BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE CARTIER
J.M.G. FELL
PAUL-ANDRÉ MEYER

Comparaison, des mesures portées par un ensemble convexe compact

Bulletin de la S. M. F., tome 92 (1964), p. 435-445
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1964__92__435_0>

Bull. Soc. math. France,
92, 1964, p. 435 à 445.

COMPARAISON DES MESURES PORTÉES PAR UN ENSEMBLE CONVEXE COMPACT ;

PAR

PIERRE CARTIER, J. M. G. FELL
et PAUL-ANDRÉ MEYER.

INTRODUCTION.

A la page 45 de leur Ouvrage bien connu [6] sur les inégalités, HARDY, LITTLEWOOD et POLYÁ introduisent une relation d'ordre intéressante dans l'ensemble des suites $(a) = (a_1, \ldots, a_n)$ de nombres réels telles que $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n$. Cette relation d'ordre est notée $(a') \prec (a)$ et, d'après les résultats des auteurs précédents, peut se définir de quatre manières équivalentes :

a. On a $a_1 + \ldots + a_\nu \geqq a'_1 + \ldots + a'_\nu$ pour $1 \leqq \nu \leqq n$, avec égalité pour $\nu = n$;

b. Il existe une matrice carrée $(p_{\mu\nu})$ d'ordre n satisfaisant aux relations

$$p_{\mu\nu} \geqq 0, \qquad \sum_\mu p_{\mu\nu} = \sum_\nu p_{\mu\nu} = 1 \qquad \text{et} \qquad a'_\mu = \sum_\nu p_{\mu\nu} a_\nu;$$

c. Quels que soient les nombres réels $u_1, \ldots, u_n$, on a l'inégalité

$$\sum_\sigma \exp\left(\sum_{i=1}^n a_i . u_{\sigma(i)}\right) \geqq \sum_\sigma \exp\left(\sum_{i=1}^n a'_i . u_{\sigma(i)}\right),$$

la sommation étant étendue à l'ensemble des permutations σ des nombres $1, 2, \ldots, n$;

d. Quelle que soit la fonction Φ continue et convexe, on a

$$\Phi(a_1) + \ldots + \Phi(a_n) \geqq \Phi(a'_1) + \ldots + \Phi(a'_n).$$

L'inégalité de convexité d suggère que les propriétés précédentes se rapportent à des mesures sur la droite, à la suite (a) étant associée la mesure $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{a_i}$, où ε_{a_i} est la masse unité au point a_i. L'équivalence de b et de d est la plus intéressante de ce point de vue et a été généralisée par divers auteurs; en particulier, BLACKWELL a considéré dans [1] le cas de mesures positives quelconques portées par un intervalle de la droite et SHERMAN a étudié le cas des mesures portées par un nombre fini de points d'un espace euclidien de dimension finie [8].

Nous nous proposons dans cet article de replacer les résultats précédents dans leur cadre naturel de validité, celui des *ensembles convexes compacts et métrisables* dans un espace vectoriel topologique. Si X est un tel ensemble, nous définirons dans l'ensemble des mesures portées par X une relation d'ordre $\mu \prec \nu$ par les propriétés suivantes dont nous établissons l'*équivalence* (théorèmes 1 et 2) :

a. Quelle que soit la fonction continue et convexe p sur X, on a

$$\int_X p\, d\mu \leq \int_X p\, d\nu;$$

b. Il existe une famille de mesures $(T_x)_{x \in X}$ de masse 1 telle que x soit barycentre de T_x et que

$$\nu = \int_X T_x\, d\mu(x).$$

c. A toute décomposition $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n$ de μ, on peut associer au moins une décomposition $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_n$ de ν, où ν_i a même masse totale et même barycentre que μ_i;

Une variante de la condition a a été introduite par BISHOP et DE LEEUW; elle leur a permis de donner des démonstrations très simples des théorèmes d'existence de Choquet affirmant que tout point de X est barycentre d'une mesure portée par l'ensemble des points extrémaux de X. L'équivalence de a et b avait été conjecturée par CHOQUET (*cf.* [4], p. 339). Par ailleurs, la condition c a été introduite par LOOMIS [7] sous le nom de « strong ordering » et elle a permis à cet auteur de donner des démonstrations d'unicité très naturelles dans la théorie de Choquet; Loomis a aussi établi que c entraîne a. Comme l'implication $b \Rightarrow c$ est très facile, notre principale contribution est donc la démonstration que a entraîne b. MOKOBODZKI nous a signalé qu'il a obtenu indépendamment le même résultat; de plus, STRASSEN a établi et publiera prochainement d'intéressantes généralisations de nos résultats.

1. Soit E un espace vectoriel réel, muni d'une topologie séparée et localement convexe, et soit E' l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E. On considère une partie convexe et compacte X de E, et l'on suppose qu'il existe u_0 dans E' avec $u_0(x) = 1$ pour tout x dans X [1]. On notera C l'ensemble des éléments $c.x$ de E, pour c réel positif et x dans X; étant donnés $x_1, \ldots, x_n$ dans C et $c_1, \ldots, c_n$ réels positifs, l'élément $c_1.x_1 + \ldots + c_n.x_n$ de E est dans C, c'est-à-dire que C est un cône convexe pointé dans E.

Pour tout espace compact Y, nous noterons $\mathcal{C}(Y)$ l'espace vectoriel (réel) des fonctions continues sur Y à valeurs réelles. On appelle *mesure* sur Y une mesure de Radon positive sur Y; on peut identifier une telle mesure à une forme linéaire croissante sur $\mathcal{C}(Y)$. L'intégrale d'une fonction f sur Y par rapport à une mesure μ sur Y est notée $\mu(f)$ ou $\int_Y f(y).d\mu(y)$. La *masse* de la mesure μ est le nombre

$$\mu(1) = \int_Y d\mu(y).$$

Pour toute mesure μ sur X, il existe un point z de C, caractérisé par

$$u(z) = \int_X u(x).d\mu(x) \qquad \text{pour tout } u \text{ dans } E';$$

on dit que z est la *résultante* de μ, notée $r(\mu)$; lorsque μ est de masse 1, on a $r(\mu) \in X$, et $r(\mu)$ s'appelle aussi le *barycentre* de μ.

2. Théorème 1. — *Étant données deux mesures μ et ν sur X, les conditions suivantes sont équivalentes :*

a. On a $\mu(p) \leqq \nu(p)$ pour toute fonction continue et convexe p sur X.

b. Il existe sur $X \times X$ une mesure θ ayant ν pour seconde projection sur X, et vérifiant la relation

$$\int_{X\times X} f(x).u(y).d\theta(x, y) = \int_X f(x).u(x).d\mu(x) \tag{1}$$

pour f dans $\mathcal{C}(X)$ et u dans E'.

c. Quelles que soient les mesures $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sur X, ayant pour somme μ, il existe des mesures $\nu_1, \ldots, \nu_n$, de somme ν, avec $r(\mu_i) = r(\nu_i)$ pour $1 \leqq i \leqq n$.

$a \Rightarrow b$: Nous noterons H' le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X \times X)$ constitué par les fonctions de la forme

$$h'(x, y) = g(y) \tag{2}$$

[1] Ceci n'est pas une restriction sur X; on peut toujours satisfaire à cette condition en remplaçant E par $E \times \mathbf{R}$ et X par $X \times \{1\}$.

avec g continue sur X; on définit sur H' une forme linéaire J' par $J'(h') = \nu(g)$. Dire qu'une mesure θ sur $X \times X$ admet ν pour seconde projection signifie qu'on a $\theta(h') = J'(h')$ pour h' dans H'.

Par ailleurs, les fonctions de la forme

$$h''(x, y) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) . u_i(y) \tag{3}$$

avec des f_i dans $\mathcal{C}(X)$ et des u_i dans E', forment un sous-espace vectoriel H'' de $\mathcal{C}(X \times X)$; on définit une forme linéaire J'' sur H'' par la formule

$$J''(h'') = \int_X h''(x, x) . d\mu(x). \tag{4}$$

Pour qu'une mesure θ sur $X \times X$ satisfasse à (1), il faut et il suffit qu'on ait $\theta(h'') = J''(h'')$ pour h'' dans H''.

Nous allons établir, en nous appuyant sur la condition a, la propriété suivante : soient deux fonctions $h' \in H'$, $h'' \in H''$, données respectivement par (2) et (3) et telles que $h' \geqq h''$; on a alors $J'(h') \geqq J''(h'')$. Posons

$$p(y) = \sup_{x \in X} h''(x, y). \tag{5}$$

Cette fonction p sur X est bornée et semi-continue inférieurement, donc intégrable pour toute mesure; désignons par $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions de la forme

$$q(y) = \sup(h''(x_1, y), h''(x_2, y), \ldots, h''(x_n, y)) \tag{6}$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ parcourt l'ensemble des suites finies d'éléments de X; chacune de ces fonctions est continue et convexe, d'où $\mu(q) \leqq \nu(q)$ sous l'hypothèse a. Mais l'ensemble $\mathcal{S}$ est filtrant croissant et admet p pour enveloppe supérieure, d'où

$$\mu(p) = \sup_{q \in \mathcal{S}} \mu(q), \qquad \nu(p) = \sup_{q \in \mathcal{S}} \nu(q) \tag{7}$$

d'après une propriété bien connue des intégrales de Radon; finalement, on a $\mu(p) \leqq \nu(p)$. On a évidemment $h''(x, x) \leqq p(x)$ pour x dans X, et l'hypothèse $h' \geqq h''$ entraîne $p(y) \leqq g(y)$ pour tout y dans X; on en déduit

$$J''(h'') = \int_X h''(x, x) . d\mu(x) \leqq \int_X p(x) . d\mu(x) = \mu(p) \leqq \nu(p) \leqq \nu(g) = J'(h'),$$

c'est-à-dire $J'(h') \geqq J''(h'')$. Si l'on suppose maintenant $h' = h''$, on aura aussi $-h' \geqq -h''$, d'où $-J'(h') \geqq -J''(h'')$ et finalement $J'(h') = J''(h'')$.

On a donc prouvé que J' et J'' coïncident sur $H' \cap H''$. L'ensemble H des fonctions de la forme $h'-h''$ avec $h' \in H'$ et $h'' \in H''$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X \times X)$, et il existe sur H une forme linéaire J définie par $J(h'-h'') = J'(h') - J''(h'')$. Le raisonnement précédent montre qu'on a $J(h) \geqq 0$ pour $h \geqq 0$ dans H, et il s'ensuit (2) l'existence d'une mesure θ sur $X \times X$ avec $\theta(h) = J(h)$ pour tout h dans H; en particulier, on a

$$\theta(h') = J'(h') \qquad \text{et} \qquad \theta(h'') = J''(h''),$$

et l'on a vu que ceci entraîne *b*.

$b \Rightarrow c$: On suppose que la mesure θ sur $X \times X$ satisfait aux conditions énoncées dans *b* ; soient $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des mesures sur X, de somme μ. D'après le théorème de Radon-Nikodým, il existe des fonctions boréliennes positives $f_1, \ldots, f_n$ sur X telles que

$$(8) \qquad \mu_i(g) = \int_X f_i(x).g(x).d\mu(x) \qquad [\forall\, g \in \mathcal{C}(X)].$$

Après modification éventuelle de ces fonctions sur un ensemble μ-négligeable, on peut supposer qu'on a $f_1 + \ldots + f_n = 1$, et qu'il existe des fonctions continues f_{ki} sur X avec $0 \leqq f_{ki} \leqq 1$ (pour $1 \leqq i \leqq n$ et $k \geqq 1$) et un ensemble μ-négligeable A_i tels que

$$(9) \qquad f_i(x) = \lim_{k \to \infty} f_{ki}(x) \quad [\forall\, x \in X - A_i].$$

Ceci étant, on définit des mesures $\nu_1, \ldots, \nu_n$ sur X par

$$(10) \qquad \nu_i(g) = \int_{X \times X} f_i(x).g(y).d\theta(x, y) \quad [\forall\, g \in \mathcal{C}(X)].$$

Comme ν est la seconde projection de θ, on a

$$(11) \qquad \nu(g) = \int_{X \times X} g(y).d\theta(x, y) \quad [\forall\, g \in \mathcal{C}(X)]$$

et la relation $f_1 + \ldots + f_n = 1$ entraîne $\nu_1 + \ldots + \nu_n = \nu$. Par ailleurs, la relation (1) est valable pour les fonctions continues $f = f_{ki}$, et, en

(2) On peut démontrer ce résultat de la manière suivante; pour toute fonction continue f sur $X \times X$, soit $S(f)$ la plus petite constante majorant f; il est immédiat que S est une fonctionnelle sous-linéaire sur $\mathcal{C}(X \times X)$, et comme on a $1 \in H$, on a $J(h) \leqq J(1).S(h)$ pour h dans H. Le théorème de Hahn-Banach démontre l'existence d'une forme linéaire θ sur $\mathcal{C}(X \times X)$, prolongeant J et telle que $\theta(f) \leqq J(1).S(f)$ pour f dans $\mathcal{C}(X \times X)$; en particulier pour $g \geqq 0$ et $f = -g$, on a $S(f) \leqq 0$, d'où $\theta(g) \geqq 0$, et θ est une mesure sur $X \times X$.

utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on voit que (1) est valable pour $f = f_i$ (³). Utilisant alors (8) et (10), on trouve

$$\int_X u(x) . d\nu_i(x) = \int_X u(x) . d\mu_i(x) \quad [\forall u \in E'], \tag{12}$$

c'est-à-dire $r(\mu_i) = r(\nu_i)$ pour $1 \leqq i \leqq n$.

$c \Rightarrow a$: Soit p une fonction continue convexe sur X, et soit $\varepsilon > 0$. Comme p est continue et E localement convexe, on peut trouver, pour tout x dans X, un voisinage fermé convexe $U(x)$ de x dans E, tel que

$$|p(y) - p(y')| \leqq \varepsilon \quad [\forall y, y' \in U(x) \cap X]. \tag{13}$$

Comme X est compact, on peut donc trouver une suite finie $(x_1, \ldots, x_n)$ de points de X, telle que les intérieurs des ensembles convexes et compacts $A_i = U(x_i) \cap X$ recouvrent X pour i variant de 1 à n. Comme il est bien connu, on peut alors trouver des fonctions continues positives $f_1, \ldots, f_n$ sur X, de somme 1, avec f_i nulle en dehors de A_i; nous poserons $\mu_i(g) = \mu(f_i g)$ pour g dans $\mathcal{C}(X)$, de sorte que μ est somme des mesures $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Supposons que l'hypothèse c soit remplie. Il existe donc des mesures $\nu_1, \ldots, \nu_n$ de somme ν et telles que $r(\mu_i) = r(\nu_i)$ pour tout i. Comme le support de la mesure μ_i est contenu dans l'ensemble convexe compact A_i, sa résultante est de la forme $c_i . y_i$ avec y_i dans A_i et $c_i = \mu_i(1) = \mu(f_i)$; utilisant la formule (13) et le fait que f_i est positive et nulle en dehors de A_i, on trouve

$$f_i p \leqq f_i . p(y_i) + \varepsilon f_i. \tag{14}$$

Par intégration par rapport à μ, on a

$$\mu_i(p) = \mu(f_i p) \leqq \mu(f_i) . p(y_i) + \varepsilon . \mu(f_i) = c_i . p(y_i) + \varepsilon . \mu(f_i). \tag{15}$$

Mais la mesure ν_i a pour résultante $c_i . y_i$, et comme p est convexe, on a donc (inégalité de Jensen) :

$$\nu_i(p) \geqq c_i . p(y_i). \tag{16}$$

D'après (15), on a par suite

$$\mu_i(p) \leqq \nu_i(p) + \varepsilon . \mu(f_i). \tag{17}$$

Additionnant les inégalités obtenues pour $i = 1, 2, \ldots, n$, on obtient $\mu(p) \leqq \nu(p) + \varepsilon . \mu(1)$, et faisant tendre ε vers zéro, on a

$$\mu(p) \leqq \nu(p).$$

C. Q. F. D.

(³) Faisant $u = u_0$ dans (1), on voit que μ est la première projection de θ, d'où $\theta(A_i \times X) = \mu(A_i) = 0$. On peut alors remplacer f par f_{ki} dans (1), puis passer à la limite sur k.

3. Nous utiliserons au n° 4 l'équivalence des conditions *a* et *b* du théorème 1 pour préciser sur certains points la théorie de CHOQUET (*cf.* [4] et [5]). Auparavant, nous aurons à faire quelques rappels.

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions continues et convexes sur X, et V l'ensemble des fonctions de la forme $p_1 - p_2$ avec p_1 et p_2 dans $\mathcal{S}$; il est immédiat que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X)$, séparant les points de X, car il contient les restrictions à X des formes linéaires continues sur E; de plus, pour $f = p_1 - p_2$ dans V, on a

$$|f| = 2 \sup(p_1, p_2) - (p_1 + p_2),$$

d'où $|f| \in V$. D'après un théorème bien connu de Stone (*cf.* [2], p. 55), V est dense dans $\mathcal{C}(X)$ pour la topologie de la convergence uniforme. On en déduit facilement que, si une fonctionnelle J sur $\mathcal{S}$ à valeurs réelles jouit des propriétés

$$\left\{\begin{array}{ll} J(p_1 + p_2) = J(p_1) + J(p_2), & \\ J(c.p) = c.J(p) & \text{pour} \quad c \geqq 0, \\ J(p_1) \geqq J(p_2) & \text{pour} \quad p_1 \geqq p_2, \end{array}\right. \tag{18}$$

il existe une mesure ν sur X et une seule avec $J(p) = \nu(p)$ pour p dans $\mathcal{S}$.

Selon CHOQUET, on définit sur l'ensemble des mesures une relation d'ordre, notée $\mu \prec \nu$, qui signifie « $\mu(p) \leqq \nu(p)$ pour tout p dans $\mathcal{S}$ »; la seule vérification non évidente est celle que « $\mu \prec \nu$ et $\nu \prec \mu$ » entraîne $\mu = \nu$, mais ceci résulte de l'alinéa précédent car « $\mu(p) = \nu(p)$ pour tout p dans $\mathcal{S}$ » entraîne $\mu = \nu$. Par ailleurs, soit I un ensemble préordonné *filtrant*, et $i \to \mu_i$ une application de I dans l'ensemble des mesures telle que $i \leqq j$ entraîne $\mu_i \prec \mu_j$; comme les constantes 1 et -1 appartiennent à $\mathcal{S}$, toutes les mesures μ_i ont même masse m; pour p dans $\mathcal{S}$, il existe une constante c avec $p \leqq c$, et l'on a

$$\mu_i(p) \leqq \mu_j(p) \leqq m.c \quad \text{pour} \quad i \leqq j. \tag{19}$$

On peut alors poser

$$J(p) = \sup_{i \in I} \mu_i(p)$$

et la fonctionnelle J sur $\mathcal{S}$ satisfait à (18); il existe donc une mesure ν avec $\nu(p) = J(p)$ pour tout p dans $\mathcal{S}$; il est clair que ν est la *borne supérieure* de l'ensemble des mesures μ_i pour i dans I.

On dit qu'une mesure μ est *maximale* s'il n'existe aucune mesure μ' distincte de μ, avec $\mu \prec \mu'$. Comme tout ensemble filtrant croissant de mesures a une borne supérieure, le théorème de Zorn montre que, pour toute mesure μ, il existe une mesure maximale ν avec $\mu \prec \nu$.

4. Dans ce numéro, nous supposons que l'espace compact X est *métrisable*. Il est bien connu que l'ensemble B des points extrémaux

de X est intersection d'une famille dénombrable de parties ouvertes de X; on sait aussi qu'une mesure μ sur X est maximale si et seulement si $\mu(X-B)=0$.

Nous appellerons *dilatation* T sur X la donnée, pour tout x dans X, d'une mesure T_x sur X de masse 1 et de barycentre x, de sorte que la fonction $x \to T_x(f)$ sur X soit borélienne pour toute fonction continue f sur X. Pour toute mesure μ sur X, on peut alors définir une mesure $\nu = T\mu$ sur X par la relation

$$\nu(f) = \int_X T_x(f) \,.\, d\mu(x) \tag{20}$$

pour f dans $\mathcal{C}(X)$. On montre facilement que, pour f borélienne et bornée sur X, la fonction $x \to T_x(f)$ est borélienne et bornée, et que la relation (20) est encore valable.

THÉORÈME 2. — *Supposons X métrisable, et soient μ et ν deux mesures sur X; on a $\mu \prec \nu$ si et seulement s'il existe une dilatation T sur X telle que $\nu = T\mu$.*

Soient T une dilatation, μ une mesure sur X et p une fonction continue et convexe sur X. Comme x est le barycentre de la mesure T_x de masse 1, l'inégalité de Jensen donne $p(x) \leqq T_x(p)$, d'où

$$(T\mu)(p) = \int_X T_x(p) \,.\, d\mu(x) \geqq \int_X p(x) \,.\, d\mu(x) = \mu(p)$$

ou encore $\mu \prec T\mu$.

Réciproquement, supposons qu'on ait $\mu \prec \nu$. Soit θ une mesure sur $X \times X$ ayant les propriétés énoncées dans le théorème 1, *b*. Si l'on fait $u = u_0$ dans (1), on trouve

$$\int_{X\times X} f(x) \,.\, d\theta(x, y) = \mu(f) \quad [\forall f \in \mathcal{C}(X)], \tag{21}$$

ce qui exprime que μ est la première projection de θ. D'après le théorème de désintégration des mesures (*cf.* [3], p. 58), il existe une famille $(T'_x)_{x\in X}$ de mesures de masse 1 sur X, telle que la fonction $x \to T'_x(f)$ sur X soit borélienne pour f continue sur X, et vérifiant la relation

$$\int_{X\times X} f(x) \,.\, g(y) \,.\, d\theta(x, y) = \int_X f(x) \,.\, T'_x(g) \,.\, d\mu(x) \tag{22}$$

pour f et g continues sur X.

Comme X est métrisable, il existe une suite $(u_n)_{n\geqq 1}$ d'éléments de E' séparant les points de X; si r_x est le barycentre de T'_x, on a donc

$T'_x(u_n) = u_n(r_x)$; si l'on fait $g = u_n$ dans (22) et qu'on utilise (1), on trouve

$$(23) \qquad \int_X f(x).[u_n(r_x) - u_n(x)].d\mu(x) = 0 \quad [\forall f \in \mathcal{C}(X)].$$

Il existe par suite un ensemble borélien $P_n \subset X$ avec $\mu(P_n) = 0$ et $u_n(r_x) = u_n(x)$ pour x dans $X - P_n$; posons

$$P = \bigcup_{n \geq 1} P_n, \qquad \text{d'où} \quad \mu(P) = 0;$$

pour x dans $X - P$, on aura alors $r_x = x$ puisque la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ sépare les points de X. Si l'on pose

$$T_x = T'_x \qquad \text{pour } x \text{ dans } X - P$$

et

$$T_x = \varepsilon_x \quad (\text{masse } 1 \text{ au point } x) \qquad \text{pour } x \text{ dans } P,$$

on obtient une dilatation T dans X. On peut remplacer T'_x par T_x dans (22); si l'on pose $f = 1$, on trouve alors

$$(24) \qquad \nu(g) = \int_{X \times X} g(y).d\theta(x, y) = \int_X T_x(g).d\mu(x) \quad [\forall g \in \mathcal{C}(X)]$$

car ν est la seconde projection de θ. On a donc prouvé $\nu = T\mu$.

C. Q. F. D.

Ajoutons un complément au théorème 2. Soient μ une mesure sur X et ν une mesure *maximale* telle que $\mu \prec \nu$; on peut donc trouver une dilatation T sur X telle que $T\mu = \nu$. Considérons la fonction borélienne f sur X égale à 0 en tout point extrémal de X et à 1 en tout autre point; d'après la formule (20), on a donc

$$(25) \qquad \nu(X - B) = \int_X T_x(X - B).d\mu(x).$$

Comme ν est maximale, on a $\nu(X - B) = 0$, et par conséquent, on a $T_x(X - B) = 0$ pour μ-presque tout x; autrement dit, *la mesure T_x est maximale pour μ-presque tout x.*

5. Pour terminer, nous indiquerons le lien de nos résultats avec ceux de Loomis [7]; ce qui suit est un résumé des principaux énoncés de Loomis; une fois démontrée l'équivalence des conditions a et c du théorème 1, les assertions de Loomis peuvent s'établir très facilement.

a. Soit z un élément du cône convexe C de base X. Une *subdivision* de z est une suite $\delta = (z_1, \ldots, z_m)$ d'éléments de C, ayant z pour somme;

si $\delta' = (z'_1, \ldots, z'_n)$ est une autre subdivision de z, on écrit $\delta \leqq \delta'$ s'il existe une partition $(I_1, \ldots, I_m)$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ avec $z_i = \sum_{j \in I_i} z'_j$ pour $1 \leqq i \leqq m$. On définit ainsi une relation de préordre sur l'ensemble $\sigma(z)$ des subdivisions de z. A toute subdivision δ de z, on associe une mesure m_δ sur X, de résultante z, par la formule

$$(26) \qquad m_\delta(f) = \sum_{i=1}^{m} c_i . f(x_i) \qquad [\forall f \in \mathcal{C}(X)]$$

si $\delta = (c_1 . x_1, \ldots, c_m . x_m)$, avec des nombres positifs $c_1, \ldots, c_m$ et des éléments $x_1, \ldots, x_m$ de X.

b. Soit μ une mesure sur X, de résultante z; pour toute décomposition $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n$ de μ en somme de mesures, la suite $(r(\mu_1), \ldots, r(\mu_n))$ est une subdivision de z; on note $S(\mu)$ l'ensemble de ces subdivisions de z. Soient δ, δ' des subdivisions de z, et μ, μ' des mesures de résultante z; en utilisant le théorème 1, on obtient les équivalences suivantes :

$$m_\delta \prec \mu \iff \delta \in S(\mu), \qquad \delta \leqq \delta' \iff m_\delta \prec m_{\delta'},$$
$$\mu \prec \mu' \iff S(\mu) \subset S(\mu').$$

En particulier, la dernière de ces équivalences exprime que *la relation d'ordre de Choquet est identique au « strong ordering » de Loomis.*

c. On dit qu'un ensemble S de subdivisions de z est *décomposable* (« *s*-Boolean set on z ») si, pour δ et δ' dans S, il existe δ'' dans S avec $\delta \leqq \delta''$ et $\delta' \leqq \delta''$. Muni de la relation de préordre $\leqq$, S est un ensemble filtrant, et l'on a $m_\delta \prec m_{\delta'}$ pour $\delta \leqq \delta'$; d'après le n° 3, on peut définir la borne supérieure m_S de la famille $(m_\delta)_{\delta \in S}$ de mesures. En particulier, pour toute mesure μ de résultante z, l'ensemble $S(\mu)$ est décomposable, et l'on a $m_{S(\mu)} = \mu$. On dit que S est *compatible avec* μ si l'on a $S \subset S(\mu)$; ceci équivaut à $m_\delta \prec \mu$ pour tout δ dans S, ou encore à $m_S \prec \mu$.

d. D'après le théorème de Zorn, tout ensemble décomposable de subdivisions de z est contenu dans un ensemble décomposable *maximal.* Pour qu'un ensemble décomposable S de subdivisions de z soit maximal, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $S = S(\mu)$ avec une mesure μ maximale; on a alors $\mu = m_S$. En particulier, si le cône C est réticulé, l'ensemble $\sigma(z)$ de toutes les subdivisions de z est décomposable d'après le lemme de décomposition de F. Riesz; dans ce cas, il existe donc une mesure maximale unique de résultante z (« théorème d'unicité de Choquet »).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BLACKWELL (D.). — Comparison of experiments, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on mathematical Statistics and Probability* [1950. Berkeley]; p. 93-102. — Berkeley, Los Angeles, University of California Press, 1951.

[2] BOURBAKI (N.). — *Topologie générale.* Chap. 10. — Paris, Hermann, 1961, (Act. scient. et ind., 1084; Bourbaki, 10).

[3] BOURBAKI (N.). — *Intégration.* Chap. 6. — Paris, Hermann, 1959, (Act. scient. et ind., 1281; Bourbaki, 25).

[4] CHOQUET (G.). — Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 10, 1960, p. 333-344.

[5] CHOQUET (G.) et MEYER (P.-A.). — Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 13, 1962, p. 139-154.

[6] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) and POLYÁ (G.). — *Inequalities*, 2nd ed. — Cambridge, Cambridge University Press, 1952.

[7] LOOMIS (L. H.). — Unique direct integral decompositions on convex sets, *Amer. J. of Math.*, t. 84, 1962, p. 509-526.

[8] SHERMAN (S.). — On a theorem of Hardy, Littlewood, Polyá, and Blackwell, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 37, 1951, p. 826-831.

(Manuscrit reçu le 20 décembre 1963.)

P. CARTIER et P.-A. MEYER,
Département de Mathématiques,
Université de Strasbourg,
Strasbourg (Bas-Rhin).

J. M. G. FELL,
Department of Mathematics,
University of Washington,
Seattle 5, Wash. (États-Unis).