\mathbf{Lie}(G/S)).$$

1.7.3. La construction précédente définit un foncteur

$$G \mapsto \mathbf{Lie}(G/S) = \mathfrak{g}$$

de la catégorie des S-préschémas en groupes dans celle des $\mathcal{O}_S$-Modules : à tout homomorphismes de groupes $f: G \to H$ est associé un morphisme de $\mathcal{O}_S$-Modules $\mathbf{Lie}(f) : \mathbf{Lie}(G/S) \to \mathbf{Lie}(H/S)$.

En particulier, si G est un S-préschéma en groupes et si $g \in G(S)$, on note $\mathrm{Ad}(g) = \mathbf{Lie}(\mathrm{int}(g)) \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_S}(\mathfrak{g})$. On a donc défini la représentation adjointe

$$\mathrm{Ad}: \quad G \to \mathbf{Aut}_{\mathcal{O}_S}(\mathfrak{g}),$$

où le second groupe est le foncteur $S' \mapsto \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{S'}}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'})$, pourvu que $\omega^1_{G/S}$ soit localement libre.

1.7.4. Supposons donc cette condition vérifiée. Alors $H = \mathbf{Aut}_{\mathcal{O}_S}(\mathfrak{g})$ est représentable (car localement isomorphe à $\mathbf{GL}_n$); on vérifie aussitôt que $\mathbf{Lie}(H/S)$ s'identifie à $\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, et l'on en déduit un morphisme de $\mathcal{O}_S$-Modules

$$\mathrm{ad} = \mathbf{Lie}(\mathrm{Ad}): \quad \mathfrak{g} \to \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}),$$

ou, ce qui revient au même, une loi de composition bilinéaire

$$\mathfrak{g} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

définie par $[x, y] = \mathrm{ad}(x)y$. Cette loi de composition est fonctorielle en G (toujours supposé vérifier la condition restrictive « $\omega^1_{G/S}$ localement libre ») et munit $\mathfrak{g}$ d'une structure de $\mathcal{O}_S$-Algèbre de Lie.

1.7.5. Signalons enfin quelques cas particuliers :

(i) Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_S$-Module localement libre, $\mathbf{Lie}(\mathbf{W}(\mathcal{M})/S) = \mathcal{M}$.

(ii) Si $G = D_S(M)$ est diagonalisable, $\mathbf{Lie}(G/S) = \mathbf{Hom}(M, \mathcal{O}_S)$. En particulier $\mathbf{Lie}(G_{m\,S}/S) = \mathcal{O}_S$.

(iii) Si G est un S-groupe lisse affine, Q un tore de G, alors

$$\mathbf{Lie}(\mathbf{Cent}_G(Q)) = \mathfrak{g}^Q,$$

faisceau des invariants de $\mathbf{Lie}(G/S) = \mathfrak{g}$ sous Q pour la représentation adjointe.

§ 2. Groupes réductifs : racines et coracines.

2.1. Définitions.

2.1.1. On rappelle qu'un groupe algébrique affine, lisse et connexe sur un corps algébriquement clos est dit *réductif* (resp. *semi-simple*) s'il ne possède pas de sous-groupe distingué lisse connexe et unipotent (resp. résoluble) distinct de son sous-groupe unité.

Le *rang réductif* d'un groupe algébrique affine lisse et connexe G sur un corps k algébriquement clos est la dimension de ses tores maximaux; son *rang semi-simple* est le rang réductif de son plus grand quotient semi-simple (Bible, exp. 9, nº 4). Nous les noterons $\mathrm{rgred}(G/k)$ ou $\mathrm{rgred}(G)$ d'une part, $\mathrm{rgss}(G/k)$ ou $\mathrm{rgss}(G)$ d'autre part.

Définition 2.1.2. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes. On dit que G est un S-groupe *réductif* (resp. *semi-simple*) s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) G est *affine* et *lisse* sur S.

(ii) Pour tout $s \in S$, $G_{\bar{s}}$ est un $\bar{s}$-groupe algébrique [affine et lisse d'après (i)] *connexe* et *réductif* (resp. *semi-simple*).

Remarques 2.1.3.

(i) Si G est un S-groupe réductif (resp. semi-simple), $G_{S'}$ est un S'-groupe réductif (resp. semi-simple) pour tout changement de base $S' \to S$. La réciproque est vraie si $S' \to S$ est fidèlement plat et quasi compact : le fait pour un S-préschéma en groupes (ou même pour un S-faisceau en groupes) d'être réductif (resp. semi-simple) est local pour la topologie (fpqc).

(ii) Si k est un corps, dire que le k-groupe G est réductif, c'est dire que le $\bar{k}$-groupe $G_{\bar{k}}$ est réductif. On peut d'ailleurs remplacer $\bar{k}$ par toute extension algébriquement close de k.

(iii) Un tore est un S-groupe réductif.

(iv) Si G est un S-groupe réductif et si Q est un tore de G, le S-groupe $\mathbf{Cent}_G(Q)$ de 1.5.1 est réductif; en effet, vu *loc. cit.*, il suffit de le prouver lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos;

cela résulte alors de *Bible*, exposé 6, théorème 6 (a) et exposé 12, corollaire au théorème 1. En particulier, si Q est un tore maximal de G, comme les fibres géométriques de $\mathbf{Cent}_G(Q)$ sont alors également résolubles [*Bible*, exp. 6, th. 6 (c)], ce sont des tores et $Q = \mathbf{Cent}_G(Q)$.

(v) On obtient une définition équivalente à 2.1.2 en remplaçant « *affine* » par « *de présentation finie* » ([SGAD], exp. XVI).

Proposition 2.1.4. — Un groupe réductif possède *localement pour la topologie étale* des tores maximaux; ceux-ci sont leur propre centralisateur et sont *localement conjugués pour la topologie étale*.

Cela résulte aussitôt de 1.5.5, 1.5.7 et 2.1.3 (iv).

Remarque 2.1.5. — En fait, un S-groupe réductif possède des tores maximaux localement pour la topologie de *Zariski*. Ce résultat, dû à Grothendieck, de démonstration très délicate ([SGAD], exp. XIV, 3.20) ne sera utilisé par la suite qu'au cours de la démonstration du théorème 5.3.1 (*voir* 5.3.8).

2.1.6. Le fait qu'un groupe réductif possède localement pour la topologie étale des tores maximaux et que ceux-ci soient leur propre centralisateur entraîne que le centre de G est représentable par un sous-préschéma en groupes de G, de *type multiplicatif* ([SGAD], exp. XII, 4.11; *voir* aussi une démonstration directe en [SGAD], exp. XXII, 4.17).

Le S-groupe de type multiplicatif $\mathbf{Cent}(G)$ possède un unique tore maximal (1.5.6); c'est le *radical* de G, noté $\mathbf{rad}(G)$. On vérifie aisément ([SGAD], exp. XXII, 4.3) que les faisceaux quotients $G/\mathbf{Cent}(G)$ et $G/\mathbf{rad}(G)$ sont représentables par des S-préschémas en groupes semi-simples.

2.1.7. Le quotient $\mathrm{ad}(G) = G/\mathbf{Cent}(G)$ est appelé *groupe adjoint à* G. On dit que le S-groupe réductif G est *adjoint* si $\mathbf{Cent}(G) = e$. On peut prouver que $\mathrm{ad}(\mathrm{ad}(G)) = \mathrm{ad}(G)$, c'est-à-dire que le groupe réductif adjoint à G est adjoint ([SGAD], exp. XXII, 4.3).

Le S-groupe réductif G est semi-simple si et seulement si $\mathbf{Cent}(G)$ est fini sur S, c'est-à-dire si $\mathbf{rad}(G) = e$ ([SGAD], exp. XXII, 4.3).

2.2. **Le premier résultat de « rigidité ».**

2.2.1. Le S-groupe réductif G est dit de rang réductif r (resp. de rang semi-simple n) si pour tout $s \in S$, on a $\mathrm{rgred}(G_{\bar{s}}) = r$ [resp. $\mathrm{rgss}(G_{\bar{s}}) = n$]. Il est clair que G est alors semi-simple (resp. un tore) si et seulement si $n = r$ (resp. $n = 0$).

Théorème 2.2.2. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes affine, lisse et à fibres connexes. Soit s un point de S tel que le $\bar{s}$-groupe $G_{\bar{s}}$ soit réductif; notons $\mathrm{rgred}\,(G_{\bar{s}}) = r$, $\mathrm{rgss}\,(G_{\bar{s}}) = n$. Il existe un ouvert U de S, contenant s, tel que le U-groupe G_U soit réductif (c'est-à-dire que $G_{\bar{t}}$ soit réductif pour tout $t \in U$), de rang réductif r et de rang semi-simple n.

Voir [SGAD], exp. XIX, n° 2.

Corollaire 2.2.3. — Si $G_{\bar{s}}$ est semi-simple (resp. un tore), G_U est semi-simple (resp. un tore).

Corollaire 2.2.4. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif. Les fonctions

$$s \mapsto \operatorname{rgred}(G_{\bar{s}}),$$
$$s \mapsto \operatorname{rgss}(G_{\bar{s}})$$

sont localement constantes.

2.3. Racines et groupes vectoriels associés.

2.3.1. *Racines.* — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes lisse, T un tore maximal de G, $r : T \to \mathbf{G}_{m\,S}$ un caractère de T, $\mathfrak{g}$ l'Algèbre de Lie de G. Faisons opérer T sur $\mathfrak{g}$ par l'intermédiaire de la représentation adjointe et considérons le sous-Module $\mathfrak{g}^r$ de $\mathfrak{g}$ (*voir* 1.6.5). On dit que r est une *racine de G relativement* à T si, pour tout $s \in S$,

(i) $r_s : T_s \to \mathbf{G}_{m\,s}$ est distinct du caractère unité.

(ii) $\mathfrak{g}^r(s) = \mathfrak{g}^r \otimes \varkappa(s) = \mathbf{Lie}(G_s/\varkappa(s))^{r_s}$ est non nul.

Lorsque S est le spectre d'un corps, on retrouve la définition classique. Lorsque S est quelconque, r est une racine de G relativement à T si et seulement si, pour chaque $s \in S$, r_s est une racine de G_s relativement à T_s, ou encore si et seulement si, pour tout $s \in S$, $r_{\bar{s}}$ est une racine de $G_{\bar{s}}$ relativement à $T_{\bar{s}}$.

2.3.2. Sous les conditions précédentes, supposons de plus G affine sur S. Soit $\operatorname{Ker} r \subset T$ le noyau de r et soit T_r son unique tore maximal (1.5.6); considérons $Z_r = \mathbf{Cent}_G(T_r)$ qui est également lisse et affine sur S (1.5.1) de tore maximal T. Alors $\mathbf{Lie}(Z_r/S) = \mathfrak{g}^{T_r}$ par 1.7.5 (iii), et en particulier $\mathfrak{g}^r \subset \mathbf{Lie}(Z_r/S)$, ce qui prouve que r est aussi une racine de Z_r relativement à T.

2.3.3. Supposons enfin G réductif; alors Z_r est également réductif [2.1.3, (iv)]; de plus ([SGAD], exp. XIX), on a $\operatorname{rgss}(Z_r) = 1$, — r est une racine de Z_r (donc de G) relativement à T, on a

$$\mathbf{Lie}(Z_r/S) = \mathfrak{g}^{T_r} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^r \oplus \mathfrak{g}^{-r}$$

[où l'on note $\mathfrak{t} = \mathbf{Lie}(T/S)$], et les $\mathcal{O}_S$-Modules localement libres $\mathfrak{g}^r$ et $\mathfrak{g}^{-r}$ sont inversibles (c'est-à-dire de rang 1).

Il résulte aussitôt de la relation ci-dessus que toute racine de Z_r relativement à T (c'est-à-dire toute racine de G relativement à T nulle sur T_r) est une fonction localement constante $S \to \{-r, r\}$. En particulier, si $k \in \mathbf{Z}$, kr n'est une racine de G relativement à T que si $k = \pm 1$.

THÉORÈME 2.3.4. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G, r une racine de G relativement à T. Il existe un homomorphisme de groupes

$$\exp_r : \quad \mathbf{W}(\mathfrak{g}^r) \to G$$

induisant sur les Algèbres de Lie le morphisme canonique $\mathfrak{g}^r \to \mathfrak{g}$, et commutant aux opérations de T, si l'on fait opérer T sur $\mathbf{W}(\mathfrak{g}^r)$ par l'intermédiaire du caractère r et sur G par automorphismes intérieurs. Autrement dit, $\exp_r$ vérifie les formules ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned} \exp_r(X + X') &= \exp_r(X)\exp_r(X'), \\ t\exp_r(X)t^{-1} &= \exp_r(r(t)X), \\ \mathbf{Lie}(\exp_r)(X) &= X. \end{aligned}$$

De plus, $\exp_r$ est une immersion fermée et est uniquement déterminé par les conditions précédentes.

Démonstration en [SGAD], exp. XXII, 1.1.

2.3.4.1. On posera

$$P_r = \exp_r(\mathbf{W}(\mathfrak{g}^r)),$$

c'est un sous-préschéma en groupes fermé de G, normalisé par T, muni canoniquement par les opérations de T d'une structure de groupe vectoriel. On dira que c'est le *groupe vectoriel associé à la racine r*. On a

$$\mathbf{Lie}(P_r/S) = \mathfrak{g}^r.$$

On pose $P_r^* = \exp_r(\mathbf{W}(\mathfrak{g}^r)^*)$; c'est un fibré principal homogène sous $\mathbf{G}_{m\,S}$.

2.3.4.2. L'opération canonique de $\mathbf{G}_{a\,S}$ sur P_r sera notée $(x, u) \rightsquigarrow u^x$. On a donc par définition

$$\exp_r(xX) = \exp_r(X)^x.$$

Toute section $X_r \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*$ [ou, ce qui revient au même, toute section $u_r = \exp_r(X_r) \in P_r^*(S)$] définit un isomorphisme de groupes vectoriels

$$p_r : \quad \mathbf{G}_{a\,S} \xrightarrow{\sim} P_r,$$

par

$$p_r(x) = \exp(xX_r) = u_r^x.$$

Cette construction définit d'ailleurs un isomorphisme

$$P_r^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{Isom}_{S\text{-gr vect}}(\mathbf{G}_{a\,S}, P_r).$$

2.3.4.3. Remarquons que la conclusion de 2.3.4 est vérifiée lorsque $\mathfrak{g}^r = 0$. On peut donc, dans 2.3.4, remplacer l'hypothèse « r est une racine de G relativement à T » par « r est un caractère de T, non trivial sur chaque fibre ».

2.4. Coracine associée à une racine.

THÉORÈME 2.4.1. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G, r une racine de G relativement à T, $-r$ la racine opposée, P_r et P_{-r} les groupes vectoriels associés,

$$\begin{aligned} \exp_r : \quad & \mathbf{W}(\mathfrak{g}^r) \to P_r, \\ \exp_{-r} : \quad & \mathbf{W}(\mathfrak{g}^{-r}) \to P_{-r} \end{aligned}$$

les isomorphismes canoniques.

(i) Le morphisme

$$P_{-r} \times_S T \times_S P_r \to G$$

induit par la loi de multiplication de G est une *immersion*, dont l'image, notée $P_{-r}.T.P_r$, est un sous-préschéma ouvert du sous-groupe fermé Z_r de G défini en 2.3.2.

(ii) Il existe un morphisme de $\mathcal{O}_S$-Modules

$$\mathfrak{g}^r \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathfrak{g}^{-r} \to \mathcal{O}_S,$$

noté $(X, Y) \rightsquigarrow XY$, et un homomorphisme de S-groupes

$$r^* : \quad \mathbf{G}_{m\,S} \to T,$$

tels que pour tout $S' \to S$ et tous $X \in \mathbf{W}(\mathfrak{g}^r)(S')$, $Y \in \mathbf{W}(\mathfrak{g}^{-r})(S')$, on ait

$$\exp_r(X)\exp_{-r}(Y) \in P_{-r}.T.P_r(S') \Leftrightarrow 1 - XY \in \Gamma(S', \mathcal{O}_{S'})^*,$$

et, sous ces conditions,

$$\boxed{\text{(F)} \quad \exp_r(X)\exp_{-r}(Y) = \exp_{-r}\left(\frac{Y}{1-XY}\right) r^*(1-XY)\exp_r\left(\frac{X}{1-XY}\right).}$$

(iii) Les morphismes $(X, Y) \mapsto XY$ et r^* sont uniquement déterminés par ces conditions; le premier est un isomorphisme et met donc en dualité les $\mathcal{O}_S$-Modules $\mathfrak{g}^r$ et $\mathfrak{g}^{-r}$, le second vérifie

$$r \circ r^* = 2 \qquad [\text{c'est-à-dire } r(r^*(z)) = z^2].$$

Démonstration en [SGAD], exp. XXII, 1.1.

2.4.1.1. Les groupes vectoriels P_r et P_{-r} sont donc canoniquement en dualité, par l'intermédiaire du morphisme

$$P_r \times_S P_{-r} \to \mathbf{G}_{a\,S}$$

défini par $\langle \exp_r(X), \exp_{-r}(Y) \rangle = XY$.

A toute section $X_r \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*$ est associée une unique section

$$X_{-r} = X_r^{-1} \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{-r})^*$$

telle que $X_r X_{-r} = 1$. Ces deux sections sont dites *appariées* ainsi que les isomorphismes

$$p_r: \quad \mathbf{G}_{a\,S} \to P_r,$$
$$p_{-r}: \quad \mathbf{G}_{a\,S} \to P_{-r},$$

correspondants.

2.4.1.2. On vérifie aussitôt que si l'on échange les rôles de r et de $-r$ dans l'énoncé, on trouve la même dualité entre $\mathfrak{g}^r$ et $\mathfrak{g}^{-r}$. On trouve également la relation

$$(-r)^* = -r^*$$

[*N. B.* on a $(-r)^*(z) = r^*(z)^{-1}$.]

2.4.1.3. Il résulte de la formule (F) que si $G = Z_r$, c'est-à-dire si $\mathrm{rgss}(G) = 1$, la loi de groupe de G est déterminée par la donnée des morphismes r et r^* et du $\mathcal{O}_S$-Module inversible $\mathfrak{g}^r$; pour les détails, *voir* [SGAD], exp. XX, n^{os} 4 et 5; *voir* aussi 4.2 ci-dessous.

2.4.1.4. Le morphisme r^* est appelé la *coracine associée à la racine r.*

2.4.2. *Racine et coracine infinitésimales.* — Notons $\mathfrak{t}$ l'Algèbre de Lie de T. Posons $\bar{r} = \mathbf{Lie}(r)$, $H_r = \mathbf{Lie}(r^*)$ (1). La forme linéaire

$$\bar{r}: \quad \mathfrak{t} \to \mathcal{O}_S$$

est la *racine infinitésimale* associée à r, la section $H_r \in \Gamma(S, \mathfrak{t})$ la *coracine infinitésimale* correspondante. On a

$$\overline{-r} = -\bar{r}, \qquad H_{-r} = -H_r, \qquad \bar{r}(H_r) = 2.$$

En particulier, si 2 est inversible sur S, $\bar{r}$ et H_r sont non nuls sur chaque fibre.

Dérivant (F) et les formules de 2.3.4, on obtient aussitôt les relations suivantes, pour tout $S' \to S$ et tous $X, X' \in \mathbf{W}(\mathfrak{g}^r)(S')$, $Y \in \mathbf{W}(\mathfrak{g}^{-r})(S')$, $H \in \mathbf{W}(\mathfrak{t})(S')$, $t \in T(S')$:

$$(1) \qquad \mathrm{Ad}(t)H = H, \qquad \mathrm{Ad}(t)X = r(t)X, \qquad \mathrm{Ad}(t)Y = r(t)^{-1}Y.$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathrm{Ad}(\exp_r(X))H = H - \bar{r}(H)X, \\ \mathrm{Ad}(\exp_r(X))X' = X', \\ \mathrm{Ad}(\exp_r(X))Y = Y - (XY)H_r + (XY)X. \end{cases}$$

$$(3) \qquad [H, X] = \bar{r}(H)X, \qquad [H, Y] = -\bar{r}(H)Y, \qquad [X, Y] = -(XY)H_r.$$

Remarquons pour terminer que *si H_r est non nul sur chaque fibre,* la dernière formule (3) donne une définition de la dualité entre $\mathfrak{g}^r$ et $\mathfrak{g}^{-r}$; en particulier, X_r et X_{-r} sont alors appariés si et seulement si $[X_r, X_{-r}] = -H_r$.

2.5. Symétrie par rapport à une racine.

2.5.1. *La symétrie dans le groupe de Weyl.*

2.5.1.1. Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G. Le *groupe de Weyl* de G relativement à T est, par définition, le faisceau quotient

$$W_G(T) = \mathbf{Norm}_G(T)/\mathbf{Cent}_G(T) = \mathbf{Norm}_G(T)/T,$$

cf. 2.1.4. Il est représentable par un S-préschéma en groupes quasi-fini étale et séparé sur S (1.5.1), qui opère naturellement sur T.

2.5.1.2. Supposons d'abord $\mathrm{rgss}(G) = 1$. Alors pour tout $s \in S$, le $\bar{s}$-groupe $W_G(T)_{\bar{s}} = W_{G_{\bar{s}}}(T_{\bar{s}})$ a deux points géométriques (Bible, exp. 12); on en déduit facilement que $W_G(T)$ est isomorphe (évidemment de manière unique) au groupe constant $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})_S$. En particulier, $W_G(T)$ possède une section canonique, correspondant à l'unique élément de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ distinct de l'élément unité. Cette section est appelée la *symétrie* de $W_G(T)$.

2.5.1.3. Revenons maintenant au cas d'un groupe de rang quelconque. Soit r une racine de G relativement à T; considérons le sous-groupe Z_r de G défini en 2.3.2; c'est un groupe réductif de rang semi-simple 1 (2.3.3) auquel on peut donc appliquer le résultat précédent. Comme

$$\mathbf{Norm}_{Z_r}(T) = \mathbf{Norm}_G(T) \cap Z_r,$$

$W_{Z_r}(T)$ s'identifie canoniquement à un sous-faisceau de $W_G(T)$ et la symétrie de $W_{Z_r}(T)$ définit une section s_r de $W_G(T)$. Cette section est appelée la *symétrie par rapport à la racine* r; c'est un automorphisme de T; on a les relations

$$s_{-r} = s_r, \qquad s_r \circ s_r = \mathrm{id}.$$

Théorème 2.5.2. — *Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G, r une racine de G relativement à T, $s_r \in W_G(T)(S)$ la symétrie par rapport à r.*

(i) *s_r opère sur T comme suit :*

$$s_r(t) = t.r^*(r(t))^{-1};$$

en particulier, $r \circ s_r = -r$, $s_r \circ r^* = -r^*$.

(ii) Pour tout $X \in \mathbf{W}(\mathfrak{g}^r)^*(S)$, posons

$$w_r(X) = \exp_r(X) \exp_{-r}(X^{-1}) \exp_r(X);$$

alors $w_r(X)$ est une section de $\mathbf{Norm}_G(T)$ qui se projette sur s_r et donc vérifie pour toute section t de T (sur un $S' \to S$ quelconque), la relation

$$w_r(X) t w_r(X)^{-1} = s_r(t).$$

(iii) Le morphisme

$$w_r : \quad \mathbf{W}(\mathfrak{g}^r)^* \to \mathbf{Norm}_G(T)$$

ainsi défini vérifie les relations suivantes [z section de $\mathbf{G}_{m\,S}$, X et X' sections de $\mathbf{W}(\mathfrak{g}^r)^*$] :

$$w_r(zX) = r^*(z)\, w_r(X) = w_r(X)\, r^*(z)^{-1},$$
$$w_r(X)\, w_r(X') = r^*(-XX'^{-1}).$$

Si $X \in \mathbf{W}(\mathfrak{g}^r)^*(S')$, $X' \in \mathbf{W}(\mathfrak{g}^r)(S')$, $S' \to S$, on a

$$\mathrm{Ad}(w_r(X))X' = (X^{-1}X')X^{-1},$$
$$\mathrm{int}(w_r(X)) \exp_r(X') = \exp_{-r}((X^{-1}X')X^{-1}).$$

(iv) Les morphismes w_r et w_{-r} sont liés par les relations

$$w_{-r}(X^{-1}) = w_r(X)$$
$$w_r(X)\, w_{-r}(Y) = r^*(-XY).$$

Démonstration en [SGAD], exp. XX, 3.1 et 3.6.

2.5.2.1. En particulier, on a

$$w_r(X)^2 = r^*(-1) \in {}_2T(S).$$

2.5.2.2. Par (iii), on a

$$w_r(X) \exp_r(X)\, w_r(X)^{-1} = \exp_{-r}(X^{-1}),$$

d'où, en reportant dans la définition de $w_r(X)$, la relation

$$[w_r(X) \exp_r(X)]^3 = e.$$

En fait, on peut prouver ([SGAD], exp. XX, 3.8) que cette relation caractérise $w_r(X)$ parmi les sections de $\mathbf{Norm}_G(T)$ se projetant sur s_r.

2.5.2.3. Supposons $S \neq \emptyset$ et T trivial. Écrivons $T = D_S(M)$, où M est un groupe abélien libre de type fini, de dual M^*. On a alors (1.4.2)

$$r \in \mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(T, \mathbf{G}_{m\,S}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{loc\,const}}(S, M),$$
$$r^* \in \mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(\mathbf{G}_{m\,S}, T) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{loc\,const}}(S, M^*).$$

Supposons que r (resp. r^*) s'identifie à une fonction constante $S \to M$ (resp. $S \to M^*$), c'est-à-dire à un élément de M (resp. M^*). On a d'abord

(DR I) $$(r^*, r) = 2.$$

La symétrie s_r opère dans M et M^*, et (i) redonne les formules classiques

$$\begin{cases} s_r(x) = x - (r^*, x)\,r, & x \in M, \\ s_r(u) = u - (u, r)\,r^*, & u \in M^*. \end{cases}$$

§ 3. Déploiements et épinglages.

3.1. Groupes réductifs déployés.

DÉFINITION 3.1.1. — Soient S un préschéma *non vide*, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G. On appelle *déploiement de G relativement à T* la donnée

(i) d'un groupe abélien libre M et d'un isomorphisme $T \simeq D_S(M)$,

(ii) d'une partie R de M,

vérifiant les conditions suivantes :

1° on a

$$\mathbf{Lie}(G/S) = \mathbf{Lie}(T/S) \oplus \coprod_{r \in R} \mathbf{Lie}(G/S)^r,$$

chaque $\mathbf{Lie}(G/S)^r$ étant *libre* de rang 1 (les $r \in R$ sont donc des racines de G relativement à T);

2° la coracine (2.4.1.4) correspondant à chaque racine $r \in R$ est un élément $r^* \in M^*$ (c'est-à-dire est donnée par une fonction *constante* $S \to M^*$).

3.1.1.1. Il résulte aussitôt de la condition 1° que les éléments de R sont exactement les éléments de M qui sont des racines de G relativement à T; plus précisément, les racines de G relativement à T sont les fonctions localement constantes $S \to R$.

3.1.1.2. Si $r \in R$, $\Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^* \neq \emptyset$ en vertu de la seconde partie de 1°; soit donc $w = w_r(X_r)$, avec $X_r \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*$ (2.5.2); par 2.5.2.3, on a

$$\begin{aligned} s \circ \mathrm{int}(w) &= s_r(s) = s - (r^*, s)\,r, \\ \mathrm{int}(w) \circ s &= s_r(s^*) = s^* - (s^*, r)\,r^*, \end{aligned}$$

pour tout $s \in R$. Par transport de structure [par int (w)], $s_r(s)$ est une racine de G relativement à T, $s_r(s^*)$ la coracine correspondante; si l'on note R^* l'ensemble des r^*, $r \in R$, on a donc par 3.1.1.1

(DR II) $$r, s \in R \Rightarrow s_r(s) \in R, \quad s_r(s^*) \in R^*.$$

Par 2.3.3, on a en outre

(DRIII) $$r \in R \Rightarrow 2r \notin R.$$

3.1.1.3. Les conditions (DR I) de 2.5.2.3, (DR II) et (DR III) montrent que (M, M^*, R, R^*) est une *donnée radicielle réduite*, au sens de [SGAD], exp. XXI (*voir* aussi ci-dessous 3.6.1).

Définition 3.1.2. — Soient S un préschéma *non vide*, G un S-groupe réductif. On appelle *déploiement* de G la donnée d'un tore maximal T de G et d'un déploiement $D = (M, R)$ de G relativement à T.

Si S est un préschéma non vide, on appelle *S-groupe réductif déployé* un triplet (G, T, D) où G est un S-groupe réductif et (T, D) un déploiement de G.

3.1.2.1. Si $(G, T, D) = (G, T, M, R)$ est un S-groupe réductif déployé, on note $\mathcal{R}(G, T, D)$ [ou simplement $\mathcal{R}(G)$ s'il n'y a pas de confusion possible] la donnée radicielle de 3.1.1.3.

Proposition 3.1.3. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G, supposé *trivial*. Alors G est *localement déployable* relativement à T : tout $s \in S$ possède un voisinage ouvert U tel que le U-groupe réductif G_U soit déployable relativement à son tore maximal T_U.

Démonstration facile. Comme un S-groupe réductif possède localement pour la topologie étale des tores maximaux (2.1.4) et comme un tore est localement trivial pour la topologie étale (1.4.3), on en déduit le

Corollaire 3.1.4. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif (resp. et T un tore maximal de G). Alors G est *localement déployable* (resp. relativement à T) *pour la topologie étale.*

En particulier :

Corollaire 3.1.5. — Soient k un corps et G un k-groupe réductif. Il existe une extension séparable finie K/k telle que G_K soit déployable.

Remarque 3.1.6. — La démonstration de 3.1.3. ([SGAD], exp. XXII, n° 2) montre aussitôt que si l'on suppose, dans 3.1.3, S connexe non vide et $H^1(S, \mathcal{O}_S^*) = 0$, G est déployable relativement à T. Ces deux conditions sont vérifiées en particulier pour $S = \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$; comme tout $\mathbf{Z}$-tore est trivial (1.4.4), on en déduit qu'un $\mathbf{Z}$-groupe réductif possédant un tore maximal est déployable relativement à ce tore.

3.1.7. Si (G, T, M, R) est un S-groupe déployé, on voit facilement que **Cent** (G) s'identifie à $D_S(M/\Gamma_0(R))$ où $\Gamma_0(R)$ est le sous-groupe de M engendré par R ([SGAD], exp. XXII, 3.1). Par 2.1.7, on en déduit que G est semi-simple (resp. adjoint) si et seulement si R engendre l'espace vectoriel $M \otimes \mathbf{Q}$ (resp. le groupe M).

On dit que G est simplement connexe si R^* engendre le groupe M^*. *Voir* [SGAD], exp. XXII, n° 3, à ce sujet.

3.2. Groupe de Weyl d'un groupe déployé.

3.2.1. Soient S un préschéma non vide, (G, T, D) un S-groupe réductif déployé, $\mathcal{R}$ la donnée radicielle correspondante (3.1.2.1), W le groupe de Weyl de $\mathcal{R}$ (groupe de transformations de M engendré par les s_r, $r \in R$). On a une application canonique

$$W \to \mathrm{Isom}_{gr}(M, M) \to \mathrm{Isom}_{S\text{-}g}(T, T).$$

Si W_S est le groupe constant associé à W, on a par 1.3.1 un homomorphisme canonique

$$W_S \to \mathbf{Aut}_{S\text{-gr}}(T).$$

THÉORÈME 3.2.2. — L'homomorphisme précédent identifie W_S au groupe de Weyl $W_G(T) = \mathbf{Norm}_G(T)/T$ considéré comme préschéma en groupes d'opérateurs de T.

Par 2.5.2, on en déduit aussitôt le

COROLLAIRE 3.2.3. — Si G est un S-groupe réductif déployable relativement à son tore maximal T, le groupe $W_G(T)$ est constant et l'application canonique

$$\mathbf{Norm}_G(T)(S) = \mathrm{Norm}_{G(S)}(T_S) \to W_G(T)(S)$$

est surjective.

Par 3.1.4, on en tire aussi le

COROLLAIRE 3.2.4. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G. Alors le S-groupe $W_G(T)$ est *constant tordu* (et en particulier *fini* sur S).

3.3. Groupes de Borel; « grosse cellule ».

DÉFINITION 3.3.1. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif. On appelle *groupe de Borel* de G un sous-préschéma en groupes B de G, lisse et de présentation finie sur S, tel que pour tout $s \in S$, $B_{\bar{s}}$ soit un groupe de Borel (c'est-à-dire un sous-groupe résoluble lisse connexe maximal) du $\bar{s}$-groupe $G_{\bar{s}}$.

THÉORÈME 3.3.2. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif.

(i) Soit B un groupe de Borel de G. Alors B est un sous-groupe fermé de G, on a $B = \mathbf{Norm}_G(B)$, et le faisceau quotient G/B est représentable par un S-préschéma lisse et *projectif* sur S.

(ii) Soient B et B' deux groupes de Borel de G. Alors B et B' sont *conjugués* dans G, *localement pour la topologie étale* : pour tout $s \in S$, il existe un morphisme étale $S' \to S$ couvrant s et un $g \in G(S')$ tels que $B'_{S'} = \mathrm{int}(g) B_{S'}$.

Démonstration en [SGAD], exp. XXII, 5.3.

3.3.2.1. Il résulte de (ii) que, sous les conditions de (i), le foncteur **Bor** (G) des groupes de Borel de G (dont les sections sur un $S' \to S$ sont les groupes de Borel de $G_{S'}$) est représentable par le quotient G/B. En fait ([SGAD], exp. XXII, 5.8.3), **Bor**(G) est toujours représentable par un S-préschéma lisse et projectif.

3.3.2.2. Il résulte de (ii) et de 1.5.5 que si B et B' sont deux groupes de Borel du S-groupe réductif G, de tores maximaux T et T', les couples (B, T) et (B', T') sont conjugués localement pour la topologie étale.

3.3.2.3. En fait, on peut remplacer dans 3.3.2 (ii) la topologie étale par la topologie de *Zariski* (*cf.* [SGAD], exp. XXVI); il revient au même de dire que la fibration $G \to G/B$ de (i) est *localement triviale.*

3.3.2.4. On peut également établir les résultats analogues pour les groupes paraboliques (*cf.* [SGAD], exp. XXVI).

La proposition suivante donne une manière de construire des groupes de Borel dans un groupe déployé :

PROPOSITION 3.3.3. — Soient S un préschéma non vide, (G, T, M, R) un S-groupe réductif déployé, et R_+ un système de racines positives de la donnée radicielle $\mathcal{R}(G)$.

(i) Pour tout ordre total sur R_+, le morphisme

$$\prod_{r \in R_+} P_r \to G$$

induit par la loi de multiplication dans G est une *immersion fermée*, dont l'image est un sous-préschéma en groupes U_{R_+} de G, indépendant de l'ordre choisi sur R_+.

(ii) Le groupe U_{R_+} est normalisé par T, on a $T \cap U_{R_+} = e$, le produit semi-direct $B_{R_+} = T . U_{R_+}$ est un groupe de Borel de G.

Démonstration en [SGAD], exp. XXII, 5.5.1 et 5.6.5. Des propriétés de variance des $\exp_r$ sous T, on tire aussitôt de (i) le

COROLLAIRE 3.3.4. — Soient S un préschéma non vide, (G, T, M, R) un S-groupe réductif déployé; soient $r, s \in R$ avec $r + s \neq 0$. Ordonnons l'ensemble des $ir + js \in R$, $i, j \in \mathbf{N}$, $i, j \neq 0$ de manière quelconque. Pour chaque couple (i, j) comme ci-dessus, il existe un unique morphisme de $\mathcal{O}_S$-Modules

$$f_{r,s,i,j}:\quad (\mathfrak{g}^r)^{\otimes i} \otimes_{\mathcal{O}_S} (\mathfrak{g}^s)^{\otimes j} \to \mathfrak{g}^{ir+js},$$

tel que pour tout $S' \to S$ et tous $X \in \mathbf{W}(\mathfrak{g}^r)(S')$, $Y \in \mathbf{W}(\mathfrak{g}^s)(S')$, on ait

$$\exp_r(X)\exp_s(Y)\exp_r(X)^{-1} = \exp_s(Y)\prod_{i,j}\exp_{ir+js}(f_{r,s,i,j}(X^i Y^j)).$$

3.3.4.1. En d'autres termes, choisissons pour chaque $r \in R$ un $X_r \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*$ et posons $p_r(x) = \exp(xX_r)$ (*cf.* 2.3.4.2). La relation précédente prend la forme habituelle ([2], p. 27) :

$$p_r(x)\, p_s(y)\, p_r(-x) = p_s(y)\prod_{i,j} p_{ir+js}(C_{i,j,r,s}\, x^i y^j),$$

où $C_{i,j,r,s} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$.

Proposition 3.3.5. — Soient S un préschéma non vide, (G, T, M, R) un S-groupe réductif déployé, R_+ un système de racines positives, $R_- = - R_+$ le système de racines positives opposé, $B_{R_+} = T.U_{R_+}$ et $B_{R_-} = T.U_{R_-}$ les groupes de Borel correspondants.

Le morphisme

$$U_{R_-} \times_S T \times_S U_{R_+} \to G$$

induit par la loi de multiplication de G est une *immersion ouverte.*

Les deux membres étant plats sur S, l'assertion se vérifie sur les fibres géométriques, et l'on est ramené à l'énoncé habituel (Bible, exp. 15, prop. 1).

3.3.5.1. L'image de l'immersion précédente sera notée Ω_{R_+}. C'est un voisinage ouvert de la section unité de G, qui est donc *schématiquement dense* dans G; on dit que c'est la « *grosse cellule* » définie par R_+. Un homomorphisme de G dans un S-faisceau en groupes pour (fppf) est déterminé par sa restriction à Ω_{R_+}, c'est-à-dire par ses restrictions à T et à chaque P_r, $r \in R$.

3.3.5.2. On peut donner plus généralement un énoncé qui généralise le théorème de Bruhat; *voir* à ce sujet [SGAD], exp. XXII, 5.7.

3.4. Groupes réductifs épinglés.

Définition 3.4.1. — Soient S un préschéma non vide, (G, T, M, R) un S-groupe réductif déployé. On appelle *épinglage* de G la donnée d'un *système de racines simples* R_0 de R et pour chaque $r \in R_0$ d'une section

$$X_r \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*.$$

3.4.1.1. Si S est un préschéma non vide, on appelle S-groupe réductif *épinglé* un S-groupe réductif muni d'un déploiement et d'un épinglage de ce déploiement. On notera donc $(G, T, M, R, R_0, (X_r)_{r\in R_0})$ si l'on tient à être explicite.

3.4.1.2. Comme tout groupe déployé peut être épinglé, il résulte de 3.1.4 que tout groupe réductif est *localement épinglable pour la topologie étale.*

3.4.1.3. Soit $(G, T, M, R, R_0, (X_r)_{r\in R_0})$ un S-groupe réductif épinglé. Le système de racines simples R_0 définit un système de racines positives R_+, le système opposé R_-, donc les groupes de Borel $B = B_{R_+} = T.U$, $B^- = B_{R_-} = T.U^-$, la « grosse cellule » $\Omega = U^-.T.U$, etc.

D'autre part, chaque X_r, $r\in R_0$, définit canoniquement un

$$X_{-r}\in\Gamma(S, \mathfrak{g}^{-r})^*$$

apparié (2.4.1.1), des isomorphismes de groupes vectoriels (2.3.4.2)

$$p_r:\quad \mathbf{G}_{aS} \xrightarrow{\sim} P_r,$$
$$p_{-r}:\quad \mathbf{G}_{aS} \xrightarrow{\sim} P_{-r},$$

et une section

$$w_r\in\mathbf{Norm}_G(T)(S)$$

définie par (2.5)

$$w_r = w_r(X_r) = p_r(1)\,p_{-r}(1)\,p_r(1).$$

On a alors (2.5.2)

$$w_r^2 = r^*(-1), \qquad \operatorname{int}(w_r)\,t = s_r(t) = t.r^*(r(t))^{-1},$$
$$\operatorname{int}(w_r)\,p_r(x) = p_{-r}(x), \qquad \operatorname{Ad}(w_r)\,X_r = X_{-r}.$$

3.4.2. Soient S un préschéma non vide, $(G, T, M, R, R_0, (X_r)_{r\in R_0})$ un S-groupe réductif épinglé. Soit R_1 une partie du système de racines simples R_0; notons T_{R_1} le tore maximal du groupe de type multiplicatif $\bigcap_{r\in R_1}\operatorname{Ker} r$, et posons

$$Z_{R_1} = \mathbf{Cent}_G(T_{R_1}).$$

C'est un S-groupe réductif [2.1.3 (iv)]. Soit R' l'ensemble des éléments de R qui sont combinaison linéaire des éléments de R_1. On vérifie facilement que (T, M, R') est un déploiement de Z_{R_1} et que $(R_1, (X_r)_{r\in R_1})$ en est un épinglage.

De plus, on vérifie ([SGAD], exp. XXII, 5.10) que $B_{R_1} = B\cap Z_{R_1}$ est le groupe de Borel de Z_{R_1} correspondant au système de racines positives défini par R_1. On a $B_{R_1} = T.U_{R_1}$, où $U_{R_1} = U\cap Z_{R_1}$.

Nous nous intéresserons en particulier aux cas suivants : si $R_1 = \{ r \}$, on a

$$Z_{\{r\}} = Z_r, \qquad U_{\{r\}} = P_r, \qquad B_{\{r\}} = T.P_r;$$

si $R = \{ r, s \}$, on notera

$$Z_{\{r,s\}} = Z_{rs}, \qquad U_{\{r,s\}} = U_{rs};$$

si A_{rs} désigne l'ensemble des racines positives qui sont combinaisons linéaires de r et de s, on a

$$U_{rs} = \prod_{t \in A_{rs}} P_t.$$

3.4.3. Avec les notations précédentes, on a $\operatorname{rgss}(Z_{R_1}) = \operatorname{Card}(R_1)$; en particulier

$$\operatorname{rgss}(Z_r) = 1, \qquad \operatorname{rgss}(Z_{rs}) = 2 \quad \text{si } r \neq s.$$

3.5. **Homomorphismes de groupes épinglés.**

3.5.1. Soit S un préschéma non vide; rappelons que S est dit de caractéristique $p \neq 0$ si le nombre premier p est nul sur S; nous poserons alors $p(S) = p$. S'il n'existe pas de nombre premier p nul sur S, nous poserons $p(S) = 1$.

Si q est un entier > 0 tel que $x \mapsto x^q$ soit un endomorphisme du groupe $\mathbf{G}_{a\,S}$, q est une puissance de $p(S)$ (et réciproquement).

Définition 3.5.2. — Soient S un préschéma non vide, (G, T, M, R) et (G', T', M', R') deux S-groupes réductifs déployés, $f: G \to G'$ un homomorphisme de groupes. On dit que f est *compatible avec les déploiements* donnés si la restriction f à T se factorise en un morphisme $f_T: T \to T'$ de la forme $f_T = \mathbf{D}_S(h)$, où

$$h: \quad M' \to M$$

est un homomorphisme de groupes vérifiant la condition suivante :

Il existe une bijection $u: R \xrightarrow{\sim} R'$ et pour chaque $r \in R$ un entier $q(r) > 0$ tel que $x \mapsto x^{q(r)}$ soit un endomorphisme de $\mathbf{G}_{a\,S}$ et que

$$h(u(r)) = q(r)r, \qquad {}^t h(r^*) = q(r)\, u(r)^*.$$

Proposition 3.5.3. — Sous les conditions de la définition précédente,

(i) il existe pour chaque $r \in R$ un unique isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-Modules

$$f_r: \quad (\mathfrak{g}^r)^{\otimes q(r)} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'^{u(r)}$$

tel que

$$f(\exp_r(X)) = \exp^{u(r)}(f_r(X^{q(r)}))$$

pour tout $X \in \mathbf{W}(\mathfrak{g}^r)(S')$, $S' \to S$;

(ii) Pour tout $r \in R$, on a $u(-r) = -u(r)$ et f_r et f_{-r} sont contragrédients l'un de l'autre.

(iii) Pour tout $r \in R$, tout $X \in \mathbf{W}(\mathfrak{g}^r)^*(S')$, $S' \to S$, on a

$$f(w_r(X)) = w_{u(r)}(X^{q(r)}).$$

Voir [SGAD], exp. XXII, 4.2.3.

3.5.3.1. Sous les conditions précédentes, la restriction de f à une « grosse cellule » Ω_{R_+} s'écrit explicitement :

$$f\Big(\prod_{r \in R_-} \exp_r(X_r) . t . \prod_{r \in R_+} \exp_r(X_r)\Big)$$
$$= \prod_{r \in R_-} \exp_{u(r)}(f_r(X_r^{q(r)})) . f_T(t) . \prod_{r \in R_+} \exp_{u(r)}(f_r(X_r^{q(r)})).$$

3.5.3.2. On en déduit facilement ([SGAD], exp. XXII, 4.2.6) que f est fidèlement plat si et seulement si f_T l'est, que le noyau de f est fini sur S si et seulement si celui de f_T l'est, que le noyau de f est central dans G si et seulement si chaque $q(r)$ est égal à 1. En particulier, f est une *isogénie* si et seulement si f_T est une isogénie, c'est-à-dire si h est injectif et de conoyau fini.

Le procédé précédent permet d'obtenir essentiellement toutes les isogénies; on a, en effet, la

PROPOSITION 3.5.4. — Soient S un préschéma, G et G' deux S-groupes réductifs, $f : G \to G'$ une isogénie (= un homomorphisme fidèlement plat et de noyau fini sur S). Localement pour la topologie étale, on peut trouver des déploiements de G et G' avec lesquels f soit compatible.

Voir [SGAD], exp. XXII, 4.2.13.

DÉFINITION 3.5.5. — Soient S un préschéma non vide,

$$(G, T, M, R, R_0, (X_r)) \quad \text{et} \quad (G', T', M', R', R'_0, (X'_{r'}))$$

deux S-groupes réductifs *épinglés*. On dit que l'homomorphisme de groupes

$$f : \ G \to G'$$

est compatible avec les épinglages donnés, ou est un *S-morphisme de groupes épinglés*, s'il est compatible avec les déploiements sous-jacents (3.5.2) et si, avec les notations de 3.5.2, on a les deux conditions supplémentaires suivantes :

$$u(R_0) = R'_0,$$
$$f(\exp(X_r)) = \exp(X'_{u(r)}) \qquad \text{pour} \quad r \in R_0.$$

3.5.5.1. Avec les notations de 3.4.1.3, on a donc pour $r \in R_0$,

$$f(p_r(x)) = p_{u(r)}(x^{q(r)}),$$
$$f(p_{-r}(x)) = p_{-u(r)}(x^{q(r)}),$$
$$f(w_r) = w'_{u(r)}.$$

3.5.5.2. Sous les conditions précédentes, soit $R_1 \subset R_0$. Posons $R'_1 = u(R_1)$ et considérons les groupes épinglés Z_{R_1} et $Z'_{R'_1}$ (3.4.2) on vérifie aussitôt que f induit un S-morphisme de groupes épinglés

$$f_{R_1}: \quad Z_{R_1} \to Z'_{u(R_1)}.$$

3.5.5.3. Sous les conditions de 3.5.5, soit $g: G \to G'$ un autre S-morphisme de groupes épinglés tel que $g_T = f_T$; alors $f = g$.

En effet, on a plus généralement le

LEMME 3.5.6. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif épinglé, H un S-faisceau en groupes pour (fppf). Soient

$$f,\ g: \quad G \to H$$

deux homomorphismes de groupes. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f = g$;
(ii) f et g coïncident sur T et sur chaque P_r, $r \in R_0 \cup - R_0$.
(iii) f et g coïncident sur T et sur chaque P_r, $r \in R_0$, et l'on a $f(w_r) = g(w_r)$ pour $r \in R_0$.

En effet, on a trivialement (i) $\Rightarrow$ (ii); on a (ii) $\Rightarrow$ (iii) par définition des w_r; supposons enfin (iii); chaque racine est transformée d'une racine simple par un élément du groupe de Weyl, donc f et g coïncident sur chaque P_r, $r \in R$, donc coïncident par 3.3.5.1.

3.6. Le foncteur $\mathcal{R}$. Énoncé du théorème fondamental.

3.6.1. *Données radicielles épinglées.* — Rappelons ([SGAD], exp. XXI) qu'une *donnée radicielle réduite* $\mathcal{R} = (M, M^*, R, R^*)$ consiste en la donnée de deux groupes abéliens libres de type fini en dualité M et M^*, d'une partie R (resp. R^*) de M (resp. M^*) et d'une bijection $r \mapsto r^*$ de R sur R^*, vérifiant les axiomes (DR I), (DR II) et (DR III) énoncés précédemment.

Une donnée radicielle réduite *épinglée* est une donnée radicielle munie d'un système de racines simples.

3.6.2. Soient $\mathcal{R} = (M, M^*, R, R^*)$ et $\mathcal{R}' = (M', M^*, R', R'^*)$ deux données radicielles réduites et q un entier > 0. On dit que l'homomorphisme de groupes

$$h: \quad M \to M'$$

est un *q-morphisme* de données radicielles réduites (et l'on note $h : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$) s'il existe une bijection $u : R \xrightarrow{\sim} R'$ et une application $r \mapsto q(r)$ de R dans l'ensemble des puissances positives de q, telles que

$$h(u(r)) = q(r)r, \qquad {}^t h(r^*) = q(r)\, u(r)^* \qquad \text{pour} \quad r \in R.$$

Si $(\mathcal{R}, R_0)$ et $(\mathcal{R}', R'_0)$ sont deux données radicielles réduites épinglées, on dit que h est un q-morphisme de données radicielles réduites épinglées si, outre les conditions précédentes, on a $u(R_0) = R'_0$.

3.6.3. Soient S un préschéma non vide, $(G, T, M, R, R_0, (X_r)_{r\in R_0})$ un S-groupe réductif épinglé. Alors (M, M^*, R, R^*, R_0) est une donnée radicielle réduite épinglée qu'on notera $\mathcal{R}(G, T, \ldots)$ ou simplement $\mathcal{R}(G)$.

Si $(G, \ldots)$ et $(G', \ldots)$ sont deux S-groupes réductifs épinglés et si

$$f: \quad G \to G'$$

est un S-morphisme de groupes épinglés (3.5.5), l'application $h : M' \to M$ de 3.5.5 est par définition un $p(S)$-morphisme de données radicielles réduites épinglées [$p(S)$ est l'entier défini en 3.5.1] :

$$\mathcal{R}(f): \quad \mathcal{R}(G') \to \mathcal{R}(G).$$

3.6.4. Le préschéma S non vide étant fixé [et donc l'entier $p(S)$], on a donc défini un *foncteur contravariant $\mathcal{R}$ de la catégorie des S-groupes réductifs épinglés dans la catégorie des données radicielles réduites épinglées* [pour les notions de morphismes définies ci-dessus; on notera que les morphismes de la seconde catégorie dépendent de l'entier $p(S)$].

Notre but est le

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Le foncteur $\mathcal{R}$ précédent est une équivalence de catégories.*

Comme d'habitude, un tel énoncé se divise en deux :

THÉORÈME 3.6.5. — Soient S un préschéma non vide, $(G, T, \ldots)$ et $(G', T', \ldots)$ deux S-groupes réductifs épinglés,

$$h: \quad \mathcal{R}(G') \to \mathcal{R}(G)$$

un $p(S)$-morphisme de données radicielles réduites épinglées. Il existe un unique S-morphisme de groupes épinglés

$$f: \quad G \to G'$$

tel que $\mathcal{R}(f) = h$.

THÉORÈME 3.6.6 (« *Théorème d'existence* »). — Soit $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite. Il existe un **Z**-groupe réductif déployé G tel que $\mathcal{R}(G) \simeq \mathcal{R}$.

Remarquons que l'assertion d'unicité de 3.6.5 a été démontrée en 3.5.5.3. L'assertion d'existence donne en particulier le

COROLLAIRE 3.6.5.1 (« *Théorème d'unicité* »). — Soient S un préschéma non vide, G et G' deux S-groupes réductifs déployés. Si les données radicielles $\mathcal{R}(G)$ et $\mathcal{R}(G')$ sont isomorphes, G et G' sont isomorphes.

Nous donnerons ci-dessous une idée de la démonstration de 3.6.5.1, renvoyant à [SGAD], exp. XXIII pour la démonstration du cas général 3.6.5. Il existe plusieurs démonstrations de 3.6.6 ([1], [3], et [SGAD], exp. XXV).

§ 4. Démonstration du théorème d'unicité.

4.1. La réduction au rang ≤ 2.

Reprenons intégralement les notations de 3.4.

4.1.1. Si r et s sont deux racines simples du S-groupe réductif épinglé G, on notera n_{rs} l'ordre de l'élément $s_r s_s$ du groupe de Weyl W. On aura alors $(s_r s_s)^{n_{rs}} = e$, et donc $(w_r w_s)^{n_{rs}} \in T(S)$. On posera

$$t_{rs} = (w_r w_s)^{n_{rs}} \in T(S).$$

Pour tout $r \in R_0$, on a $n_{rr} = 2$, et l'on notera

$$t_r = t_{rr} = w_r^2 = r^*(-1) \in T(S).$$

Énonçons maintenant le premier théorème de générateurs et relations :

THÉORÈME 4.1.2. — Soient S un préschéma non vide, G un S-groupe réductif épinglé, H un S-faisceau en groupes pour (fppf),

$$f_T : \quad T \to H,$$
$$f_r : \quad P_r \to H, \quad r \in R_0,$$

des homomorphismes de groupes,

$$h_r \in H(S), \qquad r \in R_0,$$

des sections de H. Pour qu'il existe un homomorphisme de groupes

$$f : \quad G \to H$$

(nécessairement unique par 3.5.6) induisant f_T et les f_r ($r \in R_0$) et vérifiant $f(w_r) = h_r$ pour $r \in R_0$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) pour tout $r \in R_0$, il existe un homomorphisme de groupes

$$F_r : \quad Z_r \to H$$

induisant f_T, f_r et vérifiant $F_r(w_r) = h_r$;

(ii) pour tout $(r, s) \in R_0 \times R_0$, $r \neq s$, on a

$$(h_r h_s)^{n_{rs}} = f_T(t_{rs});$$

(iii) pour tout $(r, s) \in R_0 \times R_0$, $r \neq s$, il existe un homomorphisme de groupes

$$f_{rs}: \quad U_{rs} \to H$$

prolongeant f_r et f_s, et vérifiant en outre la condition suivante : pour toute racine positive t de la forme $ir + js$, avec $j \neq 0$ [et donc $s_r(t)$ positive et par suite $\operatorname{int}(w_r)P_t \subset U_{rs}$], tout $S' \to S$ et tout $x \in P_t(S')$, on a

$$h_r f_{rs}(x) h_s^{-1} = f_{rs}(w_r x w_r^{-1}).$$

Pour la démonstration, *voir* [SGAD], exp. XXIII, 2.3, la légère différence dans l'énoncé de (iii) étant justifiée par [SGAD], exp. XXIII, 6.2.1.

Les conditions (ii) et (iii) du théorème précédent sont évidemment vérifiées lorsqu'il existe des homomorphismes de groupes

$$F_{rs}: \quad Z_{rs} \to H$$

prolongeant f_T, f_r et f_s, et vérifiant $F_{rs}(w_r) = h_r$, $F_{rs}(w_s) = h_s$, où, ce qui revient au même par 3.5.6, prolongeant les morphismes F_r et F_s de (i). On a donc le

COROLLAIRE 4.1.3. — Soient S un préschéma non vide, G un S-groupe épinglé de rang semi-simple ≥ 1, H un S-faisceau en groupes pour (fppf). Pour chaque $(r, s) \in R_0 \times R_0$, soit

$$F_{rs}: \quad Z_{rs} \to H$$

un homomorphisme de groupes. Pour qu'il existe un homomorphisme de groupes

$$f: \quad G \to H$$

prolongeant les F_{rs}, il faut et il suffit que pour tout $(r, s) \in R_0 \times R_0$, on ait

$$F_{rs} \mid Z_r = F_{rr}.$$

En vertu de 3.5.5.2, ce corollaire ramène la démonstration du théorème d'unicité au cas des groupes de rang semi-simple $n \leq 2$. Pour $n = 0$, le groupe est un tore et le résultat est trivial. Il reste donc à traiter le cas $n = 1$ et le cas $n = 2$; nous étudierons chaque cas séparément suivant le type de la donnée radicielle $\mathcal{R}(G)$ (« types A_1, $A_1 + A_1$, A_2, B_2, G_2 »).

4.2. Groupes de rang semi-simple 1.

Si G est un S-groupe épinglé de rang semi-simple 1, on peut le décrire complètement, comme on l'a vu en 2.4, à l'aide des sous-groupes T, P_r et P_{-r} et de la relation (F) de 2.4.1. Dans le contexte précédent, il est plus naturel de le faire à partir des groupes T et P_r et de la section w_r; il se trouve qu'alors la description devient particulièrement simple :

Théorème 4.2.1. — Soient S un préschéma non vide, G un S-groupe réductif épinglé de rang semi-simple 1, r sa racine positive, H un S-faisceau en groupes pour (fppf),

$$f_T: \quad T \to H \qquad \text{et} \qquad f_r: \quad P_r \to H$$

des homomorphismes de groupes et $h_r \in H(S)$ une section de H. Pour qu'il existe un homomorphisme de groupes (nécessairement unique)

$$f: \quad G \to H$$

prolongeant f_T, f_r et vérifiant $f(w_r) = h_r$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) pour tout $S' \to S$, tout $t \in T(S')$, tout $x \in P_r(S')$, on a

$$f_T(t)\, f_r(x)\, f_T(t)^{-1} = f_r(txt^{-1}) \qquad [= f_r(x^{r(t)})], \tag{1}$$

$$h_r\, f_T(t)\, h_r^{-1} = f_T(s_r(t)) \qquad [= f_T(t.r^*(r(t))^{-1})]; \tag{2}$$

(ii) soit $u_r = \exp_r(X_r) \in P_r^*(S)$ l'élément défini par l'épinglage; on a

$$h_r^2 = f_T(t_r) \qquad [= f_T(r^*(-1))], \tag{3}$$

$$(h_r\, f_r(u_r))^3 = e. \tag{4}$$

Ces conditions sont évidemment nécessaires (*cf.* 2.5.2.2 en particulier). Pour prouver qu'elles sont suffisantes, on doit en particulier en tirer la formule (F) de 2.4.1; *cf.* [SGAD], exp. XX, 6.2.

4.2.2. Le théorème d'unicité pour les groupes de rang semi-simple 1 est une conséquence immédiate du théorème précédent.

4.3. Groupes de rang semi-simple 2.

Par 4.1.2 et 4.2.2, l'étude de la structure des groupes de rang 2 est ramenée à l'étude des conditions (ii) et (iii) de 4.2.1. Il nous faut donc déterminer t_{rs} et expliciter la structure du groupe U_{rs} et les automorphismes intérieurs définis par w_r et w_s. La structure de U_{rs} est déterminée par les constantes $C_{ijtt'}$ de 3.3.4.1, les automorphismes $\mathrm{int}(w_r)$ et $\mathrm{int}(w_s)$ par les constantes du type $X_{s_r(t)}^{-1}.\mathrm{Ad}(w_r)X_t$. Ce sont ces constantes que nous allons déterminer dans chacun des quatre cas de la classification des systèmes de racines de rang 2.

PROPOSITION 4.3.1. — Soient S un préschéma non vide, G un S-groupe réductif épinglé « de type $A_1 + A_1$ », notons $R_0 = R_+ = \{r, s\}$.

(i) On a
$$t_{rs} = (w_r w_s)^2 = t_r t_s = (w_s w_r)^2 = t_{sr}.$$

(ii) On a
$$\mathrm{Ad}(w_r) X_s = X_s, \qquad \mathrm{Ad}(w_s) X_r = X_r.$$

(iii) Les groupes P_r et P_s commutent.

Démonstration immédiate.

PROPOSITION 4.3.2. — Soient S un préschéma non vide, G un S-groupe réductif épinglé « de type A_2 », notons
$$R_0 = \{r, s\}, \qquad R_+ = \{r, s, r+s\}.$$

(i) On a
$$t_{rs} = (w_r w_s)^3 = e = (w_s w_r)^3 = t_{sr}.$$

(ii) Posons
$$\mathrm{Ad}(w_s) X_r = X_{r+s} \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^{r+s})^*.$$
Alors
$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(w_r) X_s &= -X_{r+s}, \\ \mathrm{Ad}(w_r) X_{r+s} &= X_s, \\ \mathrm{Ad}(w_s) X_{r+s} &= -X_r. \end{aligned}$$

(iii) Posons
$$p_{r+s}(x) = \exp_{r+s}(x X_{r+s}) = \mathrm{int}(w_s)\, p_r(x).$$
On a
$$p_s(y)\, p_r(x) = p_r(x)\, p_s(y)\, p_{r+s}(xy).$$

Démonstration en [SGAD], exp. XXIII, 3.2.1.

PROPOSITION 4.3.3. — Soient S un préschéma non vide, G un S-groupe réductif épinglé « de type B_2 », notons
$$R_0 = \{r, s\}, \qquad R_+ = \{r, s, r+s, 2r+s\}.$$

(i) On a
$$t_{rs} = (w_r w_s)^4 = t_r = (w_s w_r)^4 = t_{sr}.$$

(ii) Si l'on pose
$$\mathrm{Ad}(w_s) X_r = X_{r+s}, \qquad \mathrm{Ad}(w_r) X_s = X_{2r+s},$$
on a
$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(w_r) X_{r+s} &= -X_{r+s}, & \mathrm{Ad}(w_r) X_{2r+s} &= X_s, \\ \mathrm{Ad}(w_s) X_{r+s} &= -X_r, & \mathrm{Ad}(w_s) X_{2r+s} &= X_{2r+s}. \end{aligned}$$

(iii) Posons

$$p_{r+s}(x) = \exp(xX_{r+s}), \qquad p_{2r+s}(x) = \exp(xX_{2r+s}).$$

Alors

$$p_s(y)\,p_r(x) = p_r(x)\,p_s(y)\,p_{r+s}(xy)\,p_{2r+s}(x^2y),$$
$$p_{r+s}(y)\,p_r(x) = p_r(x)\,p_{r+s}(y)\,p_{2r+s}(2xy).$$

Démonstration en [SGAD], exp. XXIII, 3.3.1.

Proposition 4.3.4. — Soient S un préschéma non vide, G un S-groupe réductif épinglé « de type G_2 », notons

$$R_0 = \{r, s\}, \qquad R_+ = \{r, s, r+s, 2r+s, 3r+s, 3r+2s\}.$$

(i) On a

$$t_{rs} = (w_r w_s)^6 = e = (w_s w_r)^6 = t_{sr}.$$

(ii) Si l'on pose

$$\mathrm{Ad}(w_s)X_r = X_{r+s}, \qquad \mathrm{Ad}(w_r)X_{r+s} = X_{2r+s},$$
$$\mathrm{Ad}(w_r)X_s = -X_{3r+s}, \qquad \mathrm{Ad}(w_s)X_{3r+s} = X_{3r+2s},$$

on a

$$\mathrm{Ad}(w_r)X_{2r+s} = -X_{r+s}, \qquad \mathrm{Ad}(w_r)X_{3r+s} = X_s,$$
$$\mathrm{Ad}(w_r)X_{3r+2s} = X_{3r+2s}, \qquad \mathrm{Ad}(w_s)X_{r+s} = -X_r,$$
$$\mathrm{Ad}(w_s)X_{2r+s} = X_{2r+s}, \qquad \mathrm{Ad}(w_s)X_{3r+2s} = -X_{3r+s}.$$

(iii) Si l'on pose

$$p_{r+s}(x) = \exp(xX_{r+s}), \qquad p_{2r+s}(x) = \exp(xX_{2r+s}),$$
$$p_{3r+s}(x) = \exp(xX_{3r+s}), \qquad p_{3r+2s}(x) = \exp(xX_{3r+2s}),$$

on a

$$p_s(y)\,p_r(x) = p_r(x)\,p_s(y)\,p_{r+s}(xy)\,p_{2r+s}(x^2y)\,p_{3r+s}(x^3y)\,p_{3r+2s}(x^3y^2),$$
$$p_{r+s}(y)\,p_r(x) = p_r(x)\,p_{r+s}(y)\,p_{2r+s}(2xy)\,p_{3r+s}(3x^2y)\,p_{3r+2s}(3xy^2),$$
$$p_{2r+s}(y)\,p_r(x) = p_r(x)\,p_{2r+s}(y)\,p_{3r+s}(3xy),$$
$$p_{3r+s}(y)\,p_s(x) = p_s(x)\,p_{3r+s}(y)\,p_{3r+2s}(-xy),$$
$$p_{2r+s}(y)\,p_{r+s}(x) = p_{r+s}(x)\,p_{2r+s}(y)\,p_{3r+2s}(3xy).$$

Démonstration en [SGAD], exp. XXIII, 3.4.1.

4.3.5. Toutes les constantes dont nous parlions plus haut étant déterminées par le type de la donnée radicielle $\mathcal{R}(G)$, le théorème d'unicité est vrai pour les groupes de rang semi-simple 2. En vertu de la réduction déjà faite, cela achève la démonstration de ce théorème.

On peut tirer des formules précédentes une démonstration de 3.6.5, *cf.* [SGAD], exp. XXIII, 4.1.

En fait, les calculs précédents ont une portée plus générale que 3.6.5; en effet, ils permettent de caractériser les groupes réductifs épinglés par générateurs et relations dans la catégorie des faisceaux en groupes pour (fppf) et non seulement dans la catégorie des groupes épinglés.

4.4. Théorème de générateurs et relations.

En rassemblant les résultats explicites obtenus ci-dessus, on obtient sans difficultés (*cf.* [SGAD], exp. XXIII, 3.5 pour les détails) le

THÉORÈME 4.4.1 (« *Générateurs et relations pour un groupe réductif épinglé* »). — Soient S un préschéma non vide, G un S-groupe épinglé, T son tore maximal, R_0 son système de racines simples, $u_r \in P_r^*(S)$ et $w_r \in \mathbf{Norm}_G(T)(S)$, $r \in R_0$, les éléments définis par l'épinglage. Soient

$$\begin{aligned} f_T &: \quad T \to H, \\ f_r &: \quad P_r \to H \quad (r \in R_0) \end{aligned}$$

des homomorphismes de groupes, H étant un S-faisceau en groupes pour (fppf); soient $h_r \in H(S)$, $r \in R_0$, des sections de H; posons

$$v_r = f_r(u_r) \in H(S).$$

Pour qu'il existe un homomorphisme de groupes

$$f: \quad G \to H$$

prolongeant f_T, les f_r, $r \in R_0$, et vérifiant $f(w_r) = h_r$ pour $r \in R_0$ (un tel homomorphisme est nécessairement unique), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) Pour tout $S' \to S$, tout $r \in R_0$, tout $t \in T(S')$ et tout $x \in P_r(S')$, on a

$$f_T(t)\, f_r(x)\, f_T(t)^{-1} = f_r(txt^{-1}) \qquad [= f_r(x^{r(t)})], \tag{1}$$

$$h_r\, f_T(t)\, h_r^{-1} = f_T(s_r(t)) \qquad [= f_T(t \,.\, r^*(r(t))^{-1})]. \tag{2}$$

(ii) Pour tout $r \in R_0$, on a

$$h_r^2 = f_T(t_r) \qquad [= f_T(r^*(-1))], \tag{3'}$$

$$(h_r v_r)^3 = e. \tag{4}$$

(iii)$_1$ Pour tout couple $(r, s) \in R_0 \times R_0$ tel que $(r^*, s) = 0$, on a

$$(h_r h_s)^2 = f_T(t_r t_s) \qquad [= f_T(r^*(-1)\, s^*(-1))], \tag{3''$_1$}$$

$$h_r v_s h_r^{-1} = v_s, \tag{5$_1$}$$

$$v_r\, v_s = v_s\, v_r. \tag{6$_1$}$$

(iii)$_2$ Pour tout couple $(r, s) \in R_0 \times R_0$ tel que $(r^*, s) = (s^*, r) = -1$, on a

$$(3'')_2 \qquad (h_r h_s)^3 = e,$$
$$(5)_2 \qquad h_r v_s h_r^{-1} = h_s v_r^{-1} h_s^{-1},$$

et, posant $v_{r+s} = \operatorname{int}(h_r) v_s$, les relations

$$(6)_2 \qquad \begin{cases} v_s v_r = v_r v_s v_{r+s}, \qquad v_r v_{r+s} = v_{r+s} v_r, \\ v_s v_{r+s} = v_{r+s} v_s. \end{cases}$$

(iii)$_3$ Pour tout couple $(r, s) \in R_0 \times R_0$ tel que $(r^*, s) = -2$, on a

$$(3'')_3 \qquad (h_r h_s)^4 = f_T(t_r) \qquad [= f_T(r^*(-1))],$$
$$(5)_3 \qquad \operatorname{int}(h_r h_s h_r) v_s = v_s, \qquad \operatorname{int}(h_s h_r h_s) v_r = v_r,$$

et, posant $v_{r+s} = \operatorname{int}(h_s) v_r$ et $v_{2r+s} = \operatorname{int}(h_r) v_s$, les relations

$$(6)_3 \qquad \begin{cases} v_s v_r = v_r v_s v_{r+s} v_{2r+s}, \qquad v_{r+s} v_r = v_r v_{r+s} v_{2r+s}^2, \qquad v_t v_{t'} = v_{t'} v_t \\ \text{pour} \quad (t, t') = (r+s, s), \quad (2r+s, r), \quad (2r+s, s), \quad (2r+s, r+s). \end{cases}$$

(iii)$_4$ Pour tout couple $(r, s) \in R_0 \times R_0$ tel que $(r^*, s) = -3$, on a

$$(3'')_4 \qquad (h_r h_s)^6 = e,$$
$$(5)_4 \qquad \operatorname{int}(h_r h_s h_r h_s h_r) v_s = v_s, \qquad \operatorname{int}(h_s h_r h_s h_r h_s) v_r = v_r,$$

et, posant

$$v_{r+s} = \operatorname{int}(h_s) v_r, \qquad v_{2r+s} = \operatorname{int}(h_r h_s) v_r,$$
$$v_{3r+s} = \operatorname{int}(h_r) v_s^{-1}, \qquad v_{3r+2s} = \operatorname{int}(h_s h_r) v_s^{-1},$$

les relations

$$(6)_4 \qquad \begin{cases} v_s v_r = v_r v_s v_{r+s} v_{2r+s} v_{3r+s} v_{3r+2s}, \\ v_{r+s} v_r = v_r v_{r+s} v_{3r+s}^3 v_{3r+2s}^3 v_{2r+s}^2, \\ v_{2r+s} v_r = v_r v_{2r+s} v_{3r+s}^3, \\ v_{3r+s} v_s = v_s v_{3r+s} v_{3r+2s}^{-1}, \\ v_{2r+s} v_{r+s} = v_{r+s} v_{2r+s} v_{3r+2s}^3, \\ v_t v_{t'} = v_{t'} v_t \begin{cases} \text{pour} \quad (t, t') = (r+s, s), (2r+s, s), \\ \text{pour} \quad t = 3r+s, \quad t' = r, r+s, 2r+s, \\ \text{pour} \quad t = 3r+2s, \quad t' = r, s, r+s, 2r+s, 3r+s. \end{cases} \end{cases}$$

Remarque 4.4.2. — On notera que toutes les relations autres que (1) et (2) s'expriment uniquement à l'aide des sections w_r, u_r, $r \in R_0$, de $H(S)$. On peut déduire du théorème précédent une description par générateurs et relations du groupe « abstrait » $G(S)$ lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos, *cf.* [SGAD], exp. XXIII, 3.5.

§ 5. Applications du théorème fondamental.

5.1. Type d'un groupe réductif.

5.1.1. Soient k un corps algébriquement clos et G un k-groupe réductif. On sait qu'il existe des déploiements de G (3.1.3); si (G, T, D) et (G, T', D') sont deux déploiements de G, on voit facilement que les données radicielles $\mathcal{R}(G, T, D)$ et $\mathcal{R}(G, T', D')$ sont isomorphes. On appelle donc *type* de G la classe d'isomorphisme de la donnée radicielle définie par un déploiement quelconque de G; c'est une notion invariante par extension algébriquement close du corps de base.

Si maintenant G est un S-groupe réductif, S étant un préschéma quelconque, on appelle *type de G au point* $s \in S$ le type du $\bar{s}$-groupe réductif $G_{\bar{s}}$. Il résulte aussitôt de 3.1.4 que la fonction $s \mapsto$ type de G en s est *localement constante*. Pour tout $S' \to S$ et tout $s' \in S$ se projetant en $s \in S$, le type de $G_{S'}$ en s' est égal au type de G en s. On dira que le S-groupe réductif G est de type $\mathcal{R}$ s'il est de type $\mathcal{R}$ en chaque $s \in S$.

Avec ces définitions, le théorème d'unicité se reformule ainsi :

Théorème 5.1.2. — Soient S un préschéma non vide, G et G' deux S-groupes réductifs *déployables*; pour que G et G' soient isomorphes il faut et il suffit qu'ils soient de même type.

Par 3.1.6, on en tire aussitôt le

Corollaire 5.1.3 (« *Unicité des schémas de Chevalley* »). — Soient G et G' deux $\mathbf{Z}$-groupes réductifs possédant des tores maximaux. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G et G' sont isomorphes.

(ii) Les $\mathbf{C}$-groupes $G_{\mathbf{C}}$ et $G'_{\mathbf{C}}$ sont de même type.

Corollaire 5.1.4. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif, G' un S-groupe affine, lisse et à fibres connexes. Soit $s \in S$ tel que les $\bar{s}$-groupes $G_{\bar{s}}$ et $G'_{\bar{s}}$ soient isomorphes; il existe un morphisme $S' \to S$ étale et couvrant s, tel que $G_{S'}$ et $G'_{S'}$ soient isomorphes.

En effet, on peut supposer G' réductif par 2.2.2, puis G et G' déployables par 3.1.4, et l'on conclut par 5.1.2.

En particulier,

Corollaire 5.1.4.1. — Soient S un préschéma, G et G' deux S-groupes réductifs. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G et G' sont localement isomorphes pour la topologie (fpqc).

(ii) G et G' sont localement isomorphes pour la topologie étale.

(iii) Pour tout $s \in S$, les $\bar{s}$-groupes $G_{\bar{s}}$ et $G'_{\bar{s}}$ sont isomorphes.

(iv) Les fonctions $s \mapsto$ « type de G en s » et $s \mapsto$ « type de G' en s » sont égales.

Corollaire 5.1.4.2. — Soient k un corps, G et G' deux k-groupes réductifs. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G et G' sont de même type.

(ii) $G_{\bar{k}}$ et $G'_{\bar{k}}$ sont isomorphes.

(iii) Il existe une extension séparable finie K/k telle que G_K et G'_K soient isomorphes.

5.1.5. Soit $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite. En vertu du théorème fondamental, il existe un *unique* $\mathbf{Z}$-groupe *épinglé* tel que $\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}$. On l'appelle le *schéma de Chevalley de type* $\mathcal{R}$ et on le note $\mathbf{Ep}(\mathcal{R})$. Son tore maximal canonique sera noté $\mathbf{T}(\mathcal{R})$, son groupe de Borel canonique $\mathbf{B}(\mathcal{R})$, ... Par 5.1.4.1, on a aussitôt la

Proposition 5.1.6. — Soient S un préschéma, $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite et G un S-faisceau en groupes. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est un S-groupe réductif de type $\mathcal{R}$.

(ii) G est localement isomorphe à $\mathbf{Ep}(\mathcal{R})_S$ pour la topologie (fpqc).

(iii) G est localement isomorphe à $\mathbf{Ep}(\mathcal{R})_S$ pour la topologie étale.

Utilisant maintenant les divers théorèmes de conjugaison (2.1.4, 3.3.2, 3.3.2.2), on a le

Corollaire 5.1.6.1. — Sous les conditions précédentes, soient, de plus, T un sous-faisceau en groupes de G (resp. B un sous-faisceau en groupes de G, resp. $B \supset T$ deux sous-faisceaux en groupes de G). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est un S-groupe réductif de type $\mathcal{R}$, T en est un tore maximal (resp. B un groupe de Borel, resp. T un tore maximal et B un groupe de Borel).

(ii) Le couple (G, T) [resp. le couple (G, B), resp. le triplet (G, B, T)] est localement isomorphe pour la topologie (fpqc) à $(\mathbf{Ep}(\mathcal{R})_S, \mathbf{T}(\mathcal{R})_S)$ [resp. à $(\mathbf{Ep}(\mathcal{R})_S, \mathbf{B}(\mathcal{R})_S)$, resp. $(\mathbf{Ep}(\mathcal{R})_S, \mathbf{B}(\mathcal{R})_S, \mathbf{T}(\mathcal{R})_S)$].

(iii) *idem* pour la topologie étale.

5.2. Schémas d'automorphismes d'un groupe réductif.

5.2.1. Soient S un préschéma non vide, G un S-groupe réductif épinglé, $\mathcal{R}$ la donnée radicielle épinglée correspondante. En vertu de 3.6.5, le groupe des automorphismes de G respectant l'épinglage est canoniquement isomorphe au groupe E des automorphismes de la donnée radicielle épinglée $\mathcal{R}$. Comme, d'autre part, il résulte facilement de 3.3.2.2 que deux épinglages d'un groupe réductif sont conjugués localement pour la topologie étale, on en conclut à la manière habituelle (*cf.* [SGAD] exp. XXIV, n° 1) la

PROPOSITION 5.2.2. — Soient S un préschéma non vide, G un S-groupe réductif déployable, $(T, \ldots)$ un épinglage de G, $\mathcal{R}$ la donnée radicielle réduite épinglée correspondante, E le groupe des automorphismes de $\mathcal{R}$, opérant sur G [et donc sur $\mathrm{ad}(G)$] de la manière décrite ci-dessus, E_S le S-groupe constant correspondant. Alors le foncteur $\mathbf{Aut}_{S\text{-}gr}(G)$ est représentable par le produit semi-direct $\mathrm{ad}(G).E_S$.

Par descente ([SGAD], exp. XXIV, nº 1), on en déduit le

THÉORÈME 5.2.3. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif. Considérons la suite exacte de S-faisceaux (1.2.9)

$$e \to \mathrm{ad}(G) \to \mathbf{Aut}_{S\text{-}gr}(G) \to \mathbf{Aut\,ext}(G) \to e.$$

(i) $\mathbf{Aut}_{S\text{-}gr}$ est représentable par un S-préschéma *lisse* et *séparé*.

(ii) $\mathbf{Aut\,ext}(G)$ est représentable par un S-groupe *constant tordu* à engendrement fini.

(iii) Tout épinglage de G définit un scindage de la suite exacte précédente, identifiant $\mathbf{Aut\,ext}(G)$ au S-groupe constant associé au groupe des automorphismes de la donnée radicielle épinglée définie par G.

(iv) $\mathbf{Aut}_{S\text{-}gr}(G)$ est *affine* (resp. de type fini, resp. quasi compact) sur S, si et seulement si $\mathbf{Aut\,ext}(G)$ est *fini* sur S, c'est-à-dire si et seulement si G est semi-simple.

On obtient de même la variante suivante ([SGAD], exp. XXIV, 1.9) :

COROLLAIRE 5.2.4. — Soient S un préschéma, G et G' deux S-groupes réductifs. Alors

$$H = \mathbf{Isom}_{S\text{-}gr}(G, G')$$

est représentable par un S-préschéma *lisse* et *séparé*, qui est affine sur S si G ou G' est semi-simple. De plus, S se décompose en somme de deux sous-préschémas ouverts S' et S'' tels que $H_{S'} = \emptyset$ et que $H_{S''}$ soit un fibré principal homogène à droite (resp. à gauche) sous $\mathbf{Aut}_{S''\text{-}gr}(G_{S''})$ [resp. $\mathbf{Aut}_{S''\text{-}gr}(G'_{S''})$].

Utilisant maintenant 5.1.6, on en déduit le

COROLLAIRE 5.2.5. — Soient S un préschéma, $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite. Il existe une équivalence entre la catégorie des S-groupe réductifs de type $\mathcal{R}$ (les morphismes sont les isomorphismes) et la catégorie des fibrés principaux homogènes sous $\mathbf{A}(\mathcal{R})_S = \mathbf{Aut}_{S\text{-}gr}(\mathbf{Ep}(\mathcal{R})_S)$.

COROLLAIRE 5.2.6. — L'ensemble des classes d'isomorphisme de S-groupes réductifs de type $\mathcal{R}$ est isomorphe à $H^1(S, \mathbf{A}(\mathcal{R})_S)$. De même, si $S' \to S$ est un morphisme couvrant (par exemple, fidèlement plat et quasi compact), l'ensemble des classes d'isomorphismes de S-groupes réductifs de type $\mathcal{R}$, déployables sur S', est isomorphe à $H^1(S'/S, \mathbf{A}(\mathcal{R})_S)$.

REMARQUE 5.2.6.1. — En vertu de 5.1.6, le premier H^1 envisagé dans 5.2.6 peut se calculer aussi bien pour la topologie étale que pour la topologie (fpqc).

Comme $\mathbf{A}(\mathcal{R})_S$ est lisse sur S, un raisonnement standard donne :

COROLLAIRE 5.2.7. — *Soient S un schéma local hensélien, s son point fermé. Le foncteur*

$$G \mapsto G_s$$

induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de S-groupes réductifs sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\varkappa(s)$-groupes réductifs.

5.3. Questions d'isotrivialité.

THÉORÈME 5.3.1. — *Soient S un préschéma semi-local, $\mathcal{R}$ une donnée radicielle réduite épinglée, E son groupe d'automorphismes, W son groupe de Weyl, $A = E.W$ le groupe des automorphismes de la donnée radicielle non épinglée.*

(i) *Tout fibré principal homogène P sous $\mathbf{Ep}(\mathcal{R})_S$ est trivialisé par un revêtement principal galoisien $S' \to S$ de groupe W.*

(ii) *Supposons $\mathcal{R}$ semi-simple, c'est-à-dire E fini. Tout S-groupe réductif G de type $\mathcal{R}$ est déployé par un revêtement principal galoisien $S' \to S$ de groupe A.*

Ce théorème résulte formellement de l'existence d'un tore maximal (2.1.5) dans $\mathbf{Aut}_{\text{fib}}(P)$ pour (i), G pour (ii); *voir* [SGAD], exp. XXIV, 4.4.1.

Pour énoncer les corollaires, posons une définition.

DÉFINITION 5.3.2. — Soient S un préschéma, G un S-groupe réductif (resp. et P un fibré principal homogène sous G). On dit que G (resp. P) est *localement isotrivial* si pour tout $s \in S$, il existe un voisinage ouvert U de s et un morphisme *étale fini* surjectif $S' \to U$ tel que $G_{S'}$ soit déployable (resp. que $P_{S'}$ soit un fibré trivial).

Cette définition concorde avec celle donnée en 1.4.3 dans le cas des tores. Par 5.3.1 (ii), on a aussitôt le

COROLLAIRE 5.3.3. — *Tout groupe semi-simple est localement isotrivial.*

Utilisant maintenant l'existence dans le groupe réductif G d'un sous-tore $\mathbf{rad}(G)$ tel que le quotient $G/\mathbf{rad}(G)$ soit semi-simple (2.1.6), on en déduit ([SGAD], exp. XXIV, 4.1.5) le

COROLLAIRE 5.3.4. — *Pour qu'un groupe réductif soit localement isotrivial, il faut et il suffit que son radical le soit.*

Par 1.4.3, cela donne en particulier le

COROLLAIRE 5.3.5. — Soit S un préschéma géométriquement unibranche (par exemple *normal*). Tout S-groupe réductif est localement isotrivial.

De même 5.3.1 (i) donne aussitôt le

COROLLAIRE 5.3.6. — Soit G un S-groupe réductif localement isotrivial (par exemple G semi-simple ou G déployable, ou S normal). Tout fibré principal homogène sous G est localement isotrivial.

REMARQUE 5.3.7. — Par 3.1.3, tout S-groupe réductif possédant un tore maximal localement isotrivial est localement isotrivial. On peut montrer ([SGAD], exp. XXIV, 4.3.5) qu'un tore maximal d'un groupe réductif localement isotrivial (par exemple d'un groupe semi-simple) est localement isotrivial.

REMARQUE 5.3.8. — Le théorème 5.3.1 est plus précis que les corollaires 5.3.3 à 5.3.6, mais il s'appuie sur le résultat délicat de GROTHENDIECK signalé en 2.1.5. On peut donner une démonstration directe de ces corollaires; celle-ci s'appuie sur le fait qu'un groupe réductif G possède des groupes de Borel « localement pour la topologie étale finie », le schéma $\mathbf{Bor}(G)$ de 3.3.2.1 étant *lisse* et *projectif* sur S.

5.4. Systèmes de Chevalley.

DÉFINITION 5.4.1. — Soient S un préschéma non vide, (G, T, M, R) un S-groupe réductif déployé. On appelle *système de Chevalley* de G une famille $(X_r)_{r\in R}$ d'éléments

$$X_r \in \Gamma(S, \mathfrak{g}^r)^*,$$

vérifiant la condition suivante :

(SC) pour tous $r, s \in R$, on a $\operatorname{Ad}(w_r(X_r))X_s = \pm X_{s_r(s)}$.

5.4.1.1. Rappelons (2.5.2) que

$$w_r(X_r) = \exp_r(X_r)\exp_{-r}(X_r^{-1})\exp_r(X_r).$$

De plus, on a (*loc. cit*) $\operatorname{Ad}(w_r(X_r))X_r = X_r^{-1}$. Il en résulte que pour tout système de Chevalley on a la relation

$$X_r X_{-r} = \pm 1.$$

Quitte à modifier le signe de certains X_r, on peut donc déduire de tout système de Chevalley un système de Chevalley vérifiant la condition supplémentaire $X_r X_{-r} = 1$ pour tout $r \in R$.

PROPOSITION 5.4.2. Tout S-groupe déployé possède des systèmes de Chevalley. Plus précisément, pour tout épinglage $(X'_r)_{r\in R_0}$ de G, on peut trouver un système de Chevalley $(X_r)_{r\in R}$ tel que $X_r = X'_r$ pour $r \in R_0$.

En effet, si $S = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, la condition (SC) est automatiquement vérifiée, toute section de $\mathbf{G}_{m\,S}$ étant égale à 1 ou à -1. Comme tout S-groupe épinglé provient d'un $\mathbf{Z}$-groupe épinglé (théorème fondamental), l'assertion en résulte aussitôt.

Remarque 5.4.2.1. — Ici, nous avons déduit 5.4.2 du théorème d'existence. Réciproquement, on peut donner une démonstration directe de 5.4.2 à partir des résultats explicites du n° 4 et utiliser alors l'existence de systèmes de Chevalley pour démontrer le théorème d'existence. C'est la méthode utilisée en [SGAD], exp. XXV.

Proposition 5.4.3. — Soient S un préschéma non vide, (G, T, M, R) un S-groupe réductif déployé, $(X_r)_{r\in R}$ un système de Chevalley de G Soient r et s deux racines non opposées, ordonnons-les de telle manière que

$$|(s^*, r)| \leqq |(r^*, s)|$$

(« r est plus courte que s »). Soient p et q les entiers tels que l'ensemble des racines de la forme $s + kr$, $k\in\mathbf{Z}$, soit

$$\{ s-(p-1)r, \ldots, s, \ldots, s+qr \}$$

(on a alors $p + q - 1 \leqq 3$). Notons pour chaque $t\in R$, $p_t(x) = \exp_t(xX_t)$. On a alors, suivant les valeurs de p et q, les relations de commutation suivantes :

p quelconque, $q = 0$,

$$p_s(y)\,p_r(x) = p_r(x)\,p_s(y).$$

$p = 1$, $q = 1$,

$$p_s(y)\,p_r(x) = p_r(x)\,p_s(y)\,p_{r+s}(\pm xy).$$

$p = 1$, $q = 2$,

$$p_s(y)\,p_r(x) = p_r(x)\,p_s(y)\,p_{r+s}(\pm xy)\,p_{2r+s}(\pm x^2y).$$

$p = 1$, $q = 3$,

$$p_s(y)\,p_r(x) = p_r(x)\,p_s(y)\,p_{r+s}(\pm xy)\,p_{2r+s} \pm (x^2y) \times p_{3r+s}(\pm x^3y)\,p_{3r+2s}(\pm x^3y^2).$$

$p = 2$, $q = 1$,

$$p_s(y)\,p_r(x) = p_r(x)\,p_s(y)\,p_{r+s}(\pm 2xy).$$

$p = 2$, $q = 2$,

$$p_s(y)\,p_r(x) = p_r(x)\,p_s(y)\,p_{r+s}(\pm 2\,xy)\,p_{2r+s}(\pm 3\,x^2y)\,p_{r+2s}(\pm 3\,xy^2).$$

$p = 3$, $q = 1$,

$$p_s(y)\,p_r(x) = p_r(x)\,p_s(y)\,p_{r+s}(\pm 3\,xy).$$

5.4.3.1. *Démonstration.* — En vertu d'un lemme classique de théorie des racines, il existe un système de racines simples R_0 tel que $r \in R_0$ et qu'il existe $r' \in R_0$ et a, $b \geq 0$ avec $s = ar + br'$. Introduisant l'épinglage $(R_0, (X_r)_{r \in R_0})$ de G, on est ramené dans un groupe $U_{rr'}$ et l'on peut utiliser les résultats explicites de 4.3, ce qui permet de conclure aussitôt.

COROLLAIRE 5.4.4 (« *Règle de Chevalley* »). — Si $(X_r)_{r \in R}$ est un système de Chevalley du groupe réductif déployé G et si r, s, $r + s \in R$, on a

$$[X_r, X_s] = \pm p X_{r+s},$$

où p est le plus petit entier > 0 tel que $s - pr$ ne soit pas racine.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CARTIER (Pierre). — Résultats non publiés.
[2] CHEVALLEY (Claude). — Sur certains groupes simples, *Tôhoku math. J.*, t. 7, 1955, p. 14-66.
[3] CHEVALLEY (Claude). — Certains schémas de groupes semi-simples, *Séminaire Bourbaki*, t. 13, 1960-1961, n° 219, 16 pages.
[4] Séminaire CHEVALLEY, 1956-1958 : *Classification des groupes de Lie algébriques*, Fasc. 1 et 2. — Paris, Secrétariat mathématique, 1958 (cité *BIBLE* dans le texte).
[5] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 1963-1964, dirigé par M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK : *Schémas en groupes*, 26 exposés multigraphiés (cité [SGAD] dans le texte).
[6] BOREL (Armand) et TITS (Jacques). — Groupes réductifs, *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, n° 27, 1965.

(Manuscrit reçu le 22 décembre 1964.)

Michel DEMAZURE,
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences,
26, avenue des Vosges, 67-Strasbourg (Bas-Rhin).