LARS GÅRDING
TAKESHI KOTAKE
JEAN LERAY

Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire, à données holomorphes ; analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées (Problème de Cauchy I bis et VI.)

Bulletin de la S. M. F., tome 92 (1964), p. 263-361
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1964__92__263_0>

Bull. Soc. math. France,
92, 1964, p. 263 à 361.

UNIFORMISATION ET DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE CAUCHY LINÉAIRE, A DONNÉES HOLOMORPHES ; ANALOGIE AVEC LA THÉORIE DES ONDES ASYMPTOTIQUES ET APPROCHÉES

(Problème de Cauchy, I bis et VI)

PAR

LARS GÅRDING, TAKESHI KOTAKE
et JEAN LERAY.

« Regardez les singularités : il n'y a que ça qui compte. »
Gaston JULIA.

Sommaire.

Résultats. — Cet article décrit les singularités de la solution u du problème de Cauchy linéaire, à données holomorphes :

u est *holomorphe* en les points non caractéristiques de la sous-multiplicité S qui porte les données de Cauchy;

en les points caractéristiques de S, u peut être *uniformisé* [1] par une application holomorphe, que définit un système différentiel ordinaire; en général, u est algébroïde;

le support de la singularité de u appartient à la *caractéristique* [2] K tangente à S;

par quadratures le long des bicaractéristiques engendrant K, on peut construire *un développement asymptotique* de u : son reste d'ordre m

---

[1] rendu holomorphe par composition avec cette application.

[2] K est la réunion des bicaractéristiques issues des covecteurs caractéristiques de S.

s'annule m fois sur S et est uniformisable ([3]) jusqu'à l'ordre m; ce développement donne donc les dérivées de tous ordres de u, à des fonctions bornées près;

le calcul de ces bicaractéristiques et du premier terme de ce développement est celui de *trajectoires* de particules et d'une densité d'*énergie-impulsion* conservative;

ce calcul fait correspondre au système différentiel linéaire que vérifie u (équations d'ondes) une équation non linéaire du premier ordre : l'*équation de Jacobi* ([4]) (elle régit des particules associées à ces ondes);

ce calcul est *analogue* à celui des *ondes approchées* qu'emploie l'optique géométrique; il fait correspondre, en employant la même équation de Jacobi, à d'autres ondes, régies par le même système, d'autres particules : celles que leur associe *la Mécanique quantique.*

Méthodes. — P. Rosenbloom [13] et L. Hörmander [6] ont prouvé le théorème de Cauchy-Kowalewski ([5]), dans le cas linéaire, par la méthode des approximations successives; cette méthode permet de donner à ce théorème une extension (chap. 1, n° 10) telle que la preuve (chap. 1, n°s 11 et 12) du théorème d'uniformisation (th. 1, n° 4) se réduise à ceci : par un changement de variables, on compense l'annulation du polynôme caractéristique en les points caractéristiques de S [n° 11 : résolution de (11.8)]. Le calcul du développement asymptotique de la solution résulte, lui aussi, de ce changement de variables (th. 1, n° 4; chap. 2); il emploie, en outre, un nouvel invariant, la matrice bicaractéristique (n° 3) qu'emploie aussi la théorie des ondes approchées (th. 5, n° 8; chap. 6).

Ce changement de variables, qui constitue une première uniformisation, s'obtient en résolvant un problème de Cauchy, non linéaire, du premier ordre, défini au moyen du polynôme caractéristique. D'autres uniformisations plus simples (th. 2, n° 5; chap. 3; th. 3, n° 6; chap. 4) s'en déduisent en explicitant la solution de ce problème du premier ordre : elles s'obtiennent en résolvant un système différentiel, du type d'Hamilton, qui est défini au moyen de ce même polynôme caractéristique.

L'interprétation mécanique du premier terme du développement asymptotique au moyen d'une densité d'énergie-impulsion conservative de particules consiste à caractériser ce premier terme par un invariant différentiel des trajectoires de ces particules (th. 5, n° 7; chap. 5); l'ana-

---

([3]) Ce reste est la différence entre u et la somme des m premiers termes du développement; il peut être uniformisé en même temps que toutes ses dérivées d'ordres $\leq m$; c'est ce que signifie : uniformisable jusqu'à l'ordre m.

([4]) Elle n'est pas entièrement déterminée par la donnée de ce système.

([5]) Rappelons que ce théorème a été généralisé par Riquier, Janet et Lednev [10].

logie de cette interprétation avec l'association de particules à certaines ondes approchées résulte d'une caractérisation analogue de ces ondes approchées (th. 6, n° 9; chap. 7).

Applications que ne développe pas le présent article. — Les résultats qui précèdent permettent d'analyser les singularités de la solution d'un problème de Cauchy à *données analytiques non holomorphes*; il faut d'abord définir et étudier (*cf.* l'article : aperçu de [V]) les transformations fonctionnelles qui transforment en solutions de tels problèmes la solution d'un problème à données holomorphes (solution unitaire). C'est ainsi que l'article « Problème de Cauchy [IV] » a décrit les singularités de *la solution élémentaire* d'un opérateur différentiel hyperbolique; [IV] se contente d'employer le premier terme du développement asymptotique qu'expose le présent article; l'emploi d'un plus grand nombre de termes donnerait une *paramétrix* de l'opérateur hyperbolique.

Ce développement asymptotique, qu'expose le présent article, garde un sens quand on ne suppose plus les données holomorphes; il pourrait donc servir à calculer les dérivées de tous ordres d'un *problème de Cauchy hyperbolique, bien posé,* à des termes près qui resteraient bornés quand ce problème tendrait vers un problème mal posé.

Enfin *la théorie des ondes approchées,* que le présent article développe et où il introduit la matrice bicaractéristique, est certainement d'un emploi commode *en Optique géométrique.*

Historique. — L'article « Problème de Cauchy [I] » avait donné, pour une seule équation, une preuve tortueuse du théorème d'uniformisation; en déduire le développement asymptotique de u était impossible; seul, son premier terme avait été obtenu : résumé de [VI].

Introduction.

1. Énoncé du problème de Cauchy.

Donnons-nous une multiplicité (6) analytique complexe X, de dimension complexe L; x désigne un point de X; $(x^1, \ldots, x^L)$ sont les coordonnées locales de x; la dérivée de u par rapport à x est notée

$$u_{x^l} = \frac{\partial u}{\partial x^l}; \qquad \text{de même} \quad u_{x^l x^\lambda} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^l \partial x^\lambda}.$$

(6) Variété sans singularité.

Donnons-nous aussi un espace vectoriel complexe Ξ : nous étudions un problème dépendant du paramètre $\xi \in \Xi$.

Donnons-nous sur X *un système d'équations aux dérivées partielles* :

$$(1.1) \qquad a_\mu^\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^\mu(\xi, x) = v^\nu(\xi, x) \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, M),$$

où : les a_μ^ν sont des opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes, constituant une matrice carrée; les v^ν sont des fonctions holomorphes données, constituant les composantes d'un vecteur v; les u^μ sont les fonctions inconnues; ce sont les composantes d'un vecteur u.

Nous convenons qu'il y a sommation par rapport à tout indice répété deux fois dans un monôme :

$$a_\mu^\nu u^\mu = \sum_{\mu=1}^{M} a_\mu^\nu u^\mu.$$

Choisissons des entiers m^μ et n^ν tels que

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \operatorname{ordre}(a_\mu^\nu) \leqq n^\nu - m^\mu & [\operatorname{ordre}(0) = -\infty], \\ \sup\limits_\sigma \left[\sum\limits_\nu \operatorname{ordre}(a_{\sigma(\nu)}^\nu)\right] = \sum\limits_\nu n^\nu - \sum\limits_\mu m^\mu, \end{cases}$$

σ désignant une permutation arbitraire de $(1, \ldots, M)$.

D'après VOLEVIČ [14], un tel choix est toujours possible, sauf si tous les a_μ^ν sont nuls, ce que nous excluons; en général, il est possible de plusieurs façons. Nous dirons que m^μ est l'ordre de u^μ et que n^ν est l'ordre de v^ν.

Les données de Cauchy sont :

— une sous-multiplicité analytique $S(\xi)$ de X, de codimension 1, dont l'équation locale

$$S(\xi) : \quad s(\xi, x) = 0 \qquad (s_x \neq 0)$$

dépend linéairement de ξ;

— des fonctions holomorphes $w^\mu(\xi, x)$:

— enfin un entier

$$(1.3) \qquad n \geqq \sup_\nu n^\nu.$$

Le problème de Cauchy consiste à trouver une solution de (1.1) vérifiant les conditions de Cauchy (7).

$$(1.4) \qquad u^{\mu}(\xi, x) - w^{\mu}(\xi, x)$$

s'annule $n - m^{\mu}$ fois sur $S(\xi)$.

Vu (1.1), ce problème n'est évidemment possible que si

$$(1.5) \quad v^{\nu}(\xi, x) - a_{\mu}^{\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) w^{\mu}(\xi, x) \text{ s'annule } n - n^{\nu} \text{ fois sur } S(\xi),$$

ce que nous supposerons.

2. Les notions qu'emploie l'uniformisation.

Nous notons (x, p) un *covecteur* d'origine x, de composantes $p = (p_1, \ldots, p_L)$; par exemple, le gradient au point x d'une fonction $f(x)$ est le covecteur

$$f_x = (f_{x^1}, \ldots, f_{x^L}).$$

Le produit scalaire en x d'un vecteur dx et d'un covecteur p est noté

$$p.dx = p_1\, dx^1 + \ldots + p_L\, dx^L.$$

Nous nommons *polynôme caractéristique* de l'opérateur $a_{\mu}^{\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, dont l'ordre est $\leqq n^{\nu} - m^{\mu}$, la somme des termes de degré $n^{\nu} - m^{\mu}$ du polynôme (8) $a_{\mu}^{\nu}(x, p)$ de p; nous le notons

$$g_{\mu}^{\nu}(x, p).$$

Ce polynôme dépend du choix des entiers n^{ν} et m^{μ}; mais il ne dépend pas du choix des coordonnées; en effet $g_{\mu}^{\nu}(x, f_x)$ est le coefficient du terme de degré $n^{\nu} - m^{\mu}$ du polynôme en ω,

$$e^{-\omega f(x)} a_{\mu}^{\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) e^{\omega f(x)}.$$

Nous nommons *polynôme caractéristique* de la matrice $\left(a_{\mu}^{\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$ le déterminant

$$\text{dét}\left(g_{\mu}^{\nu}(x, p)\right);$$

---

(7) CAUCHY-KOWALEWSKI supposent tous les seconds membres v^{ν} du même ordre $n^{\nu} = n$; ils font, de ce fait, des hypothèses que détruisent les opérations suivantes:

— adjoindre aux inconnues certaines de leurs dérivées et remplacer à volonté dans le système ces dérivées par ces nouvelles inconnues;

— passer au système adjoint (au sens de Riemann).

(8) Autrement dit : la partie principale de ce polynôme.

vu (1.2), c'est un polynôme en p, homogène de degré

$$\sum_\nu n^\nu - \sum_\mu m^\mu = \sup_\sigma \left[\sum_\nu \text{ordre}(a^\nu_{\sigma(\nu)})\right];$$

il est indépendant du choix des coordonnées : en effet chacun des $g^\nu_\mu(x, p)$ est indépendant de ce choix; il est indépendant du choix des n^ν et m^μ : en effet, vu (1.2), il est la partie principale de dét $(a^\nu_\mu(x, p))$, considéré comme un polynôme en p de degré $\sum_\nu n^\nu - \sum_\mu m^\mu$.

Nous nommons *fonction caractéristique* de cette matrice (a^ν_μ) toute fonction $g(x, p)$, homogène en p, multiple ([9]) de $\text{dét}(g^\nu_\mu(x, p))$ au voisinage de l'ensemble des covecteurs (x, s_x) de $S(\xi)$: le théorème 2 aura besoin de choisir cette fonction caractéristique homogène de degré 1, donc différente du polynôme caractéristique (sauf si le système se réduit à une équation d'ordre 1).

Quand $g(x, p)$ est tel que $g/\text{dét}(g^\nu_\mu) \neq 0$, les définitions suivantes sont indépendantes du choix de g : on nomme

— *points* [covecteurs] *caractéristiques* de $S(\xi)$ ceux de ses points x [de ses covecteurs (x, s_x)] vérifiant $g(x, s_x) = 0$;

— *bandes* ([10]) *bicaractéristiques* de X les bandes vérifiant le système ([11]), nommé système bicaractéristique :

$$\frac{dx}{g_p(x, p)} = -\frac{dp}{g_x(x, p)}, \qquad g(x, p) = 0; \tag{2.1}$$

— *courbe bicaractéristique* la courbe que parcourt x quand (x, p) parcourt une bande bicaractéristique;

— *caractéristique $K(\xi)$ tangente à $S(\xi)$* la réunion des courbes bicaractéristiques issues des covecteurs caractéristiques de $S(\xi)$;

— *conoïde caractéristique $K(y)$ de sommet y* la réunion des courbes bicaractéristiques issues d'un point donné $y \in Y$.

Le système (2.1) est un système d'*Hamilton* d'un type particulier, pour lequel la forme différentielle $p.dx$ est invariante ([12]). On a donc,

---

([9]) telle que $g/\text{dét}(g^\nu_\mu)$ soit holomorphe au voisinage de ....

([10]) Une bande est, dans l'espace des covecteurs (x, p) de X, une courbe, le long de laquelle $p.dx = 0$.

([11]) (2.1) signifie que $(dx^1, \ldots, dx^L, dp_1, \ldots, dp_L)$ sont proportionnels à $(g_{p_1}, \ldots, -g_{x^L})$.

([12]) Autrement dit : quand (x, p) et $(x + dx, p + dp)$ décrivent deux bandes bicaractéristiques infiniment voisines, alors $p.dx$ est constant : $p.dx$ s'exprime au moyen des intégrales premières de (2.1).

On le prouve en vérifiant que, sur la multiplicité $g(x, p) = 0$, $(g_x, g_p) \neq 0$, le système (2.1) est le système caractéristique de la forme $p.dx$, au sens d'É. CARTAN [3], chap. 8.

Il est essentiel que l'équation $g(x, p) = 0$ soit homogène en p.

sur la réunion des bandes bicaractéristiques issues des covecteurs caractéristiques de $S(\xi)$ ou de y :

$$p.dx = 0;$$

aussi nomme-t-on covecteurs de $K(\xi)$ ou de $K(y)$ les covecteurs appartenant à cette réunion; $K(\xi)$ et $K(y)$ vérifient donc l'*équation caractéristique*

$$g(x, p) = 0;$$

c'est-à-dire

$$g(x, k_x) = 0,$$

en les points où K est une hypersurface d'équation $k(x) = 0$.

Les deux conditions suivantes sont donc équivalentes :

$$y \in K(\xi);$$

$K(y)$ et $S(\xi)$ sont tangents, c'est-à-dire ont un covecteur commun.

NOTE. — Si $g(x, p)$ est identiquement nul, la conclusion de nos raisonnements est vide ([13]).

NOTE. — Nos conclusions sont d'un intérêt minime aux points y de $S(\xi)$ tels que (x, s_y) annule deux ([14]) fois $g(x, p)$; mais alors on peut parfois procéder comme suit.

NOTE 2.1. — Si la matrice (g_μ^ν) est une somme directe de sous-matrices γ, il faut, pour obtenir des conclusions intéressantes, choisir $g(x, p)$ multiple non pas de $\text{dét}(g_\mu^\nu)$, mais de chacun des $\text{dét}(\gamma)$; nos conclusions restent vraies, compte tenu de la note 3.1; la modification à apporter à la preuve du théorème d'uniformisation est banale et évidente; les notes 3.1, 16.1, 19.1, 22.1, 23.1 disent comment est modifié le calcul du développement asymptotique.

Points exceptionnels. — Un point caractéristique x de $S(\xi)$ est dit exceptionnel quand il possède au moins l'une des deux propriétés suivantes :

1° $S(\xi)$ et le conoïde caractéristique $K(x)$ sont tangents, au voisinage ([15]) de x, en une infinité de points [le lemme 15.2 prouve que $S(\xi)$ et $K(x)$ se touchent alors le long d'une courbe analytique passant par x;

([13]) par exemple, dans le théorème 1 : $\xi[t, x] = s(x)$; $u^\mu \circ \xi$ désigne $u^\mu(s(x), x)$, qui est donnée.

([14]) c'est-à-dire annule g, g_x et g_p. En un tel point y, on a, avec les notations du n° 4 :

$$x(t, y) = y, \qquad p(t, y) = s_y, \qquad \xi[t, y] = s(y), \qquad u^\mu \circ \xi = u^\mu(s(y), y),$$

qui est donnée.

([15]) On emploie seulement la partie de $K(x)$ voisine de x : elle est engendrée par les arcs bicaractéristiques, issus de x et suffisamment petits.

si le vecteur bicaractéristique $g_p(x, s_x)$ n'est pas nul, alors cette courbe est régulière en x et est tangente en x à ce vecteur].

2° La courbe bicaractéristique issue du covecteur (x, s_x) de $S(\xi)$ consiste en le seul point x.

Exemple. — Tous les points d'une bande bicaractéristique appartenant à $S(\xi)$ sont exceptionnels.

Exemple. — Un point x, où $g(x, p) = 0$ implique $g_p = 0$, est exceptionnel.

3. Les notions qu'emploie le développement asymptotique.

Supposons donné *un élément de volume* de X, c'est-à-dire une forme différentielle holomorphe de degré maximum,

$$\rho(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^L, \qquad \text{où} \quad \rho(x) \neq 0;$$

la matrice adjointe $(a^{\star\nu}_{\mu})$ de (a^{ν}_{μ}) est définie, suivant Riemann, par la condition

$$\rho\, [v(a^{\nu}_{\mu} u) - (-1)^{n^\nu - m^\mu} u(a^{\star\mu}_{\nu} v)]\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^L$$

est la différentielle d'une forme dont les coefficients sont bilinéaires par rapport aux dérivées de u et de v. Explicitement : si

$$a^{\nu}_{\mu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{\alpha} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}, \qquad \text{où} \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_L),$$

alors

$$(3.1) \qquad a^{\star\mu}_{\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) = \frac{1}{\rho(x)} \sum_{\alpha} (-1)^{n^\nu - m^\mu - |\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} [\rho(x)\, a_\alpha(x)\, v(x)].$$

Le polynôme sous-caractéristique de a^{μ}_{ν} est, par définition, la somme des termes de degré $n^\nu - m^\mu - 1$ en p de

$$1/2 [a^{\nu}_{\mu}(x, p) - a^{\star\mu}_{\nu}(x, p)],$$

qui est un polynôme en p ayant au plus ce degré; c'est donc le polynôme caractéristique de

$$1/2 \left[a^{\nu}_{\mu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - a^{\star\mu}_{\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right];$$

il ne dépend donc pas du choix des coordonnées. Explicitement, si

$$a^{\nu}_{\mu}(x, p) = g^{\nu}_{\mu}(x, p) + g'^{\nu}_{\mu}(x, p) + \ldots,$$

g_μ^ν, g'^ν_μ, ... étant de degrés décroissants $n^\nu - m^\mu$, $n^\nu - m^\mu - 1$, ..., alors

$$a^\star{}^\mu_\nu(x, p) = \left[g^\nu_\mu(x, p) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2(\rho g^\nu_\mu)}{\partial x^\lambda \partial p_\lambda} - g'^\nu_\mu(x, p) + \ldots \right]$$

et le polynôme *sous-caractéristique* de a^ν_μ est donc

$$j^\nu_\mu(x, p) = g'^\nu_\mu - \frac{1}{2\rho} \frac{\partial^2(\rho g^\nu_\mu)}{\partial x^\lambda \partial p_\lambda}. \tag{3.2}$$

a^ν_μ et $a^\star{}^\mu_\nu$ ont le même polynôme caractéristique et des polynômes sous-caractéristiques opposés :

$$g^\star{}^\mu_\nu = g^\nu_\mu, \qquad j^\star{}^\mu_\nu = -j^\nu_\mu.$$

Autrement dit : la matrice caractéristique $(g^\star{}^\nu_\mu)$ de l'adjointe $(a^\star{}^\nu_\mu)$ de la matrice (a^ν_μ) s'obtient en transposant sa matrice caractéristique (g^ν_μ); la matrice sous-caractéristique $(j^\star{}^\nu_\mu)$, en transposant et multipliant par -1 sa matrice sous-caractéristique (j^ν_μ).

Une matrice (a^ν_μ) *self-adjointe* a donc une matrice caractéristique symétrique et une matrice sous-caractéristique antisymétrique.

Le vecteur $h(x, p)$ et le covecteur $\mathfrak{h}(x, p)$. — Les covecteurs (x, p) de X vérifiant

$$g(x, p) = 0, \qquad (g_x, g_p) \neq 0 \tag{3.3}$$

constituent une multiplicité analytique, où $\text{dét}(g^\nu_\mu) = 0$. Notons (G^μ_ν) le produit par g de la matrice inverse de (g^ν_μ); autrement dit, G^μ_ν est le mineur de (g^ν_μ) :

$G^\mu_\nu(x, p)$ est holomorphe au voisinage de l'ensemble des covecteurs (x, s_x) de $S(\xi)$;

$$dg \equiv G^\mu_\nu \, dg^\nu_\mu \qquad (\text{mod}\, g);$$

donc, sur la multiplicité (3.3), $(G^\mu_\nu) \neq 0$.

Au voisinage de chaque point de la multiplicité (3.3) on peut donc définir un vecteur $h(x, p)$ de composantes $h^1, \ldots, h^N$ et un covecteur $\mathfrak{h}(x, p)$ de composantes $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_N$ tels que

$$h^\mu g^\nu_\mu \equiv 0, \qquad g^\nu_\mu \mathfrak{h}_\nu \equiv 0, \qquad G^\mu_\nu \equiv h^\mu \mathfrak{h}_\nu, \qquad dg \equiv h^\mu \mathfrak{h}_\nu \, dg^\nu_\mu \quad (\text{mod}\, g). \tag{3.4}$$

Les restrictions de h et $\mathfrak{h}$ à cette multiplicité sont évidemment définies à la multiplication près de h par f et de $\mathfrak{h}$ par $1/f$, $f(x, p)$ étant une fonction holomorphe, arbitraire, ne s'annulant pas.

La fonction $j(x, p)$ est définie localement sur la multiplicité (3.3); c'est la forme bilinéaire de (h, h_x, h_p) et $(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_x, \mathfrak{h}_p)$ que voici :

$$j(x, p) = h^\mu(x, p) j_\mu^\nu \mathfrak{h}_\nu + 1/2 \begin{vmatrix} h^\mu & -g_\mu^\nu & \mathfrak{h}_\nu \\ \dfrac{\partial h^\mu}{\partial x^\lambda} & \dfrac{\partial g_\mu^\nu}{\partial x^\lambda} & \dfrac{\partial \mathfrak{h}_\nu}{\partial x^\lambda} \\ \dfrac{\partial h^\mu}{\partial p_\lambda} & \dfrac{\partial g_\mu^\nu}{\partial p_\lambda} & \dfrac{\partial \mathfrak{h}_\nu}{\partial p_\lambda} \end{vmatrix}. \tag{3.5}$$

La fonction $J(x, p; y, q)$ est définie quand les deux covecteurs (x, p) et (y, q) appartiennent à une même bande bicaractéristique, c'est-à-dire à une même solution de (2.1); la définition de J s'obtient en complétant (2.1) comme suit : quand (x, p) varie, (y, q) étant fixe, alors

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{g_p(x, p)} = -\dfrac{dp}{g_x(x, p)} = -\dfrac{dJ(x, p; y, q)}{j(x, p) J}, \qquad g(x, p) = 0, \\ J(y, q; y, q) = 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

La matrice bicaractéristique $G_\nu^\mu(x, p; y, q)$ est d'abord définie sur l'ensemble des couples de covecteurs $(x, p; y, q)$ appartenant à une même bande bicaractéristique : sur cet ensemble, sa définition est

$$G_\nu^\mu(x, p; y, q) = \sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(x)}}\, h^\mu(x, p) J(x, p; y, q) \mathfrak{h}_\nu(y, q) \tag{3.7}$$

et ses propriétés, qu'établira le n° 21, sont les suivantes :

1° $G_\nu^\mu(x, p; x, p) = G_\nu^\mu(x, p)$.

2° $G_\nu^\mu(x, p; y, q)$ est homogène en (p, q).

3° $G_\nu^\mu(x, p; y, q)$ *dépend de* g, g_μ^ν et g'^ν_μ, sans dépendre des choix de ρ, h et $\mathfrak{h}$; alors que h et $\mathfrak{h}$ ne sont définis que localement, G_ν^μ est donc définie globalement.

4° Multiplier $g(x, p)$ et $G_\nu^\mu(x, p)$ par une fonction holomorphe $F(x, p)$ multiplie $G_\nu^\mu(x, p; y, q)$ par $\sqrt{F(x, p) F(y, q)}$.

5° La matrice bicaractéristique $(G^{\star\mu}_\nu)$ de la matrice adjointe $(a^{\star\nu}_\mu)$ de (a_μ^ν) s'obtient en transposant sa matrice bicaractéristique (G_ν^μ) multipliée par $\rho(x)/\rho(y)$ et en permutant (x, p) et (y, q) :

$$G^{\star\nu}_\mu(y, q; x, p) = \frac{\rho(x)}{\rho(y)} G_\nu^\mu(x, p; y, q).$$

6° Si, pour un choix convenable de ρ, la matrice (a_μ^ν) est *self-adjointe*, alors

$$G_\nu^\mu(x, p; y, q) = \pm \sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(x)}\, G_\mu^\mu(x, p)\, G_\nu^\nu(y, q)}. \tag{3.8}$$

Nous étendrons la définition de $G^{\mu}_{\nu}(x, p; y, q)$ à tous les couples de covecteurs (x, p), (y, q) appartenant à une même solution du système différentiel

$$(3.9)\qquad \frac{dx}{g_p(x, p)} = -\frac{dp}{g_x(x, p)};$$

nous le ferons de sorte que $G^{\mu}_{\nu}(x, p; y, q)$ soit holomorphe et ait la propriété 1° : c'est évidemment possible, au moins localement.

Si le système (1.1) se réduit à *une seule équation*

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(\xi, x) = v(\xi, x),$$

et si $n^{\nu} = n$, alors nous supprimons les indices μ et ν et prenons $m^{\mu} = 0$:

$$M = 1, \qquad n^{\nu} = n, \qquad m^{\mu} = 0;$$

quand g est le *polynôme caractéristique,* nous choisissons, en accord avec $(3.4)_1$:

$$h = 1, \qquad \mathfrak{h} = 1;$$

donc $j(x, p)$ est le *polynôme sous-caractéristique,* qui est défini même quand $g(x, p) \neq 0$; dans les définitions (3.6) et (3.7) de J et G nous supprimons la restriction $g(x, p) = 0$: *la fonction bicaractéristique* $G(x, p; y, q)$ est définie sans ambiguïté pour tous les couples de covecteurs appartenant à une même solution de (3.9).

NOTE 3.1. — Supposons qu'on ait réalisé l'hypothèse (3.3) en employant la note 2.1 : la matrice (g^{ν}_{μ}) est une somme directe de matrices

$$\gamma = (g^{\nu}_{\mu}), \qquad \text{où} \quad \mu \text{ et } \nu \in M_{(\gamma)},$$

les $M_{(\gamma)}$ constituant une partition ([16]) de $1, \ldots, M$;

$$g^{\nu}_{\mu} = 0 \qquad \text{si} \quad \mu \in M_{(\gamma)} \quad \text{et} \quad \nu \notin M_{(\gamma)}.$$

Notons $G^{\mu}_{\nu}(x, p)$ la somme directe du produit par g des inverses des matrices γ. Au voisinage de chaque point de la multiplicité (3.3), on définit, pour chacune des sous-matrices γ, un vecteur ${}^{\gamma}h(x, p)$, de composantes $h^{\mu}[\mu \in M_{(\gamma)}]$ et un covecteur ${}_{\gamma}\mathfrak{h}$, de composantes $\mathfrak{h}_{\nu}[\nu \in M_{(\gamma)}]$. En remplaçant dans (3.5) h et $\mathfrak{h}$ par ${}^{\alpha}h$ et ${}_{\beta}\mathfrak{h}$, c'est-à-dire en y prenant $\mu \in M_{(\alpha)}$ et $\nu \in M_{(\beta)}$, on définit une fonction numérique ${}^{\alpha}_{\beta}j(x, p)$ sur la multiplicité (3.3); en particulier :

$$(3.10)\qquad {}^{\alpha}_{\beta}j = h^{\mu} g'^{\nu}_{\mu} \mathfrak{h}_{\nu}, \qquad \text{où} \quad \mu \in M_{(\alpha)} \quad \text{et} \quad \nu \in M_{(\beta)}, \qquad \text{si} \quad \alpha \neq \beta.$$

([16]) $\bigcup_{\gamma} M_{(\gamma)} = \{1, 2, \ldots, M\}$, $M_{(\alpha)} \cap M_{(\beta)} = 0$ si $\alpha \neq \beta$.

Définissons des fonctions numériques ${}^{\beta}_{\alpha}J(x, p; y, q)$ de deux covecteurs (x, p) et (y, q) appartenant à une même bande bicaractéristique, par les équations analogues à (3.6) :

$$(3.11)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{g_p(x, p)} = -\dfrac{dp}{g_x(x, p)} = -\dfrac{d\,{}^{\beta}_{\alpha}J(x, p; y, q)}{{}^{\gamma}_{\alpha}j(x, p)\,{}^{\beta}_{\gamma}J} \\ \qquad \text{pour} \quad dy = dq = 0, \qquad g(x, p) = 0; \\ {}^{\beta}_{\alpha}J(y, q; y, q) = 1 \quad \text{si} \quad \alpha = \beta, \qquad = 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Définissons enfin comme suit la matrice bicaractéristique sur l'ensemble des couples de covecteurs $(x, p; y, q)$ appartenant à une même bande bicaractéristique :

$$(3.12)\quad G^{\mu}_{\nu}(x, p; y, q) = \sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(x)}}\, h^{\mu}(x, p)\, {}^{\beta}_{\alpha}J(x, p; y, q)\, \mathfrak{h}_{\nu}(y, q),$$

α et β étant définis par les conditions

$$\mu \in M_{(\alpha(}, \quad \nu \in M_{(\beta)}.$$

Cette matrice possède encore les propriétés 1°, 2°, 3°, 4° et 5°; (3.8) ne vaut plus. On prolonge comme ci-dessus cette définition à l'ensemble de tous les couples de covecteurs appartenant à une même solution de (3.9).

4. Uniformisation portant sur un paramètre.

Nous supposons $\dim \Xi = 1$ et l'équation $S(\xi)$ résolue en ξ :

$$S(\xi) : \quad s(x) - \xi = 0.$$

Soit $u(\xi, x)$ une fonction, holomorphe au moins en un point de $S(\xi)$; soit $\xi[t, x]$ une fonction numérique de la variable numérique t et du point x, holomorphe pour t petit [17] et telle que $\xi[0, x] = s(x)$; notons $u \circ \xi$ la fonction composée de $u(\xi, x)$ et $\xi[t, x]$:

$$u \circ \xi = u(\xi[t, x], x);$$

nous disons que $\xi[t, x]$ *uniformise* $u(\xi, x)$ quand $u \circ \xi$ est une fonction de $[t, x]$ holomorphe pour t petit [17]; nous disons que $\xi[t, x]$ uniformise $u(\xi, x)$ jusqu'à l'ordre m quand $\xi[t, x]$ uniformise $u(\xi, x)$ et toutes ses dérivées d'ordres $\leq m$; vu la formule (11.1) de dérivation

[17] $|t| < \varepsilon(x)$.

d'une fonction composée, il suffit que $\xi[t, x]$ uniformise les dérivées de u en ξ d'ordres $\leqq m$; nous les notons

$$u_j(\xi, x) = \left(-\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^j u(\xi, x).$$

Nous disons que $u(\xi, x)$ admet *un développement asymptotique*

$$u(\xi, x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} u^r(\xi, x)$$

quand nous avons [18], pour $0 \leqq j \leqq m$:

$$(4.1) \qquad \left(u_j - \sum_{r=0}^{m} u_j^r\right) \circ \xi \equiv 0 \qquad [\bmod t, \text{ donc } ^{(19)} \bmod t^{m+1-j}].$$

La définition (4.1) équivaut à la condition

$$(4.2) \qquad \left(u_m - \sum_{r=0}^{m} u_m^r\right) \circ \xi \equiv 0, \qquad u_j^m \circ \xi \equiv 0 \quad (\bmod t), \qquad \text{si } j < m;$$

cette condition montre en particulier que $\xi[t, x]$ uniformise $u^r(\xi, x)$ jusqu'à l'ordre $r - 1$ et que $u^r \circ \xi$ s'annule r fois pour $t = 0$.

La formule (11.1) de dérivation d'une fonction composée permet d'écrire (4.2) comme suit :

$$(4.3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (u - u^0) \circ \xi \equiv 0 \qquad (\bmod t); \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(u_{m-1}^m \circ \xi) \equiv \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\left(u_{m-1} - \displaystyle\sum_{r=0}^{m-1} u_{m-1}^r\right) \circ \xi\right] \\ \qquad [\bmod (t\xi_t)] \qquad \text{si } 0 < m; \\ u_j^m \circ \xi \equiv 0 \quad (\bmod t) \qquad \text{si } 0 \leqq j \leqq m. \end{array} \right.$$

Par suite, *construire le développement asymptotique le plus général* [20] *de u, c'est obtenir l'expression de*

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{m-1}^m \circ \xi) \qquad [\bmod (t\xi_t)],$$

---

[18] $F \equiv 0 \, (\bmod f)$ signifie que F/f est holomorphe.

[19] Vu la formule (11.1) de dérivation d'une fonction composée.

[20] C'est ce que fait le théorème 1. Mais, bien entendu, ce qui est intéressant, c'est de construire, le plus simplement possible, les premiers termes d'un développement asymptotique particulier : quelques-uns des corollaires et exemples le font.

en fonction de $u^0, \ldots, u^{m-1}$ *vérifiant* (4.2) : si l'on choisit u^m tel que $\frac{\partial}{\partial t}(u^m_{m-1} \circ \xi)$ ait cette expression mod $(t\xi_t)$ et que (21) $u^m_j \circ \xi \equiv 0 \pmod t$ pour $0 \leqq j < m$, alors $u^0, \ldots, u^m$ vérifient eux aussi (4.2).

La définition (4.1) et le lemme 11 montrent ceci : *la connaissance d'un développement asymptotique de u jusqu'à l'ordre m, c'est-à-dire la connaissance de* $u^0, \ldots, u^m$, *permet le calcul des dérivées de u d'ordres* $r \leqq m$, *à une fonction bornée près, que* $\xi[t, x]$ *uniformise et qui, composée avec* $\xi[t, x]$, *s'annule* $m - r + 1$ *fois pour* $t = 0$.

La fonction uniformisante $\xi[t, x]$ sera la solution du problème de Cauchy non linéaire du premier ordre

$$(4.4) \qquad \xi_t + g(x, \xi_x) = 0, \qquad \xi[0, x] = s(x).$$

La résolution de ce problème, que rappelle le n° 13, est classique : soit $x(t, y)$, $p(t, y)$ la solution du problème de Cauchy ordinaire :

$$(4.5) \quad \frac{dx}{dt} = g_p(x, p), \qquad \frac{dp}{dt} = -g_x, \qquad x(0, y) = y, \qquad p(0, y) = s_y;$$

on a, N désignant le degré d'homogénéité de $g(x, p)$ en p :

$$(4.6) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \xi[t, x] = s(y) + (N-1)\, t g(y, s_y), \\ \xi_x[t, x] = p, \qquad \xi_t[t, x] = -g(y, s_y) = -g(x, p), \\ \text{pour} \quad x = x(t, y), \qquad p = p(t, y). \end{array} \right.$$

Les fonctions qu'emploie le développement asymptotique sont la matrice bicaractéristique (n° 3), le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(x)}{D(y)} = \text{dét} \frac{\partial x^l(t, y)}{\partial y^\lambda} \qquad \text{et son inverse} \quad \frac{D(y)}{D(x)} = 1 \Big/ \frac{D(x)}{D(y)}.$$

Nous emploierons une variable numérique $\hat{t}$ variant de 0 à t et nous noterons

$$\hat{x} = x(\hat{t}, y), \qquad \hat{p} = p(\hat{t}, y), \qquad \frac{D(x)}{D(\hat{x})} = \frac{D(x)}{D(y)} \Big/ \frac{D(\hat{x})}{D(y)}.$$

Voici le théorème essentiel :

THÉORÈME 1.

1° CAUCHY-KOWALEWSKI. — *En chaque point non caractéristique de* $S(\xi)$, *le problème de Cauchy* (n° 1) *possède une et une seule solution* $u^\mu(\xi, x)$, *qui soit holomorphe.*

---

(21) Vu la formule (11.1) de dérivation d'une fonction composée, les $u^m_j \circ \xi$ $(j = m-2, \ldots, 1, 0)$ se déduisent des $u^m_{m-1} \circ \xi$ par les quadratures

$$\frac{\partial}{\partial t}(u^m_j \circ \xi) = -\xi_t(u^m_{j+1} \circ \xi), \qquad u^m_j \circ \xi = 0 \qquad \text{pour} \quad t = 0.$$

Rappelons que u^m_0 désigne u^m.

2° Uniformisation. — *La fonction* $\xi[t, x]$ *uniformise* $u^\mu(\xi, x)$ *jusqu'à l'ordre* $n - m^\mu - 1$. *Sur l'image d'un domaine d'holomorphie de* $\xi[t, x]$ *par l'application*

$$(t, x) \to (\xi[t, x], x),$$

le support des singularités de $u^\mu(\xi, x)$ *appartient donc à l'ensemble* $\mathcal{K}$ *des* (ξ, x) *vérifiant les deux conditions équivalentes :*

$$x \in K(\xi); \quad K(x) \text{ et } S(\xi) \text{ sont tangentes.}$$

3° Le développement asymptotique de u^μ *s'obtient comme suit, par quadratures le long des bicaractéristiques engendrant* $K(\xi)$: *soit à trouver*

$$u^\mu(\xi, x) \sim w^\mu(\xi, x) + \sum_{r=n}^{\infty} u^{\mu, r}(\xi, x)$$

tel qu'on ait, pour $0 \leqq j \leqq m - m^\mu$:

$$(4.7) \quad \left(u_j^\mu - w_j^\mu - \sum_{r=n}^{m} u_j^{\mu, r}\right) \circ \xi \equiv 0 \qquad (\bmod t, \textit{ donc } \bmod t^{m - m^\mu + 1 - j}).$$

On doit avoir, pour $0 \leqq j < m - m^\mu$, $n \leqq m$:

$$u_j^{\mu, m} \circ \xi \equiv 0 \qquad (\bmod t, \textit{ donc } \bmod t^{m - m^\mu - j});$$

il s'agit donc de calculer mod t :

$$u_{m - m^\mu}^{\mu, m} \circ \xi = -\frac{1}{\xi_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(u_{m - m^\mu - 1}^{\mu, m} \circ \xi\right).$$

Le premier terme $u^{\mu, n}$ est donné par la formule

$$(4.8) \quad u_{n - m^\mu}^{\mu, n}(\xi, x) \equiv \frac{1}{g(y, s_y)} \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)}}\, G_\nu^\mu(x, p; y, s_y)\, v_{n - n^\nu}^{\nu, n}(s(y), y) \quad (\bmod t),$$

où

$$v^{\nu, n}(\xi, x) = v^\nu(\xi, x) - a_\mu^\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) w^\mu(\xi, x)$$

est holomorphe,

$$(4.9) \quad \xi = s(y) + (N - 1)\, t g(y, s_y), \qquad x = x(t, y), \qquad p = p(t, y),$$

ce qui implique (4.6).

Terme général. — Posons

$$(4.10) \quad v^{\nu, m}(\xi, x) = v^\nu(\xi, x) - a_\mu^\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left[w^\mu(\xi, x) + \sum_{r=n}^{m-1} u^{\mu, r}(\xi, x)\right];$$

$$(4.11) \qquad U^{\mu, m}[t, x] = G_\nu^\mu(x, \xi_x)\, v_{m - n^\nu}^{\nu, m} \circ \xi;$$

les choix de $u^{\mu,n}, \ldots, u^{\mu,m-1}$ se trouvent avoir été faits tels que

$$v_j^{\nu,m}\circ\xi \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} t) \qquad \text{si } j < m - n^\nu \quad (n \leqq m),$$
$$U^{\mu,m}[t, x] \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} 1);$$

c'est-à-dire : $U^{\mu,m}[t, x]$ est fonction holomorphe de (t, x); posons enfin

$$(4.12)\quad V^{\nu,m}[t, x] \equiv -\left[g^{\nu}_{\mu p_\lambda}(x, \xi_x)\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g^{\nu}_{\mu p_l p_\lambda}\xi_{x^l x^\lambda} + g'^{\lambda}_{\mu}\right] U^{\mu,m}[t, x] \quad (\operatorname{mod} \xi_t)$$

on a, pour $m \geqq n$ et moyennant (4.9) :

$$(4.13)\quad \begin{cases} u^{\mu,m}_{m-m^\mu}(\xi, x) \equiv \dfrac{1}{g(y, s_y)} U^{\mu,m}[t, x] \\ \qquad + \dfrac{1}{g(y, s_y)} \displaystyle\int_0^t \frac{D(\hat{x})}{D(x)} G^{\mu}_{\nu}(x, p; \hat{x}, \hat{p})\, V^{\nu,m}[\hat{t}, \hat{x}]\, d\hat{t} \\ \qquad (\operatorname{mod} t). \end{cases}$$

NOTE 4. — Quand $v^{\nu,m}_{m-n^\nu}\circ\xi$ est *holomorphe*, la simplification suivante se produit : soit

$$(4.14)\qquad W^{\nu,m}[t, x] \equiv \frac{\partial}{\partial t}[v^{\nu,m}_{m-n^\nu}\circ\xi] \qquad (\operatorname{mod} \xi_t);$$

on a, moyennant (4.9) :

$$(4.15)\quad \begin{cases} u^{\mu,m}_{m-m^\mu}(\xi, x) \equiv \dfrac{1}{g(y, s_y)} \sqrt{\dfrac{D(y)}{D(x)}}\, G^{\mu}_{\nu}(x, p; y, s_y)\, v^{\nu,m}_{m-n^\nu}(s(y), y) \\ \qquad + \dfrac{1}{g(y, s_y)} \displaystyle\int_0^t \sqrt{\frac{D(\hat{x})}{D(x)}}\, G^{\mu}_{\nu}(x, p; \hat{x}, \hat{p})\, W^{\nu,m}[\hat{t}, \hat{x}]\, d\hat{t} \\ \qquad (\operatorname{mod} t). \end{cases}$$

Cette simplification se présente, en particulier, dans le calcul de l'expression (4.8) du premier terme.

Nous avons déjà signalé la conséquence suivante du lemme 11 : *la connaissance des $m - n + 1$ premiers termes $u^{\mu,n}, \ldots, u^{\mu,m}$ du développement asymptotique de u permet de calculer les dérivées d'ordre $j \leqq m - m^\mu$ de $u^\mu(\xi, x)$, à une fonction bornée près, que $\xi[t, x]$ uniformise et qui, composée avec $\xi[t, x]$, s'annule $j - m + m^\mu + 1$ fois pour $t = 0$.*

EXEMPLE 1.1. — Soit $\mathfrak{a}\left(\xi, x; \dfrac{\partial}{\partial \xi}, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur différentiel d'ordre $n - m^\mu$, de polynôme caractéristique $\mathfrak{g}(\xi, x; \pi, p)$;

$$(4.16)\quad \mathfrak{a}\left(\xi, x; \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^\mu(\xi, x) - \mathfrak{a} w^\mu - \frac{\mathfrak{g}(\xi, x, -1, p)}{g(y, s_y)} \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)}}\, G^{\mu}_{\nu}(x, p; y, s_y)\, v^{\nu,n}_{n-n^\nu}(s(y), y)$$

evient une fonction holomorphe de (t, y) s'annulant avec t, quand, près avoir effectué $a u^{\mu}$ et $a w^{\mu}$, on substitue aux variables ξ, x, p les nctions (4.9).

Les *chapitres* 1 *et* 2 prouveront ce théorème 1 et ses compléments ie voici :

Corollaire 1.1. — *Près d'un point non exceptionnel de* $S(\xi)$, $u^{\mu}(\xi, x)$ *ses dérivées d'ordres* $< n - m^{\mu}$ *sont fonctions algébroïdes de* (ξ, x) *et nsemble de leurs points singuliers* (ξ, x) *est ou vide ou une variété anatique* $\mathcal{K}$ *de codimension* 1.

Supposons maintenant que le système (1.1) se réduise à *une équation iique :*

$$(1.17)\qquad a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(\xi, x) = v(\xi, x).$$

lors la simplification que signale la note 4 se produit, car l'holomorphie (4.11) implique celle de $v^{m}_{m-n} \circ \xi$; *le développement asymptotique est nné par* (4.15).

Supposons en outre $n^{\nu} = n$, $m^{\mu} = 0$ et prenons pour $g(x, p)$ *le polyme caractéristique de* $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)\cdot$ Alors la fonction bicaractéristique est finie sans ambiguïté et les deux premiers termes du développement ymptotique

$$(1.18)\qquad u(\xi, x) \sim w(\xi, x) + \sum_{r=n}^{\infty} u^{r}(\xi, x)$$

explicitent comme suit :

Corollaire 1.2. — *Notons* $\mathfrak{U}[t, x]$ *la fonction holomorphe telle que*

$$(1.19)\qquad \mathfrak{U}[t, x] = \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)}}\, G(x, p; y, s_y)\left[v(\xi, y) - a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) w(\xi, y)\right]_{\xi = s(y)}$$
$$\text{pour}\quad x = x(t, y), \qquad p = p(t, y).$$

n peut évidemment faire le choix particulier que voici du premier rme $u^{n}(\xi, y)$ *du développement asymptotique de* $u(\xi, y)$:

$$(1.20)\qquad u^{n}_{j}(s(y), y) = 0 \qquad \text{pour}\quad j < n; \qquad u^{n}_{n} \circ \xi = \frac{\mathfrak{U}[t, x]}{g(y, s_y)}.$$

e choix étant fait, explicitons les conditions que doit vérifier le second rme $u^{n+1}(\xi, y)$: *posons*

$$a(x, p) = g(x, p) + g'(x, p) + g''(x, p) + \ldots,$$

g, g', g'' étant homogènes en p, de degrés n, $n-1$, $n-2$, ...; soit

$$(4.21)\quad W^{n+1}[t, x] = -\Big[\frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda p_\mu} \xi_{x^l x^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{6} g_{p_l p_\lambda p_\mu} \xi_{x^l x^\lambda x^\mu} + \frac{1}{8} g_{p_l p_\lambda p_\mu p_\nu} \xi_{x^l x^\lambda} \xi_{x^\mu x^\nu} + g'_{p_l} \frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{1}{2} g'_{p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} + g''\Big] \mathfrak{U}[t, x];$$

alors u^{n+1} est caractérisé par les conditions ([22])

$$u_j^{n+1}(s(y), y) = 0 \qquad \text{pour } j \leqq n;$$

$$(4.22)\quad u_{n+1}^{n+1} \circ \xi \equiv \frac{1}{g(y, s_y)} \sqrt{\frac{D(x)}{D(y)}}\, G(x, p; y, s_y) \Big[v_1(\xi, y) - a\Big(y, \frac{\partial}{\partial y}\Big) w_1(\xi, y) \Big]_{\xi = s(y)} + \frac{1}{g(y, s_y)} \int_0^t \sqrt{\frac{D(\hat{x})}{D(x)}}\, G(x, p; \hat{x}, \hat{p})\, W^{n+1}[\hat{t}, \hat{x}]\, d\hat{t}$$

$$(\text{mod}\, t) \qquad \text{pour } x = x(t, y), \quad p = p(t, y), \quad \hat{x} = x(\hat{t}, y), \quad \hat{p} = p(\hat{t}, y).$$

Ce corollaire permet de préciser comme suit l'exemple 1.1 :

EXEMPLE 1.2. — Soit un opérateur différentiel linéaire d'ordre n :

$$\mathfrak{a}\Big(\xi, x; \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) = \mathfrak{g}\Big(\xi, x; \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) + \mathfrak{g}'\Big(\xi, x; \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) + \ldots,$$

$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, ... étant homogènes en $\Big(\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)$, d'ordres n, $n-1$, ...; alors

$$\mathfrak{a}\Big(\xi, x; \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) u(\xi, x) - \mathfrak{a} w - \frac{\mathfrak{g}(\xi, x, \pi, p)}{g(y, s_y)} \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)}}\, G(x, p; y, s_y)\, v^n(s(y), y) - t\Big[(n-1)\, \mathfrak{g}(\xi, y; \pi, p) \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathfrak{g}_\pi \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathfrak{g}_{p_\lambda} \frac{\partial}{\partial y^\lambda} + \frac{1}{2} \mathfrak{g}_{p_l p_\lambda} s_{y^l y^\lambda} + \mathfrak{g}'\Big] v^n(\xi, y)$$

([22]) On fait opérer $a\Big(y, \frac{\partial}{\partial y}\Big)$ avant de substituer $s(y)$ à ξ.

evient une fonction holomorphe de (t, y), *s'annulant deux fois pour* $t = 0$, uand, après avoir effectué les dérivations, on substitue -1 à π et les nctions (4.9) aux variables ξ, x, p. Rappelons que

$$v^n(\xi, y) = v(\xi, y) - a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) w(\xi, y).$$

ans le coefficient de t, il suffit évidemment de faire

$$\xi = s(y), \qquad p = s_y.$$

La preuve en est donnée par le n° 26, chap. 2.

EXEMPLE 1.3.

1° Supposons que X soit affin, que $S(\xi)$ soit l'hyperplan

$$S(\xi): \quad \xi = s_0 + s_1 x^1 + \ldots + s_L x^L \qquad (s_l\text{: Cte})$$

; que $g(x, p)$ soit linéaire en x :

$$g(x, p) = g_0(p) + x^1 g_1(p) + \ldots + x^L g_L(p).$$

lors : $\xi[t, x]$ est *linéaire* en x;

$\frac{D(x)}{D(\hat{x})}$ est une fonction de $(t, \hat{t})$, indépendante de y.

2° *Supposons en outre* g' indépendant de x :

$$g' = g'(p);$$

lors $G(x, p; \hat{x}, \hat{p})$ *est une fonction de* $(t, \hat{t})$, indépendante de y.

3° *Supposons en outre* $g'' = 0$ et $v(\xi, y) - a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) w(\xi, y)$ indépendante de y; alors

$$W^{n+1}[t, x] = 0.$$

La preuve en est donnée par le n° 27, chap. 2.

Supposons en outre $a(x, p) = g(x, p) + g'(p)$; on peut obtenir un ésultat beaucoup plus précis : une expression explicite de $u(\xi, y)$: *oir* n° 6, exemple 3.2.

5. Uniformisation portant sur les variables indépendantes.

Nous supposons ξ absent des données, c'est-à-dire Ξ réduit à un oint; l'équation de S est

$$s(x) = 0 \qquad (s_x \neq 0).$$

Soit $u(x)$ une fonction, holomorphe au moins en un point de S; soit $x(t, z)$ une fonction, à valeurs dans X, de la variable numérique t et du point z de S; choisissons cette application $x(t, z)$ holomorphe pour t petit ([23]) et telle que $x(0, z) = z$; nous notons $u \circ x$ la fonction composée de $u(x)$ et $x(t, z)$:

$$u \circ x = u(x(t, z));$$

nous disons que $x(t, z)$ *uniformise* $u(x)$ quand $u \circ x$ est une fonction de (t, z) holomorphe pour t petit ([23]); nous disons que $x(t, z)$ uniformise $u(x)$ jusqu'à l'ordre m quand $x(t, z)$ uniformise $u(x)$ et toutes ses dérivées d'ordres m.

Nous disons que $u(x)$ admet *un développement asymptotique*

$$u(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} u^r(x)$$

quand nous avons ([24]), quels que soient l'entier m et l'opérateur différentiel $\mathfrak{a}$ *d'ordre m* :

$$\left[\mathfrak{a}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(u - \sum_{r=0}^{m} u^r\right) \right] \circ x \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, t).$$

L'application uniformisante $x(t, z)$ se construira comme suit : nous choisissons une fonction caractéristique $g(x, p)$ *homogène en p, de degré* 1; alors le système différentiel

$$(5.1) \qquad \frac{dx}{dt} = g_p(x,p), \qquad \frac{dp}{dt} = -g_x(x, p)$$

possède l'intégrale première $g(x, p)$ et la forme invariante ([25])

$$p_\lambda\, dx^\lambda - g dt;$$

nous notons $x(t, z)$, $p(t, z)$ la solution de (5.1) définie par les conditions de Cauchy :

$$(5.2) \qquad x(0, z) = z, \qquad p(0, z) = s_y(z),$$

où : $z \in S$, c'est-à-dire $s(z) = 0$; $s_y(z)$ désigne la valeur en z de $\dfrac{\partial s(y)}{\partial y}$.

([23]) $|t| < \varepsilon(z)$.

([24]) C'est-à-dire : le premier membre est le produit par t d'une fonction de (t, z).

([25]) En effet cette forme différentielle a pour système caractéristique ce système (5.1) : *voir* É. CARTAN [3], chap. 8.

Nous avons donc

.3) $$g(x, p) = g(z, s_{y}(z));$$

.4) $$p_{\lambda}\, dx^{\lambda} = g dt,$$

ɜst-à-dire, en choisissant ([26]) $(z_2, \ldots, z_L)$ pour coordonnées sur S :

.5) $$p_{\lambda}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial t} = g, \qquad p_{\lambda}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial z^{i}} = 0 \qquad (i = 2, \ldots, L).$$

Les fonctions qu'emploie le développement asymptotique sont la matrice ɜaractéristique (nº 3) et les déterminants fonctionnels

$$\frac{D(x)}{D(t, z)} = \frac{D(x^1, \ldots, x^L)}{D(t, z^2, \ldots, z^L)}, \quad \frac{D(x^2, \ldots, x^L)}{D(z^2, \ldots, z^L)}.$$

i, d'après (5.5), sont liés par la relation

6) $$\frac{D(x)}{D(t, z)} = \frac{g}{p_1}\,\frac{D(x^2, \ldots, x^L)}{D(z^2, \ldots, z^L)}.$$

Le chapitre 3 déduira aisément du théorème 1 le

ΓHÉORÈME 2.

ɪº CAUCHY-KOWALEWSKI. — *En chaque point non caractéristique de S, problème de Cauchy* (nº 1) *possède une et une seule solution* $u^{\mu}(x)$, *: soit holomorphe.*

ɜº UNIFORMISATION. — *L'application* $x(t, z)$ *uniformise* $u^{\mu}(x)$ *jusqu'à ·dre* $n - m^{\mu} - 1$. *Sur l'image, par l'application* $x(t, z)$, *d'un domaine olomorphie de* $x(t, z)$, *le support des singularités de* $u^{\mu}(x)$ *appartient ıc à la caractéristique K tangente à S.*

3º LE DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE

$$u^{\mu}(x) \sim w^{\mu}(x) + \sum_{r=n}^{\infty} u^{\mu, r}(x)$$

ıt s'obtenir par quadratures ([27]); *énonçons seulement la formule que donne ɜalcul du premier terme* $u^{\mu, n}$ *de ce développement : Soit* $\mathfrak{a}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *un*

---

[6]) Là où $s_{y^1}(z) \neq 0$.

[7]) Le théorème 1 en donne une expression compliquée; elle contient le paramètre ξ lépend du choix du premier membre de l'équation de S : $s(x) = 0$.

opérateur différentiel linéaire, d'ordre $n-m^\mu$; *soit* $\mathfrak{g}(x, p)$ *son polynôme caractéristique; on a*

$$(5.7)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{a}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^\mu(x) \equiv \mathfrak{a}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) w^\mu(x) \\ &\quad + \frac{\mathfrak{g}(x, p)}{g(z, s_y(z))}\left[\frac{s_{y^1}(z)}{p_1}\frac{D(x^2, \ldots, x^L)}{D(z^2, \ldots, z^L)}\right]^{-1/2} G_\nu^\mu(x, p; z, s_y(z))\, v_{n-n^\nu}^{\nu, n}(z) \\ &\qquad\qquad\qquad (\operatorname{mod} t), \end{aligned}\right.$$

quand, après avoir effectué $\mathfrak{a}u^\mu$ *et* $\mathfrak{a}w^\mu$, *on substitue* $x(t, z)$ *et* $p(t, z)$ *à* x *et* p; $v_{n-n^\nu}^{\nu, n}$ *est la fonction, holomorphe d'après* (1.5) :

$$(5.8)\qquad v_{n-n^\nu}^{\nu, n}(x) = (n-n^\nu)!\,\frac{v^\nu(x) - a_\mu^\nu\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) w^\mu(x)}{[s(x)]^{n-n^\nu}}.$$

Le corollaire 1.1 (n° 4) a pour conséquence immédiate le

COROLLAIRE 2.1. — *Près d'un point non exceptionnel de* S, $u^\mu(x)$ *et ses dérivées d'ordres* $< n-m^\mu$ *sont fonctions algébroïdes de* x *et l'ensemble de leurs points singuliers est ou vide, ou une variété analytique de codimension* 1.

Le chapitre 3 complétera comme suit ce corollaire :

COROLLAIRE 2.2. — *Notons* T *l'ensemble des points caractéristiques de* S :

$$T:\quad s(z) = g(z, s_y(z)) = 0.$$

Supposons que T *soit une sous-multiplicité et qu'en chaque point de* T *la restriction* $g(z, s_y(z))$ *de* $g(y, s_y)$ *à* S *s'annule exactement* q *fois. Le vecteur bicaractéristique* $g_p(z, s_y(z))$, *en* $z \in T$, *est évidemment tangent à* S, *ou nul; supposons qu'il ne soit ni tangent à* T, *ni nul. Alors :*

1° *la caractéristique* K *tangente à* S *est une multiplicité (c'est-à-dire une variété sans singularité);*

2° *son contact avec* S, *le long de* T, *est d'ordre* q;

3° $u^\mu(x) = [k(x)]^{n-m^\mu-1} H_1^\mu\left([k(x)]^{\frac{1}{1+q}}, x\right) + H_2^\mu(x)$, où $n-m^\mu \geqq 1$; $H_1^\mu(k, x)$ et $H_2^\mu(x)$ *sont des fonctions holomorphes*; $k = 0\,(k_x \neq 0)$ *est l'équation de* K.

EXEMPLE 2.1. — Soit x un point caractéristique de S :

$$s(x) = 0, \qquad g(x, s_x) = 0;$$

pour que ce point vérifie les hypothèses du corollaire 2.2, avec $q = 1$, il faut et il suffit que

$$(5.9)\qquad g_{p_l}(x, s_x)\, g_{x^l} + g_{p_l} g_{p_\lambda} s_{x^l x^\lambda} \neq 0;$$

un tel point est dit *caractéristique régulier*; on a évidemment

$$u^{\mu}(x) = [k(x)]^{n-m^{\mu}-\frac{1}{2}} H_1^{\mu}(x) + H_2^{\mu}(x),$$

où $n - m^{\mu} \geqq 1$; $H_1^{\mu}(x)$ et $H_2^{\mu}(x)$ sont holomorphes.

EXEMPLE 2.2. — Supposons que le système (1.1) consiste en *une* équation *du premier ordre* :

$$\left[a^0(x) + a^{\lambda}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\right] u(x) = v(x). \tag{5.10}$$

Alors : on peut choisir $g(x, p)$ identique au polynôme caractéristique $a^{\lambda}(x)\, p_{\lambda}$, puisqu'il est de degré *un* en p; l'application uniformisante $x(t, z)$ est définie par le système

$$dx^{\lambda}(t, z) = a^{\lambda}(x)\, dt, \qquad x^{\lambda}(0, z) = z^{\lambda}, \qquad \text{où} \quad s(z) = 0;$$

ce système définit les courbes caractéristiques de (5.10). Le long de ces courbes, (5.10) se réduit à

$$\frac{du}{dt} + a^0(x)\, u = v(x); \tag{5.11}$$

d'où u par deux quadratures [28] : c'est le procédé *classique* d'intégration de (5.10). Il donne, pour solution du problème de Cauchy, imposant à u des valeurs holomorphes sur S, une fonction $u(x)$ qui, composée avec $x(t, z)$, est évidemment holomorphe en (t, z), même aux points caractéristiques de S : c'est ce qu'affirme le théorème d'uniformisation.

6. Uniformisation portant sur L paramètres.

On peut simplifier la définition de l'uniformisation et le calcul du premier terme du développement asymptotique dans le cas suivant, qu'emploie l'article « Problème de Cauchy [IV] ».

Nous supposons que X est un domaine d'un espace *affin* et que $S(\xi)$ est *plan* :

$$S(\xi) : \quad \xi_0 + \xi_1 x^1 + \ldots + \xi_L x^L = 0;$$

nous nommons Ξ l'espace vectoriel des fonctions ξ linéaires sur X :

$$\xi . x = \xi_0 + \xi_1 x^1 + \ldots + \xi_L x^L;$$

---

[28] La première de ces quadratures est le calcul de $\sqrt{\dfrac{D(y)}{D(x)}}\, G(x, y)$, où $G(x, y)$ est la fonction bicaractéristique, qui est indépendante de (p, q); $x(t, y)$ est défini par $dx^{\lambda} = a^{\lambda}(x)\, dt$, $x^{\lambda}(0, y) = y^{\lambda}$.

nous nommons Ξ^* l'espace projectif, de dimension L, quotient de $\Xi - 0$ par le groupe de ses homothéties; nous notons ξ^* le point de Ξ^* image de $\xi \in \Xi - 0$.

Soit $u(\xi, y)$ une fonction de $(\xi, y) \in \Xi \times X$, holomorphe au moins en un point (η, y) tel que $\eta . y = 0$; soit $\xi(t, \eta, y)$ une fonction, à valeurs dans Ξ, de la variable numérique t, de $\eta \in \Xi$ et de $y \in X$, qui sont liés par la relation

$$\eta . y = 0;$$

nous choisissons cette application $\xi(t, \eta, y)$ holomorphe pour t petit et telle que $\xi(0, \eta, y) = y$; nous notons la fonction composée de $u(\xi, y)$ et $\xi(t, \eta, y)$:

$$u \circ \xi = u(\xi(t, \eta, y), y);$$

nous disons que $\xi(t, \eta, y)$ *uniformise* $u(\xi, y)$ quand $u \circ \xi$ est une fonction de (t, η, y) holomorphe pour t petit; nous disons que $\xi(t, \eta, y)$ uniformise $u(\xi, y)$ jusqu'à l'ordre m quand $\xi(t, \eta, y)$ uniformise $u(\xi, y)$ et toutes ses dérivées d'ordres $\leqq m$.

Nous disons que $u(\xi, y)$ admet *un développement asymptotique*

$$u(\xi, y) \sim \sum_{r=0}^{\infty} u^r(\xi, y)$$

quand nous avons, quels que soient l'entier m et l'opérateur différentiel $\mathfrak{a}$ d'ordre m :

$$\left[\mathfrak{a}\left(\xi, y; \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(u - \sum_{r=0}^{m} u^r\right)\right] \circ \xi \equiv 0 \qquad (\text{mod } t).$$

$u(\xi, y)$ sera la solution du problème de Cauchy (n° 1) :

$$(6.1) \qquad \begin{gathered} a_\mu^\nu\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u^\mu(\xi, y) = v^\nu(\xi, y) \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, M), \\ u^\mu(\xi, y) - w^\mu(\xi, y) \text{ s'annule } n - m^\mu \text{ fois sur } S(\xi). \end{gathered}$$

Nous supposons que ces données v, w vérifient (1.5). Nous supposons v, w et par suite u homogènes en ξ de degré 0 : ce sont donc des fonctions de ξ^*.

L'application uniformisante $\xi(t, \eta, y)$ se construira comme suit : nous choisissons une fonction caractéristique arbitraire $g(x, p)$, par exemple le polynôme caractéristique; N désigne son degré d'homogénéité en p; nous notons $x(t, \eta, y)$, $\xi(t, \eta, y)$ la solution du système différentiel ordinaire

$$(6.2)_1 \qquad \frac{dx}{dt} = g_{\xi_\lambda}(x, \xi), \qquad \frac{d\xi_\lambda}{dt} = -g_{x^\lambda}(x, \xi), \qquad \frac{d\xi_0}{dt} = x^\lambda g_{x^\lambda} - g$$

$$(\lambda = 1, \ldots, L)$$

définie par les conditions de Cauchy :

$$(6.2)_2 \qquad x(0, \eta, y) = y, \qquad \xi(0, \eta, y) = \eta, \qquad \text{où} \quad \eta . y = 0.$$

$x(t, \eta, y)$ et $\xi(t, \eta, y)$ ont évidemment la propriété d'homogénéité que voici : quel que soit le nombre complexe θ,

$$(6.3) \quad x(\theta^{1-m} t, \theta\eta, y) = x(t, \eta, y), \qquad \xi(\theta^{1-m} t, \theta\eta, y) = \theta\xi(t, \eta, y).$$

Le système $(6.2)_1$ admet les intégrales premières

$$(6.4) \qquad g(x, \xi), \quad \xi . x + (1 - N)\, t g(x, \xi)$$

et la forme différentielle invariante ([29])

$$(6.5) \qquad (d\xi) . x + g(x, \xi)\, dt.$$

On a donc

$$(6.6) \qquad g(x, \xi) = g(y, \eta),$$

$$(6.7) \qquad \xi . x = (N - 1)\, t g(y, \eta),$$

$$(6.8) \qquad (d\xi) . x = - g(y, \eta)\, dt - \eta_1\, dy^1 - \ldots - \eta_L\, dy^L;$$

cette dernière relation signifie que

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} . x = - g, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial \eta_\lambda} . x = 0, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y^\lambda} . x = - \eta_\lambda;$$

d'où

$$(6.9) \qquad \frac{D(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_L)}{D(t, \eta_1, \ldots, \eta_L)} = - g(y, \eta) \frac{D(\xi_1, \ldots, \xi_L)}{D(\eta_1, \ldots, \eta_L)}.$$

$\dfrac{D(\xi)}{D(\eta)}$ désignera ce déterminant fonctionnel

$$\frac{D(\xi_1(t, \eta, y), \ldots, \xi_L)}{D(\eta_1, \ldots, \eta_L)}; \qquad \frac{D(\eta)}{D(\xi)} = 1 \Big/ \frac{D(\xi)}{D(\eta)}.$$

NOTE. — L'article « Problème de Cauchy [IV] » (n° 13) déduit de (6.8) l'existence d'une fonction $k(x, y)$ telle que

$$\xi(t, \eta, y) . x(t, \eta, y) = |t|^{\frac{1}{1-N}} k(x, y),$$

$$\xi_\lambda = |t|^{\frac{1}{1-N}} k_{x^\lambda}, \qquad \eta_\lambda = - |t|^{\frac{1}{1-N}} k_{y^\lambda}$$

pour $x = x(t, \eta, y), \qquad \xi = \xi(t, \eta, y);$

$$g(x, k_x) = (-1)^N g(x, k_y) = \pm \frac{1}{N - 1} k;$$

$x \in K(y)$ et $y \in K(x)$ équivalant à $k(x, y) = 0$.

([29]) Car son système caractéristique est (6.2); *voir* É. CARTAN [3], chap. 8.

Le chapitre 4 déduira aisément du théorème 1 le

THÉORÈME 3.

1° CAUCHY-KOWALEWSKI. — *En chaque point non caractéristique de $S(\xi)$, le problème de Cauchy étudié possède une et une seule solution $u^\mu(\xi, y)$, qui soit holomorphe.*

2° UNIFORMISATION. — *L'application $\xi(t, \eta, y)$ uniformise $u^\mu(\xi, y)$ jusqu'à l'ordre $n - m^\mu - 1$. Sur l'image d'un domaine d'holomorphie de $\xi(t, \eta, y)$ par l'application*

$$(t, \eta, y) \to (\xi(t, \eta, y), y),$$

le support des singularités de $u^\mu(\xi, y)$ appartient donc à l'ensemble $\mathcal{K}$ des (ξ, y) vérifiant les deux conditions équivalentes

$y \in K(\xi)$; $K(y)$ *et* $S(\xi)$ *sont tangentes.*

3° LE DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE

$$u^\mu(\xi, y) \sim w^\mu(\xi, y) + \sum_{r=n}^{\infty} u^{\mu, r}(\xi, y)$$

peut s'obtenir par quadratures le long des bicaractéristiques issues de $S(\xi)$; le théorème 1 (n° 4) *décrit ces quadratures; énonçons seulement une nouvelle expression du premier terme $u^{\mu, n}$ de ce développement.*

Notons

$$u_j(\xi, y) = \left(-\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^j u(\xi, y);$$

on a

$$u_j^{\mu, n} \circ \xi \equiv 0 \pmod{t} \qquad \text{si } j < n - m^\mu,$$

$$u^{\mu, n}_{n-m^\mu}(\xi, y) \equiv \frac{(-1)^{m^\mu - n^\nu}}{g(y, \eta)} \sqrt{\frac{D(\eta)}{D(\xi)}}\, G^\mu_\nu(y, \eta; \xi, x)\, v^{\nu, n}_{n-n^\nu}(\xi, x) \qquad \pmod{t},$$

où

$$v^{\nu, n}(\xi, y) = v^\nu(\xi, y) - a^\nu_\mu\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) w^\mu(\xi, y),$$
$$x = x(t, \eta, y), \qquad \xi = \xi(t, \eta, y).$$

EXEMPLE 3.1. — Soit $\mathfrak{a}\left(\xi, y; \frac{\partial}{\partial \xi}; \frac{\partial}{\partial y}\right)$ un opérateur différentiel d'ordre $n - m^\mu$, de polynôme caractéristique $\mathfrak{g}(\xi, y; \pi; p)$,

$$\mathfrak{a}\left(\xi, y; \frac{\partial}{\partial \xi}; \frac{\partial}{\partial y}\right) u^\mu(\xi, y) - \mathfrak{a} w^\mu$$
$$-(-1)^{n-n^\nu} \frac{\mathfrak{g}(\xi, y; 1, x; \eta)}{g(y, \eta)} \sqrt{\frac{D(\eta)}{D(\xi)}}\, G^\mu_\nu(y, \eta; x, \xi)\, v^{\nu, n}_{n-n^\nu}(\xi, x)$$

devient une fonction holomorphe de (t, η, y), s'annulant avec t, quand, après avoir effectué $\mathfrak{a}u^\mu$ et $\mathfrak{a}w^\mu$, on substitue $x(t, \eta, y)$ et $\xi(t, \eta, y)$ à x et ξ.

Le n° 33 du chapitre 4 traitera cet exemple 3.1.

En remplaçant x par $(\xi_1, \ldots, \xi_L, y)$ dans le corollaire 1.1 (n° 4), on obtient immédiatement le

Corollaire 3.1. — *En tout point non exceptionnel de $S(\xi)$, $u(\xi, y)$ est algébroïde : le support $\mathcal{K}$ de ses singularités est une variété analytique de codimension* 1.

Supposons que le système (1.1) se réduise à l'équation (4.17), que $n^\nu = n$, $m^\mu = 0$ et prenons pour $g(x, p)$ le *polynôme caractéristique* de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$: le corollaire 1.2 s'applique; l'exemple 1.2 s'énonce :

Corollaire 3.2. — *Soit un opérateur différentiel linéaire d'ordre n,*

$$\mathfrak{a}\left(\xi, x; \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \mathfrak{g}\left(\xi, x; \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \mathfrak{g}'\left(\xi, x; \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \ldots,$$

$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \ldots$ *étant homogènes en* $\left(\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, *d'ordres n, $n-1$, ...;*

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{a}\left(\xi, y; \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(\xi, y) - \mathfrak{a}w \\
&\quad - \frac{\mathfrak{g}(\xi, y; \mathbf{x}, \eta)}{g(y, \eta)} \sqrt{\frac{D(\eta)}{D(\xi)}}\, G(y, \eta; x, \xi) \left[v(\xi, x) - a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) w(\xi, x)\right] \\
&\quad - t\left[\mathfrak{g}_{\mathbf{x}^l}(\xi, y; \mathbf{x}, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi_l} + \mathfrak{g}_{\eta_\lambda} \frac{\partial}{\partial y^\lambda} + \mathfrak{g}_{\eta_\lambda x^\lambda} + \mathfrak{g}'\right] \\
&\quad \times \left[v(\xi, y) - a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) w(\xi, y)\right],
\end{aligned}$$

où $l = 0, 1, \ldots, L$ et $\lambda = 1, \ldots, L$, *devient une fonction holomorphe de (t, η, y),* s'annulant deux fois pour $t = 0$, *quand, après avoir effectué les dérivations, on substitue*

$$\xi(t, y, \eta), \quad x(t, y, \eta), \quad (1, x^1, \ldots, x^L) \quad \text{aux variables } \xi, x, \mathbf{x}.$$

Dans le coefficient de t, il suffit évidemment de faire

$$\xi = \eta, \qquad x = y, \qquad \mathbf{x} = (1, y^1, \ldots, y^L).$$

Le n° 34 du chapitre 4 prouve ce corollaire, dont voici une conséquence évidente :

Définition. — On nomme *solution unitaire* de l'opérateur $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ la solution $u(\xi, y)$ du problème de Cauchy :

$a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(\xi, y) = 1$; $u(\xi, y)$ s'annule n fois pour $\xi . y = 0$.

EXEMPLE 3.2. — Si $u(\xi, y)$ est la solution unitaire de a, alors

$$\frac{\partial^n u(\xi, y)}{\partial \xi_0^n} - \frac{1}{g(y, \eta)}\sqrt{\frac{D(\eta)}{D(\xi)}}\, G(y, \eta; x, \xi) \tag{6.10}$$

où

$$\xi = \xi(t, \eta, y), \qquad x = x(t, \eta, y),$$

est une fonction holomorphe de (t, η, y), *s'annulant deux fois pour* $t = 0$.

Cet exemple est confirmé par le suivant, qui précise l'exemple 1.3, 3° :

DÉFINITION. — *L'opérateur général de Tricomi* $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est l'opérateur d'ordre n, dont les coefficients d'ordres

$$n, \quad n-1, \quad \leqq n-2$$

sont respectivement

linéaires, constants, nuls :

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + x^1 g_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \ldots + x^L g_L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + g'\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

les g_λ étant homogènes de degré n et g' de degré $n-1$.

EXEMPLE 3.3. — Si $u(\xi, y)$ est la solution unitaire de l'opérateur général de *Tricomi* $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, alors $\frac{\partial^n u(\xi, y)}{(\partial \xi_0)^n}$ s'obtient en annulant la fonction (6.10) :

$$\frac{\partial^n u(\xi, y)}{\partial \xi_0^n} = \frac{1}{g(y, \eta)}\sqrt{\frac{D(\eta)}{D(\xi)}}\, G(y, \eta; x, \xi)$$
$$\text{pour} \quad \xi = \xi(t, \eta, y), \qquad x = x(t, \eta, y).$$

Cette formule résulte du théorème de réciprocité (théorème 4) de l'article [II]. L'article [IV] a déjà employé, sans les prouver, les exemples 3.2 et 3.3, qu'il nomme propositions 13.2 et 13.4.

7. **Interprétation mécanique du premier terme du développement asymptotique.**

Reprenons les hypothèses du théorème 2 : ξ est absent des données. Le premier terme du développement asymptotique peut être caractérisé comme suit :

THÉORÈME 4. — *Supposons tous les points caractéristiques de* S RÉGULIERS [n° 5, exemple 2.1 : (5.8)]; *supposons* [30] $h^\mu(x, p)$ *homogène en* p *de*

---

[30] Rappelons qu'on peut ajouter un même entier (> 0 ou < 0) à tous les ordre m^μ, n^ν, n.

degré m^μ; *choisissons une fonction caractéristique* $g(x, p)$ *homogène en* p *de degré* $N \neq 2n+1$; *choisissons l'équation* $k(x) = 0$ *de* K *telle que* [31]

$$(7.1) \qquad g(x, k_x) + \frac{2k}{2n+1-N} j(x, k_x) \equiv 0 \pmod{k^2} \qquad (k_x \neq 0);$$

soit $\mathfrak{a}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ *un opérateur différentiel d'ordre* $n - m^\mu$; *soit* $\mathfrak{g}$ *son polynôme caractéristique. On a*

$$(7.2) \qquad \mathfrak{a}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^\mu(x) = \frac{\mathfrak{g}(x, k_x)\, h^\mu(x, k_x)}{\sqrt{k(x)}} \chi(x) + \sqrt{k} H_1(x) + H_2(x),$$

où χ, H_1 *et* H_2 *sont fonctions holomorphes de* x; *la restriction de* χ *à* K *est telle que la forme différentielle* [32]

$$(7.3) \qquad \rho(x)\,[\chi(x)]^2 \left.\frac{\sum_\lambda (-1)^{\lambda-1} g_{p_\lambda}(x, k_x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \ldots \wedge dx^L}{dk}\right|_K$$

est un INVARIANT DIFFÉRENTIEL *des bicaractéristiques engendrant* K, *c'est-à-dire* [33] *est* FERMÉE [34].

NOTE. — Ces bicaractéristiques engendrant K sont définies par le système

$$(7.4) \qquad \frac{dx^\lambda}{g_{p_\lambda}(x, p)} = -\frac{dp_l}{g_{x^l}(x, p) + \dfrac{2}{2n+1-N} p_l j(x, p)},$$

$$\text{où} \quad p = k_x \qquad (\lambda, l = 1, \ldots, L).$$

NOTE. — (7.3) désigne la forme dont le produit à gauche par dk est

$$\rho\chi^2 \sum_\lambda (-1)^{\lambda-1} g_{p_\lambda}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \ldots \wedge dx^L :$$

elle est définie mod dk; sa restriction à K est donc définie sans ambiguïté. Voici l'une des expressions de (7.3) :

$$\frac{\rho\chi^2}{k_{x^1}} \sum_{\lambda=2}^{L} (-1)^{\lambda-1} g_{p_\lambda}\, dx^2 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \ldots \wedge dx^L,$$

quand $k_{x^1} \neq 0$.

---

(31) mod k^2 signifie : à l'addition près d'un terme $k^2 H(x, k, k_x)$, où H est holomorphe; nous prendrons ce terme homogène en (k, k_x) de degré N, comme les précédents.

(32) ^ supprime le terme qu'il coiffe.

(33) *Voir* É. CARTAN [3], chap. 11 : le dernier multiplicateur de Jacobi.

(34) ait une différentielle extérieure nulle.

Le chapitre 5 prouvera ce théorème 4.

En Mécanique, une *onde* est régie par un système du type (1.1); des *particules* sont régies par le système caractéristique d'une équation de Jacobi, qui est une équation aux dérivées partielles du premier ordre où ne figure pas la fonction inconnue Ψ, qui est l'*action*; en posant

$$k = e^{2i\Psi/2n+1-N} \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

on transforme (7.1) en l'*équation de Jacobi* qu'il est classique d'associer à (1.1) (*voir* n° 9) :

$$(7.5) \qquad g(x, \Psi_x) - ij(x, \Psi_x) + \ldots = 0 \qquad (i = \sqrt{-1})$$

($g, j, \ldots$ sont homogènes en Ψ_x de degrés respectifs N, $N-1$, $\leqq N-2$); les bicaractéristiques de K sont donc les *trajectoires de particules* singulières, pour lesquelles

$$i\Psi/(N-2n-1) = +\infty;$$

en Mécanique l'invariance de la forme différentielle (7.3) signifie que cette forme constitue, pour ces particules singulières, la densité d'*une énergie-impulsion conservative*. Le théorème 4 associe donc à la singularité qu'a une onde, près des points caractéristiques réguliers, des particules singulières : *le support de la singularité de l'onde est engendré par les trajectoires de ces particules singulières; la partie principale de la singularité de cette onde définit, pour ces particules, une densité d'énergie-impulsion conservative.*

8. Comparaison du développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy avec les ondes asymptotiques et les ondes approchées, qu'emploie l'Optique géométrique.

Nommons *onde* toute solution, holomorphe ou non, $u^\mu(x)$ du système (1.1) rendu homogène :

$$(8.1) \qquad a_\mu^\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u^\mu(x) = 0; \qquad x \text{ et } X \text{ sont } \textit{réels}.$$

Nommons *onde approchée* toute solution approchée de (8.1); on sait l'importance de ces ondes approchées en Physique, par exemple en Optique géométrique. G. Birkhoff [1], M. Kline [7], P. Lax [9] et D. Ludwig [11] ont construit de telles ondes, en construisant d'abord des *ondes asymptotiques*. En élargissant la définition qu'ils en ont donnée et en précisant leurs conclusions, le théorème 5 va obtenir ces ondes asymptotiques par un calcul analogue à celui par lequel le théorème 1 (n° 4) obtient le développement asymptotique du problème de Cauchy.

Nous nous proposons seulement d'*expliciter cette analogie formelle.*

Définition des ondes asymptotiques. — Soient $u^{\mu,r}(\xi, x)$ $(r = 0, 1, \ldots)$ des fonctions numériques suffisamment dérivables, du paramètre numérique réel ξ et de $x \in X$; soient ω un paramètre réel ([35]) et $\varphi(x)$ une fonction numérique *réelle*, nommée *phase*; on note

$$u^{\mu,r}(\xi, x) = u^{\mu,r}; \qquad \frac{\partial^n u^{\mu,r}}{\partial \xi^n} = u^{\mu,r}_{(n)}, \qquad u^{\mu,r}(\omega\varphi(x), x) = u^{\mu,r} \circ (\omega\varphi)$$

et $u^{\mu}(\omega, x)$ la série formelle (c'est-à-dire non nécessairement convergente) :

$$(8.2) \qquad u^{\mu}(\omega, x) = \sum_{r=0}^{\infty} \omega^{m^{\mu}-r} u^{\mu,r} \circ (\omega\varphi);$$

un calcul formel, que détaille le n° 39, donne

$$(8.3) \qquad a^{\nu}_{\mu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^{\mu}(\omega, x) = \sum_{\mu,j,r} \omega^{n^{\nu}-j-r} \left[a^{\nu j}_{\mu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^{\mu,r}_{(n^{\nu}-m^{\mu}-j)} \right] \circ (\omega\varphi),$$

où les $a^{\nu j}_{\mu}$ sont des opérateurs différentiels d'ordres $j \leqq n^{\nu} - m^{\mu}$. Étant donnés le système (8.1), c'est-à-dire les a, et une phase φ, nous disons que (8.2) est une *onde asymptotique* quand chaque puissance de ω a un coefficient nul dans (8.3), c'est-à-dire quand

$$(8.4) \qquad \sum_{\mu,j} a^{\nu j}_{\mu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^{\mu,m-j}_{(n^{\nu}-m^{\mu}-j)}(\xi, x) = 0$$

quels que soient ν, m, ξ et x; $j = 0, 1, \ldots, \inf(m, n^{\nu} - m^{\mu})$.

L'intérêt de cette définition est que la construction d'une onde asymptotique se fait par quadratures (voir le théorème 5).

Vu (8.4), il est évident que, si (8.2) est onde asymptotique, alors

$$(8.5) \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \omega^{m^{\mu}-r} u^{\mu,r}_{(n)} \circ (\omega\varphi)$$

est aussi onde asymptotique, quel que sit $n \geqq 0$. Nous noterons $u^{\mu,r}_{(n)}$ une suite de primitives de $u^{\mu,r}$ $(n = -1, -2, \ldots)$:

$$\frac{\partial^p u^{\mu,r}_{(n)}}{\partial \xi^p} = u^{\mu,r}_{(n+p)}.$$

Le théorème 5 montrera qu'on peut les choisir telles que (8.5) soit onde asymptotique quel que soit l'entier $n \geqq 0$ ou < 0.

([35]) ω^j est sa $j^{\text{ème}}$ puissance.

Le n° 39 (chap. 6) vérifiera que $\frac{\partial u(\omega, x)}{\partial \omega}$ est *onde asymptotique* quand $u^{\mu}(\omega, x)$ l'est.

Voici par quelles formules se résout (8.4) :

On suppose $g(x, p)$ *réel.*

La phase $\varphi(x)$ doit être réelle et satisfaire l'équation caractéristique

(8.6) $$g(x, \varphi_x) = 0 \quad \text{sur } X.$$

Nous supposerons $\varphi(x)$ définie par des données de Cauchy : sur une hypersurface $S[s(x) = 0]$, non caractéristique $[g(x, s_x) \neq 0]$, on se donne φ et φ_x, *réels*, vérifiant

$$g(x, \varphi_x) = 0, \qquad (g_x, g_p) \neq 0.$$

Soit $x(t, y)$, $p(t, y)$ la solution du problème de Cauchy ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = g_p(x, p), \qquad \frac{dp}{dt} = -g_x(x, p), \qquad x(0, y) = y, \qquad p(0, y) = q,$$

où $q = \varphi_y$, $g(y, q) = 0$; on a donc

$$\varphi(x) = \varphi(y), \qquad \varphi_x = p, \qquad g(x, p) = 0.$$

D'où, en prenant $y \in S$, la solution du problème de Cauchy qui définit $\varphi(x)$.

Nous emploierons les déterminants fonctionnels

$$\frac{D(x)}{D(y)} = \frac{D(x(t, y))}{D(y)}, \qquad \frac{D(y)}{D(x)} = 1 \Big/ \frac{D(x)}{D(y)},$$

dont le calcul doit être fait avant d'imposer que $y \in S$.

THÉORÈME 5. — *Définissons $\varphi(x)$ comme il vient d'être dit; cherchons des $u^{\mu, r}_{(n)}$ tels que (8.5) soit onde asymptotique quel que soit n.*

Le premier terme de cette onde asymptotique est donné par la formule

(8.7) $$u^{\mu, 0}_{(n-m^{\mu})}(\xi, x) = \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)}}\, G^{\mu}_{\nu}(x, p; y, q)\, w^{\nu, 0}_{(n-n^{\nu})}(\xi, y),$$

où n est un entier quelconque $\geqq 0$ ou < 0;

(8.8) $$y \in S, \qquad x = x(t, y), \qquad p = p(t, y), \qquad p = \varphi_x, \qquad q = \varphi_y;$$

$w^{\nu, 0}_{(n)}(\xi, y)$ est une fonction arbitraire; bien entendu $\frac{\partial w^{\nu, 0}_{(n)}}{\partial \xi} = w^{\nu, 0}_{(n+1)}$.

Terme général. — Les $a^{\nu j}_{\mu}$ étant définis par (8.3), posons

(8.9) $$v^{\nu, m}_{(n-n^{\nu})}(\xi, x) = -\sum_{j \geqq 1} a^{\nu j}_{\mu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^{\mu, m-j}_{(n-m^{\mu}-j)}(\xi, x),$$

où m et n sont entiers, $m \geqq 0$, $j = 1, 2, \ldots, \inf(m, n^\nu - m^\mu)$; les choix de $u^{\mu,0}_{(n)}, \ldots, u^{\mu,m-1}_{(n)}$ se trouvent avoir été faits tels que

$$\mathfrak{h}_\nu(x, \varphi_x)\, v^{\nu,m}_{(n-n^\nu)}(\xi, x) = 0 \qquad \text{quels que soient } m \text{ et } n;$$

il existe donc ([36]) des fonctions $U^{\mu,m}_{(n-m^\mu)}(\xi, x)$ telles que

$$(8.10) \qquad g^\nu_\mu(x, \varphi_x)\, U^{\mu,m}_{(n-m^\mu)}(\xi, x) = v^{\nu,m}_{(n-n^\nu)}(\xi, x);$$

posons enfin

$$(8.11) \qquad V^{\nu,m}_{(n-n^\nu)}(\xi, x) = -\left(g^\nu_{\mu p_\lambda}(x, \varphi_x)\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g^\nu_{\mu p_l p_\lambda}\varphi_{x^l x^\lambda} + g'^\nu_\mu\right) U^{\mu,m}_{(n-m^\mu)}$$
$$- \sum_{j \geqq 2} a^{\nu j}_\mu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^{\mu,m+1-j}_{(n+1-m^\mu-j)}(\xi, x);$$

on a, moyennant (8.8) et $\hat{x} = x(\hat{t}, y)$, $\hat{p} = p(\hat{t}, y)$:

$$(8.12) \qquad u^{\mu,m}_{(n-m^\mu)}(\xi, x) = U^{\mu,m}_{(n-m^\mu)}(\xi, x)$$
$$+ \int_0^t \sqrt{\frac{D(\hat{x})}{D(x)}}\, G^\mu_\nu(x, p; \hat{x}, \hat{p})\, V^{\nu,m}_{(n-n^\nu)}(\xi, \hat{x})\, d\hat{t}$$
$$+ \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)}}\, G^\mu_\nu(x, p; y, q)\, w^{\nu,m}_{(n-n^\nu)}(\xi, y),$$

où les $w^{\nu,m}_{(n)}$ sont arbitraires.

Ce théorème 5 *est formellement analogue au* 3° *du théorème* 1 :

(4.8) est analogue à (8.7);

(4.10), (4.11), (4.12), (4.13) à (8.9), (8.10), (8.11), (8.12), quand on choisit $w^{\nu,m}_{(n)} = 0$ pour $m > 0$.

Voici l'analogue de l'exemple 1.1 (n° 4) :

Exemple 5.1. — En appliquant à la série formelle (8.3) un opérateur différentiel $\mathfrak{a}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ d'ordre $n - m^\mu$, de polynôme caractéristique $\mathfrak{g}(x, p)$, on obtient une série formelle de même type, dont le premier terme résulte de (8.7) : moyennant (8.8),

$$(8.13) \qquad \mathfrak{a}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^\mu(x, \omega)$$
$$= \omega^n \mathfrak{g}(x, \varphi_x)\, G^\mu_\nu(x, p; y, q)\, w^{\nu,0}_{(n-n^\nu)}(\omega\varphi(x), y) + \ldots.$$

Le chapitre 6, qui justifie ce n° 8, prouve en particulier le théorème 5 : cette preuve (nos 39, 40, 41 et 42) est analogue au chapitre 2, qui prouve le 3° du théorème 1; mais elle est plus simple que ce chapitre 2.

([36]) On peut faire divers choix; $V^{\nu,m}_{(n-n^\nu)}$ en dépend; mais $u^{\mu,m}_{(n-m^\mu)}$ en est indépendant.

Définition des ondes approchées. — Une fonction vectorielle $u^\mu(x)$ constitue une onde approchée quand les $b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) a_\mu^\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^\mu(x)$ *sont petits* par rapport aux ([37]) $\mathfrak{a}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^\mu(x)$, sous les hypothèses suivantes : les coefficients des $\mathfrak{a}$ et b sont de l'ordre de grandeur de ceux des a_μ^ν;

$$\text{ordre } \mathfrak{a} = \bar{n} - m^\mu; \qquad \text{ordre } b = \bar{n} - n^\nu.$$

On note

$$\underline{m} = \inf_\mu m^\mu, \qquad \bar{n} = \sup_\nu n^\nu,$$

Φ [et $\omega\Phi$] l'ensemble des valeurs prises par $\varphi(x)$ [et $\omega\varphi(x)$] sur X.

Voici comment se construisent les ondes approchées :

Corollaire 5. — *Supposons qu'on ait construit, en appliquant le théorème* 5 *et en prenant* $w_{(n)}^{\nu, r} = 0$ *pour* $r > 0$, *des* $u_{(n)}^{\mu, r}$ *tels que* (8.5) *soit onde asymptotique quel que soit* n; *soit un entier* $m \geqq 0$. *Alors, pour que*

$$\sum_{r=0}^{m} \omega^{m^\mu - r}\, u^{\mu, r} \circ (\omega\varphi)$$

soit une onde approchée il suffit que, sur $\omega\Phi \times X$,

$\omega^{-r} w_{(\bar{n} - n^\nu - r)}^{\nu, 0}$ *et ses dérivées en* x *d'ordres* $\leqq 2r$ $\quad (r = m + 1, \ldots, m + \bar{n} - \underline{m})$

soient petits relativement à $w_{(\bar{n} - n^\nu)}^{\nu, 0}$.

Exemple 5.2 (Ludwig [11]). — Donnons-nous, dans le théorème 5 des $w_{(n)}^{\nu, m}$ du type

$$w_{(n - n^\nu)}^{\nu, m}(\xi, x) = \Psi_{(n-m)}(\xi)\, \tilde{w}^{\nu, m}(x), \qquad \text{où} \quad \frac{d\Psi_{(n)}(\xi)}{d\xi} = \Psi_{(n+1)};$$

alors ce théorème donne des fonctions $\tilde{u}_{(x)}^{\mu, m}$, $\tilde{v}_{(x)}^{\nu, m}$, $\tilde{U}_{(x)}^{\nu, m}$ et $\tilde{V}_{(x)}^{\nu, m}$ *indépendantes du choix des* $\Psi_{(n)}$, telles que

$$u_{(n - m^\mu)}^{\mu, m} = \Psi_{(n-m)}(\xi)\, \tilde{u}^{\mu, m}(x), \qquad v_{(n - n^\nu)}^{\nu, m} = \Psi_{(n-m)}(\xi)\, \tilde{v}^{\nu, m}(x),$$
$$U_{(n - m^\mu)}^{\mu, m} = \Psi_{(n-m)}(\xi)\, \tilde{U}^{\mu, m}(x), \qquad V_{(n - n^\nu)}^{\nu, m} = \Psi_{(n-m)}(\xi)\, \tilde{V}^{\nu, m}(x);$$

par exemple

$$(8.14) \qquad \tilde{u}^{\mu, 0}(x) = \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)}}\, G_\nu^\mu(x, p; y, q)\, \tilde{w}^{\nu, 0}(y).$$

([37]) plus grands des

Supposons $\tilde{w}^{\nu, r}_{(n)} = 0$ pour $r > 0$; le corollaire 5 affirme que

$$\sum_{r=0}^{m} \omega^{m^{\mu}-r} \Psi_{(m^{\mu}-r)}(\omega\varphi(x))\, \tilde{u}^{\mu, r}(x)$$

est une onde approchée quand, *sur* $\omega\Phi$,

(8.15) $\omega^{-r}\Psi_{(\bar{n}-r)}(\xi)$ $(r = m+1, \ldots, m+\bar{n}-\underline{m})$ *est petit relativement à* $\Psi_{(\bar{n})}(\xi)$.

Cette condition (8.15) est évidemment remplie quand les deux suivantes le sont :

$\omega^{-r}\Psi_{(\bar{n}-m-1)}(\xi)$ est petit relativement à $\Psi_{(\bar{n})}(\xi)$;

$\Psi_{(\bar{n}-r)}(\xi)$ $(r = m+2, \ldots, m+\bar{n}-\underline{m})$ s'annule en au moins un point de $\omega\Phi$.

Les physiciens réalisent cette condition (8.15) comme suit :

Exemple 5.3 (P. Lax [9]). — Choisissons

$$\Psi_{(n)}(\xi) = i^n e^{i\xi}, \qquad \text{où} \quad i = \sqrt{-1};$$

$(i\omega)^{m^{\mu}} e^{i\omega\varphi(x)} \tilde{u}^{\mu, 0}(x)$ *est une onde approchée quand* ω *est grand.*

9. Comparaison des particules associées au problème de Cauchy avec des particules associées à des ondes approchées.

En rectifiant et généralisant ce que G. Birkhoff [1] s'est contenté de faire dans le cas où (8.1) est l'équation de Schrödinger non relativiste (*voir* exemple 6.1), le théorème 6 va caractériser des ondes approchées par un procédé analogue à celui qu'emploie le thèorème 4 (n° 7) pour caractériser le premier terme du développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy.

Nous nous proposons seulement d'*expliciter cette analogie formelle.*

Définition de l'équation de Jacobi. — Notons

$$(9.1) \qquad A(x, p) = g(x, p) - ij(x, p) + \ldots \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

les termes non écrits étant homogènes en p, de degrés $< N - 1$; ils sont réguliers pour les valeurs de (x, p) qui seront employées; on choisit en général g, h, $\mathfrak{h}$ tels que $A(x, p)$ soit un polynôme en p. On nomme *équation de Jacobi correspondant à l'équation des ondes* (8.1) l'équation du premier ordre

$$(9.2) \qquad A(x, \psi_x) = 0;$$

la donnée de (8.1) ne la détermine donc pas complètement.

THÉORÈME 6. — *Supposons $g(x, p)$ réel. Soit ω un paramètre réel, voisin de $\pm\infty$. Soit $\psi(\omega, x)$ une fonction numérique complexe, ayant les propriétés suivantes :*

$\psi(\omega, x)$ est une fonction $\bar{n} - \underline{m} + 1$ fois dérivable de $\left(\frac{1}{\omega}, x\right)$, même pour $\frac{1}{\omega} = 0$;

$\psi(\infty, x)$ est réel, non nul;

$\omega\psi(\omega, x)$ vérifie l'équation de Jacobi :

$$(9.3) \qquad A(x, \omega\psi_x) = 0.$$

Soit $\chi(\omega, x)$ une fonction telle que [38]

$$(9.4) \quad \rho(x)[\chi(\omega, x)]^2 \sum_\lambda (-1)^{\lambda-1} A_{p_\lambda}(x, \omega\psi_x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \ldots \wedge dx^L$$

soit un invariant différentiel des caractéristiques de (9.3) *qui engendrent la fonction ψ; autrement dit, la forme* (9.4) *est fermée, c'est-à-dire*

$$(9.5) \qquad \sum_\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\{\rho(x)[\chi(\omega, x)]^2 A_{p_\lambda}(x, \omega\psi_x)\} = 0.$$

Alors

$$(9.6) \qquad u^\mu(\omega, x) = (i\omega)^{m^\mu} h^\mu(x, \psi_x)\,\chi(\omega, x)\, e^{i\omega\psi(\omega, x)}$$

est une ONDE APPROCHÉE.

Le chapitre 7 prouvera ce théorème 6, qui est formellement analogue au théorème 4 (nº 7) : en substituant dans (9.3) à $\psi(\omega, x)$,

$$(9.7) \qquad \psi(\omega, x) = i\frac{N - 2n - 1}{2\omega}\log k$$

on obtient (7.1); en substituant dans (9.4) à $\psi(\omega, x)$ (9.7) et à $\chi(\omega, x)$,

$$\chi(\omega, x) = k^{N/2-1}\chi(x),$$

on obtient, à un facteur numérique près, la forme

$$(9.8) \quad \rho(x)[\chi(x)]^2 \frac{\sum_\lambda (-1)^{\lambda-1}[g_{p_\lambda}(x, k_x) - ikj_p + \ldots]\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \ldots \wedge dx^L}{k}$$

qui est fermée d'après (9.5); elle possède donc (*voir* [III], nº 2) une forme-résidu, dont l'expression est (7.3) et qui, par définition, est fermée,

---

[38] $\wedge$ supprime le terme qu'il coiffe.

comme l'exige le théorème 4. Mais l'analogie de ces deux théorèmes est seulement formelle, puisque (9.7) donne $\psi\ (\infty, x) = 0$,ce qu'exclut le théorème 6.

Une interprétation mécanique du théorème 6, analogue à celle du théorème 4, est évidente : on considère les caractéristiques de l'équation de *Jacobi* (9.3), c'est-à-dire les solutions du système d'*Hamilton* :

$$\frac{dx}{A_p(x, p)} = -\frac{dp}{A_x(x, p)}, \qquad A(x, p) = 0,$$

comme étant *des trajectoires de particules;* l'invariance de (9.4) signifie que cette forme constitue, pour les particules associées à une même fonction $\psi(\infty, x)$, la densité d'*une énergie-impulsion conservative : l'onde approchée* (9.6) *est caractérisée, pour chaque valeur de* ω, *par une famille de particules, dont les trajectoires fibrent* ([39]) X, *et par une densité d'énergie-impulsion conservative de ces particules.*

Exemple 6.1. — *L'équation des ondes de Schrödinger* non relativiste est, rappelons-le, l'équation

$$(9.9) \qquad H\left(x, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) - \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial u}{\partial x^1} = 0,$$

où $x \in X$, X est un espace affin, h est la constante de Planck et $H\left(x, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur self-adjoint ne contenant pas la dérivation $\frac{\partial}{\partial x^1}$. Notons $g(x, p)$ la partie principale de $H(x, p)$; puisque H est self-adjoint, son polynôme sous-caractéristique est nul (n° 3); une équation de Jacobi correspondant à l'équation de Schrödinger est donc

$$g\left(x, \frac{h}{2\pi}\psi_x\right) - \frac{h}{2\pi}\psi_{x^1} = 0.$$

En Mécanique, l'usage est d'appeler *équation de Jacobi* correspondant à l'équation de Schrödinger l'équation que vérifie $V = \frac{h}{2\pi}\psi$:

$$(9.10) \qquad V_{x^1} + g(x, V_x) = 0$$

et d'énoncer ([40]) comme suit le théorème 6 : soit $\chi(x)$ tel que

$$(9.11) \qquad \frac{\partial}{\partial x^1}[\chi(x)]^2 + \sum_{\lambda>1}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\{[\chi(x)]^2 g_{p_\lambda}(x, V_x)\} = 0;$$

([39]) Par chaque point de X passe une trajectoire et une seule.

([40]) On remplace, dans le théorème 6, (x, ψ, ω) par $\left(\frac{2\pi}{h}x, -V, \frac{2\pi}{h}\right)$.

$\chi(x)\, e^{-\frac{2\pi i}{h}V(x)}$ est une *onde approchée* si les produits par h [et h^2] des dérivées premières [et secondes] de $V(x)$, $\chi(x)$ et des coefficients du polynôme $g(x, p)$ de p sont suffisamment petits, par rapport à ces fonctions.

NOTE. — *Le théorème d'Ehrenfest* donne une autre relation, purement formelle, entre l'équation de Schrödinger et son équation de Jacobi (*voir*, par exemple : le traité de KRAMERS [8], chap. III, § 30; celui de DIRAC [5] : wave packets).

EXEMPLE 6.2. — *L'équation des ondes de Dirac* ([41]) *et l'équation des ondes relativistes de Schrödinger* sont toutes deux du type suivant :

$$(9.12)\qquad \sum_{\lambda=1}^{4}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}+a^\lambda(x)\right)\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}+a_\lambda(x)\right)u(x)+bu=0,$$

où $x\in X$; X est affin;

$$x_1=-x^1,\qquad a_1=-a^1,\qquad x_\lambda=x^\lambda,\qquad a_\lambda=a^\lambda\qquad \text{pour } \lambda=2,3,4;$$

$a^j(x)$ sont les composantes du potentiel; $b(x)$ est fonction du potentiel, du champ, de la masse et, chez Dirac, contient des spineurs; les a^j et b sont donnés.

L'équation (9.12) s'écrit donc

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\lambda\,\partial x^\lambda}+\frac{h}{\pi i}a_\lambda\frac{\partial u}{\partial x_\lambda}+c(x)=0;$$

l'équation de Jacobi correspondant à cette équation est donc

$$\frac{h}{2\pi}\psi_{x_\lambda}\psi_{x^\lambda}+2a^\lambda\psi_{x^\lambda}+e(x)=0\qquad (e\ :\ \text{arbitraire}).$$

En Mécanique, l'usage est d'appeler *équation de Jacobi* correspondant à (9.12) l'équation, d'inconnue $V=-\dfrac{h}{2\pi}\psi$:

$$(9.13)\qquad (V_{x^\lambda}-a_\lambda)(V_{x_\lambda}-a^\lambda)=1$$

et d'énoncer comme suit le théorème 6 : soit $\chi(x)$ tel que

$$(9.14)\qquad \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\{[\chi(x)]^2(p^\lambda-a^\lambda)\}=0;$$

([41]) L'équation de Dirac est un système à deux inconnues : l'élimination de l'une d'elles donne (9.12).

$\chi(x)\, e^{-\frac{2\pi i}{h}V(x)}$ est une *onde approchée* si les produits par h [et h^2] des dérivées premières [et secondes] des fonctions a_λ, b, V et χ sont suffisamment petites par rapport à ces fonctions. Les équations des caractéristiques de (9.13) s'écrivent, en posant

$$q_\lambda = V_{x^\lambda} - a_\lambda, \qquad q^1 = -q_1, \qquad q^\lambda = q_\lambda \qquad \text{si } \lambda = 2, 3, 4 :$$

$$(9.15)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx^1}{q^1} = \dfrac{dx^2}{q^2} = \ldots = \dfrac{dq_1}{q^\lambda\left(\dfrac{\partial a_\lambda}{\partial x^1} - \dfrac{\partial a_1}{\partial x^\lambda}\right)} = \dfrac{dq_2}{q^\lambda\left(\dfrac{\partial a_\lambda}{\partial x^2} - \dfrac{\partial a_2}{\partial x^\lambda}\right)} = \ldots, \\ q_\lambda q^\lambda = 1; \end{cases}$$

l'équation (9.14) s'écrit

$$(9.16)\qquad \frac{\partial}{\partial x^\lambda}[[\chi(x)]^2 q^\lambda] = 0;$$

on reconnaît en (9.15) les équations de l'*électron relativiste*; pour de tels électrons,

$$[\chi(x)]^2\,[q^1\, dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 - q^2\, dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + \ldots]$$

est *une densité de masse-quantité de mouvement* vérifiant la condition de conservation classique (9.16).

CHAPITRE 1.

Uniformisation portant sur un paramètre.

Ce chapitre prouve le 1° et le 2° du théorème 1 et le corollaire 1.1, énoncés n° 4.

10. Résolution d'un problème de Cauchy sans point caractéristique.

ÉNONCÉ. — Soient $L+1$ variables numériques complexes $t, x^1, \ldots, x^L$. Cherchons M fonctions numériques holomorphes $u^\mu(t, x)$ ($\mu = 1, \ldots, M$) vérifiant le système

$$(10.1)\qquad \frac{\partial u^\mu(t, x)}{\partial t} = b^\mu_\nu\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^\nu(x, t) + v^\mu(t, x)$$

et les conditions de Cauchy :

$$(10.2)\qquad u^\mu(0, x) = w^\mu(x).$$

Les opérateurs b_ν^μ et les fonctions v^μ, w^μ sont données, holomorphes pour

$$|t| \leqq r, \qquad |x| \leqq R, \qquad \text{où} \quad |x| = |x^1| + \ldots + |x^L|.$$

Nous supposons attaché à chaque inconnue u^μ un entier $m^\mu \geqq 0$, que nous nommons son ordre; nous convenons que

$$\text{ordre}\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial t}\right) = m^\mu + 1, \qquad \text{ordre}\,(b_\nu^\mu u^\nu) = m^\mu + \text{ordre}\,(b_\nu^\mu)$$

et que, dans (10.1), *le premier membre est d'ordre maximum;* c'est-à-dire

$$\text{ordre}\,(b_\nu^\mu) \leqq m^\mu - m^\nu + 1. \tag{10.3}$$

LEMME 10.1. — Ce problème possède, pour $|x| < R$ et t petit ([42]), une solution holomorphe unique.

Preuve de l'unicité. — Les données permettent de calculer successivement $\dfrac{\partial^j u^\mu(0, x)}{\partial t^j}$ pour $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Preuve de l'existence. — On pourrait employer la méthode des fonctions majorantes de Cauchy. Il est plus simple, comme l'ont fait P. ROSENBLOOM [13], puis L. HÖRMANDER [6], d'employer celle des approximations successives : elle donne la solution

$$u^\mu(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} u^{\mu, j}(t, x), \tag{10.4}$$

les $u^{\mu, j}$ étant définis par les quadratures successives :

$$\frac{\partial u^{\mu, 0}(t, x)}{\partial t} = v^\mu(t, x), \qquad u^{\mu, 0}(0, x) = w^\mu(x);$$

$$\frac{\partial u^{\mu, j}(t, x)}{\partial t} = b_\nu^\mu\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^{\nu, j-1}(t, x), \qquad u^{\nu, j}(0, x) = 0, \qquad \text{si} \quad j > 0.$$

La preuve de la convergence de la série (10.4) est la suivante :

LEMME 10.2 (ROSENBLOOM). — Si une fonction numérique $u(x)$ des variables numériques complexes $(x^1, \ldots, x^L)$ est holomorphe pour $|x| < R$ et vérifie, pour $|x| < R$,

$$|u(x)| < \frac{j!}{[R - |x|]^j}, \qquad \text{où} \quad j \geqq 0, \tag{10.5}$$

alors, pour $|x| < R$,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x^\lambda}\right| < \frac{3(j+1)!}{[R - |x|]^{j+1}}. \tag{10.6}$$

([42]) $t <$ Cte $[R - |x|]$.

Preuve. — Puisque $|x| = |x^1| + \ldots + |x^L|$, il suffit de traiter le cas où $L = 1$; alors l'intégrale de Cauchy :

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u(y)\,dy}{y - x}, \qquad \text{où} \quad |y - x| = \varepsilon,$$

et l'hypothèse (10.5) montrent que

$$\left|\frac{du}{dx}\right| \leqq \frac{j!}{\varepsilon[R - |x| - \varepsilon]^j} \qquad \text{pour tout } \varepsilon \text{ tel que} \quad 0 \leqq \varepsilon \leqq R - |x|;$$

en choisissant $\varepsilon = \dfrac{R - x}{j + 1}$, on obtient (10.6), car

$$\left[\frac{j+1}{j}\right]^j < e < 3.$$

Lemme 10.3. — La série (10.4) converge pour $|x| < R$, $|t|$ suffisamment petit.

Preuve. — Supposons obtenues des constantes c et C telles que, pour $|t| < r$, $|x| < R$ et une valeur de $j \geqq 1$:

$$(10.7) \qquad |u^{\nu, j-1}(t, x)| < c C^{j-1} \frac{j^{m^\nu} |t|^{j-1}}{[R - |x|]^{j-1+m^\nu}};$$

alors (10.3) et le lemme 10.2 donnent, pour $|t| < r$ et $|x| < R$:

$$\left| b^\mu_\nu\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^{\nu, j-1}(t, x)\right| < c C^j \frac{j^{1+m^\mu} |t|^{j-1}}{[R - |x|]^{j+m^\mu}},$$

si l'on choisit C suffisamment grand, fonction de (b^μ_ν, m^μ, R, r); d'où, en intégrant par rapport à t,

$$|u^{\mu, j}(t, x)| < c C^j \frac{j^{m^\mu} |t|^j}{[R - |x|]^{j+m^\mu}}.$$

Donc (10.7) vaut quel que soit j, si c est choisi suffisamment grand, fonction de (v^μ, w^μ, R, r), pour que

$$u^{\nu, 0}(t, x) < c \qquad \text{quand} \quad |t| < r, \qquad x < R.$$

La série (10.4) converge donc pour

$$C|t| < R - |x|.$$

Voici achevée la preuve du lemme 10.1.

11. Transformation du problème de Cauchy (énoncé n° 1) en le problème particulier qui vient d'être résolu.

Nous employons les notations que définissent les n^{os} 1, 2 et 4; ξ est donc un paramètre numérique complexe.

Nous introduisons une nouvelle variable numérique complexe t et une fonction $\xi[t, x]$, holomorphe pour t petit; elle est quelconque pour l'instant.

La formule de dérivation de la fonction composée $u \circ \xi = u(\xi[t, x], x)$ s'écrit

$$(11.1) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(u \circ \xi) = \xi_t \frac{\partial u}{\partial \xi} \circ \xi, \qquad \frac{\partial}{\partial x}(u \circ \xi) = \frac{\partial u}{\partial x} \circ \xi + \xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} \circ \xi.$$

Il en résulte le lemme suivant, où $u_j(\xi, x) = \left(-\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^j u(\xi, x)$:

LEMME 11. — Soit $\mathfrak{g}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur différentiel homogène en $\frac{\partial}{\partial x}$, d'ordre r; on a

$$(11.2) \qquad \left[\mathfrak{g}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\right] \circ \xi = \sum_{j=0}^{r} \mathfrak{g}^j\left(x, \frac{\partial \xi}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{j+1} \xi}{(\partial x)^{j+1}}, \frac{\partial}{\partial x}\right)(u_{r-j} \circ \xi),$$

$\mathfrak{g}^j$ étant un opérateur différentiel d'ordre $\leqq j$, dont les coefficients sont des polynômes des dérivées de $\xi[t, x]$, en x, d'ordres $\leqq j+1$; ces polynômes ont pour coefficients des fonctions holomorphes de x. En particulier :

$$(11.3) \qquad \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}(x, \xi_x); \qquad \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}_{p_\lambda}(x, \xi_x) \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} \mathfrak{g}_{p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda};$$

$$(11.4) \qquad \mathfrak{g}^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{g}_{p_l p_\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^\lambda} + \frac{1}{2} \mathfrak{g}_{p_l p_\lambda p_\mu} \xi_{x^l x^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$
$$+ \frac{1}{6} \mathfrak{g}_{p_l p_\lambda p_\mu} \xi_{x^l x^\lambda x^\mu} + \frac{1}{8} \mathfrak{g}_{p_l p_\lambda p_\mu p_\nu} \xi_{x^l x^\lambda} \xi_{x^\mu x^\nu}.$$

Preuve. — D'après (11.1), ce lemme est évident quand $r = 0$ ou 1. Il suffit donc de prouver qu'il s'applique à

$$\tilde{\mathfrak{g}}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \mathfrak{g}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x^1},$$

en le supposant valable pour $\mathfrak{g}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Preuve de (11.2). — Puisque (11.2) vaut pour $\mathfrak{g}$,

$$(\tilde{\mathfrak{g}} u) \circ \xi = \sum_{j=0}^{r} \mathfrak{g}^j \left[\frac{\partial}{\partial x^1}(u_{r-j}) \circ \xi\right];$$

donc, vu (11.1),

$$(\tilde{\mathfrak{g}} u)\circ\xi = \sum_{j=0}^{r} \mathfrak{g}^j \frac{\partial}{\partial x^1}(u_{r-j}\circ\xi) + \mathfrak{g}^j(\xi_{x^1} u_{r+1-j}\circ\xi);$$

la formule (11.2) s'applique donc à $\mathfrak{g}$ en prenant

$$\tilde{\mathfrak{g}}^j . = \mathfrak{g}^{j-1}\frac{\partial .}{\partial x^1} + \mathfrak{g}^j(\xi_{x^1}.), \qquad \text{où} \quad \mathfrak{g}^{-1} = 0. \tag{11.5}$$

Pour prouver les formules (11.3) et (11.4), il suffit de vérifier que les expressions de $\tilde{\mathfrak{g}}^j$ et $\mathfrak{g}^j$ qu'elles donnent satisfont (11.5).

Preuve de $(11.3)_1$. — $\tilde{\mathfrak{g}}^0 = \mathfrak{g}(x, \xi_x)\xi_{x^1}$ et $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}(x, \xi_x)$ vérifient (11.5) pour $j = 0$.

Preuve de $(11.3)_2$. — Pour $j = 1$, (11.5) est satisfait par les expressions tirées de (11.3) :

$$\tilde{\mathfrak{g}}^1 = \xi_{x^1}\mathfrak{g}^1 + \mathfrak{g}\frac{\partial}{\partial x^1} + \mathfrak{g}_{p_\lambda}\xi_{x^1 x^\lambda}, \qquad \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}^1(\xi_{x^1}.) = \xi_1\mathfrak{g}^1 + \mathfrak{g}_{p_\lambda}\xi_{x^1 x^\lambda}.$$

Preuve de (11.4). — Pour $j = 2$, (11.5) est satisfait par les expressions tirées de (11.4) :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{g}}^2 = {} & \xi_{x^1}\mathfrak{g}^2 + \mathfrak{g}_{p_\lambda}\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda\,\partial x^1} + \mathfrak{g}_{p_l p_\lambda}\left(\frac{1}{2}\xi_{x^l x^\lambda}\frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_{x^1 x^l}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right) \\ & + \frac{1}{2}\mathfrak{g}_{p_l p_\lambda}\xi_{x^1 x^l x^\lambda} + \frac{1}{2}\mathfrak{g}_{p_l p_\lambda p_\mu}\xi_{x^1 x^l}\xi_{x^\lambda x^\mu},\end{aligned}$$

$$\mathfrak{g}^2(\xi_{x^1}.) = \xi_{x^1}\mathfrak{g}^2 + \mathfrak{g}_{p_l p_\lambda}\xi_{x^1 x^l}\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2}\mathfrak{g}_{p_l p_\lambda}\xi_{x^1 x^l x^\lambda} + \frac{1}{2}\mathfrak{g}_{p_l p_\lambda p_\mu}\xi_{x^l x^\lambda}\xi_{x^1 x^\mu}.$$

Application au problème de Cauchy (*énoncé n*° 1). — En appliquant $\dfrac{\partial^{n-n^\nu}}{\partial\xi^{n-n^\nu}}$ à (1.1) et en employant (1.5), on voit que ce problème (1.1), (1.4) peut s'énoncer

$$\left\{\begin{aligned}& a_\mu^\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_{n-n^\nu}^\mu(\xi, x) = v_{n-n^\nu}^\nu, \\ & \frac{\partial u_j^\mu}{\partial\xi} + u_{j+1}^\mu = 0 \qquad (j < n - m^\mu - 1);\end{aligned}\right. \tag{11.6}$$

$$u_j^\mu = w_j^\mu \qquad \text{pour} \quad s(x) = \xi, \qquad j < n - m^\mu. \tag{11.7}$$

Composons les relations (11.6) avec une fonction $\xi[t, x]$ et multiplions-les par ξ_t; vu (11.1) et le lemme précédent, on obtient les relations, équivalentes à (11.6) pour $\xi_t \neq 0$:

$$(11.8)\quad \begin{cases} g^\nu_\mu(x, \xi_x)\dfrac{\partial}{\partial t}\left(u^\mu_{n-m^\mu-1}\circ\xi\right) \\ \quad = \xi_t \displaystyle\sum_{j=1}^{n^\nu - m^\mu} a^{\nu j}_\mu\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(u^\mu_{n-m^\mu-j}\circ\xi\right) - \xi_t v^\nu_{n-n^\nu}\circ\xi, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(u^\mu_j\circ\xi) = -\xi_t u^\mu_{j+1}\circ\xi \qquad (j < n - m^\mu - 1); \end{cases}$$

vu (1.2), $a^{\nu j}_\mu$ est un opérateur d'ordre j; la donnée de a^ν_μ et $\xi[t, x]$ le détermine.

Pour pouvoir résoudre ce système par rapport à ses dérivés en $\dfrac{\partial}{\partial t}$, *imposons à $\xi[t, x]$ de vérifier l'équation non linéaire du premier ordre*

$$\xi_t + g(x, \xi_x) = 0,$$

où $g(x, p)$ est une fonction caractéristique (n° 2); pour exprimer aisément les conditions de Cauchy (11.7), imposons à $\xi[t, x]$ la condition de Cauchy :

$$\xi[0, x] = s(x);$$

ainsi $\xi[t, x]$ est la solution holomorphe du problème de Cauchy non linéaire du premier ordre (4.4) : on sait qu'elle existe et est unique.

Pour faciliter cette résolution de (11.8) par rapport à ses dérivées en $\dfrac{\partial}{\partial t}$, notons (G^μ_ν) le produit par g de la matrice inverse de (g^ν_μ); $G^\mu_\nu(x, p)$ est donc holomorphe en tout covecteur (x, p) de $S(\xi)$; $G^\mu_\nu(x, \xi_x)$ est donc holomorphe, pour t petit; notons enfin

$$A^{\mu j}_\nu\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = G^\mu_\pi(x, \xi_x)\, a^{\pi j}_\nu\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right); \qquad \text{ordre } (A^{\mu j}_\nu) \leq j.$$

On voit que, pour $\xi_t \neq 0$, le problème de Cauchy (11.8), (11.7) s'énonce

$$(11.9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(u^\mu_{n-m^\mu-1}\circ\xi\right) = -\displaystyle\sum_{j=1}^{n-m^\mu} A^{\mu j}_\nu\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(u^\nu_{n-m^\nu-j}\circ\xi\right) \\ \qquad\qquad + G^\mu_\nu(x, \xi_x)\, v^\nu_{n-n^\nu}\circ\xi, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(u^\mu_j\circ\xi) = g(x, \xi_x)\, u^\mu_{j+1}\circ\xi \qquad (j < n - m^\mu - 1); \end{cases}$$

$$(11.10)\quad u^\mu_j\circ\xi = w^\mu_j\circ\xi \quad \text{pour} \quad t = 0, \quad j < n - m$$

En résumé, quand $\xi_t \neq 0$, *le problème de Cauchy énoncé n° 1 équivaut au problème* (11.9), (11.10), dont les inconnues sont les fonctions $u_j^\mu \circ \xi$ de (t, x); $0 \leqq j < n - m^\mu$. Choisissons

$$\text{ordre}\,(u_j^\mu \circ \xi) = m^\mu + j;$$

dans (11.9), le premier membre est d'ordre maximum n; ce nouveau problème (11.9), (11.10) est donc du type résolu n° 10.

12. **Résolution du problème de Cauchy** (énoncé n° 1).

D'après le lemme 10.1, le problème de Cauchy (11.9), (11.10) possède une solution et une seule, qui soit holomorphe pour t petit.

En les points non caractéristiques de $S(\xi)$ on a $g(x, s_x) \neq 0$, c'est-à-dire $\xi_t \neq 0$, vu la définition (4.4) de $\xi[t, x]$; en ces points, d'après le n° 11, le problème de Cauchy qu'énonce le n° 1 équivaut au problème (11.9), (11.10); il possède donc une solution et une seule qui soit holomorphe. Nous obtenons ainsi *le théorème d'existence et d'unicité qui constitue le* 1° *du théorème* 1 (n° 4); c'est le théorème classique de *Cauchy-Kowalewski*, avec des hypothèses un peu plus générales.

Mais le lemme 10.1 nous donne sur le problème de Cauchy (11.9), (11.10) une information plus précise : $u_j^\mu \circ \xi (j < n - m^\mu)$ est une fonction holomorphe de (t, x) pour t petit; d'où, vu le lemme 11, *le théorème d'uniformisation que le* 2° *du théorème* 1 (n° 4) énonce; il énonce aussi une propriété du support des singularités de $u(\xi, x)$; le n° 14 va la prouver.

13. **Explicitons** $\xi[t, x]$ en résolvant le problème non linéaire (4.4) par la méthode des caractéristiques, due à Cauchy.

Les équations des caractéristiques de

$$(4.4)_1 \qquad \xi_t + g(x, \xi_x) = 0$$

consistent en *le système d'Hamilton* :

$$(13.1) \qquad \frac{dx^\lambda}{dt} = g_{p_\lambda}(x, p), \qquad \frac{dp_\lambda}{dt} = -g_{x^\lambda}(x, p)$$

et en la quadrature

$$\frac{d\xi}{dt} = \sum_\lambda p_\lambda g_{p_\lambda}(x, p) - g(x, p),$$

qui s'écrit, puisque $g(x, p)$ est homogène en p de degré N,

$$\frac{d\xi}{dt} = (N-1)\, g(x, p).$$

Le système d'Hamilton (13.1) possède l'*intégrale première*

$$g(x, p)$$

et *la forme différentielle invariante*

$$dp_\lambda \wedge dx^\lambda - dg \wedge dt;$$

en effet, le système caractéristique ([43]) de cette forme est le système d'Hamilton (13.1).

Cette intégrale première montre que la quadrature précédente s'écrit

$$(13.2) \qquad d[\xi - (N-1)\, t\, g(x, p)] = 0.$$

La résolution du problème de Cauchy (4.4) emploie la solution de (13.1) et (13.2),

$$x^\lambda(t, y), \quad p_\lambda(t, y), \quad \xi(t, y)$$

(t petit; $\xi(\ldots)$ et $\xi[\ldots]$ sont deux fonctions différentes) que définissent les conditions initiales

$$(13.3) \qquad x^\lambda(0, y) = y^\lambda, \qquad p_\lambda(0, y) = s_{,\lambda}, \qquad \xi(0, y) = s(y);$$

on a donc

$$(13.4) \qquad g(x, p) = g(y, s_y), \qquad dp_\lambda \wedge dx^\lambda - dg \wedge dt = 0,$$

$$(13.5) \qquad \xi(t, y) = (N-1)\, t\, g(y, s_y) + s(y).$$

On sait que la solution $\xi[t, x]$ du problème (4.4) et ses dérivées premières sont données par les formules

$$(13.6) \quad \xi[t, x] = \xi(t, y), \qquad \xi_{x^\lambda}[t, x] = p_\lambda, \qquad \xi_t[t, x] = -g(y, s_y),$$

où

$$x = x(t, y), \qquad p = p(t, y).$$

L'introduction les a numérotées (4.6); ce chapitre 1 et le chapitre 2 les emploieront fréquemment.

14. Support des singularités de $u(\xi, x)$.

Le théorème d'uniformisation qu'a obtenu le n° 12 montre ceci : sur l'image du domaine d'holomorphie de $\xi[t, x]$ par l'application

$$(t, x) \to (\xi[t, x], x),$$

le support des singularités de $u(\xi, x)$ appartient à l'image $\mathcal{K}$ de la variété d'équation

$$\xi_t[t, x] = 0.$$

([43]) *Voir* É. CARTAN [3], chap. 8.

Vu (13.6), puis (13.5), $\mathcal{K}$ est l'image de la variété d'équation

$$(14.1) \qquad g(y, s_y) = 0$$

par l'application dans $\Xi \times X$:

$$(t, y) \to (s(y), x(t, y)).$$

Les bandes bicaractéristiques (n° 2) sont définies par (13.1) et (14.1) : cela résulte de (13.4); la condition

$$(\xi, x) \in \mathcal{K}$$

signifie donc que x appartient à une courbe bicaractéristique issue d'un covecteur caractéristique de $S(\xi)$; vu les définitions de $K(\xi)$ et $K(x)$ (n° 2), cette condition peut s'énoncer

$$x \in K(\xi)$$

ou encore

$$K(x) \text{ et } S(\xi) \text{ sont tangentes.}$$

Voici achevée la preuve du 2° du théorème 1.

15. **Propriétés des points non exceptionnels.**

Nous allons prouver *le corollaire* 1.1 (n° 4). Soit a un point de $S(0)$ ne vérifiant pas la condition

$$(15.1) \qquad \xi[t, a] = 0 \quad \text{quel que soit } t.$$

D'après le Vorbereitungssatz de Weierstrass (*voir* : Bochner-Martin [2], chap. 11; ou Osgood [12], chap. II, § 2), l'équation

$$(15.2) \qquad \xi[t, x] = \xi,$$

où x est voisin de a et ξ voisin de 0, équivaut à une équation

$$P(t, \xi, x) = 0,$$

où P est un polynôme en t, dont les coefficients sont fonctions holomorphes de (ξ, x), le coefficient principal valant 1. Par suite, (15.2) définit une fonction algébroïde $t(\xi, x)$; notons $\mathcal{K}$ le support de ses singularités; $\mathcal{K}$ est donc l'ensemble des (ξ, x) annulant le discriminant du polynôme P de t : *$\mathcal{K}$ est une variété analytique de codimension* 1.

D'après le théorème d'uniformisation qu'a prouvé le n° 12,

$$u^\mu(\xi[t, x], x) = H^\mu(t, x)$$

est une fonction holomorphe de (t, x); autrement dit : $u^\mu(\xi, x)$ s'obtient en substituant dans $H^\mu(t, x)$ à t la fonction algébroïde $t(\xi, x)$; par suite : $u^\mu(\xi, x)$ *est, au voisinage de* $(0, a)$, *une fonction algébroïde de* (ξ, x), *se ramifiant sur* $\mathcal{K}$.

Pour prouver le corollaire 1.1, il suffit donc de prouver que *la condition* (15.1) signifie que a est point *exceptionnel* de $S(0)$; les deux lemmes suivants vont le faire.

NOTATIONS. — Soit $a \in S(0)$; soit t un paramètre numérique complexe, voisin de 0. L'application

$$y \to x(t, y),$$

que définit le problème de Cauchy (13.1), (13.3), est l'identité pour $t = 0$; elle possède donc une inverse; en particulier, l'équation

$$x(t, y(t)) = a \tag{15.3}$$

définit une fonction holomorphe $y(t)$. Évidemment

$$y(0) = a, \qquad \frac{dy(0)}{dt} = -\frac{\partial x(0, a)}{\partial t} = -\, g_p(a, s_y(a)). \tag{15.4}$$

LEMME 15.1. — La condition (15.1) équivaut à la condition :

$y(t)$ est point caractéristique de $S(0)$ quel que soit t.

Preuve. — La condition (15.1) peut s'énoncer :

$$\xi[t, a] = 0, \qquad \xi_t[t, a] = 0 \quad \text{quel que soit } t. \tag{15.5}$$

En faisant $x = a$ et $y = y(t)$ dans les expressions (13.5) et (13.6) de ξ et ξ_t, on constate que (15.5) équivaut à la condition

$$s(y(t)) = 0, \qquad g(y(t), s_y(y(t))) = 0;$$

elle signifie que $y(t)$ est point caractéristique de $S(0)$.

LEMME 15.2. — Supposons a point caractéristique de $S(0)$; alors, au voisinage de a, l'alternative suivante se présente :

1° $y(t)$ n'est pas point caractéristique de $S(0)$ pour $t \neq 0$; alors $S(0)$ et $K(a)$ n'ont pas d'autre point de contact que le point a;

ou :

2° $y(t)$ est point caractéristique de $S(0)$ quel que soit t; alors $y(t)$ décrit une courbe analytique, qui est l'ensemble des points de contact de $S(0)$ et $K(a)$. Cette courbe passe par a. Elle est régulière et tangente en a au vecteur bicaractéristique $g_p(a, s_y(a))$, si ce vecteur $\neq 0$. Si cette courbe ne consiste qu'en le point a, alors la courbe bicaractéristique issue du vecteur $(a, s_y(a))$ se réduit aussi au point a.

Preuve. — Les points y où $S(0)$ et $K(a)$ se touchent s'obtiennent en résolvant le système, d'inconnue (t, y) :

$$s(y) = 0, \qquad g(y, s_y) = 0, \qquad x(t, y) = a.$$

Nous nous plaçons au voisinage de a : nous ne considérons que la partie de $K(a)$ voisine de a; autrement dit, nous supposons t petit. Le système précédent s'écrit donc

$$(15.6) \qquad y = y(t), \qquad s(y(t)) = 0, \qquad g(y(t), s_y(y(t))) = 0.$$

Puisque les zéros des fonctions holomorphes d'une variable sont isolés, l'alternative suivante se présente :

1° Le système (15.6) a pour seule solution

$$t = 0, \qquad y = a;$$

alors $S(0)$ et $K(a)$ ont pour seul point de contact le point a;

ou :

2° Les fonctions $s(y(t))$, $g(y(t), s_y(y(t)))$ sont identiquement nulles; alors l'ensemble des points de contact de $S(0)$ et $K(a)$ est l'ensemble des points $y(t)$. Ces points constituent une courbe analytique. D'après (15.4) : cette courbe passe par a; elle est régulière et tangente en a au vecteur bicaractéristique $g_p(a, s_y(a))$, si ce vecteur $\neq 0$. Si cette courbe se réduit au point a, alors (15.3) s'écrit

$$x(t, a) = a;$$

cela veut dire que la courbe bicaractéristique issue de $(a, s_y(a))$ est réduite au point a.

Chapitre 2.

Développement asymptotique.

Le système donné (1.1) équivaut, pour $\xi_t \neq 0$, au système (11.8), qui se simplifie évidemment pour $\xi_t = 0$; le calcul de la partie singulière de la solution du problème de Cauchy est donc plus simple que le calcul de cette solution elle-même. C'est ce qu'explicite ce chapitre-ci : il établit le développement asymptotique qu'ont énoncé les nos 3 et 4 de l'Introduction, dont il emploie les notations et conventions.

Rappelons que $F \equiv 0 \pmod f$ signifie que F/f est holomorphe.

16. Calcul du développement asymptotique par quadratures le long des bicaractéristiques issues de S(ξ).

Le n° 12 a prouvé que

$$[u_j^\mu(\xi, x) - w_j^\mu(\xi, x)] \circ \xi \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, t) \qquad \text{pour} \quad j < n - m^\mu;$$

il existe donc, au sens du n° 4, un développement asymptotique

$$u^\mu(\xi, x) \sim w^\mu(\xi, x) + \sum_{r=n}^{\infty} u^{\mu, r}(\xi, x)$$

tel que

$$(16.1) \quad \begin{cases} \left(u_j^\mu - w_j^\mu - \sum_{r=n}^{m-1} u_j^{\mu, r} \right) \circ \xi \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, t) \qquad \text{si} \quad 0 \leqq j < m - m^\mu \\ \qquad \left(n \leqq m; \text{si } n = m, \text{ alors} \sum = 0 \right). \end{cases}$$

D'où, conformément à (4.3) :

$$(16.2) \qquad u_j^{\mu, m} \circ \xi \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, t) \qquad \text{si} \quad j < m - m^\mu.$$

Comme le n° 4 l'a déduit de (4.3), *construire le développement asymptotique de u, c'est calculer*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{m-m^\mu-1}^{\mu, m} \circ \xi\right) \qquad [\mathrm{mod}(t\,\xi_t)],$$

en fonction des données a_μ^ν, v^μ, w^μ *et* (si $m > n$) *de* $u^{\mu, n}, \ldots, u^{\mu, m-1}$. Ce n° 16 va effectuer ce calcul par quadratures le long des bicaractéristiques issues de $S(\xi)$.

Vu le lemme 11.1, puisque ordre$(a_\mu^\nu) \leqq n^\nu - m^\mu$, (16.1) implique

$$(16.3) \quad \begin{cases} \left[a_\mu^\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(u_j^\mu - w_j^\mu - \sum_{r=n}^{m-1} u_j^{\mu, r} \right) \right] \circ \xi \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, t) \\ \qquad \text{pour} \quad j < m - n^\nu. \end{cases}$$

Pour écrire (16.3) plus commodément, notons

$$(16.4) \quad v^{\nu, m}(\xi, x) = v^\nu(\xi, x) - a_\mu^\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left[w^\mu(\xi, x) + \sum_{r=n}^{m-1} u^{\mu, r}(\xi, x) \right],$$

donc, en particulier :

$$v^{\nu, n}(\xi, x) = v^\nu(\xi, x) - a_\mu^\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) w^\mu(\xi, x);$$

la relation (16.3) s'écrit

$$v_j^{\nu,m}\circ\xi \equiv 0 \pmod t \qquad \text{pour} \quad j < m - n^\nu.$$

Notons

$$\text{(16.5)} \qquad \mathrm{H}^{\nu,m}[t, x] = v^{\nu,m}_{m-n^\nu-1}\circ\xi;$$

on a donc, en particulier :

$$\text{(16.6)} \qquad H^{\nu,m}[t, x] = 0 \pmod t.$$

D'autre part, (16.4) donne

$$a_\mu^\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^{\mu,m}(\xi, x) = v^{\nu,m}(\xi, x) - v^{\nu,m+1}(\xi, x),$$

donc

$$a_\mu^\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^{\mu,m}_{m-n^\nu} = v^{\nu,m}_{m-n^\nu} - v^{\nu,m+1}_{m-n^\nu};$$

d'où, en composant avec ξ, en employant (16.5) et la formule (11.1) de dérivation d'une fonction composée :

$$\text{(16.7)} \qquad (a_\mu^\nu u^{\mu,m}_{m-n^\nu})\circ\xi = -\frac{1}{\xi_t} H_t^{\nu,m} - H^{\nu,m+1};$$

en appliquant $-\dfrac{\partial}{\partial t}$ et en employant (11.1) à nouveau, on obtient

$$\text{(16.8)} \qquad \xi_t(a_\mu^\nu u^{\mu,m}_{m-n^\nu+1})\circ\xi = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\xi_t} H_t^{\nu,m} + H^{\nu,m+1}\right).$$

Nous allons appliquer le lemme 11 à ces deux relations.

Les conséquences de (16.7). — Le lemme 11 transforme (16.7) en la relation

$$\text{(16.9)} \quad g_\mu^\nu(x, \xi_x)\frac{\partial}{\partial t}(u^{\mu,m}_{m-m^\mu-1}\circ\xi) = H_t^{\nu,m} + \xi_t H^{\nu,m+1} + \xi_t \sum_{j=1}^{n^\nu - m^\mu} a_\mu^{\nu j}\left[t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right](u^{\mu,m}_{m-m^\mu-j}\circ\xi),$$

où $a_\mu^{\nu j}$ est un opérateur différentiel d'ordre j, dépendant de a_μ^ν et $\xi[t, x]$. Or (11.1) permet de déduire de (16.2) la relation plus précise :

$$u_j^{\mu,m}\circ\xi \equiv 0 \pmod{t^{m-m^\mu-j}} \qquad \text{si} \quad j < m - m^\mu;$$

donc

$$a_\mu^{\nu j}\left[t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right](u^{\mu,m}_{m-m^\mu-j}\circ\xi) \equiv 0 \pmod{t^j}, \qquad \text{où} \quad 1 \leqq j;$$

vu (16.6), (16.9) donne donc

$$(16.10)\qquad g^\nu_\mu(x, \xi_x)\frac{\partial}{\partial t}\left(u^{\mu, m}_{m-m^\mu-1}\circ\xi\right) \equiv H^{\nu, m}_t[t, x] \qquad [\operatorname{mod}(t\xi_t)].$$

Multiplions (16.10) par le vecteur $\mathfrak{h}_\nu(x, \xi_x)$ que définit (3.4); il vient, puisque $g(x, \xi_x) = -\xi_t$:

$$(16.11)\qquad \mathfrak{h}_\nu(x, \xi_x)H^{\nu, m}_t[t, x] \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod}\xi_t);$$

puisque $g/\text{dét}(g^\nu_\mu)$ est holomorphe, cette relation vaut mod dét(g^ν_μ) et montre que l'équation

$$(16.12)\qquad g^\nu_\mu(x, \xi_x)\, U^{\mu, m}[t, x] = H^{\nu, m}_t[t, x]$$

définit un vecteur $U^{\mu, m}$ fonction holomorphe de (t, x); (16.10) s'écrit

$$g^\nu_\mu\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(u^{\mu, m}_{m-m^\mu-1}\circ\xi\right) - U^{\mu, m}\right] \equiv 0 \qquad [\operatorname{mod}(t\xi_t)];$$

en multipliant cette relation par l'inverse de la matrice (g^ν_μ), que le n° 3 a noté $\frac{1}{g}G^\mu_\nu$, en tenant compte de l'équation $g = -\xi_t$ et enfin de (3.4), on obtient

$$(16.13)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(u^{\mu, m}_{m-m^\mu-1}\circ\xi\right) = U^{\mu, m}[t, x] + h^\mu(x, \xi_x)\, U^m[t, x] + \xi_t\mathcal{H}^{\mu, m}[t, x],$$

où

$$(16.14)\qquad U^m[t, x] \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H}^{\mu, m}[t, x] \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} t).$$

Autrement dit,

$$(16.15)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(u^{\mu, m}_{m-m^\mu-1}\circ\xi\right) \equiv U^{\mu, m}[t, x] + h^\mu(x, \xi_x)\, U^m[t, x] \qquad [\operatorname{mod}(t\xi_t)];$$

le calcul du développement asymptotique de $u^\mu(\xi, x)$ est ainsi réduit au calcul de la fonction $U^m[t, x]$, qui, vu (16.14), vérifie

$$(16.16)\qquad U^m[0, x] = 0.$$

La relation (16.8) va permettre ce calcul : le lemme 11 permet, vu (16.2), d'en déduire

$$\xi_t\left[-\frac{1}{\xi_t}g^\nu_\mu\frac{\partial}{\partial t} + g^\nu_{\mu p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2}g^\nu_{\mu p_l p_\lambda}\xi_{x^l x^\lambda} + g'^\nu_\mu\right]\left(u^{\mu, m}_{m-m^\mu}\circ\xi\right)$$
$$\equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\xi_t}H^{\nu, m}_t + H^{\nu, m+1}\right) \qquad (\operatorname{mod}\xi_t);$$

en multipliant par $\mathfrak{h}_\nu(x, \xi_x)$, nous éliminons $H^{\nu, m+1}$, qui dépend de $u^{\mu, m}$; cela résulte de (16.11); il vient, en remarquant que (16.13) peut s'écrire

$$u^{\mu, m}_{m-m^\mu} \circ \xi = -\frac{U^{\mu, m} + h^\mu U^m}{\xi_t} - \mathcal{H}^{\mu, m}$$

et en remplaçant $H_t^{\nu, m}$ par le premier membre de (16.12) :

$$(16.17) \quad \xi_t \mathfrak{h}_\nu \left[-\frac{1}{\xi_t} g_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial t} + g_{\mu p_\lambda}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{\mu p_l p_\lambda}^\nu \xi_{x^l x^\lambda} + g_\mu'^\nu \right] \times \left(\frac{U^{\mu, m} + h^\mu U^m}{\xi_t} + \mathcal{H}^{\mu, m} \right) + \mathfrak{h}_\nu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\xi_t} g_\mu^\nu U^{\mu, m} \right) \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} \xi_t).$$

Or le n° 18 établira l'*identité* que voici : quelles que soient les fonctions $F[t, x]$, $F^\mu[t, x]$ et $\mathcal{F}^\mu[t, x]$ holomorphes pour t petit, on a

$$(16.18) \quad \xi_t \mathfrak{h}_\nu \left[-\frac{1}{\xi_t} g_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial t} + g_{\mu p_\lambda}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{\mu p_l p_\lambda}^\nu \xi_{x^l x^\lambda} + g_\mu'^\nu \right] \times \left(\frac{F^\mu + h^\mu F}{\xi_t} + \mathcal{F}^\mu \right) + \mathfrak{h}_\nu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\xi_t} g_\mu^\nu F^\mu \right)$$
$$\equiv \left[\frac{\partial}{\partial t} + g_{p_\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} + \frac{1}{2\rho} (\rho g)_{p_\lambda x^\lambda} \right] F + j F + \mathfrak{h}_\nu \left[g_{\mu p_\lambda}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{\mu p_l p_\lambda}^\nu \xi_{x^l x^\lambda} + g_\mu'^\nu \right] F^\mu \qquad (\operatorname{mod} \xi_t),$$

quand on substitue (x, ξ_x) aux arguments (x, p) de $\mathfrak{h}$, h, g, g_μ^ν, j, $(\rho g)_{p_\lambda x^\lambda}$; les variables indépendantes sont (t, x); $\xi[t, x]$ vérifie $\xi_t + g(x, \xi_x) = 0$.

Cette identité transforme (16.17) en la relation, où l'on prend $p = \xi_x$:

$$(16.19) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + g_{p_\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} + \frac{1}{2\rho} (\rho g)_{p_\lambda x^\lambda} \right] U^m[t, x] + j U^m + \mathfrak{h}_\nu \left[g_{\mu p_\lambda}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{\mu p_l p_\lambda}^\nu \xi_{x^l x^\lambda} + g_\mu'^\nu \right] U^{\mu, m}[t, x] \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} \xi_t).$$

Cette équation, jointe à (16.16) détermine U^m par une quadrature le long des courbes $dx^\lambda = -g_{p_\lambda} dt$ de la variété $\xi_t = 0$, c'est-à-dire, vu le n° 13, le long des bicaractéristiques issues de $S(\xi)$. Voici donc effectué le calcul du développement asymptotique de $u^\mu(\xi, x)$.

Il reste à le perfectionner. Tout d'abord :

Explicitons le calcul de $U^{\mu, m}$. — Il s'agit de résoudre (16.12) en $U^{\mu, m}$; la matrice (G_ν^μ), produit de l'inverse de (g_μ^ν) par $g = -\xi_t$, le permet :

$$U^{\mu, m}[t, x] = -G_\nu^\mu(x, \xi_x) \frac{1}{\xi_t} H_t^{\nu, m}[t, x];$$

remplaçons $H^{\nu,m}$ par son expression (16.5), à laquelle nous appliquons la formule (11.1) de dérivation d'une fonction composée; il vient

$$(16.20) \qquad U^{\mu,m}[t, x] = G^{\mu}_{\nu}(x, \xi_x)\, v^{\nu,m}_{m-n^\nu} \circ \xi.$$

Résumons le n° 16 :

LEMME 16. — Étant donné a^{ν}_{μ}, v^{ν}, w^{ν} et ayant choisi

$$u^{\mu,n}, \quad \ldots, \quad u^{\mu,m-1} \qquad (m \geqq n),$$

on définit

$$v^{\nu,m}(\xi, x) \text{ par } (16.4), \quad U^{\mu,m}[t, x] \text{ par } (16.20),$$
$$U^{m}[t, x] \text{ par } (16.16) \text{ et } (16.19);$$

en écrivant alors (16.2) et (16.15), on obtient les conditions que $u^{\mu,m}(\xi, x)$ doit vérifier.

NOTE 16.0. — Les choix de $u^{\mu,n}$, $u^{\mu,m-1}$ sont tels que

$$v^{\nu,m}_{m-n^\nu-1} \circ \xi \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ t),$$
$$U^{\mu,m}[t, x] \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 1) \qquad \text{(c'est-à-dire est holomorphe)},$$
$$U^{m}[t, x] \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ t).$$

NOTE 16.1. — Supposons qu'on ait réalisé l'hypothèse (3.3) en employant la note 2.1 : la matrice (g^{ν}_{μ}) est une somme directe de sous-matrices γ ; employons les vecteurs ${}^{\gamma}h$, les covecteurs ${}_{\gamma}\mathfrak{h}$ et la matrice ${}^{\alpha}_{\beta}j(x, \xi_x)$, que définit la note 3.1. Alors (16.11) s'applique à l'un quelconque des vecteurs ${}_{\gamma}\mathfrak{h}$, c'est-à-dire quand la sommation en ν est étendue à l'un quelconque des ensembles $M_{(\gamma)}$; $U^{\mu,m}$ *est encore défini par* (16.12), *donc par* (16.20); mais U^{m} *doit être remplacé par un vecteur* ${}_{\gamma}U^{m}$ *et* $h^{\mu}U^{m}$ *par* $h^{\mu}{}_{\alpha}U^{m}$, α *étant tel que* $\mu \in M_{(\alpha)}$; dans (16.17), (16.18) et (16.19), μ parcourt l'ensemble $(1, \ldots, M)$, ν parcourt l'un quelconque de ses sous-ensembles $M_{(\beta)}$. L'identité (16.18) vaut quand on y remplace les termes

$$h^{\mu}F, \quad F, \; jF$$

par

$$h^{\mu}{}_{\alpha}F, \quad {}_{\beta}F, \quad {}^{\alpha}_{\beta}j\, {}_{\alpha}F, \qquad \text{où } \mu \in M_{(\alpha)}.$$

Finalement *la relation* (16.19) *vaut quand on y remplace les termes*

$$U^{m}, \; j\,U^{m} \qquad \text{par } {}_{\beta}U^{m}, \quad {}^{\alpha}_{\beta}j\, {}_{\alpha}U^{m},$$

μ *parcourant* $(1, \ldots, M)$, ν *parcourant* $M_{(\beta)}$.

17. Une simplification possible du calcul précédent.

L'identité (16.18) implique, en particulier, la suivante :

si $F[t, x]$ et $F^\mu[t, x]$ sont holomorphes et vérifient

$$F^\mu[t, x] + h^\mu(x, \xi_x) F[t, x] \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, \xi_t),$$

alors

$$(17.1) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t} + g_{p_\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} + \frac{1}{2\rho}(\rho g)_{p_\lambda x^\lambda}\right] F + j F$$
$$+ \mathfrak{h}_\nu \left[g^{\nu}_{\mu p_\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g^{\nu}_{\mu p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} + g'^{\nu}_{\mu}\right] F^\mu$$
$$\equiv \mathfrak{h}_\nu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\xi_t} g^{\nu}_{\mu} F^\mu\right) \qquad (\mathrm{mod}\, \xi_t).$$

Cette identité permet de simplifier (16.19), par exemple dans le cas suivant :

LEMME 17.1. — *Supposons $v^{\nu, m}_{m-n^\nu} \circ \xi$ fonction holomorphe de (t, x). Alors la relation (16.19) qui, jointe à (16.16), définit $U^m[t, x]$, équivaut à la suivante :*

$$(17.2) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + g_{p_\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} + \frac{1}{2\rho}(\rho g)_{p_\lambda x^\lambda} + j\right] [U^m + \mathfrak{h}_\nu (v^{\nu, m}_{m-n^\nu} \circ \xi)]$$
$$\equiv \mathfrak{h}_\nu \frac{\partial}{\partial t}(v^{\nu, m}_{m-n^\nu} \circ \xi) \qquad (\mathrm{mod}\, \xi_t).$$

Preuve. — La relation (16.20), qui définit $U^{\mu, m}[t, x]$, et (3.4) donnent

$$U^{\mu, m}[t, x] \equiv h^\mu(x, \xi_x) \mathfrak{h}_\nu(x, \xi_x) v^{\nu, m}_{m-n^\nu} \circ \xi \qquad (\mathrm{mod}\, \xi_t);$$

dans (17.1) nous pouvons donc prendre

$$F^\mu = U^{\mu, m}, \qquad F = -\mathfrak{h}_\nu (v^{\nu, m}_{m-n^\nu} \circ \xi);$$

la relation ainsi obtenue, retranchée de (16.19) donne

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + g_{p_\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} + \frac{1}{2\rho}(\rho g)_{p_\lambda x^\lambda} + j\right] [U^m + \mathfrak{h}_\nu (v^{\nu, m}_{m-n^\nu} \circ \xi)]$$
$$\equiv -\mathfrak{h}_\nu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\xi_t} g^{\nu}_{\mu} U^{\mu, m}\right) \qquad (\mathrm{mod}\, \xi_t);$$

or, vu la définition (16.12), (16.5) de $U^{\mu, m}$ et la formule (11.1) de dérivation d'une fonction composée, on a

$$\frac{1}{\xi_t} g^{\nu}_{\mu} U^{\mu, m} = \frac{1}{\xi_t} H^{\nu, m}_t = \frac{1}{\xi_t} \frac{\partial}{\partial t}(v^{\nu, m}_{m-n^\nu-1} \circ \xi) = -v^{\nu, m}_{m-n^\nu} \circ \xi;$$

d'où (17.2).

On peut évidemment annuler le second membre de (17.2) quand $v^{\nu,m}_{m-n^\nu+1}\circ\xi$ est holomorphe; c'est évidemment le cas pour $m=n$; donc :

LEMME 17.2. — Pour $m=n$, c'est-à-dire dans le calcul du premier terme du développement asymptotique, la relation (16.19) équivaut à la suivante :

$$(17.3)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial t}+g_{p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}+\frac{1}{2}g_{p_lp_\lambda}\xi_{x^lx^\lambda}+\frac{1}{2\rho}(\rho g)_{p_\lambda x^\lambda}+j\right] \times\left[U^n+\mathfrak{h}_\nu v^{\nu,n}_{n-n^\nu}\circ\xi\right]\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\xi_l).$$

Le lemme 17.1 possède un second corollaire, qu'emploiera le n° 25 :

LEMME 17.3. — Supposons que le système (1.1) se compose d'une seule équation :

$$M=1,\qquad n^\nu=n,\qquad m^\mu=0;$$

nous supprimons les indices μ et ν. Alors $v^m_{m-n}\circ\xi$ est une fonction holomorphe de (t,x); (16.19) équivaut donc à (17.2).

Preuve. — h et $\mathfrak{h}$ sont des scalaires; l'hypothèse (3.3) et $(3.4)_1$ montrent que $h\mathfrak{h}\neq 0$; l'équation (16.11) se réduit donc à

$$H^m_l[t,x]\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\xi_l);$$

d'où, vu la définition (16.5) de H^m et (11.1) :

$$v^m_{m-n}\circ\xi\equiv 0\quad(\mathrm{mod}\,1)\qquad(\text{c'est-à-dire : holomorphe}).$$

18. **Preuve de l'identité** (16.18).

Si $F^\mu=F=0$, alors cette identité résulte de ce que, vu $(3.4)_2$,

$$\mathfrak{h}_\nu g^\nu_\mu\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,g).$$

Si $F=\mathcal{F}^\mu=0$, alors elle résulte de ce qu'on a

$$\mathfrak{h}_\nu\frac{1}{\xi_t}\frac{\partial}{\partial t}[g^\nu_\mu(x,\xi_x)]+\xi_t\mathfrak{h}_\nu g^\nu_{\mu p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{1}{\xi_t}\right)=0$$

parce que

$$\frac{\partial}{\partial t}[g^\nu_\mu(x,\xi_x)]=g^\nu_{\mu p_\lambda}\xi_{tx^\lambda}.$$

Il reste donc à prouver cette identité (16.18) quand $F^\mu=\mathcal{F}^\mu=0$, c'est-à-dire à vérifier que dans ses deux membres les coefficients de $\dfrac{\partial F}{\partial t}$, $\dfrac{\partial F}{\partial x^\lambda}$,

F sont les mêmes mod ξ_t; vu que $\xi_t = -g$, il s'agit donc de *vérifier les trois relations*

$$(18.1)\qquad \frac{1}{g} h^\mu g^\nu_\mu \mathfrak{h}_\nu \equiv 1 \qquad (\operatorname{mod} g);$$

$$(18.2)\qquad h^\mu g^\nu_{\mu p} \mathfrak{h}_\nu \equiv g_p \qquad (\operatorname{mod} g);$$

$$(18.3)\qquad \xi_t \mathfrak{h}_\nu \left[-\frac{1}{\xi_t} g^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial t} + g^\nu_{\mu p_\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g^\nu_{\mu p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} + g'^\nu_\mu \right] \left(\frac{h^\mu}{\xi_t} \right)$$
$$\equiv \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} + \frac{1}{2\rho} (\rho g)_{p_\lambda x^\lambda} + j \qquad (\operatorname{mod} g).$$

Preuve de (18.1) *et* (18.2). — $(3.4)_4$ implique (18.2) et peut s'écrire, vu $(3.4)_1$ et $(3.4)_2$:

$$d(h^\mu g^\nu_\mu \mathfrak{h}_\nu) \equiv dg \qquad (\operatorname{mod} g);$$

or, d'après $(3.4)_1$,

$$h^\mu g^\nu_\mu \mathfrak{h}_\nu \equiv g \qquad (\operatorname{mod} g);$$

d'où la relation

$$(18.4)\qquad h^\mu g^\nu_\mu \mathfrak{h}_\nu \equiv g \qquad (\operatorname{mod} g^2);$$

elle équivaut à (18.1).

Simplification de (18.3). — g_x, g_p, h^μ_x, h^μ_p, ... désignent les dérivées en x et en p des fonctions $g(x, p)$, $h^\mu(x, p)$, ...; après que ces dérivées ont été calculées, on substitue ξ_x à p. Au contraire $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, ... désignent les dérivées en t et en x des fonctions $g(x, \xi_x[t, x])$, ... de (t, x).

On a

$$\xi_t g^\nu_{\mu p_\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{1}{\xi_t} = -\frac{1}{\xi_t} g^\nu_{\mu p_\lambda} \xi_{t x^\lambda} = -\frac{1}{\xi_t} \frac{\partial g^\nu_\mu}{\partial t};$$

le premier membre de (18.3) peut donc s'écrire :

$$-\mathfrak{h}_\nu \frac{\partial}{\partial t} \frac{g^\nu_\mu h^\mu}{\xi_t} + \mathfrak{h}_\nu \left[g^\nu_{\mu p_\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g^\nu_{\mu p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} + g'^\nu_\mu \right] h^\mu,$$

où, puisque $\xi_t = -g$:

$$\mathfrak{h}_\nu \frac{\partial}{\partial t} \frac{g^\nu_\mu h^\mu}{\xi_t} = -\mathfrak{h}_\nu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{g^\nu_\mu h^\mu}{g} \right) = \mathfrak{h}_\nu \left(\frac{g^\nu_\mu h^\mu}{g} \right)_{p_\lambda} \frac{\partial g}{\partial x^\lambda};$$

(18.3) équivaut donc à

$$(18.5)\qquad j \equiv -\mathfrak{h}_\nu \left(\frac{g^\nu_\mu h^\mu}{g} \right)_{p_\lambda} \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} + \mathfrak{h}_\nu \left[g^\nu_{\mu p_\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g^\nu_{\mu p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} + g'^\nu_\mu \right] h^\mu$$
$$- \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} - \frac{1}{2\rho} (\rho g)_{p_\lambda x^\lambda} \qquad (\operatorname{mod} g).$$

La preuve de l'identité (16.18) *se réduit donc à celle de* (18.5).

Preuve de (18.5). — Explicitons (18.4) : il existe une fonction holomorphe $r(x, p)$ telle que

$$g(x, p) = h^{\mu} g_{\mu}^{\nu} \mathfrak{h}_{\nu} + r g^2. \tag{18.6}$$

Calculons le premier terme du second membre de (18.5) : divisons (18.6) par g et dérivons en p la relation obtenue; il vient

$$\mathfrak{h}_{\nu}\left(\frac{g_{\mu}^{\nu} h^{\mu}}{g}\right)_{p_\lambda} + \mathfrak{h}_{\nu p_\lambda} \frac{g_{\mu}^{\nu} h^{\mu}}{g} + r g_{p_\lambda} \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} g);$$

multiplions par $\dfrac{\partial g}{\partial x^\lambda}$:

$$-\mathfrak{h}_{\nu}\left(\frac{g_{\mu}^{\nu} h^{\mu}}{g}\right)_{p_\lambda} \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} \equiv \mathfrak{h}_{\nu p_\lambda} \frac{g_{\mu}^{\nu} h^{\mu}}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} + r g_{p_\lambda} \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} \qquad (\operatorname{mod} g);$$

simplifions le second membre en remarquant que

$$\frac{g_{\mu}^{\nu} h^{\mu}}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{g_{\mu}^{\nu} h^{\mu}}{g} g\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(g_{\mu}^{\nu} h^{\mu}) \qquad (\operatorname{mod} g);$$

il vient

$$-\mathfrak{h}_{\nu}\left(\frac{g_{\mu}^{\nu} h^{\mu}}{g}\right)_{p_\lambda} \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} \equiv \mathfrak{h}_{\nu p_\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(g_{\mu}^{\nu} h^{\mu}) + r g_{p_\lambda} \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} \qquad (\operatorname{mod} g).$$

En portant ce résultat dans la relation (18.5), on constate qu'elle équivaut à la suivante :

$$\begin{aligned} j \equiv\ & \mathfrak{h}_{\nu p_\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(g_{\mu}^{\nu} h^{\mu}) + r g_{p_\lambda} \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} \\ & + \mathfrak{h}_{\nu}\left[g_{\mu p_\lambda}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{\mu p_l p_\lambda}^{\nu} \xi_{x^l x^\lambda} + g'^{\nu}_{\mu} \right] h^{\mu} \\ & - \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} - \frac{1}{2\rho} (\rho g)_{p_\lambda x^\lambda} \qquad (\operatorname{mod} g). \end{aligned} \tag{18.7}$$

Employons à nouveau (18.6) : dérivons cette relation par rapport à p; il vient

$$\mathfrak{h}_{\nu} g_{\mu}^{\nu} h_{p_\lambda}^{\mu} + \mathfrak{h}_{\nu} g_{\mu p_\lambda}^{\nu} h^{\mu} + \mathfrak{h}_{\nu p_\lambda} g_{\mu}^{\nu} h^{\mu} + 2 r g\, g_{p_\lambda} - g_{p_\lambda} \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} g^2);$$

substituons ξ_x à p et dérivons en x^λ; on obtient une relation où il est facile de faire apparaître le second membre de (18.7); c'est

$$\begin{aligned}
&2\mathfrak{h}_{\nu p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}(g^\nu_\mu h^\mu) + 2 r g_{p_\lambda}\frac{\partial g}{\partial x^\lambda} \\
&\quad + \mathfrak{h}_\nu\left[2 g^\nu_{\mu p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + g^\nu_{\mu p_l p_\lambda}\xi_{x^l x^\lambda} + \frac{1}{\rho}(\rho g^\nu_\mu)_{p_\lambda x^\lambda}\right]h^\lambda - g_{p_l p_\lambda}\xi_{x^l x^\lambda} - \frac{1}{\rho}(\rho g)_{p_\lambda x^\lambda} \\
&\equiv \begin{vmatrix} h^\mu & -g^\nu_\mu & \mathfrak{h}_\nu \\ \dfrac{\partial h^\mu}{\partial x^\lambda} & \dfrac{\partial g^\nu_\mu}{\partial x^\lambda} & \dfrac{\partial \mathfrak{h}_\nu}{\partial x^\lambda} \\ h^\mu_{p_\lambda} & g^\nu_{\mu p_\lambda} & \mathfrak{h}_{\nu p_\lambda} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} h^\mu & -g^\nu_\mu & \mathfrak{h}_\nu \\ h^\mu_{x^\lambda} & g^\nu_{\mu x^\lambda} & \mathfrak{h}_{\nu x^\lambda} \\ h^\mu_{p_\lambda} & g^\nu_{\mu p_\lambda} & \mathfrak{h}_{\nu p_\lambda} \end{vmatrix} \qquad (\text{mod } g).
\end{aligned}$$

En portant ce résultat dans (18.7), on constate que (18.7), et par suite (18.5) sont vérifiées, quand j est défini par (3.5), j^ν_μ l'étant par (3.2). Cela achève la preuve de l'identité (16.18).

19. **Propriétés de** $j\,(x, p)$.

Voici cinq propriétés de $j(x, p)$, dont les quatre premières sont des conséquences évidentes de sa définition (3.5); rappelons que $j(x, p)$ n'est défini que sur la multiplicité $g(x, p) = 0$, $(g_x, g_p) \neq 0$.

1° $j(x, p)$ est homogène en p, de degré $N - 1$; rappelons que N est le degré d'homogénéité en p de $g(x, p)$.

2° A la matrice $(a^{*\nu}_\mu)$, adjointe de (a^ν_μ), associons $h^{*\mu} = \mathfrak{h}_\mu$, $\mathfrak{h}^*_\nu = h^\nu$; alors

$$(19.1) \qquad j^*(x, p) = -j(x, p).$$

3° Multiplier $\rho(x)$ par une fonction $f(x)$ diminue $j(x, p)$ de

$$(19.2) \qquad \frac{1}{2f} f_{x^\lambda} g_{p_\lambda}.$$

4° Multiplions $h(x, p)$ par une fonction $f(x, p)$ et $\mathfrak{h}(x, p)$ par une autre fonction $\mathfrak{f}(x, p)$, g et G^μ_ν étant multipliés par $f\mathfrak{f}$; alors $j(x, p)$ devient

$$(19.3) \qquad f\mathfrak{f}j - \frac{1}{2} f \frac{D(\mathfrak{f}, g)}{D(x^\lambda, p_\lambda)} + \frac{1}{2}\mathfrak{f}\frac{D(f, g)}{D(x^\lambda, p_\lambda)}.$$

5° $j(x, p)$ ne dépend que des restrictions de $h^\mu(x, p)$ et $\mathfrak{h}^\nu(x, p)$ à la variété $g(x, p) = 0$.

Preuve. — Prouvons que j ne dépend que de la restriction de h^μ à cette variété : on a

$$\begin{vmatrix} h^\mu & -g^\nu_\mu & \mathfrak{h}_\nu \\ h^\mu_{x^\lambda} & g^\nu_{\mu x^\lambda} & \mathfrak{h}_{\nu x^\lambda} \\ h^\mu_{p_\lambda} & g^\nu_{\mu p_\lambda} & \mathfrak{h}_{\nu p_\lambda} \end{vmatrix} = h^\mu \frac{D(g^\nu_\mu, \mathfrak{h}_\nu)}{D(x^\lambda, p_\lambda)} + \frac{D(h^\mu, g^\nu_\mu \mathfrak{h}_\nu)}{D(x^\lambda, p_\lambda)};$$

or cette formule ne dérive h^μ que le long de la variété $g(x, p) = 0$. En effet, le vecteur

$$(dx, dp) = \left(\frac{\partial}{\partial p_1}(g^\nu_\mu \mathfrak{h}_\nu), \ldots, -\frac{\partial}{\partial x^L}(g^\nu_\mu \mathfrak{h}_\nu)\right)$$

est tangent à cette variété, puisque $g^\nu_\mu \mathfrak{h}_\nu \equiv 0 \pmod g$.

NOTE 19.1. — Supposons qu'on emploie la note 3.1 et ${}^\alpha_\beta j$ au lieu de j; les propriétés 1° et 5° subsistent; on a :

2° pour deux matrices (a^ν_μ) et $(a^{*\nu}_\mu)$ adjointes : ${}^\beta_\alpha j^* = -{}^\alpha_\beta j$;

3° Multiplier $\rho(x)$ par $f(x)$ diminue ${}^\alpha_\beta j$ de (19.2) si $\alpha = \beta$, ne le change pas si $\alpha \neq \beta$.

4° Multiplions g et G^μ_ν par une fonction $F(x, p)$, chaque ${}^\alpha h$ par une fonction ${}^\alpha f(x, p)$, enfin ${}_\alpha\mathfrak{h}$ par ${}_\alpha\mathfrak{f} = F/{}^\alpha f$; alors

$${}^\alpha_\beta j \text{ devient } {}^\alpha f\, {}_\beta\mathfrak{f}\, {}^\alpha_\beta j \text{ pour } \alpha \neq \beta;$$

$${}^\alpha_\alpha j \text{ devient } F\,{}^\alpha_\alpha j + \frac{1}{2}\,{}_\alpha\mathfrak{f}\frac{D({}^\alpha f, g)}{D(x^\lambda, p_\lambda)} - \frac{1}{2}\,{}^\alpha f\frac{D({}_\alpha\mathfrak{f}, g)}{D(x^\lambda, p_\lambda)}.$$

20. **Propriétés de J** $(x, p; y, q)$.

Pour intégrer (16.19) et ses variantes (17.2) et (17.3), les nos 22, 23 et 24 emploieront un instant la fonction $J(x, p; y, q)$, que définit (3.6). Cette définition a pour conséquence immédiate la formule

$$(20.1) \qquad J(x, p; y, q)\, J(y, q; z, r) = J(x, p; z, r),$$

où (x, p), (y, q), (z, r) sont trois covecteurs d'une même bande bicaractéristique. Les propriétés de j qu'énonce le n° 19 ont pour conséquences immédiates les propriétés suivantes de J :

1° $J(x, p; y, q)$ est homogène de degré 0 en (p, q).

2° A la matrice $(a^{*\nu}_\mu)$, adjointe de (a^ν_μ), est associée la fonction $J^*(x, p; y, q)$ telle que $J^*(y, q; x, p) = J(x, p; y, q)$.

Preuve. — (3.6) donne $J(x, p; y, q)\, J^*(x, p; y, q) = 1$; or d'après (20.1), $J(x, p; y, q)\, J(y, q; x, p) = 1$.

3° Si la matrice (a^ν_μ) est self-adjointe, alors

$$J(x, p; y, q) = 1.$$

4° Multiplions $\rho(x)$ par $f(x)$; vu (3.6), $\frac{dJ}{J}$ augmente de $\frac{df}{2f}$; donc $J(x, p; y, q)$ est multiplié par $\sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}}$.

5° Multiplions $h(x, p)$ par $f(x, p)$, $\mathfrak{h}$ par $\mathfrak{f}$, g et G_ν^μ par $f\mathfrak{f}$; vu (3.6), $\frac{dJ}{J}$ augmente de $\frac{1}{2}\frac{d\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}} - \frac{1}{2}\frac{df}{f}$; donc $J(x, p; y, q)$ est multiplié par $\sqrt{\frac{\mathfrak{f}(x, p) f(y, q)}{f(x, p)\mathfrak{f}(y, q)}}$.

NOTE 20.1. — Supposons qu'on emploie les notes 3.1, 19.1 et la définition (3.11) de ${}^\beta_\alpha J(x, p; y, q)$; alors

$$(20.2)\qquad {}^\gamma_\alpha J(x, p; y, q)\, {}^\beta_\gamma J(y, q; z, r) = {}^\beta_\alpha J(x, p; z, r).$$

Les propriétés 1° et 4° (mais non 3°) restent vraies; 2° et 5° deviennent

$${}^\alpha_\beta J^*(y, q; x, p) = {}^\beta_\alpha J(x, p; y, q).$$

Multiplier g et G_ν^μ par F, ${}^\alpha h$ par ${}^\alpha f$, ${}_\alpha\mathfrak{h}$ par ${}_\alpha\mathfrak{f} = F/{}^\alpha f$ multiplie ${}^\beta_\alpha J(x, p; y, q)$ par $\frac{{}_\alpha\mathfrak{f}(x, p)\, {}^\beta f(y, q)}{{}^\alpha f(x, p)\, {}_\beta\mathfrak{f}(y, q)}$.

21. Propriétés de la matrice bicaractéristique $G_\nu^\mu(x, p; y, q)$.

Quand les n^{os} 22, 23 et 24 auront intégré (16.19) et ses variantes (17.2) et (17.3), alors h, $\mathfrak{h}$, j et J n'interviendront plus que par l'intermédiaire de la matrice bicaractéristique $G_\nu^\mu(x, p; y, q)$; c'est d'abord sur l'ensemble des couples de covecteurs $(x, p; y, q)$ appartenant à une même bande bicaractéristique que le n° 3 la définit, par (3.7) [et (3.12)]. Elle a, sur cet ensemble, les propriétés suivantes [44], qui résultent immédiatement des propriétés de J [et ${}^\beta_\alpha J$] établies n° 20 :

1° $G_\nu^\mu(x, p; y, q)$ est homogène en (p, q), de degré $N + m^\mu - n^\nu$.

2° $G_\mu^{*\nu}(y, q; x, p) = \frac{\rho(x)}{\rho(y)} G_\nu^\mu(x, p; y, q)$;

3° Si la matrice (a_μ^ν) est self-adjointe, alors

$$G_\nu^\mu(x, p; y, q) = \pm\sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(x)}\, G_\mu^\mu(x, p)\, G_\nu^\nu(y, q)}$$

[cette relation ne vaut plus si l'on emploie les notes 3.1 et 19.1].

[44] (20.1) et (20.2) donnent des propriétés moins simples de G_ν^μ; nous ne les énonçons pas.

4° $G_\nu^\mu(x, p; y, q)$ ne dépend pas des choix de ρ, h et $\mathfrak{h}$; multiplier $g(x, p)$ et $G_\nu^\mu(x, p)$ par une fonction holomorphe $F(x, p)$ multiplie $G_\nu^\mu(x, p; y, q)$ par $\sqrt{F(x, p)F(y, q)}$.

Le n° 3 a déjà énoncé ces propriétés; il a remarqué que $(3.6)_2$ donne

$$(21.1) \qquad G_\nu^\mu(x, p; x, p) = G_\nu^\mu(x, p);$$

il a convenu d'étendre la définition de $G_\nu^\mu(x, p; y, q)$ à tous les couples de covecteurs (x, p), (y, q) appartenant à une même solution de (3.9); il a convenu de le faire en sorte que G_ν^μ soit holomorphe et vérifie 21, 1°.

22. **L'intégration de** (16.19) va expliciter l'expression que le lemme 16 donne du terme général du développement asymptotique. Dans (16.19), substituons à x la solution $x(t, y)$ de (4.5) et, vu (4.6), à l'argument $p = \xi_x$ de g, g', $\mathfrak{h}$, j, la fonction $p(t, y)$; en notant par $\frac{d}{dt}$ la dérivée en t des fonctions de (t, y) ainsi obtenues et en définissant $V^{\nu, m}$ par (4.12), on obtient

$$(22.1) \qquad \left[\frac{d}{dt} + \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{p_\lambda x^\lambda} + \frac{1}{2\rho} \frac{d\rho(x)}{dt}\right] U^m + jU^m \equiv \mathfrak{h}_\nu V^{\nu, m}$$
$$[\mathrm{mod}\, g(y, s_\nu)].$$

Rappelons l'énoncé d'un lemme classique :

LEMME 22. — Si $x^1(t, y), \ldots, x^L(t, y)$ vérifient le système différentiel

$$\frac{dx^\lambda}{dt} = f^\lambda(x)$$

et dépendent de L paramètres $y^1, \ldots, y^L$, alors

$$\frac{d}{dt}\frac{D(x)}{D(y)} = f^\lambda_{x^\lambda} \frac{D(x)}{D(y)}.$$

Appliquons ce lemme à $x(t, y)$, qui vérifie (4.5), donc

$$\frac{dx^\lambda}{dt} = g_{p_\lambda}(x, \xi_x);$$

il vient

$$\frac{d}{dt}\frac{D(x)}{D(y)} = \left(g_{p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} + g_{p_\lambda x^\lambda}\right) \frac{D(x)}{D(y)};$$

(22.1) peut donc s'écrire :

$$(22.2) \qquad \left[\frac{d}{dt} + \frac{1}{2} \frac{D(y)}{D(x)} \frac{d}{dt} \frac{D(x)}{D(y)} + \frac{1}{2\rho} \frac{d\rho(x)}{dt}\right] U^m + jU^m \equiv \mathfrak{h}_\nu V^{\nu, m}$$
$$[\mathrm{mod}\, g(y, s_\nu)].$$

L'intégration de l'équation précédente emploie une définition de j moins restrictive que celle qui fut employée jusqu'ici : définissons j par (3.5) non plus sur la variété (3.3), mais au voisinage d'un de ses points. Définissons alors $J(t, y, q)$, $x(t, y, q)$ et $p(t, y, q)$ par le problème de Cauchy ordinaire :

$$(22.3)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = g_p(x, p), & \dfrac{dp}{dt} = -g_x(x, p), \qquad \dfrac{dJ}{dt} = -j(x, p)\,J, \\ x(0, y, q) = y, & p(0, y, q) = q, \qquad J(0, y, q) = 1. \end{cases}$$

La comparaison de cette définition (22.3) de $J(t, y, q)$ et de la définition (3.6) de $J(x, p; y, q)$ montre immédiatement que, pour

$$x = x(t, y, q), \qquad p = p(t, y, q), \qquad \hat{x} = x(\hat{t}, y, q), \qquad \hat{p} = p(\hat{t}, y, q),$$

on a

$$(22.4)\quad J(t, y, q) \equiv J(x, p; y, q), \qquad J(t, q, y)\,J^{-1}(\hat{t}, y, q) \equiv J(x, p; \hat{x}, \hat{p}) \\ [\operatorname{mod} g(y, q)].$$

Notons $J(t, y) = J(t, y, s_y)$; remarquons que (22.3) donne

$$J(t, y)\frac{d}{dt}J^{-1}(t, y) = j(x, p) \qquad \text{pour} \quad x = x(t, y), \qquad p = p(t, y),$$

l'équation (22.2) s'écrit donc

$$\left[\frac{d}{dt} + \frac{1}{2}\frac{D(y)}{D(x)}\frac{d}{dt}\frac{D(x)}{D(y)} + \frac{1}{2\rho}\frac{d\rho(x)}{dt} + J(t, y)\frac{d}{dt}J^{-1}(t, y)\right] U^m \equiv \mathfrak{h}_\nu V^{\nu, m} \\ [\operatorname{mod} g(y, s_y)].$$

Elle s'intègre immédiatement : vu (16.16),

$$\sqrt{\rho(x)\frac{D(x)}{D(y)}}\,J^{-1}(t, y)\,U^m[t, x] \\ \equiv \int_0^t \sqrt{\rho(\hat{x})\frac{D(\hat{x})}{D(y)}}\,J^{-1}(\hat{t}, y)\,\mathfrak{h}_\nu(\hat{x}, \hat{p})\,V^{\nu, m}[\hat{t}, \hat{x}]\,d\hat{t} \\ [\operatorname{mod}(\operatorname{tg}(y, s_y))],$$

en convenant que

$$(22.5)\quad x = x(t, y), \qquad p = p(t, y), \qquad \hat{x} = x(\hat{t}, y), \qquad \hat{p} = p(\hat{t}, y).$$

Le lemme 16 porte cette valeur de U^m dans (16.15) et emploie donc

$$(22.6)\quad h^\mu(x, p)\,U^m[t, x] \\ \equiv \int_0^t \sqrt{\frac{D(\hat{x})}{D(x)}}\sqrt{\frac{\rho(\hat{x})}{\rho(x)}}\,h^\mu(x, p)\,J(t, y)\,J^{-1}(\hat{t}, y)\,\mathfrak{h}_\nu(\hat{x}, \hat{p})\,V^{\nu, m}[\hat{t}, \hat{x}]\,d\hat{t} \\ [\operatorname{mod}\operatorname{tg}(y, s_y)].$$

Or, vu (22.4), vu la définition (3.7) de G^μ_ν et moyennant (22.5) :

$$\sqrt{\frac{\rho(\hat{x})}{\rho(x)}}\, h^\mu(x, p)\, J(t, y, q)\, J^{-1}(\hat{t}, y, q)\, \mathfrak{h}_\nu(\hat{x}, \hat{p}) - G^\mu_\nu(x, p; \hat{x}, \hat{p})$$

est une fonction holomorphe de $(t, \hat{t}, y, q)$ qui s'annule sur la variété

$$g(y, q) = 0, \qquad (g_y, g_q) \neq 0;$$

elle est donc $\equiv 0\, [\mathrm{mod}\, g(y, q)]$.

La relation (22.6) peut donc s'écrire :

$$h^\mu(x, p)\, U^m[t, x] \equiv \int_0^t \sqrt{\frac{D(\hat{x})}{D(x)}}\, G^\mu_\nu(x, p; \hat{x}, \hat{p})\, V^{\nu, m}[\hat{t}, \hat{x}]\, d\hat{t}$$
$$[\mathrm{mod}\, \mathrm{tg}(y, s_y)];$$

sa validité s'étend à l'ensemble des (t, y) où les fonctions entrant en jeu sont holomorphes ([45]). En portant cette expression dans (16.15), on obtient

$$(22.7)\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(u^{\mu, m}_{m-m^\mu-1} \circ \xi\right) \equiv U^{\mu, m}[t, x] + \int_0^t \sqrt{\frac{D(\hat{x})}{D(x)}}\, G^\mu_\nu(x, p; \hat{x}, \hat{p})\, V^{\nu, m}[\hat{t}, \hat{x}]\, d\hat{t}$$
$$[\mathrm{mod}\, \mathrm{tg}(y, s_y)];$$

la formule (11.1) de dérivation d'une fonction composée et l'équation $\xi_t = -g$ permettent de transformer (22.7) en (4.13).

Voici établie l'expression du terme général du développement asymptotique qu'a énoncée le théorème 1 (n° 4).

NOTE 22.1. — Supposons qu'on ait réalisé l'hypothèse (3.3) en employant les notes 2.1 et 16.1. Alors, dans (22.2), nous devons remplacer U^m et jU^m par ${}_\beta U^m$ et ${}^\alpha_\beta j\, {}_\alpha U^m$; ν parcourt $M_{(\beta)}$. Nous devons écrire dans (23.3) :

$$(22.8)\qquad \frac{d\, {}^\gamma_\beta J}{dt} = -{}^\alpha_\beta j\, {}^\gamma_\alpha J$$

pour avoir

$${}^\gamma_\beta J \frac{d}{dt}\, {}^\alpha_\gamma J^{-1} = {}^\alpha_\beta j;$$

([45]) Rappelons que la définition de $J(x, p; y, q)$ est locale et que celle de $G^\mu_\nu(x, p; y, q)$ ne l'est pas (n° 3 : Propriété 3° de la matrice bicaractéristique).

la comparaison de (22.8) et (3.10) donne, dans (22.4) :

$$ {}^{\gamma}_{\alpha}J(t,\, y,\, q)\, {}^{\beta}_{\gamma}J^{-1}(\hat{t},\, y,\, q) = {}^{\beta}_{\alpha}J(x,\, p;\, \hat{x},\, \hat{p}). $$

On obtient, au lieu de (22.6), la relation, où $\mu \in M_{(\alpha)}$, $\nu \in M_{(\beta)}$, γ parcourt $(1, \ldots, M)$ et l'on somme par rapport à γ :

$$ h^{\mu}\, U^{m}_{\alpha} \equiv \int_{0}^{t} \sqrt{\ldots}\, \sqrt{\ldots}\; h^{\mu}\, {}^{\gamma}_{\alpha}J\, {}^{\beta}_{\gamma}J^{-1}\, \mathfrak{h}_{\nu}\, V^{\nu,\, m}\, d\hat{t}; $$

vu (3.11), elle donne (22.7), donc (4.13).

23. **L'intégration de** (17.2) va expliciter l'expression que le lemme 17.1 donne d'un terme du développement asymptotique quand, pour ce terme, la circonstance suivante se présente : $v^{\nu,\, m}_{m-n^{\nu}} \circ \xi$ est holomorphe.

Dans ce lemme, remplaçons $\mathfrak{h}_{\nu} \dfrac{\partial}{\partial t}(v^{\nu,\, m}_{m-n^{\nu}} \circ \xi)$ par $\mathfrak{h}_{\nu}(x,\, \xi_x)\, W^{\nu,\, m}[t,\, x]$, en employant la définition (4.14). Des calculs analogues à ceux du n° 22 transforment (17.2) en l'équation, qui emploie (22.5) :

$$ \begin{aligned} &\sqrt{\rho(x)\frac{D(x)}{D(y)}}\, J^{-1}(t,\, y)\left[\, U^{m}[t,\, x] + \mathfrak{h}_{\nu}(x,\, p)\, v^{\nu,\, m}_{m-n^{\nu}}(\xi[t,\, x],\, x)\right] \\ &\quad \equiv \sqrt{\rho(y)}\, \mathfrak{h}_{\nu}(y,\, s_y)\, v^{\nu,\, m}_{m-n^{\nu}}(y,\, s(y)) \\ &\qquad + \int_{0}^{t} \sqrt{\rho(\hat{x})\frac{D(\hat{x})}{D(y)}}\, J^{-1}(\hat{t},\, y)\, \mathfrak{h}_{\nu}(\hat{x},\, \hat{p})\, W^{\nu,\, m}[\hat{t},\, \hat{x}]\, d\hat{t} \qquad [\operatorname{mod} \operatorname{tg}(y,\, s_y)] \end{aligned} $$

et en tirent :

$$ \begin{aligned} (23.1)\quad & h^{\mu}(x,\, p)\, U^{m}[t,\, x] + h^{\mu}(x,\, p)\, \mathfrak{h}_{\nu}(x,\, p)\, v^{\nu,\, m}_{m-n^{\nu}}(\xi[t,\, x],\, x) \\ &\equiv \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)}}\sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(x)}}\, h^{\mu}(x,\, p)\, J(t,\, y)\, \mathfrak{h}_{\nu}(y,\, s_y)\, v^{\nu,\, m}_{m-n^{\nu}}(s(y),\, y) \\ &\quad + \int_{0}^{t} \sqrt{\frac{D(\hat{x})}{D(x)}}\sqrt{\frac{\rho(\hat{x})}{\rho(x)}}\, h^{\mu}(x,\, p)\, J(t,\, y)\, J^{-1}(\hat{t},\, y)\, \mathfrak{h}_{\nu}(\hat{x},\, \hat{p})\, W^{\nu,\, m}[\hat{t},\, \hat{x}]\, d\hat{t} \\ &\qquad\qquad [\operatorname{mod} \operatorname{tg}(y,\, s_y)]; \end{aligned} $$

enfin le n° 22 fait disparaître h et $\mathfrak{h}$ de l'intégrale en employant la relation

$$ (23.2)\qquad \sqrt{\frac{\rho(\hat{x})}{\rho(x)}}\, h^{\mu} J J^{-1} \mathfrak{h}_{\nu} \equiv G^{\mu}_{\nu}(x,\, p;\, \hat{x},\, \hat{p}) \qquad [\operatorname{mod} g(y,\, s_y)]. $$

Montrons qu'on peut faire disparaître de même h et $\mathfrak{h}$ des autres termes.

On a, d'après (3.4) :

$$ h^{\mu}(x,\, p)\, \mathfrak{h}_{\nu}(x,\, p) \equiv G^{\mu}_{\nu}(x,\, p) \qquad [\operatorname{mod} g(x,\, p)]; $$

vu (4.4) et l'holomorphie de $v^{\nu, m}_{m-n^\nu}\circ\xi$, on a

$$v^{\nu, m}_{m-n^\nu}(\xi[t, x]x) - \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)}}\, v^{\nu, m}_{m-n^\nu}(s(y), y) \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, t);$$

si $x = x(t, y, q)$, $p = p(t, y, q)$, $J = J(t, y, q)$, les seconds membres étant définis par (22.3), alors

$$G^\mu_\nu(x, p;\, y, q) - \sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(x)}}\, h^\mu(x, p)\, J(t, y, q)\, \mathfrak{h}_\nu(y, q)$$
$$- G^\mu_\nu(x, p) + h^\mu(x, p)\, \mathfrak{h}_\nu(x, p)$$

est une fonction holomorphe de (t, y, q) qui s'annule avec $g(y, q)$, vu $(3.4)_3$ et (3.7), et avec t, puisque

$$J(0, y, q) = 1, \qquad G^\mu_\nu(y, q;\, y, q) = G^\mu_\nu(y, q);$$

cette fonction est donc $\equiv 0\, [\text{mod}\, tg(y, q)]$. D'où, en faisant $q = s_\nu$, donc $x = x(t, y)$, $p = p(t, y)$, $J = J(t, y)$:

$$(23.3)\quad [h^\mu(x, p)\, \mathfrak{h}_\nu(x, p) - G^\mu_\nu(x, p)]\, v^{\nu, m}_{m-n^\nu}(\xi[t, x], x)$$
$$\equiv \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)}}[h^\mu(x, p)\, \mathfrak{h}_\nu(x, p) - G^\mu_\nu(x, p)]\, v^{\nu, m}_{m-n^\nu}(s(y), y)$$
$$\equiv \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)}}\left[\sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(x)}}\, h^\mu(x, p)\, J(t, y)\, \mathfrak{h}_\nu(y, s_\nu) - G^\mu_\nu(x, p;\, y, s_\nu)\right] v^{\nu, m}_{m-n^\nu}(s(y), y)$$
$$[\text{mod}\, tg(y, s_\nu)];$$

en portant (23.2) et (23.3) dans (23.1) on obtient, vu (16.20) :

$$h^\mu(x, p)\, U^m[t, x] + U^{\mu, m}[t, x] \equiv \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)}}\, G^\mu_\nu(x, p;\, y, s_\nu)\, v^{\nu, m}_{m-n^\nu}(s(y), y)$$
$$+ \int_0^t \sqrt{\frac{D(\hat{x})}{D(x)}}\, G^\mu_\nu(x, p;\, \hat{x}, \hat{p})\, W^{\nu, m}[\hat{t}, \hat{x}]\, d\hat{t}.$$

En portant cette expression dans (16.15), on obtient

$$(23.4)\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(u^{\mu, m}_{m-m^\mu-1}\circ\xi\right) \equiv \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)}}\, G^\mu_\nu(x, p;\, y, s_\nu)\, v^{\nu, m}_{m-n^\nu}(s(y), y)$$
$$+ \int_0^t \sqrt{\frac{D(\hat{x})}{D(x)}}\, G^\mu_\nu(x, p;\, \hat{x}, \hat{p})\, W^{\nu, m}[\hat{t}, \hat{x}]\, d\hat{t},$$

que (11.1) et $\xi_t = -g$ transforment en (4.15). *Voici établie la note* 4.

NOTE 23.1. — Ces conclusions restent valables quand on applique les notes 2.1 et 16.1.

24. **L'intégration de** (17.3) est un cas particulier de celle de (17.2); $u^{\mu,n}_{n-m^\mu}$ s'obtient donc en faisant dans (4.15) : $m=n$, $W^{\nu,n}=0$, ce qui donne (4.8).

Voici achevée la preuve du théorème 1.

25. **Cas où le système** (1.1) **se réduit à une équation unique**

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(\xi, x)=v(\xi, x);$$

on fait $n^\nu=n$, $m^\mu=0$ et l'on supprime les indices μ et ν. Le lemme 17.3 montre que le développement asymptotique est donné par (4.8) et (4.15), où l'on supprime les indices μ et ν.

Supposons que g est le polynôme caractéristique; prouvons le corollaire 1.2, c'est-à-dire que le choix (4.20) du premier terme u^n impose au second terme u^{n+1} de vérifier (4.22), W^{n+1} ayant la valeur (4.21). Nous savons que u^{n+1} s'obtient en faisant dans (4.15), $m=n+1$, $m^\mu=0$, $n^\nu=n$,

$$W^{n+1}[t, x]=\frac{\partial}{\partial t}(v_1^{n+1}\circ\xi) \qquad (\text{mod}\,\xi_t); \tag{25.1}$$

vu (4.10) :

$$v^{n+1}(\xi, x)=v(\xi, x)-a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)[w(\xi, x)+u^n(\xi, x)]. \tag{25.2}$$

Il s'agit donc d'expliciter

$$v_1^{n+1}(s(y), y) \quad \text{et} \quad W^{n+1}[t, x] \qquad (\text{mod}\,\xi_t).$$

Commençons par expliciter :

L'équation différentielle que vérifie $\mathfrak{U}[t, x]$. — Vu la définition (3.7) de G, où l'on supprime les indices μ et ν et où l'on prend $h=\mathfrak{h}=1$;

$$G(x, p; y, s_y)=\sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(x)}}J(t, y) \qquad \text{pour} \quad x=x(t, y), \qquad p=p(t, y).$$

La définition (4.19) de $\mathfrak{U}[t, x]$ s'énonce donc

$$J(t, y)=\sqrt{\frac{\rho(x)}{\rho(y)}}\sqrt{\frac{D(x)}{D(y)}}\mathfrak{U}[t, x]/[v(\xi, y)-aw]_{\xi=s(y)}$$

pour $x=x(t, y)$; vu la définition (22.3) de J, $\mathfrak{U}[t, x]$ vérifie donc l'équation différentielle

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+g_{p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}+j\right]\left[\sqrt{\rho(x)}\sqrt{\frac{D(x)}{D(y)}}\mathfrak{U}[t, x]\right]=0,$$

$j(x, p)$ ayant l'expression (3.2), où $\mu = \nu = 1$; $p = p(t, y) = \xi_x$. D'après le lemme 22 :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + g_{p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right]\frac{D(x)}{D(y)} = \left(g_{p_\lambda x^\lambda} + g_{p_l p_\lambda}\xi_{x^l x^\lambda}\right)\frac{D(x)}{D(y)}.$$

L'équation différentielle de $\mathfrak{U}[t, x]$ peut donc s'écrire :

$$(25.3) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t} + g_{p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2}g_{p_l p_\lambda}\xi_{x^l x^\lambda} + g'\right]\mathfrak{U}[t, x] = 0.$$

Calcul de $v_1^{n+1}(s(y), y)$. — Vu (25.2), il s'agit de calculer

$$\left[a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)u_1^n(\xi, y)\right]_{\xi = s(y)}.$$

Vu $(4.20)_1$,

$$u_{n-1}^n \circ \xi = \ldots = u^n \circ \xi = 0 \qquad \text{pour} \quad t = 0;$$

vu le lemme 11, on a donc pour $t = 0$:

$$(25.4) \qquad \left[a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u_1^n(\xi, x)\right]\circ\xi = g(x, \xi_x)\,u_{n+1}^n(\xi, x)\circ\xi$$
$$+\left[g_{p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2}g_{p_l p_\lambda}\xi_{x^l x^\lambda} + g'\right](u_n^n\circ\xi)$$
$$= -\left[\frac{\partial}{\partial t} + g_{p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2}g_{p_l p_\lambda}\xi_{x^l x^\lambda} + g'\right]\left(\frac{\mathfrak{U}[t, x]}{\xi_t}\right).$$

Or l'équation $\xi_t + g(x, \xi_x) = 0$ donne $\xi_{t^2} + g_{p_\lambda}\xi_{t x^\lambda} = 0$, c'est-à-dire

$$(25.5) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t} + g_{p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right]\xi_t = 0.$$

Les relations (25.3) et (25.5) montrent que le dernier membre de (25.4) est nul; donc

$$\left[a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)u_1^n(\xi, y)\right]_{\xi = s(y)} = 0.$$

En portant ce résultat dans (25.2), on obtient

$$(25.6) \qquad v_1^{n+1}(s(y), y) = \left[v_1(\xi, y) - a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)w_1(\xi, y)\right]_{\xi = s(y)}$$

(4.22) est donc bien l'expression à laquelle (4.15) se réduit quand on prend $m = n + 1$; pour achever la preuve du corollaire 21 il suffit de légitimer le choix (4.21) de W^{n+1}.

Calcul de $W^{n+1}[t, x]$ (mod ξ_t). — Vu (25.1), puis (25.2) :

$$(25.7) \quad \frac{1}{\xi_t}W^{n+1} \equiv -v_2^{n+1}\circ\xi \equiv \left[a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u_2^n(\xi, x)\right]\circ\xi \qquad (\text{mod } 1).$$

Vu (4.20), $u_j^n \circ \xi$ est holomorphe pour $j < n$;

$$u_n^n \circ \xi = -\frac{\mathfrak{U}}{\xi_t}; \qquad u_{n+1}^n \circ \xi = \frac{1}{\xi_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathfrak{U}}{\xi_t}\right);$$

$$u_{n+2}^n \circ \xi = -\frac{1}{\xi_t}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\xi_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathfrak{U}}{\xi_t}\right)\right];$$

l'application du lemme 11 au dernier membre de (25.7) donne donc

$$(25.8)\quad \frac{1}{\xi_t} W^{n+1} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial t} + g_{p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda}\xi_{x^l x^\lambda} + g'\right]\left[\frac{1}{\xi_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathfrak{U}[t,x]}{\xi_t}\right)\right]$$
$$-\left[\frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda p_\mu}\xi_{x^l x^\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{6} g_{p_l p_\lambda p_\mu}\xi_{x^l x^\lambda x^\mu}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8} g_{p_l p_\lambda p_\mu p_\nu}\xi_{x^l x^\lambda}\xi_{x^\mu x^\nu} + g'_{p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g'_{p_l p_\lambda}\xi_{x^l x^\lambda} + g''\right]\frac{\mathfrak{U}[t,x]}{\xi_t}$$
$$(\mathrm{mod}\ 1).$$

Or (25.5) donne

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + g_{p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda}\xi_{x^l x^\lambda} + g'\right]\left[\frac{1}{\xi_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathfrak{U}[t,x]}{\xi_t}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\xi_t}\left[\frac{\partial}{\partial t} + g_{p_l}\frac{\partial}{\partial x^l} + \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda}\xi_{x^l x^\lambda} + g'\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathfrak{U}}{\xi_t}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\xi_t}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial t} + g_{p_l}\frac{\partial}{\partial x^l} + \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda}\xi_{x^l x^\lambda} + g'\right]\left(\frac{\mathfrak{U}}{\xi_t}\right)$$
$$-\frac{1}{\xi_t}\left[g_{p_l p_\lambda}\xi_{tx^l}\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda p_\mu}\xi_{x^l x^\lambda}\xi_{tx^\mu} + \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda}\xi_{tx^l x^\lambda} + g'_{p_l}\xi_{tx^l}\right]\left(\frac{\mathfrak{U}}{\xi_t}\right),$$

où, vu (25.3) et (25.5) :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + g_{p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda}\xi_{x^l x^\lambda} + g'\right]\left(\frac{\mathfrak{U}}{\xi_t}\right) = 0.$$

En portant ces formules dans (25.8), on voit que le choix (4.21) de $W^{n+1}[t,x]$ est le plus simple qui soit.

Voici achevée la preuve du corollaire 1.2.

26. **L'exemple** 1.2.

Voici la preuve de ce qu'affirme l'exemple 1.2. Vu (4.7) :

$$u_j \circ \xi \equiv (w_j - u_j^n - u_j^{n+j}) \circ \xi \quad (\mathrm{mod}\ t^{n+2-j}) \qquad \text{si}\quad j \leqq n+1;$$

donc, vu le lemme 11, puisque $\mathfrak{a}$ est d'ordre n :

$$(\mathfrak{a}u)\circ\xi \equiv (\mathfrak{a}w)\circ\xi + (\mathfrak{a}u^n)\circ\xi + (\mathfrak{a}u^{n+1})\circ\xi \qquad (\mathrm{mod}\ t^2).$$

Or, vu le théorème 1

$$u_j^n \circ \xi \equiv 0 \pmod{t^{n-j}} \quad \text{si} \quad j < n;$$
$$u_j^{n+1} \circ \xi \equiv 0 \pmod{t^{n+1-j}} \quad \text{si} \quad j \leqq n.$$

Vu le lemme 11, l'expression précédente de $\mathfrak{a} u$ s'écrit donc

$$(\mathfrak{a} u) \circ \xi \equiv (\mathfrak{a} w) \circ \xi + \mathfrak{g}(\xi, x, -1, \xi_x)\, u_n^n \circ \xi + \mathfrak{g}_{p_\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(u_{n-1}^n \circ \xi)$$
$$+ \frac{1}{2} \mathfrak{g}_{p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda}(u_{n-1}^n \circ \xi) + \mathfrak{g}'(u_{n-1}^n \circ \xi) + \mathfrak{g}\, u_n^{n+1} \circ \xi \pmod{t^2}.$$

Or, vu (11.1), où $\xi_t = -g$, et le corollaire 1.2, on a pour $x = x(t, y)$:

$$u_{n-1}^n \circ \xi = tg\, u_n^n \circ \xi \equiv t\, v^n(s(y), y) \pmod{t^2},$$
$$u_n^{n+1} \circ \xi = tg\, u_{n+1}^{n+1} \circ \xi \equiv t\, v_1^n(s(y), y) \pmod{t^2}.$$

Vu (4.19), (4.20) et (4.6), l'expression précédente de $\mathfrak{a} u$ s'écrit donc

$$(\mathfrak{a} u) \circ \xi \equiv (\mathfrak{a} w) \circ \xi + \frac{\mathfrak{g}(\xi, x, -1, p)}{g(y, s_y)} \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)}}\, G(x, p; y, s_y)\, v^n(s(y), y)$$
$$+ t\left[\mathfrak{g}_{p_\lambda}(\xi, x, \pi, p)\left(\frac{\partial}{\partial y^\lambda} + p_\lambda \frac{\partial}{\partial \xi}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \mathfrak{g}_{p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} + \mathfrak{g}' - \mathfrak{g} \frac{\partial}{\partial \xi}\right] v^n(\xi, y) \pmod{t^2},$$

où, après avoir effectué les dérivations, on remplace π par -1 et ξ, x, p par les fonctions (4.9); dans le coefficient de t il suffit donc de prendre $\xi = s(y)$, $x = y$, $p = s_y$ et l'on a, vu l'homogénéité de $\mathfrak{g}$ en (π, p) :

$$p_\lambda \mathfrak{g}_{p_\lambda}(\xi, x, \pi, p) = \mathfrak{g}_\pi + n\mathfrak{g};$$

d'où la formule qu'énonce l'exemple 1.2.

27. **L'exemple** 1.3.

Preuve de 1°. — La solution de (4.4) est évidemment

$$\xi[t, x] = p_0(t) + x^\lambda p_\lambda(t),$$

les $p_\lambda(t)$ étant définis par le problème de Cauchy ordinaire :

$$\frac{dp_\lambda}{dt} + g_\lambda(p) = 0, \qquad p_\lambda(0) = s_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, L;\ s_\lambda : \text{constantes}).$$

La relation qui suit le lemme 22 :

$$\frac{d}{dt}\frac{D(x)}{D(y)} = \left(g_{p_l p_\lambda} \xi_{x^l x^\lambda} + g_{p_\lambda x^\lambda}\right)\frac{D(x)}{D(y)}$$

se réduit donc à

$$\frac{d}{dt}\frac{D(x)}{D(y)} = \frac{\partial g_\lambda(p)}{\partial p_\lambda}\frac{D(x)}{D(y)};$$

or $\frac{D(x)}{D(y)} = 1$ pour $t = 0$; donc $\frac{D(x)}{D(y)}$ est fonction de la seule variable t.

Preuve de 2°. — Choisissons $\rho = 1$. Vu la définition (3.2) de j, j ne dépend que des p_λ. Donc $J(t, y) = J(t, y, s_y)$, vu sa définition (22.3), est fonction de la seule variable t.

Donc

$$G(x, p; \hat{x}, \hat{p}) = J(t, y)\, J^{-1}(\hat{t}, y)$$

est fonction des seules variables $(t, \hat{t})$.

Preuve de 3°. — $\mathcal{U}[t, x]$ est fonction de la seule variable t; donc, puisque $\xi[t, x]$ est linéaire en x et que $g'' = 0$, (4.21) donne $W^{n+1} = 0$.

Chapitre 3.

Uniformisation portant sur les variables indépendantes.

Ce chapitre 3 déduit des précédents les résultats qu'énonce le n° 5.

28. Preuve du théorème 2 et du corollaire 2.1.

Nous supposons donnés

$$S:\quad s(x) = 0 \qquad (s_x \neq 0)$$

et le problème de Cauchy :

$$a_\mu^\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^\mu(x) = v^\nu(x); \qquad u^\mu(x) - w^\mu(x) \text{ s'annule } n - m^\mu \text{ fois sur } S,$$

ces données vérifiant (1.5).

Pour appliquer le théorème 1 et le corollaire 1.1 (n° 4), nous introduisons la variété

$$S(\xi):\quad s(x) - \xi = 0;$$

nous prenons X et ξ assez petits pour que S soit régulière; nous choisissons $w^\mu(\xi, x) = w^\mu(x)$; $v^{\nu,n}(\xi, x)$ tel que

$$(28.1)\qquad \begin{cases} v^{\nu,n}(0, x) = v^\nu(x) - a_\mu^\nu\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) w^\mu(x), \\ v^{\nu,n}(\xi, x) \text{ s'annule } n - n^\nu \text{ fois sur } S(\xi); \end{cases}$$

ces conditions sont compatibles vu (1.5); nous définissons enfin $v^\nu(\xi, x)$ par la relation

$$v^{\nu\,n}(\xi, x) = v^\nu(\xi, x) - a^\nu_\mu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) w^\mu(x, \xi).$$

Soit $u(\xi, x)$ la solution du problème de Cauchy (nº 1) ainsi obtenu. Évidemment

$$u^\mu(x) = u^\mu(0, x).$$

Le théorème 1 (nº 4) et l'expression (4.6) de $\xi[t, x]$ montrent que l'application

$$(t, y) \to (\xi(t, y), x(t, y)),$$

où $\xi(t, y) = s(y) + (N-1)\, t\, g(y, s_y)$ [ne pas confondre $\xi[\dots]$ et $\xi(\dots)$], uniformise $u^\mu(\xi, x)$ jusqu'à l'ordre $n - m^\mu - 1$. Mais nous devons nous restreindre aux valeurs de (t, y) vérifiant $\xi(t, y) = 0$, c'est-à-dire

$$s(y) + (N-1)\, t\, g(y, s_y) = 0.$$

Nous le ferons en prenant

$$N = 1, \qquad y \in S.$$

Ce choix,

(28.2) $N = 1$; c'est-à-dire : *$g(x, p)$ homogène en p de degré* 1

fait que la forme différentielle

$$p_\lambda\, dx^\lambda - g(x, p)\, dt$$

a pour système caractéristique ([46]) le système d'Hamilton (13.1), par lequel (4.5) définit $x(t, y)$ et $p(t, y)$; par suite, cette forme est un invariant différentiel de ce système; donc vu (4.5) [ou (13.3)] et $(13.4)_1$:

$$p_\lambda\, dx^\lambda - g\, dt = ds(y), \tag{28.3}$$

où

$$x = x(t, y), \qquad p = p(t, y), \qquad g = g(x, p) = g(y, s_y);$$

cette relation donne par différentiation $(13.4)_2$; on peut l'énoncer comme suit :

$$p_\lambda \frac{\partial x^\lambda(t, y)}{\partial t} = g(y, s_y), \qquad p_\lambda \frac{\partial x^\lambda(t, y)}{\partial y^\mu} = \frac{\partial s}{\partial y^\mu}. \tag{28.4}$$

Nous notons z un point qui décrit $S : s(z) = 0$; nous prenons sur S, comme coordonnées de z, $(z^2, \dots, z^L)$, là où $s_{,1}(z) \neq 0$; quand $x = x(t, z)$

([46]) *Voir* É. CARTAN [3], chap. 8.

et $p = p(t, z)$, les relations (28.3) et (28.4) deviennent donc (5.4) et (5.5); pour toute fonction $f(y)$,

$$(28.5)\qquad f_{z^\lambda}(z) = f_{y^\lambda}(z) - \frac{s_{y^\lambda}(z)}{s_{y^1}(z)} f_{y^1}(z),$$

où $f_{y^\lambda}(z)$ désigne la valeur en z de $f_{y^\lambda}(y)$.

Puisque nos hypothèses : $N = 1$, $s(z) = 0$ entraînent $\xi(t, z) = 0$, c'est-à-dire $\xi[t, x(t, z)] = 0$, le théorème 2 et le corollaire 2.1 seront des conséquences immédiates du théorème 1, du corollaire 1.1 et des deux formules suivantes :

$$(28.6)\qquad \frac{D(x)}{D(y)} = \frac{s_{y^1}(z)}{p_1(t, z)} \frac{D(x^2, \ldots, x^L)}{D(z^2, \ldots, z^L)},$$

où l'on prend, au premier membre $x = x(t, y)$, au second $x = x(t, z)$ et où l'on calcule les déterminants fonctionnels avant de faire $y = z$;

$$(28.7)\qquad v^{\nu, n}_{n-n^\nu}(0, z) = v^{\nu, n}_{n-n^\nu}(z),$$

où $v^{\nu, n}(\xi, x)$ est défini par (4.10) et $v^{\nu, n}_{n-n^\nu}(x)$ par (5.8).

Preuve de (28.6). — Simplifions les notations en prenant $L = 3$. Vu $(28.4)_2$,

$$\frac{D(x)}{D(y)} = \frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(y^1, y^2, y^3)} = \frac{1}{p_1} \begin{vmatrix} s_{y^1} & s_{y^2} & s_{y^3} \\ x^2_{y^1} & x^2_{y^2} & x^2_{y^3} \\ x^3_{y^1} & x^3_{y^2} & x^3_{y^3} \end{vmatrix} = \frac{s_{y^1}}{p_1} \begin{vmatrix} x^2_{y^2} - \dfrac{s_{y^2}}{s_{y^1}} x^2_{y^1} & x^2_{y^3} - \dfrac{s_{y^3}}{s_{y^1}} x^2_{y^1} \\ x^3_{y^2} - \dfrac{s_{y^2}}{s_{y^1}} x^3_{y^1} & x^3_{y^3} - \dfrac{s_{y^3}}{s_{y^1}} x^3_{y^1} \end{vmatrix};$$

en faisant $y = z$ et en appliquant (28.5), on obtient (28.6).

Preuve de (28.7). — Puisque $v^{\nu, n}(\xi, x)$ s'annule $n - n^\nu$ fois pour $s(x) = \xi$, on a

$$v^{\nu, n}_{n-n^\nu}(\xi, x) = (n - n^\nu)!\, \frac{v^{\nu, n}(\xi, x)}{[s(x) - \xi]^{n-n^\nu}} \qquad \text{pour}\quad s(x) = \xi;$$

donc

$$v^{\nu, n}_{n-n^\nu}(0, x) = (n - n^\nu)!\, \frac{v^{\nu, n}(0, x)}{[s(x)]^{n-n^\nu}} \qquad \text{pour}\quad s(x) = 0;$$

c'est-à-dire (28.7), vu (28.1) et (5.1).

29. **Preuve du corollaire** 2.2 (n° 5).

Faisons les hypothèses qu'énonce ce corollaire.

LEMME 29.1. — *K* est une variété sans singularité.

Preuve. — *K* est le lieu des courbes bicaractéristiques issues des covecteurs $(z, s_y(z))$ d'origine $z \in T$; leur direction en z, qui est la direction bicaractéristique g_p, n'est pas tangente à T; ce lieu K est donc une variété sans singularité.

LEMME 29.2. — K et S ont en chaque point de T un contact dont l'ordre est strictement q.

Preuve. — Notons

$$K: \quad k(x) = 0 \qquad (k_x \neq 0)$$

une équation irréductible de K; notons

$$T: \quad f(x) = s(x) = 0 \qquad (f_x \text{ non parallèle à } s_x)$$

des équations de T; soit $r \geqq 1$ l'ordre du contact de K et S le long de T :

$$(29.1) \qquad k(x) \equiv s(x) + c(x) f^{r+1}(x) \qquad (\mathrm{mod}\, f^{r+2}),$$

$c(x)$ n'étant pas identiquement nul sur T.

Puisque K est caractéristique, $g(x, k_x) = 0$ sur K; par suite, vu (29.1) :

$$(29.2) \qquad g(x, s_x) + (r+1) c f^r f_{x^\lambda} g_{p_\lambda}(x, s_x) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, f^{r+1})$$

sur K; donc sur S, vu (29.1); puisque le vecteur bicaractéristique g_p, qui est tangent à S, n'est ni tangent à T, ni nul, on a

$$f_{x^\lambda} g_{p_\lambda} \neq 0;$$

par hypothèse, la restriction $g(z, s_y(z))$ $(z \in S)$ de $g(y, s_y)$ à S s'annule exactement q fois sur T; donc, puisque (29.2) vaut pour $x \in S$,

$$c(x) \neq 0 \quad \text{sur } T; \qquad q = r.$$

LEMME 29.3. — Soit $u^\mu(x)$ la solution du problème de Cauchy (nº 1), Ξ étant réduit à un point; $u^\mu(x)$ est une fonction algébroïde, se ramifiant sur K.

Preuve. — Vu le corollaire 2.1, il suffit de prouver l'absurdité de l'hypothèse suivante : S possède un point exceptionnel a. Vu la définition des points exceptionnels (nº 2), cette hypothèse a les conséquences suivantes : $a \in T$; si, en a, le vecteur bicaractéristique $g_p(a, s_y(a))$ n'est pas nul, alors $K(a)$ et S se touchent le long d'une courbe, qui appartient donc à T; cette courbe passe par a, où son vecteur tangent est le vecteur bicaractéristique $g(a, s_y(a))$. Ce vecteur est donc nul ou tangent à T, contrairement aux hypothèses du corollaire 2.2.

LEMME 29.4. — $q + 1$ tours de x autour de K transforment en elle-même chaque détermination de $u^\mu(x)$.

Preuve. — Faisons parcourir à x une courbe fermée γ de $S - T$, faisant dans $S - T$ un tour autour de T. D'après le théorème de Cauchy-Kowalewski (th. 2, 1°), $u^\mu(x)$ est holomorphe, donc uniforme, le long de γ.

Quand x parcourt γ, alors $s(x) = 0$, $\arg f(x)$ croît de 2π, donc, vu (29.1) où $r = q$, $\arg k(x)$ croît de $2\pi(q+1)$; γ fait donc dans $X - K$, $q+1$ tours autour de K.

Le lemme est donc vrai le long d'une courbe particulière, voisine de K; il est donc vrai, par prolongement analytique.

LEMME 29.5. — On a

$$u^\mu(x) = H(k(x)^{1/(1+q)}, x),$$

$H(t, x)$ étant holomorphe.

Preuve. — Supposons $k_{x^1} \neq 0$; les lemmes 29.3 et 29.4 montrent que,

$$u^\mu(x) = H(k(x)^{1/(1+q)}, x^2, \ldots, x^L),$$

$H(t, x^2, \ldots, x^L)$ étant une fonction holomorphe (donc uniforme) et bornée de $(t, x^2, \ldots, x^L)$ pour t petit, mais $\neq 0$; vu un théorème classique ([47]), $H(t, x^2, \ldots, x^L)$ est nécessairement holomorphe pour $t = 0$.

Le corollaire 2.2 résulte des lemmes 29.1, 29.2, 29.5 et du corollaire 2.1.

CHAPITRE 4.

Uniformisation portant sur L paramètres.

Ce chapitre 4 établit ce qu'affirme le n° 6, dont il emploie les notations; ces notations modifient aussi peu que possible les équations différentielles définissant l'application uniformisante, ce qui oblige à changer, dans le problème de Cauchy étudié, le nom de la variable indépendante.

30. **Un changement de notations.**

L'expression (4.6) de $\xi[t, x]$ montre que le théorème 1, 2° (n° 4) peut s'énoncer comme suit :

THÉORÈME 1.2 *bis*. — L'application

$$(t, y) \to (\xi(t, y), x(t, y)),$$

où $\xi(t, y) = s(y) + (N-1)\, tg(y, s_y)$ (ne pas confondre $\xi(\ldots)$ avec $\xi[\ldots]$), uniformise $u^\mu(\xi, x)$ jusqu'à l'ordre $n - m^\mu - 1$.

([47]) *Voir* BOCHMER-MARTIN, [2], chap. 8, § 9, th. 5, p. 173; OSGOOD [12], chap. III, § 4.

Remplaçons, dans le nº 4, les notations

$$\xi, \qquad x, \qquad y, \qquad s(x), \qquad p, \qquad t$$

par

$$-\xi_0,\ (\xi_1, \ldots, \xi_L, y),\ (\xi_1, \ldots, \xi_L, x),\ \xi_1 y^1 + \ldots + \xi_L y^L,\ (x^1, \ldots, x^L, \eta_1, \ldots, \eta_L),\ \tau;$$

les théorèmes 1.1º, 1.2 *bis* et la formule (4.8), que le nº 31 va employer, deviennent :

LEMME 30.

1º En chaque point non caractéristique le problème de Cauchy (6.1) possède une solution et une seule $u^\mu(\xi, y)$ qui soit *holomorphe.*

2º Définissons $y(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_L, x)$ et $\eta(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_L, x)$ par le problème de Cauchy ordinaire :

$$(30.1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy^\lambda}{d\tau} = g_{\eta_\lambda}(y, \eta), & \dfrac{d\eta_\lambda}{d\tau} = -g_{y^\lambda}(y, \eta) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, L), \\ y^\lambda(0, \xi_1, \ldots \xi_L, x) = x^\lambda, & \eta_\lambda(0, \xi_1, \ldots, \xi_L, x) = \xi_\lambda, \end{cases}$$

où τ est voisin de 0; définissons $\xi(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_L, y)$ par

$$(30.2)\quad \begin{cases} \xi_0(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_L, y) = -(N-1)\tau g(x, \xi) - \xi_1 x^1 - \ldots - \xi_L x^L, \\ \xi_\lambda(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_L, y) = \xi_\lambda; \end{cases}$$

$u^\mu(\xi, y)$ est *uniformisé* jusqu'à l'ordre $n - m^\mu - 1$ par l'application

$$(30.3)\quad (\tau, \xi_1, \ldots, \xi_L, x) \to (\xi(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_L, x), y(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_L, x)).$$

3º Le premier terme $u^{\mu, n}$ *du développement asymptotique* est donné par les formules suivantes, où $y = y(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_L, x)$, $\eta = \eta(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_L, x)$:

$$(30.4)_1\quad \text{pour } j < n - m^\mu,\ u_j^{\mu, n}(\xi, y) \equiv 0 \ (\text{mod } t, \text{ donc mod } t^{n - m^\mu - j});$$

$$(30.4)_2\quad u^{\mu, n}_{n - m^\mu}(\xi, y) \equiv \frac{(-1)^{m^\mu - n^\nu}}{g(y, \eta)} \sqrt{\frac{D(x)}{D(y)}}\, G_\nu^\mu(y, \eta; x, \xi)\, v^{\nu, n}_{n - n^\nu}(\xi, x) \quad (\text{mod } t).$$

Rappelons que

$$v^{\nu, n}(\xi, x) = v^\nu(\xi, x) - a_\mu^\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) w^\mu(\xi, x),$$

$$v_j(\xi, x) = \left(-\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^j v(\xi, x).$$

$$\frac{D(x)}{D(y)} = 1 \Big/ \frac{D(y)}{D(x)}; \qquad \frac{D(y)}{D(x)} = \frac{D(y(\tau, \xi, x))}{D(x)}, \quad \tau \text{ et } \xi \text{ étant fixes.}$$

Preuve. — Ce lemme est immédiat, à l'exception de $(30.4)_2$; notre changement de notations transforme (4.8) en ceci :

$$u^{\mu,n}_{n-m^\mu}(\xi, y)$$
$$= \frac{(-1)^{m^\mu - n^\nu}}{g(x, \xi)} \sqrt{\frac{D(x)}{D(y)}}\, G^\mu_\nu(y, \eta; x, \xi)\, v^{\nu,n}_{n-n^\nu}(-\xi_1 x^1 - \ldots - \xi_L x^L, \xi_1, \ldots, \xi_L, x) \pmod{\tau};$$

or, vu (30.1),

$$g(x, \xi) = g(y, \eta)$$

et, vu $(30.2)_1$,

$$v^{\nu,n}_{n-n^\nu}(-\xi_1 x^1 - \ldots - \xi_L x^L, \xi_1, \ldots, \xi_L, x)$$
$$= v^{\nu,n}_{n-n^\nu}(\xi_0 + (N-1)\tau g, \xi_1, \ldots, \xi_L, x) \equiv v^{\nu,n}_{n-n^\nu}(\xi, x) \pmod{\tau\, g},$$

puisque $v^{\nu,n}(\xi, x)$ est holomorphe; d'où $(30.4)_2$.

31. **Preuve du théorème** 3 (n° 6).

Le 1° du théorème 3 est identique au 1° du lemme 30.

Posons

$$t = -\tau;$$

le problème de Cauchy ordinaire (6.2) définit une application

$$(31.1) \qquad (t, \eta, y) \to (\tau, \xi_1(t, \eta, y), \ldots, x^L(t, \eta, y)), \qquad \text{où} \quad \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_L),$$

ayant les deux propriétés suivantes :

(31.1) est un homéomorphisme analytique, puisque c'est l'identité pour $t = 0$; en composant (31.1) et (30.3), on obtient l'application

$$(31.2) \qquad (t, \eta, y) \to (\xi(t, \eta, y), y),$$

où

$$(31.3) \qquad \xi_0(t, \eta, y)$$
$$= (N-1)\, t g(y, \eta) - \xi_1(\tau, \eta, y) x^1(\tau, \eta, y) - \ldots - \xi_L(\tau, \eta, y) x^L(\tau, \eta, y);$$

en effet le problème (6.2) définit un groupe de transformations de paramètre t :

$$(\eta, y) \to (\xi_1(t, \eta, y), \ldots, x^L(t, \eta, y));$$

le problème (30.1) définit le même groupe, le paramètre étant noté τ et l'on prend $t + \tau = 0$.

Le 2° du lemme 30 peut donc s'énoncer ainsi : l'application (31.2) uniformise $u^\mu(\xi, y)$ jusqu'à l'ordre $n - m^\mu - 1$. Or cette application uniformisante (31.2) est celle que définit (6.2), vu (6.6) et (6.7); voici donc établi le 2° *du théorème* 3, car les propriétés de $\mathcal{K}$ résultent immédiatement de (6.9), où $\dfrac{D(\xi)}{D(\eta)} \neq 0$, puisque $\dfrac{D(\xi)}{D(\eta)} = 1$ pour $t = 0$.

Le 3° *du théorème* 3 résulte immédiatement de (30.4) et de la formule suivante, que prouvera le n° 32 :

$$(31.4)\qquad \frac{D(y^1, \ldots, y^L)}{D(x^1, \ldots, x^L)} = \frac{D(\xi_1, \ldots, \xi_L)}{D(\eta_1, \ldots, \eta_L)},$$

où, au premier membre,

$$(31.5)\qquad y^\lambda = y^\lambda(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_L, x), \qquad \tau, \xi_1, \ldots, \xi_L \text{ sont fixes;}$$

au second membre,

$$(31.6)\qquad \xi_\lambda = \xi_\lambda(t, \eta, y), \qquad t, y \text{ sont fixes;}$$

enfin

$$t + \tau = 0.$$

32. Preuve de (31.4).

Puisque les problèmes (6.2) et (30.1) définissent le même groupe de transformation, la relation $t + \tau = 0$ montre que (31.5) équivaut à

$$x^\lambda = x^\lambda(t, \eta, y);$$

donc, si l'on prend pour variables indépendantes (t, η, y) et si l'on note $\xi = \xi(t, \eta, y)$, $x = x(t, \eta, y)$, alors le premier membre de (31.4) s'écrit

$$\frac{D(y^1, \ldots, y^L, \xi_1, \ldots, \xi_L)}{D(x^1, \ldots, x^L, \xi_1, \ldots, \xi_L)} = \frac{D(\xi_1, \ldots, \xi_L)}{D(\eta_1, \ldots, \eta_L)} \Bigg/ \frac{D(x^1, \ldots, x^L, \xi_1, \ldots, \xi_L)}{D(y^1, \ldots, y^L, \eta_1, \ldots, \eta_L)};$$

(31.4) résulte donc de la relation

$$(32.1)\qquad \frac{D(x^1, \ldots, x^L, \xi_1, \ldots, \xi_L)}{D(y^1, \ldots, y^L, \eta_1, \ldots, \eta_L)} = 1 \qquad \text{pour } t \text{ fixe,}$$

dont voici la preuve.

Pour $dt = 0$, (6.8) donne par différentiation :

$$\sum_{\lambda=1}^{L} d\xi_\lambda \wedge dx^\lambda = \sum_{\lambda=1}^{L} d\eta_\lambda \wedge dy^\lambda;$$

en élevant à la puissance L, on obtient

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^L \wedge d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_L = dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^L \wedge d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_L,$$

c'est-à-dire (32.1).

Voici achevée la preuve du *théorème* 3.

33. Preuve de l'exemple 3.1.

Nous pourrions déduire l'exemple 3.1 (n° 6) de l'exemple 1.1 (n° 4) en faisant le changement de notations du n° 30, puis le raisonnement par lequel le n° 31 déduit le théorème 3 du théorème 1.

Mais cet exemple 3.1 est une conséquence évidente du théorème 3 et de la généralisation suivante du lemme 11 :

LEMME 33. — Soient $u(\xi, y)$, $\xi(t, \eta, y)$ et $u\circ\xi = u(\xi(t, \eta, y), y)$, $\xi(t, \eta, y)$ étant défini par le problème de Cauchy ordinaire (6.2). Soit $\mathfrak{g}\left(\xi, y; \frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ un opérateur différentiel linéaire, homogène en $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ d'ordre r; on a

$$(33.1)\qquad \left[\mathfrak{g}\left(\xi, y; \frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{\partial}{\partial y}\right)u(\xi, y)\right]\circ\xi = \sum_{j=0}^{r}\mathfrak{g}^j\left(t, \eta, y; \frac{\partial}{\partial\eta}, \frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{r-j}\circ\xi),$$

$\mathfrak{g}^j$ étant un opérateur différentiel d'ordre $\leqq j$, à coefficients fonctions holomorphes de (t, η, y). En particulier :

$$(33.2)\qquad \mathfrak{g}^0(t, \eta, y) = (-1)^r\,\mathfrak{g}(\xi, y; 1, x, \eta)$$

où

$$\xi = \xi(t, \eta, y) \qquad \text{et} \qquad x = x(t, \eta, y);$$

Preuve pour $r = 0$. — C'est évident.

Preuve quand $\mathfrak{g} = \frac{\partial}{\partial\xi_0}\cdot$ — Par définition

$$(33.3)\qquad u_{\xi_0} = -u_1.$$

Preuve quand $\mathfrak{g} = \frac{\partial}{\partial\xi_\lambda}$ $(\lambda = 1, \ldots, L)$. — La formule de dérivation d'une fonction composée donne, pour $\mu = 1, \ldots, L$:

$$(33.4)\qquad \frac{\partial}{\partial\eta_\mu}(u\circ\xi) = \frac{\partial\xi}{\partial\eta_\mu}.u_\xi\circ\xi \qquad \left[\text{c'est-à-dire } \sum_{l=0}^{L}\frac{\partial\xi_l}{\partial\eta_\mu}(u_{\xi_l}\circ\xi)\right];$$

puisque $\frac{D(\xi_1, \ldots, \xi_L)}{D(\eta_1, \ldots, \eta_L)} = 1$ pour $t = 0$, on peut résoudre ce système par rapport à $u_{\xi_\lambda}\circ\xi\,(\lambda = 1, \ldots, L)$, pour t voisin de 0; vu (33.3), on obtient, en accord avec (33.1) :

$$(33.5)\qquad u_{\xi_\lambda}\circ\xi = \mathfrak{g}^0_\lambda(t, \eta, y)\,u_1\circ\xi + \mathfrak{g}^1_\lambda\left(t, \eta, y; \frac{\partial}{\partial\eta}\right)(u\circ\xi).$$

D'après (6.8), on a pour $\mu = 1, \ldots, L$:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\eta_\mu}.x = 0 \qquad \left[\text{c'est-à-dire } \frac{\partial\xi_0}{\partial\eta_\mu} + \sum_{\lambda=1}^{L}\frac{\partial\xi_\lambda}{\partial\eta_\mu}x^\lambda = 0\right];$$

dans la solution (33.5) de (33.4), on a donc, en accord avec (33.2) :

$$(33.6) \qquad \mathfrak{g}_\lambda^0 = -x^\lambda.$$

Preuve quand $\mathfrak{g} = \dfrac{\partial}{\partial y^\lambda}$. — La formule de dérivation d'une fonction composée donne

$$\frac{\partial}{\partial y^\lambda}(u \circ \xi) = u_{y^\lambda} \circ \xi + \frac{\partial \xi}{\partial y^\lambda} . u_\xi \circ \xi;$$

en portant dans cette relation les expressions (33.3), (33.5), (33.6) de $u_\xi \circ \xi$, on obtient

$$u_{y^\lambda} \circ \xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y^\lambda} . x\right)(u_1 \circ \xi) + \frac{\partial}{\partial y^\lambda}(u \circ \xi) + \sum_{\mu=1}^{L} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial y^\lambda} \mathfrak{g}_\mu^1\left(t, \eta, y; \frac{\partial}{\partial \eta}\right)(u \circ \xi);$$

or (6.8) donne

$$\frac{\partial \xi}{\partial y^\lambda} . x = -\eta_\lambda;$$

donc

$$(33.7) \qquad u_{y^\lambda} \circ \xi = -\eta_\lambda u_1 \circ \xi + \mathfrak{g}_{(\lambda)}^1\left(t, \eta, y; \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial y}\right)(u \circ \xi).$$

Preuve quand $r > 1$. — Il suffit de prouver que le lemme s'applique à

$$\tilde{\mathfrak{g}}\left(\xi, y; \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \mathfrak{g}\left(\xi, y; \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial \xi_l} \qquad \text{et à} \quad \tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}\frac{\partial}{\partial y^\lambda},$$

sachant qu'il s'applique à $\mathfrak{g}$, d'ordre r.

Cas où $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}\dfrac{\partial}{\partial \xi_0}$. — On a, vu (33.4) :

$$\left(\mathfrak{g}\frac{\partial u}{\partial \xi_0}\right) \circ \xi = \sum_{j=0}^{r} \mathfrak{g}^j\left((t, \eta, y; \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u_{r-j}}{\partial \xi_0} \circ \xi\right) = -\sum_j \mathfrak{g}^j(u_{r+1-j} \circ \xi).$$

$\tilde{\mathfrak{g}}$ vérifie donc (33.1);

$$\tilde{\mathfrak{g}}^j = -\mathfrak{g}^j;$$

$\tilde{\mathfrak{g}}^0$ vérifie donc (33.2).

Cas où $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}\dfrac{\partial}{\partial \xi_\lambda}$, $\lambda > 0$. — On a, vu (33.5) et (33.6),

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{g}\frac{\partial u}{\partial \xi_\lambda}\right) \circ \xi &= \sum_{j=0}^{r} \mathfrak{g}^j(t, \eta, y; \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial y}\Big)\left(\frac{\partial u_{r-j}}{\partial \xi_\lambda} \circ \xi\right) \\ &= -\sum \mathfrak{g}^j[x^\lambda(t, \eta, y)(u_{r+1-j} \circ \xi)] + \sum_j \mathfrak{g}^j \mathfrak{g}_\lambda^1[u_{r-j} \circ \xi];\end{aligned}$$

$\tilde{\mathfrak{g}}$ vérifie donc (33.1).

$$\tilde{\mathfrak{g}}^j \ldots = -\mathfrak{g}^j[x^\lambda \ldots] + \mathfrak{g}^{j-1}[\mathfrak{g}^1_\lambda \ldots];$$

donc

$$\tilde{\mathfrak{g}}^0 = -\mathfrak{g}^0 x^\lambda = (-1)^{r+1} \mathfrak{g}(\xi, y; 1, x, \eta)\, x^\lambda;$$

$\tilde{\mathfrak{g}}$ vérifie donc (33.2).

Cas où $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \dfrac{\partial}{\partial y^\lambda}$. — De même, on a, vu (33.7),

$$\left(\mathfrak{g} \frac{\partial u}{\partial y^\lambda}\right) \circ \xi = -\sum_j \mathfrak{g}^j [\eta_\lambda (u_{r+1-j} \circ \xi)] + \sum_j \mathfrak{g}^j \mathfrak{g}^1_{(\lambda)} [u_{r-j} \circ \xi];$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}^j \ldots = -\mathfrak{g}^j [\eta_\lambda \ldots] + \mathfrak{g}^{j-1} [\mathfrak{g}^1_{(\lambda)} \ldots],$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_0 = (-1)^{r+1} \mathfrak{g} \eta_\lambda;$$

$\tilde{\mathfrak{g}}$ vérifie donc (33.1) et (33.2).

Voilà achevée la preuve du lemme.

34. **Preuve du corollaire** 3.2.

Le changement de variables du n° 30, complété par $\tau = -t$, transforme l'exemple 1.2 en la relation suivante, compte tenu de (6.6) et (31.4) :

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{a}\left(\xi, x; \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(\xi, x) \\
&\quad = \mathfrak{a} w + \frac{\mathfrak{g}(\xi, y; \mathbf{x}, \eta)}{g(y, \eta)} \sqrt{\frac{D(\eta)}{D(\xi)}}\, G(y, \eta; x, \xi)\, v^n \\
&\quad - t\left[(1-n)\, \mathfrak{g}(\xi, y; \mathbf{x}, p) \frac{\partial}{\partial \xi_0} + \mathfrak{g}_{\mathbf{x}^l} \frac{\partial}{\partial \xi_l}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \mathfrak{g}_{\eta^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \mathfrak{g}_{\eta_\lambda \mathbf{x}^\lambda} + \mathfrak{g}'\right] v^n \qquad (\text{mod } t^2),
\end{aligned}$$

où $l = 0, 1, \ldots, L$; $\lambda = 1, \ldots, L$; $v^n = v^n(-\xi_1 x^1 - \ldots - \xi_L x^L, \xi_1, \ldots, \xi_L, x)$; après avoir effectué les dérivations, on fait

$$\xi = \xi(t, \eta, y), \qquad x = x(t, \eta, y), \qquad \mathbf{x} = (1, x^1, \ldots, x^L),$$

et dans le coefficient de t :

$$\xi = \eta, \qquad \mathbf{x} = (1, y^1, \ldots, y^L).$$

D'après (6.7) :

$$\xi_0 = (n-1)\, t g(y, \eta) - \xi_1 x^1 - \ldots - \xi_L x^L;$$

si l'on prend

$$v^n = v^n(\xi, x),$$

l'expression précédente de $\mathfrak{a} u$ se simplifie donc et devient celle qu'énonce le corollaire 3.2.

CHAPITRE 5.

Interprétation mécanique du premier terme du développement asymptotique.

Ce chapitre 5 prouve le théorème 4 : il montre que (5.7) implique (7.2), (7.3).

35. Introduction de $k(x)$ dans l'expression du premier terme du développement asymptotique.

Nous faisons les hypothèses du théorème 2 et l'hypothèse que les points caractéristiques de S sont réguliers : ils vérifient (5.9). Nous notons

$$g(z) = g(z, s_{y}(z)), \qquad z \in S;$$

(5.9) s'écrit donc

$$g_{p_l}(z, s_x(z))\, g_{z^l}(z) \neq 0; \qquad \text{ce qui implique} \quad g_z(z) \neq 0.$$

Le corollaire 2.2 s'applique donc avec $q = 1$: T est une sous-multiplicité de S, d'équation $g(z) = 0$; K est une multiplicité, d'équation $k(x) = 0$.

Vu le théorème 2 2°, (5.1), (5.3) et (5.4), $x(t, z)$ décrit K quand z décrit T, t variant arbitrairement; k_x est parallèle à $p(t, z)$ pour $x = x(t, z)$; donc, vu (5.4), $dk(x) = 0$ pour $x = x(t, z)$. Donc $k(x(t, z))$ s'annule deux fois pour $t = 0$: on a

$$k(x(t, z)) = [g(z)]^2 H(t, z),$$

$H(t, z)$ étant holomorphe : d'où, en appliquant $\dfrac{D(., x^2, \ldots, x^L)}{D(t, z^2, \ldots, z^L)}$ à cette relation :

$$2\, gH \frac{D(g(z), x^2, \ldots, x^L)}{D(t, z^2, \ldots, z^L)} \equiv k_{x^1} \frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^L)}{D(t, z^2, \ldots, z^L)} \qquad (\text{mod } g^2);$$

en multipliant par g et employant (5.6), on obtient

$$2\, k \frac{D(g(z), x^2, \ldots, x^L)}{D(t, z^2, \ldots, z^L)} \equiv g^2 \frac{k_{x^1}}{p_1} \frac{D(x^2, \ldots, x^L)}{D(z^2, \ldots, z^L)} \qquad (\text{mod. } g^3)$$

En multipliant cette relation par (5.7) élevé au carré, nous éliminons $g(z)$ et $\dfrac{D(x^2, \ldots, x^L)}{D(z^2, \ldots, z^L)}$ de (5.7); il vient

$$2\, k \frac{D(g(z), x^2, \ldots, x^L)}{D(t, z^2, \ldots, z^L)} (\mathfrak{a}\, u^{\mu})^2$$

$$\equiv \frac{k_{x^1}}{s_{y^1}(z)} [\mathfrak{g}(x, p)\, G_{\nu}^{\mu}(x, p; z, s_{y}(z))\, v_{n-n^{\nu}}^{\nu, n}(z)]^2 \qquad [\text{mod } g(z)],$$

pour $x = x(t, z)$, $p = p(t, z)$.

Vu les définitions (3.6) et (3.7) de J et $G^{\mu}_{\nu}(x, p; y, q)$, la relation précédente donne :

LEMME 35. — Définissons sur K la fonction

$$(35.1)\quad \begin{cases} \chi(x) = \sqrt{k(x)}\,\dfrac{\mathfrak{a}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u^{\mu}(x)}{\mathfrak{g}(x, p)\, h^{\mu}(x, p)}, \\ \text{où} \quad x = x(t, z), \qquad p = p(t, z), \qquad z \in T; \end{cases}$$

cette fonction est indépendante de $\mathfrak{a}$ et de μ;

$$(35.2)\qquad \rho(x)\,\frac{[\chi(x)]^2}{[J(x)]^2}\,\frac{1}{k_{x^1}}\,\frac{D(g(z), x^2, \ldots, x^L)}{D(t, z^2, \ldots, z^L)}$$

est constante de long des bicaractéristiques engendrant K, à condition qu'on ait, le long de ces bicaractéristiques

$$(35.3)\qquad \frac{dx}{g_p(x, p)} = -\frac{dp}{g_x(x, p)} = -\frac{dJ}{j(x, p)\,J}, \quad g = 0.$$

NOTE. — D'après l'exemple 2.1 (n° 5), $k\,[\mathfrak{a}\,u^{\mu}]^2$ est une fonction continue sur K.

36. **L'introduction d'une forme différentielle extérieure** va nous permettre d'éliminer $\dfrac{D(g(z), x^2, \ldots, x^L)}{D(t, z^2, \ldots, z^L)}$ du lemme précédent.

LEMME 36.1. — Pour $x = x(t, z)$, $p = p(t, z)$, $z \in T$, on a [48] :

$$(36.1)\qquad \frac{\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{L} (-1)^{\lambda-1} g_{p_\lambda}(x, p)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \ldots \wedge dx^L}{p_l\, dx^l}$$
$$= \frac{1}{p_1}\,\frac{D(g(z), x^2, \ldots, x^L)}{D(t, z^2, \ldots, z^L)}\,\frac{dz^3 \wedge \ldots \wedge dz^L}{g_{z^2}(z)};$$

rappelons que nous employons $(z^2, \ldots, z^L)$ comme coordonnées sur S en supposant $s_{z^1}(z) \neq 0$; nous supposerons $g_{z^2}(z) \neq 0$ et emploierons sur T les coordonnées $(z^3, \ldots, z^L)$.

(48) ^ supprime le terme qu'il coiffe.

NOTE 36. — Le premier membre de (36.1) est une forme différentielle, qui est indépendante du choix des coordonnées et dont voici une expression plus explicite :

$$\frac{1}{p_1}\sum_{\lambda=2}^{L}(-1)^{\lambda-1}g_{p_\lambda}dx^2\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^\lambda}\wedge\ldots dx^L.$$

Preuve. — Pour $z\in T$, $z+dz\in S$ et t quelconque, donc $x(t, z)\in K$, considérons la forme différentielle

$$(36.2)\qquad \pi(x)=\frac{1}{p_1}\sum_{\lambda=2}^{L}(-1)^{\lambda-1}g_{p_\lambda}(x, p)\,dx^2\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^\lambda}\wedge\ldots\wedge dx^L;$$

le système associé ([49]) à cette forme est

$$g_{p_\lambda}dx^l-g_{p_l}dx^\lambda=0\qquad(l, \lambda=2, \ldots, L)$$

or, sur K,

$$p_\lambda dx^\lambda=0,\qquad p_\lambda g_{p_\lambda}=0\qquad\text{et}\qquad p_1\neq 0\qquad\text{car}\quad s_{y^1}(z)\neq 0;$$

ce système est donc

$$\frac{dx^1}{g_{p_1}}=\frac{dx^2}{g_{p_2}}=\ldots=\frac{dx^L}{g_{p_L}};$$

c'est-à-dire

$$dz=0;$$

par suite :

$$(36.3)\qquad \pi(x)\equiv F(t, z)\frac{dz^3\wedge\ldots\wedge dz^L}{g_{z^2}(z)}\qquad[\operatorname{mod} dg(z)],$$

$F(t, z)$ étant une fonction holomorphe que nous allons calculer.

La différentiation de (5.4) et (5.3) donnent

$$dp_\lambda\wedge dx^\lambda=dg\wedge dt,\qquad\text{où}\quad g=g(z)=g(x, p);$$

multiplions cette relation par $p_1\pi$ en employant au premier membre l'expression (36.2) de π et au second membre l'expression (36.3); il vient

$$(36.4)\qquad \sum_{\lambda=1}^{L}(-1)^{\lambda-1}g_{p_\lambda}dp_1\wedge dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^\lambda}\wedge\ldots dx^L$$
$$-\sum_{\lambda=1}^{L}g_{p_\lambda}dp_\lambda\wedge dx^2\wedge\ldots\wedge dx^L=-p_1F(t, z)\,dt\wedge dz^2\wedge\ldots\wedge dz^L.$$

([49]) *Voir* É. CARTAN [3], chap. 8 ou [4].

Puisqu'il y a L différentielles indépendantes (dt, dz^2, ..., dz^L), les formes différentielles

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^L, \qquad dp_1 \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \ldots \wedge dx^L \qquad (\lambda = 1, \ldots, L)$$

sont proportionnelles aux mineurs à L lignes et L colonnes de la matrice à L lignes et $L+1$ colonnes :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial t} & \frac{\partial x^1}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial x^L}{\partial t} \\ \frac{\partial p_1}{\partial z^2} & \frac{\partial x^1}{\partial z^2} & \cdots & \frac{\partial x^L}{\partial z^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial p_1}{\partial z^L} & \frac{\partial x^1}{\partial z^L} & \cdots & \frac{\partial x^L}{\partial z^L} \end{vmatrix};$$

on a donc

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^L + \sum_{\lambda=1}^{L} (-1)^\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial t} dp_1 \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \ldots \wedge dx^L = 0,$$

c'est-à-dire, vu la définition (5.1), (5.2) de $x(t, z)$ et $p(t, z)$:

$$g_{x^1} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^L + \sum_{\lambda=1}^{L} (-1)^{\lambda-1} g_{p_\lambda} dp_1 \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \ldots \wedge dx^L = 0;$$

cette relation montre que (36.4) peut s'écrire

$$g_{x^1} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^L + g_{p_\lambda} dp^\lambda \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^L = p_1 F(t, z)\, dt \wedge dz^2 \wedge \ldots \wedge dz^L,$$

c'est-à-dire

$$dg \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^L = p_1 F(t, z)\, dt \wedge dz^2 \wedge \ldots \wedge dz^L,$$

c'est-à-dire

$$(36.5) \qquad F(t, z) = \frac{1}{p_1} \frac{D(g(z), x^2, \ldots, x^L)}{D(t, z^2, \ldots, z)^L} \qquad \text{pour} \quad z \in T.$$

Le lemme 36.1 résulte de la note 36 et des relations (36.2), (36.3) et (36.5).

Ce lemme 36.1 et le parallélisme de k_x et p ont pour conséquence évidente le

LEMME 36.2. — La condition (35.2) équivaut à la suivante : la forme différentielle

$$\rho(x) \frac{[\chi(x)]^2}{[J(x)]^2} \frac{\sum_\lambda (-1)^{\lambda-1} g_{p_\lambda}(x, p)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \ldots \wedge dx^L}{dk(x)}$$

où $x = x(t, z)$, $p = p(t, z)$, $z \in T$, est une forme différentielle invariante des bicaractéristiques engendrant K.

37. Choix de g.

Le théorème 2 suppose $g(x, p)$ homogène en p, de degré $N = 1$.

Mais, vu le nº 20, si nous multiplions $h^\mu(x, p)$ par $f(x, p)$ et $g(x, p)$ par $f(x, p)\,\mathfrak{f}(x, p)$, alors, à des facteurs constants sur les bicaractéristiques, $J(x, p)$ est multiplié par $\sqrt{\mathfrak{f}(x, p)/f(x, p)}$, $g_p/[J]^2$ par $[f(x,p)]^2$; il suffit donc de multiplier $\chi(x)$ par $1/f(x, p)$ pour que les lemmes 35 et 36.2 restent vrais.

Les lemmes 35 et 36.2 valent donc quand $g(x, p)$ est une fonction caractéristique, homogène en p de degré N quelconque.

38. Choix de k, au moyen de l'équation de Jacobi.

Supposons $h^\mu(x, p)$ homogène en p de degré [50] m^μ : $\mathfrak{g}(x, p)\,h^\mu(x, p)$ est donc homogène en p de degré n. Les lemmes 35 et 36.2 peuvent s'énoncer comme suit, en modifiant la définition de χ. Définissons sur K,

$$\chi(x) = \sqrt{k(x)}\,\frac{\mathfrak{a}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u^\mu(x)}{\mathfrak{g}(x, k_x)\,h^\mu(x, k_x)}; \tag{38.1}$$

$$\rho(x)\,[\chi(x)]^2\,\frac{\sum_\lambda (-1)^{\lambda-1} g_{p_\lambda}(x, k_x)\,dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \ldots \wedge dx^L}{dk(x)} \tag{38.2}$$

est une forme différentielle invariante des bicaractéristiques engendrant K : il suffit de choisir k tel qu'on ait [51], le long de ces bicaractéristiques :

$$k_x/pJ^r = \text{Cte}, \qquad \text{où} \quad r = \frac{2}{2n + 1 - N}. \tag{38.3}$$

Or, d'après (35.3),

$$\frac{dx}{g_p(x, p)} = \frac{d(pJ^r)}{g_x J^r + rpj(x, p)\,J^r};$$

puisque $g(x, p)$ et $j(x, p)$ sont homogènes en p de degrés N et $N - 1$, la condition (38.3) signifie donc que, le long des bicaractéristiques engendrant K :

$$\frac{dx}{g_p(x, k_x)} = -\frac{dk_x}{g_x(x, k_x) + rk_x j(x, k_x)}. \tag{38.4}$$

---

[50] En accord avec les relations (nºs 1 et 3) : $h^\mu g^\nu_\mu = 0$, degré $(g^\nu) = n^\nu - m^\mu$.

[51] J^r est la puissance r^{ieme} de J.

Ces équations (38.4), où $k = 0$, sont celles des caractéristiques où $k = 0$, de l'équation du premier ordre (7.1).

De cela, de (38.1), de (38.2) et de l'exemple 2.1 (n° 5) résulte *le théorème* 4 (n° 7).

Chapitre 6.

Les ondes asymptotiques et approchées qui justifient l'optique géométrique.

Ce chapitre prouve les résultats qu'énonce le n° 8; il en emploie les notations.

39. Justification de la définition (8.3) des ondes asymptotiques.

Cette justification emploie un

Complément au lemme 11. — On a, avec les notations de ce lemme 11,

$$(39.1)\quad \mathfrak{g}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)(u\circ\xi) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\left[\mathfrak{g}^j\left(x, \frac{\partial\xi}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{j+1}\xi}{(\partial x)^{j+1}}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u_{r-j}\right]\circ\xi.$$

Preuve. — On emploie la même récurrence que pour prouver ce lemme 11. La formule (39.1) est évidemment vraie pour $r = 0$ et $r = 1$. Il suffit donc de prouver qu'elle s'applique à

$$\tilde{\mathfrak{g}}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \mathfrak{g}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x^1},$$

en la supposant valable pour $\mathfrak{g}$.

Or, d'après $(11.1)_2$:

$$\tilde{\mathfrak{g}}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)(u\circ\xi) = \mathfrak{g}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x^1}\circ\xi + \xi_{x^1}\frac{\partial u}{\partial\xi}\circ\xi\right];$$

donc, puisque (39.1) s'applique à $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{g}}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)(u\circ\xi) = &\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\left[\mathfrak{g}^j\frac{\partial u_{r-j}}{\partial x^1}\right]\circ\xi \\ &+\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j+1}[\mathfrak{g}^j(\xi_{x^1}u_{r+1-j})]\circ\xi\end{aligned}$$

la formule (39.1) s'applique donc à $\tilde{\mathfrak{g}}$ en définissant $\tilde{\mathfrak{g}}^j$ par (11.5), c'est-à-dire comme le fait le lemme 11.

Introduisons les notations du n° 8 : $\xi(x)$ est remplacé par $\omega\varphi(x)$; $\dfrac{\partial^j u(\xi, x)}{\partial\xi^j}$ n'est plus noté $(-1)^j u_j$, mais $u_{(j)}$. Il vient :

LEMME 39. — Soit $\mathfrak{g}\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur différentiel, homogène en $\dfrac{\partial}{\partial x}$, d'ordre r; on a

$$(39.2) \qquad \mathfrak{g}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)[u\circ(\omega\varphi)] = \sum_{j=0}^{r} \omega^{r-j}\left[\mathfrak{g}^j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u_{(r-j)}\right]\circ(\omega\varphi),$$

où $\mathfrak{g}^j\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ est un opérateur différentiel, d'ordre $\leqq j$, dont les coefficients sont des polynômes de $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dots, \dfrac{\partial^{j+1}\varphi}{\partial x^{j+1}}$, à coefficients fonctions holomorphes de x. En particulier :

$$(39.3) \qquad \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}(x, \varphi_x), \qquad \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}_{p_\lambda}(x, \varphi_x)\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{2}\mathfrak{g}_{p_l p_\lambda}\varphi_{x^l x^\lambda}.$$

Ce lemme établit (8.3) et justifie donc *la définition* (8.4) *des ondes asymptotiques.*

Établissons la propriété suivante, qu'énonce le n° 8 :

LEMME. — $\dfrac{\partial u^\mu(\omega, x)}{\partial\omega}$ est onde asymptotique quand $u^\mu(\omega, x)$ l'est.

Preuve. — Vu (8.2), on a

$$\omega\frac{\partial u^\mu(\omega, x)}{\partial\omega} = \sum_{r=0}^{\infty}\omega^{m^\mu - r}\tilde{u}^{\mu,r}\circ(\omega\varphi),$$

si l'on note

$$\tilde{u}^{\mu,r}(\xi, x) = \xi\, u^{\mu,r}_{(1)}(\xi, x) + (m^\mu - r)\,u^{\mu,r}(\xi, x);$$

d'où, pour $j \leqq m$ et $\leqq n - m^\mu$:

$$\tilde{u}^{\mu, m-j}_{(n-m^\mu-j)} = \left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + n - m\right)u^{\mu, m-j}_{(n-m^\mu-j)};$$

puisque les $u^{\mu, m-j}$ vérifient (8.4), les $\tilde{u}^{\mu, m-j}$ vérifient aussi (8.4), ce qui prouve le lemme.

40. Calcul de l'onde asymptotique par quadratures le long des bicaractéristiques engendrant la phase.

Exprimons que

$$\sum_{r=0}^{\infty}\omega^{m^\mu - r}u^{\mu,r}_{(n)}\circ(\omega\varphi)$$

est onde asymptotique quel que soit n; vu (8.4), il s'agit de résoudre le système

$$(40.1)\quad \sum_{\mu, j} a_{\mu}^{\nu j}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_{(n-m^{\mu}-j)}^{\mu, m-j}(\xi, x) = 0 \qquad \text{quels que soient } \nu, m \text{ et } n;$$

le lemme 39 permet d'expliciter comme suit ce système :

$$(40.2)\quad \left\{\begin{aligned} & g_{\lambda}^{\nu}(x, \varphi_x)\, u_{(n-m^{\mu})}^{\mu, m}(\xi, x) \\ & + \left(g_{\mu p_\lambda}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} + \frac{1}{2} g_{\mu p_l p_\lambda}^{\nu} \varphi_{x^l x^\lambda} + g'^{\nu}_{\mu}\right) u_{(n-m^{\mu}-1)}^{\mu, m-1} \\ & \qquad + \sum_{\geqq 2} a_{\mu}^{\nu j}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_{(n-m^{\mu}-j)}^{\mu, m-j} = 0, \\ & \text{où } \quad j \leqq m \quad \text{ et } \quad \leqq n^{\nu} - m^{\mu}. \end{aligned}\right.$$

D'où, pour $m = 0$:

$$(40.3)\qquad g_{\mu}^{\nu}(x, \varphi_x)\, u_{(n-m^{\mu})}^{\mu, 0} = 0.$$

Supposons $u_{(n)}^{\mu, r}$ non identiquement nul, donc (en remplaçant si nécessaire r par r — Cte) $u_{(n)}^{\mu, 0}$ non identiquement nul; (40.3) montre que la phase $\varphi(x)$ vérifie l'équation caractéristique (8.6) :

$$g(x, \varphi_x) = 0.$$

Introduisons le vecteur $\mathfrak{h}$ que définit (3.4); de (40.2) résulte donc

$$(40.4)_m\qquad \mathfrak{h}_{\nu}(x, \varphi_x) \sum_{j \geqq 1} a_{\mu}^{\nu, j}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_{(n-m^{\mu}-j)}^{\mu, m-j}(\xi, x) = 0;$$

définissons $v_{(n-n^{\nu})}^{\nu, m}$ par (8.9); nous avons donc

$$\mathfrak{h}_{\nu}(x, \varphi_x)\, v_{(n-n^{\nu})}^{\nu, m}(\xi, x) = 0 \qquad \text{quels que soient } m \text{ et } n,$$

tandis que (40.2) s'écrit

$$g_{\mu}^{\nu}(x, \varphi_x)\, u_{(n-m^{\mu})}^{\mu, m}(\xi, x) = v_{(n-n^{\nu})}^{\nu, m}(\xi, x).$$

Il est donc possible de trouver des $U_{(n-m^{\mu})}^{\mu, m}$ vérifiant (8.10) et de mettre (40.2) sous la forme

$$(40.5)\qquad u_{(n-m^{\mu})}^{\mu, m}(\xi, x) = U_{(n-m^{\mu})}^{\mu, m}(\xi, x) + h^{\mu}(x, \varphi_x)\, U_{(n)}^{m}(\xi, x).$$

Mais nous avons dû supposer $(40.4)_m$ vérifié par $u^{\mu, 0}, \ldots, u^{\mu, m-1}$, quel que soit n; nous devons donc écrire que $u^{\mu, 0}, \ldots, u^{\mu, m}$ vérifient $(40.4)_{m+1}$;

faisons-le, en remplaçant $u^{\mu,m}_{(n-m^\mu)}$ par son expression (40.5) et n par $n+1$; il vient, vu (39.3) :

$$(40.6)\qquad \mathfrak{h}_\nu\left[g^\nu_{\mu p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}+\frac{1}{2}g^\nu_{\mu p_l p_\lambda}\varphi_{x^l x^\lambda}+g'^\nu_\mu\right]\left[U^{\mu,m}_{(n-m^\mu)}+h^\mu U^m_{(n)}\right]$$
$$+\mathfrak{h}_\nu\sum_{j\geqq 2}a^{\nu j}_\mu u^{\mu,m+1-j}_{(n+1-m^\mu-j)}=0.$$

Or le n° 41 établira l'*identité* que voici : quel que soit $F(\xi, x)$,

$$(40.7)\qquad \mathfrak{h}_\nu(x,\varphi_x)\left[g^\nu_{\mu p_\lambda}(x,\varphi_x)\frac{\partial}{\partial x^\lambda}+\frac{1}{2}g^\nu_{\mu p_l p_\lambda}\varphi_{x^l x^\lambda}+g'^\nu_\mu\right][h^\mu(x,\varphi_x)F(\xi,x)]$$
$$=\left[g_{p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}+\frac{1}{2}g_{p_l p_\lambda}\varphi_{x^l x^\lambda}+\frac{1}{2\rho(x)}(\rho g)_{p_\lambda x^\lambda}\right]F+j(x,\varphi_x)F.$$

Cette identité transforme (40.6) en la relation suivante, qui emploie la définition (8.11) de $V^{\nu,m}_{(n-n^\nu)}$:

$$(40.8)\qquad \left[g_{p_\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}+\frac{1}{2}g_{p_l p_\lambda}\varphi_{x^l x^\lambda}+\frac{1}{2\rho(x)}(\rho g)_{p_\lambda x^\lambda}\right]U^m_{(n)}+jU^m_{(n)}$$
$$=\mathfrak{h}_\nu(x,\varphi)\,V^{\nu,m}_{(n-n^\nu)}(\xi,x).$$

Résumons le n° 16 :

LEMME 40. — Étant donnés a^ν_μ, puis $\varphi(x)$ vérifiant (8.6), et ayant choisi $u^{\mu,0}_{(n)}(\xi,x),\ldots,u^{\mu,m-1}_{(n)}(\xi,x)$ pour $m\geqq 0$ et n quelconque, on définit $v^{\nu,m}_{(n-n^\nu)}$ par (8.9), on choisit $U^{\mu,m}_{(n-m^\mu)}$ vérifiant (8.10), on définit $V^{\nu,m}_{(n-n^\nu)}$ par (8.11); en écrivant alors (40.5) et (40.8), on obtient les conditions que doit vérifier $u^{\mu,m}_{(n-m^\mu)}$.

Vu (40.7) $u^{\mu,m}_{(n-m^\mu)}$ est indépendant du choix de $U^{\mu,m}_{(n-m^\mu)}$.

NOTE 40.1. — Ce qui précède s'adapte aisément au cas où l'on réalise l'hypothèse (3.3) en employant la note 2.1.

41. **Preuve de l'identité** (40.7).

Il s'agit de prouver les deux relations suivantes : on a

$$(41.1)\qquad \mathfrak{h}_\nu g^\nu_{\mu p}h^\mu=g_p,$$

$$(41.2)\qquad j=\mathfrak{h}_\nu\left[g^\nu_{\mu p_l}\frac{\partial}{\partial x^l}+\frac{1}{2}g^\nu_{\mu p_l p_\lambda}\varphi_{x^l x^\lambda}+g'^\nu_\mu\right]h^\mu$$
$$-\frac{1}{2}g_{p_l p_\lambda}\varphi_{x^l x^\lambda}-\frac{1}{2\rho}(\rho g)_{p_\lambda x^\lambda}$$

quand on substitue (x,φ_x) aux arguments (x,p) de $\mathfrak{h}$, g, g^ν_μ, j; on suppose que $\varphi(x)$ vérifie l'équation $g(x,\varphi_x)=0$.

(41.1) résulte de $(3.4)_1$.

(41.2) résulte immédiatement de la relation (18.5), qui suppose $\xi_t + g(x, \xi_x) = 0$: il suffit d'y faire $\xi[t, x] = \varphi(x)$; g devient identiquement nul; rappelons que $\dfrac{g_\mu^\nu h^\mu}{g}$ désigne une fonction holomorphe; le premier terme du second membre de (18.5) s'annule donc.

42. **L'intégration de** (40.8) va expliciter l'expression que le lemme 40 donne de l'onde asymptotique.

Dans ce lemme, substituons à x la fonction $x(t, y)$ que le n° 8 emploie pour construire $\varphi(x)$; notons $\dfrac{d}{dt}$ la dérivée en t des fonctions de (t, y) ainsi obtenues; il vient

$$\left[\frac{d}{dt} + \frac{1}{2} g_{p_l p_\lambda} \varphi_{x^l x^\lambda} + \frac{1}{2} g_{p_\lambda x^\lambda} + \frac{1}{2\rho} \frac{d\rho(x)}{dt}\right] U^m_{(n)} + j\, U^m_{(n)} = \mathfrak{h}_\nu V^{\nu, m}_{(n-n^\nu)}.$$

Des calculs analogues à ceux du n° 22 transforment cette équation en l'équation qui suppose (8.8) vérifiée :

$$h^\mu(x, p)\, U^m_{(n)}(\xi, x) = \int_0^t \sqrt{\frac{D(\hat{x})}{D(x)}}\, G^\mu_\nu(x, p; \hat{x}, \hat{p})\, V^{\nu, m}_{(n-n^\nu)}(\xi, \hat{x})\, d\hat{t}$$
$$+ \sqrt{\frac{D(y)}{D(x)}}\, G^\mu_\nu(x, p; y, q)\, w^{\nu, m}_{(n-n^\nu)}(\xi, y),$$

où $w^{\nu, m}_{(n-n^\nu)}$ est une fonction arbitraire de (ξ, y).

En portant cette formule dans (40.5), on obtient (8.12).

Voici achevée la preuve du théorème 5, *c'est-à-dire le calcul des ondes asymptotiques.*

43. **Des ondes approchées** vont être construites au moyen des lemmes suivants, qui résultent du théorème 5 (n° 8).

Dans ces lemmes, nous employons les hypothèses et notations de ce théorème 5;

(43.1) $$w^{\nu, r}_{(j)} = 0 \qquad \text{pour} \quad r > 0;$$

(43.2) $$\underline{m} = \inf m^\mu, \qquad \bar{n} = \sup n^\nu;$$

le même symbole $\mathcal{O}$ désigne divers opérateurs intégrodifférentiels portant sur la variable x : ils ne contiennent ni ξ, ni différentiation, ni intégration en ξ; leur ordre est l'ordre maximum des dérivations en x qu'ils contiennent.

LEMME 43.1. — On a

$$u^{\mu,m}_{(n-m^\mu)}(\xi, x) = \mathcal{O}^{\mu,m}_{\nu} w^{\nu,0}_{(n-n^\nu-m)}(\xi, x),$$

où

$$\text{ordre}\,(\mathcal{O}^{\mu,m}_{\nu}) = 2m.$$

Preuve. — Le théorème 5 donne

$$u^{\mu,m}_{(n-m^\mu)} = \sum_{\pi,r} \mathcal{O}^{\mu;m}_{\pi;r} u^{\pi,m-r}_{(n-m^\pi-r)}(\xi, x) + \sum_{\nu} \mathcal{O}^{\mu;m}_{\nu} w^{\nu,m}_{(n-n^\nu)}(\xi, x),$$

où

$$r = 1, 2, \ldots, m; \qquad \text{ordre}\,\mathcal{O}^{\mu;m}_{\pi;r} = r+1; \qquad \text{ordre}\,\mathcal{O}^{\mu;m}_{\nu} = 0;$$

si $m = 0, \sum_{\pi,r}$ disparaît.

D'où, par une récurrence évidente sur m :

$$u^{\mu,m}_{(n-m^\mu)}(\xi, x) = \sum_{\nu,j} \mathcal{O}^{\mu,m}_{\nu,j} w^{\nu,m-j}_{(n-n^\nu-j)}(\xi, x), \tag{43.3}$$

où $j = 0, 1, \ldots, m$ et où l'ordre $f(m, j)$ de $\mathcal{O}^{\mu,m}_{\nu,j}$ vérifie $f(m, 0) = 0$, $f(m, j) = \sup_{r\geq 1}[r+1+f(m-r, j-r)]$ $(r = 1, 2, \ldots, j)$; $f(m,j)$ vaut donc

$$f(m, j) = 2j. \tag{43.4}$$

D'après (43.1), on doit prendre $j = m$ dans (43.3) et (43.4) : on obtient le lemme.

LEMME 43.2. — Si l'opérateur $\mathfrak{a}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est d'ordre $\bar{n} - m^\mu$, alors

$$\mathfrak{a}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\sum_{r=0}^{m} \omega^{m^\mu - r} u^{\mu,r} \circ (\omega\varphi)\right] = \sum_{\nu} \sum_{r=0}^{m+\bar{n}-m} \omega^{\bar{n}-r}\left[\mathcal{O}^{m,r}_{\nu} w^{\nu,0}_{(\bar{n}-n^\nu-r)}\right] \circ (\omega\varphi),$$

où

$$\text{ordre}\,\mathcal{O}^{m,r}_{\nu} = 2r.$$

Preuve. — D'après le lemme 39,

$$\mathfrak{a}\left[\sum_{r=0}^{m} \omega^{m^\mu - r} u^{\mu,r} \circ (\omega\varphi)\right] = \sum_{j,r} \omega^{\bar{n}-j-r}\left[\mathfrak{a}^j\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u^{\mu,r}_{(\bar{n}-m^\mu-j)}\right] \circ (\omega\varphi),$$

où $r = 0, \ldots, m$; $j = 0, \ldots, \bar{n} - m^\mu$; ordre $\mathfrak{a}^j = j$. Le lemme 43.1 achève la preuve.

La construction d'ondes approchées résultera de ce que le lemme précédent peut être précisé par le suivant, où $m > r$:

LEMME 43.3. — Si l'opérateur $\mathfrak{b}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est d'ordre $\bar{n}-n^\nu$, alors

$$\mathfrak{b}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)a_\mu^\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\sum_{r=0}^{m}\omega^{m^\mu-r}u^{\mu,r}\circ(\omega\varphi)\right]$$
$$=\sum_{\nu}\sum_{r=m+1}^{m+\bar{n}-m}\omega^{\bar{n}-r}\left[\mathcal{O}_\nu^{m,r}w^{\nu,0}_{(\bar{n}-n^\nu-r)}\right]\circ(\omega\varphi),$$

où

$$\text{ordre}\,\mathcal{O}_\nu^{m,r}=2r.$$

Preuve. — D'après (8.3) :

$$\sum_{\mu}a_\mu^\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\sum_{r=0}^{m}\omega^{m^\mu-r}u^{\mu,r}\circ(\omega\varphi)\right] \tag{43.5}$$
$$=\sum_{\mu,j,r}\omega^{n^\nu-j-r}\left[a_\mu^{\nu j}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u^{\mu,r}_{(n^\nu-m^\mu-j)}\right]\circ(\omega\varphi),$$

où $\mu=1, \ldots, M$; $j=0, \ldots, n^\nu-m^\mu$; $r=0, \ldots, m$; ordre $a_\mu^{\nu j}=j$.

Mais, par hypothèse, $\sum_{r=0}^{\infty}\omega^{m^\mu-r}u^{m^\mu-r}_{(n)}\circ(\omega\varphi)$ est onde asymptotique quel que soit n; autrement dit, (40.1) est vérifié; au second membre de (43.5), le coefficient de $\omega^{n^\nu-j-r}$ est donc nul pour $j+r\leqq m$.

En appliquant à (43.5) l'opérateur $\mathfrak{b}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ et le lemme 39, il vient donc

$$\mathfrak{b}\sum_{\mu}a_\mu^\nu\left[\sum_{r=0}^{m}\omega^{m^\mu-r}u^{\mu,r}\circ(\omega\varphi)\right]=\sum_{\mu,j,r}\omega^{\bar{n}-j-r}\left[\mathfrak{b}_\mu^{\nu j}u^{\mu,r}_{(\bar{n}-m^\mu-j)}\right]\circ(\omega\varphi),$$

où $\mu=1, \ldots, M$; $0\leqq j\leqq\bar{n}-m^\mu$; $0\leqq r\leqq m$; $m<j+r$; ordre $\mathfrak{b}_\mu^{\nu j}=j$. Le lemme 43.1 achève la preuve.

Preuve du corollaire 5 (n° 8). — Vu la définition des ondes approchées (n° 8) et les deux lemmes précédents, pour que $\sum_{r=0}^{m}\omega^{m^\mu-r}u^{\mu,r}\circ(\omega\varphi)$ soit onde approchée, il suffit que les

$$\omega^{-r}w^{\nu,0}_{(\bar{n}-n^\nu-r)}(\xi, x)$$

et leurs dérivées en x d'ordres $\leqq 2r (r = 0, 1, \ldots, m + \bar{n} - \underline{m})$ soient petits par rapport aux $\omega^{-r} w^{\nu,0}_{(\bar{n} - n^\nu - r)}(\xi, x)$ et leurs dérivées en x d'ordres $\leqq 2r \, (r = 0, 1, \ldots, m + \bar{n} - \underline{m})$; on ne donne à ξ que les valeurs prises par $\omega\varphi(x)$. Le corollaire 5 donne à cette condition suffisante une forme un peu plus sommaire.

CHAPITRE 7.

Particules associées à certaines ondes approchées.

Ce chapitre déduit de l'exemple 5.3 (nº 8) la preuve du théorème 6; rappelons qu'il est analogue au chapitre 5, qui prouve le théorème 4.

44. **Ondes approchées.**

Explicitons l'exemple 5.3 (nº 8) en employant l'expression (8.14) de $\tilde{u}^{\mu,0}$, la définition (3.7) de G^μ_ν et la définition (3.6) de J; il vient immédiatement :

LEMME 44. — Soit

$$u^\mu(\omega, x) = (i\omega)^{m^\mu} h^\mu(x, \varphi_x)\, \chi(x)\, e^{i\omega\varphi(x)}; \tag{44.1}$$

imposons à $\chi(x)$ d'être indépendant de μ, de ω et tel que

$$\rho(x) \frac{[\chi(x)]^2}{[J(x)]^2} \frac{D(x)}{D(y)} \tag{44.2}$$

soit constant le long des bicaractéristiques engendrant $\varphi(x)$; imposons à $J(x)$ de vérifier, le long de ces bicaractéristiques :

$$\frac{dx}{g_p(x, p)} = -\frac{dp}{g_x(x, p)} = -\frac{dJ}{j(x, p) J} \qquad [g(x, p) = 0;\ p = \varphi_x]. \tag{44.3}$$

Alors, quand ω est grand, $u^\mu(\omega, x)$ est une *onde approchée.*

45. **L'introduction d'une forme différentielle extérieure** va nous permettre d'éliminer $\dfrac{D(x)}{D(y)}$ du lemme précédent.

LEMME 45.1. — On a la relation, où $x = x(t, y)$ et où l'on prend $y \in S$ après avoir calculé $\dfrac{D(x)}{D(y)}$:

$$\sum_\lambda (-1)^{\lambda-1} g_{p_\lambda}(x, \varphi_x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \ldots \wedge dx^L$$
$$= \frac{D(x)}{D(y)} g_{p_\lambda}(y, \varphi_y)\, s_{y^\lambda} \frac{1}{s_{y^1}} dy^2 \wedge \ldots \wedge dy^L.$$

Preuve. — Pour $x = x(t, z)$ et $z \in S$, le système associé (52) à la forme différentielle

$$\sum_\lambda (-1)^{\lambda-1} g_{p_\lambda}(x, \varphi_x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \ldots \wedge dx_L$$

est

$$\frac{dx^1}{g_{p_1}} = \ldots = \frac{dx^L}{g_{p_L}}$$

c'est-à-dire, vu la définition de $x(t, z)$ (n° 8) :

$$dz^2 = \ldots = dz^L = 0;$$

il existe donc une fonction $F(t, z)$ telle que

$$(45.1)\qquad \sum_\lambda (-1)^{\lambda-1} g_{p_\lambda}(x, \varphi_x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \ldots \wedge dx^L = F(t, z)\frac{dz^2 \wedge \ldots \wedge dz^L}{s_{y^1}(z)}.$$

Pour calculer cette fonction F, faisons $dt = 0$; (45.1) s'écrit

$$\sum_\lambda (-1)^\lambda g_{p_\lambda}(x, \varphi_x)\frac{D(x^1, \ldots, \hat{x}^\lambda, \ldots, x^L)}{D(z^2, \ldots, z^L)} = F(t, z)\frac{1}{s_{y^1}(z)};$$

d'où, puisque $\dfrac{\partial x^\lambda(t, z)}{\partial t} = g_{p_\lambda}$, l'expression suivante de F :

$$F(t, z) = s_{y^1}(z)\frac{D(x^1, \ldots, x^L)}{D(t, z^2, \ldots, z^L)}.$$

Introduisons maintenant $x(t, y)$, y n'étant pas nécessairement sur S; on a, puisque $s(z) = 0$ définit z^1 en fonction de $z^2, \ldots, z^L$:

$$\frac{\partial x(t, z)}{\partial z^\lambda} = \frac{\partial x(t, y)}{\partial y^\lambda} - \frac{s_{y^\lambda}}{s_{y^1}}\frac{\partial x(t,y)}{\partial y^1} \qquad \text{quand } y = z \qquad (\lambda = 2, \ldots, L);$$

on effectue les dérivations en y avant de faire $y = z$.

L'expression précédente de F s'écrit donc

$$(45.2)\qquad F(t, y) = \sum_\lambda (-1)^{\lambda-1} s_{y^\lambda}\frac{D(x^1, \ldots, x^L)}{D(t, y^1, \ldots, \hat{y}^\lambda, \ldots, y^L)}.$$

$x(t, y)$ est défini par le problème ordinaire de Cauchy :

$$(45.3)\qquad \frac{dx}{dt} = g_p(x, \varphi_x), \qquad x(0, y) = y;$$

(52) *Voir* É. CARTAN [3], chap. 8, ou [4].

ce problème définit un groupe, de paramètre additif t :

$$T_t: \quad y \to x(t, y);$$

d'où

$$T_{-t}: \quad x \to y;$$

vu (45.3), on a donc

$$dy = -g_p(y, \varphi_y)dt \qquad \text{pour} \quad dx(t, y) = 0.$$

Cela signifie que

$$\frac{\partial x(t, y)}{\partial t} - g_{p_\lambda}(y, \varphi_y)\frac{\partial x(t, y)}{\partial y^\lambda} = 0. \tag{45.4}$$

En portant cette expression (45.4) de $\frac{\partial x}{\partial t}$ dans (45.2), on obtient l'expression suivante de F :

$$F(t, y) = s_{y^\lambda} g_{p_\lambda}(y, s_y)\frac{D(x)}{D(y)}. \tag{45.5}$$

Les formules (45.1) et (45.5) prouvent le lemme 45.1.

Ce lemme 45.1 a pour conséquence évidente le

LEMME 45.2. — La condition (44.2) équivaut à la suivante : la forme différentielle

$$\rho(x)\frac{[\chi(x)]^2}{[J(x)]^2}\sum_\lambda(-1)^{\lambda-1} g_{p_\lambda}(x, \varphi_x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \ldots \wedge dx^l.$$

est une forme différentielle invariante des bicaractéristiques engendrant $\varphi(x)$.

46. Emploi de l'équation de Jacobi.

La condition (44.3), que doit vérifier $J(x)$, s'écrit, puisque $p = \varphi_x$:

$$g_p(x, \varphi_x)\, J_x + j(x, \varphi_x)\, J = 0. \tag{46.1}$$

Nous la réaliserons comme suit : soit ε un paramètre réel tendant vers zéro; soit $\theta(\varepsilon, x)$ une fonction numérique complexe, deux fois dérivable, vérifiant

$$\theta(0, x) = \varphi(x)$$

et

$$A\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\,\theta_x\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$g(x, \theta_x) - i\varepsilon\, j(x, \theta_x) \equiv 0 \qquad (\text{mod}\; \varepsilon^2);$$

en dérivant cette équation par rapport à ε en faisant $\varepsilon = 0$ et en posant

$$\theta'(x) = \frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon}(0, x),$$

on obtient

$$g_p(x, \varphi_x)\,\theta'_x - i\,j(x, \varphi_x) = 0;$$

nous satisfaisons donc (46.1) en prenant

$$J(x) = e^{i\theta'(x)}. \tag{46.2}$$

Introduisons les notations du théorème 6 en posant

$$\omega = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \psi(\omega, x) = \theta(\varepsilon, x);$$

(46.2) s'écrit donc

$$J(x) = \lim_{\omega \to \infty} e^{i\omega[\psi(\omega, x) - \varphi(x)]}. \tag{46.3}$$

Vu le lemme 45.2, les conditions (44.2) et (44.3) que le lemme 44 impose à $\chi(x)$ et $J(x)$ s'énoncent donc comme suit :

$$\lim_{\omega \to \infty} \rho(x)[\chi(x)]^2 e^{2i\omega[\varphi(x) - \psi(\omega, x)]} \sum_\lambda (-1)^{\lambda-1} g_{p_\lambda} dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge dx^L,$$

où $g_{p_\lambda} = g_{p_\lambda}(x, \varphi_x)$, est une forme différentielle invariante des bicaractéristiques engendrant $\varphi(x)$.

Ce lemme 44 s'énonce donc comme suit, en posant

$$\chi(\omega, x) = \chi(x)\, e^{i\omega[\varphi(x) - \psi(\omega, x)]}:$$
$$u^\mu(\omega, x) = (i\omega)^{m^\mu} h^\mu(x, \varphi_x)\, \chi(\omega, x)\, e^{i\omega\psi(\omega, x)}$$

est une onde approchée quand ω est grand, si

$$\lim_{\omega \to \infty} \rho(x)[\chi(\omega, x)]^2 \sum_\lambda (-1)^{\lambda-1} g_{p_\lambda}(x, \varphi_x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\lambda} \wedge \ldots \wedge dx^L$$

est une forme différentielle invariante des bicaractéristiques engendrant $\varphi(x)$.

Ce résultat équivaut au théorème 6 : en effet $u^\mu(\omega, x)$ reste solution approchée quand on lui ajoute une fonction tendant vers zéro, ainsi que ses dérivées d'ordres $\leqq \overline{n} - \underline{m}$, quand ω tend vers l'infini.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BIRKHOFF (George D.). — Some remarks concerning Schrödinger's wave equation, *Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 19, 1933, p. 339-344; Quantum mechanics and asymptotic series, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 39, 1933, p. 681-700.

[2] BOCHNER (S.) et MARTIN (W. T.). — *Several complex variables.* — Princeton, Princeton University Press, 1948 (Princeton mathematical Series, 10).

[3] CARTAN (Élie). — *Leçons sur les invariants intégraux.* — Paris, Hermann, 1922. Une partie de ces leçons est exposée à nouveau dans [4] :

[4] CARTAN (Élie). — *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques.* — Paris, Hermann, 1945 (Act. scient. et ind., 994; Exposés de géométrie, 14).

[5] DIRAC (P. A. M.). — *The principles of quantum mechanics,* 4th edition. — Oxford, Clarendon Press, 1958 (The International Series of Monographs on Physics).

[6] HÖRMANDER (Lars). — *Linear partial differential operators.* — Berlin, Lange-Springer, 1963 (Grundlehren der math. Wissenschaft..., 116).

[7] KLINE (Morris). — Asymptotic solutions of linear hyperbolic partial differential equations, *J. rational Mech. and Anal.*, t. 3, 1954, p. 315-342.

[8] KRAMERS (H. A.). — *Quantum mechanics.* — Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1957 (Series in Physics).

[9] LAX (Peter D.). — Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, *Duke math. J.*, t. 24, 1957, p. 627-646.

[10] LEDNEV (N. A.). — Nouvelle méthode de résolution des équations aux dérivées partielles [en russe], *Mat. Sbornik*, N. S., t. 22, 1948, p. 205-266.

[11] LUDWIG (Donald). — Exact and asymtotic solutions of the Cauchy problem, *Comm. on pure and appl. Math.*, t. 13, 1960, p. 473-508.

[12] OSGOOD (W. F.). — *Lehrbuch der Funktionentheorie,* Zweiter Band, 2te Auflage. — Berlin, B. G. Teubner, 1929 (Math. Wissenschaft, 20, n° 2).

[13] ROSENBLOOM (P. C.). — The majorant method, *Partial differential equations,* Proceedings of the Fourth symposium in pure Mathematics, p. 51-72. — Providence, American mathematical Society, 1961 (Proc. Symp. pure Math., 4); The Cauchy-Kowalewski existence theorem, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* [1950. Cambridge], t. 1, p. 442-443. — Providence, American mathematical Society, 1952.

[14] VOLEVIČ (L. R.). — Sur les systèmes généraux d'équations différentielles [en russe], *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 132, 1960, n° 1, p. 20-23; en traduction : On general systems of differential equations, *Soviet Mathematics*, t. 1, 1960, p. 458-465.

Le présent article reprend l'article [I], une partie de [II], et constitue le [VI] de la série d'articles :

LERAY (Jean). — Problème de Cauchy :

[I] Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy de la variété qui porte les données de Cauchy, *Bull. Soc. math. France*, t. 85, 1957, p. 389-429.

[II] La solution unitaire d'un opérateur différentiel linéaire, *Bull. Soc. math. France*, t. 86, 1958, p. 75-96.

[III] Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 81-180.

[IV] Un prolongement de la transformation de Laplace qui transforme la solution unitaire d'un opérateur hyperbolique en sa solution élémentaire, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 39-156.

[V] Données analytiques non holomorphes (en préparation).

Un aperçu des méthodes qu'emploie [V] se trouve dans :

Le problème de Cauchy pour une équation linéaire à coefficients polynomiaux, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 242, 1956, p. 953-959.

Des exposés partiels du présent article ont été faits par :

GÅRDING (Lars). — Uniformization in Cauchy's problem. Lectures on modern mathematics, t. 2, 138-150 (Edited by T. L. Saaty; published by John Wiley et Sons, 1964).

LERAY (Jean). — Particules et singularités des ondes, *Cahiers de Physique*, t. 15, 1961, p. 373-381.

ERRATUM : Problème de Cauchy [III] (*Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959) : p. 140. — La construction de « Gelfand et Šilov » est due, comme ces Auteurs l'expliquent, à Mme GEL'FAND-CHAPIRO :

CHAPIRO (Z. A.). — Sur une classe de fonctions généralisées, *Uspekhi Mat. Nauk S. S. S. R.*, t. 13, 1958, n° 3 (81), p. 205-212.

(Manuscrit reçu le 15 octobre 1963.)

Lars GÅRDING,
Prof. Mathematical Institute,
University of Lund,
Lund (Suède).

Takeshi KOTAKE,
2400/12 Nakaburi,
Hirakata-shi,
Osaka (Japon).

Jean LERAY,
Professeur au Collège de France,
12, rue Pierre-Curie,
Sceaux (Seine).