M. ZERNER

Solutions singulières d'équations aux dérivées partielles

Bulletin de la S. M. F., tome 91 (1963), p. 203-226
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1963__91__203_0>

Bull. Soc. math. France,
91, 1963, p. 203 à 226.

SOLUTIONS SINGULIÈRES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ;

PAR

MARTIN ZERNER (*)

Introduction. — Nous allons nous intéresser à la question suivante : étant donné un opérateur différentiel a, préciser les propriétés géométriques des points singuliers d'une fonction u vérifiant l'équation

$$a.u = 0. \tag{1}$$

Il a fallu attendre la théorie des distributions pour que cette question, qui paraît ancienne, soit posée de façon précise.

a va être un opérateur linéaire et à coefficients (scalaires ou matriciels) indéfiniment différentiables sur un ouvert U d'un espace vectoriel réel X et u sera une distribution définie sur U où elle vérifiera (1) au sens des distributions. $Sg.\,(u)$ désignera l'*ensemble des points au voisinage desquels u n'est pas une fonction indéfiniment différentiable.*

Ces définitions comportent un cas « classique », celui où u est m fois dérivable sur U si m est l'ordre de a. Mais ce cas n'a pas fait l'objet de publications à ma connaissance, sauf l'article de LE ROUX [9] où il figure de façon très implicite.

Renvoyons au livre d'HADAMARD [4] pour les références aux travaux classiques. On verra qu'il n'y fait pas de différence entre les singularités de la solution de Volterra et de celles qu'il construit. Or la première vérifie en fait l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu,$$

(*) Thèse Sc. math., Paris, 1963.

où μ est une mesure de densité constante portée par une demi-droite du type temps. Les solutions de Hadamard au contraire, interprétées par la méthode des intégrales de parties finies qu'il a créée à cette occasion, sont des solutions de (1) au sens des distributions (a est ici du second ordre, hyperbolique et à coefficients analytiques).

Pour un opérateur (scalaire) à coefficients indéfiniment différentiables et à coefficients principaux réels sans caractéristique singulière, HÖRMANDER a démontré tout récemment que $Sg.\,(u)$ ne pouvait pas être strictement convexe dans toutes les directions bicaractéristiques ([6], [7]). Plus précisément : soit R un fermé limité par une hypersurface régulière et contenant $Sg.\,(u)$, et soit x_0 un point de la frontière de R. Si sur toute bicaractéristique tangente en x_0 à cette frontière, la distance à R est exactement d'ordre 2 par rapport à la distance à x_0, alors x_0 n'est pas dans $Sg.\,(u)$ (1).

Dans un énoncé de ce genre, il est impossible de supprimer l'hypothèse de convexité par rapport aux bicaractéristiques : j'ai construit par deux méthodes différentes des solutions u de l'équation des ondes telles que $Sg.\,(u)$ soit exactement une bicaractéristique (ZERNER [13]). HÖRMANDER [7] a généralisé une de ces constructions aux bicaractéristiques simples de tous les opérateurs à coefficients constants. Nous allons généraliser ici l'autre construction de façon à atteindre le cas des équations à coefficients analytiques, dont la partie principale est réelle ou vérifie une condition appropriée, et celui de certains systèmes surdéterminés à coefficients constants. Nous préciserons plus loin les hypothèses ainsi que ce qu'il faut entendre par bicaractéristique (en particulier, dans le cas d'une équation à coefficients complexes la condition supplémentaire que nous imposerons assurera l'existence de bicaractéristiques et d'hypersurfaces caractéristiques réelles).

Le contenu de cet article a été résumé en partie dans [14].

I. — Principe de la construction.

Nous noterons χ_σ la distribution de Riemann-Liouville (*cf.* M. RIESZ [11], chap. 1) définie pour $\sigma > -1$ par les formules

$$\chi_\sigma(s) = \frac{s^\sigma}{\Gamma(\sigma+1)} \qquad (s > 0),$$
$$\chi_\sigma(s) = 0 \qquad (s \leq 0)$$

et pour les autres valeurs de σ par prolongement analytique.

(1) En particulier si les singularités de u sont sur une courbe différentiable, cette courbe est nécessairement une bicaractéristique. Dans le cas hyperbolique, ce résultat est une conséquence facile de la solution du problème de Cauchy telle qu'elle résulte des travaux d'HADAMARD pour l'ordre 2, de LAX, LERAY et PETROWKSI pour les ordres supérieurs.

I désignera un intervalle réel ouvert. Si σ est un nombre réel, $[\sigma]$ désignera le plus grand entier inférieur à σ.

Nous emploierons constamment la notation abusive $u(x)$ pour la distribution u en la variable x et la notation intégrale pour une distribution ou un noyau (distribution en deux variables) appliquées à une fonction.

Si f est une fonction indéfiniment différentiable sur un ouvert, dont la différentielle f' ne s'annule pas, on sait définir sur cet ouvert la distribution $\chi_\sigma[f(x)]$, par exemple en prenant un système de coordonnées curvilignes dont la première soit f.

Nous entendrons toujours par sous-variété d'un ouvert U une variété indéfiniment différentiable fermée.

Cette première partie sera consacrée à la démonstration du résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *Soient V une sous-variété de U et f une fonction indéfiniment différentiable sur $U \times I$ dont la différentielle par rapport à x ne s'annule pas et qui possède de plus les deux propriétés suivantes :*

(*a*) *si $x \notin V$, $f(x, s)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial s}(x, s)$ ne s'annulent pas simultanément;*

(*b*) *pour tout s, l'hypersurface S_s d'équation*

$$f(x, s) = 0$$

passe par V et en tout point de V, toutes les hypersurfaces S_s admettent un hyperplan tangent commun.

Soient aussi v une fonction indéfiniment différentiable sur $U \times I$ et φ une fonction indéfiniment différentiable à support compact dans I.

Alors, si l'on pose

$$B_\sigma(v, \varphi) = \int \chi_\sigma[f(x, s)]\, v(x, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

(i) *$B_\sigma(v, \varphi)$ est indéfiniment différentiable en dehors de V;*

(ii) *si $\sigma > 0$ et non entier, elle est $[\sigma]$ fois continûment dérivable sur U;*

(iii) *pour $\sigma > 1$, si v ne s'annule pas sur $V \times I$, tout $s \in I$ possède un voisinage I' tel que si φ est positive, non identiquement nulle et de support contenu dans I', $B_\sigma(v, \varphi)$ n'est $[\sigma] + 1$ fois continûment dérivable au voisinage d'aucun point de V.*

La régularité de $B_\sigma(v, \varphi)$ en dehors de V va résulter de quelques éléments de la théorie de la régularité des distributions par rapport à certaines variables que nous allons d'abord rappeler (SCHWARTZ [12], GÅRDING [2]).

Soient W un ouvert de $\mathbf{R}^l$ et $(y_1, \ldots, y_k)$ k fonctions définies sur W dont la matrice jacobienne soit de rang k en chaque point [c'est dire qu'il existe au voisinage de chaque point des fonctions $y_{k+1}, \ldots, y_l$ telles que $(y_1, \ldots, y_l)$ soit un système de coordonnées locales].

Nous dirons qu'une distribution ψ définie sur W est *transrégulière* en $(y_1, \ldots, y_k)$ si, pour tout ouvert W_0 relativement compact dans W, il existe un nombre n tel que, pour tout système de champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_p$ tangents aux variétés $(y_1, \ldots y_k) = \mathrm{Cte}$, la dérivée $X_1, \ldots X_p \psi$ soit d'ordre n au plus sur W_0 (²). [Cette définition a été introduite, sous une forme équivalente, par GÅRDING dans une conférence au Collège de France exposant le contenu de son article [2]. Elle a l'avantage de mettre en évidence les changements de coordonnées locales respectant la propriété ainsi définie. Elle équivaut à la notion de distribution intégralement semi-régulière en $(y_{k+1}, \ldots, y_l)$ dans l'article de SCHWARTZ [12] où se trouvent démontrés tous les résultats dont nous aurons besoin.]

Nous dirons que ψ est *semi-régulière* en $(y_1, \ldots, y_k)$ si, pour toute φ indéfiniment différentiable de support assez petit (³), l'expression

$$\int \psi(y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_l)\, \varphi(y_{k+1}, \ldots, y_l)\, dy_{k+1} \ldots dy_l$$

est une fonction indéfiniment différentiable. Cette notion est indépendante du système « complémentaire » $(y_{k+1}, \ldots, y_l)$.

Il est clair que $\chi_\sigma(f)$ est transrégulière en f. D'autre part, dans la proposition 1 l'affirmation (i) revient à dire que si l'on appelle W le complémentaire de $V \times I$ dans $U \times I$ et ψ le produit $\chi_\sigma(f)\, v(x, s)$, la distribution ψ est semi-régulière en x sur W.

Le produit d'une distribution semi-régulière (resp. transrégulière) en $(y_1, \ldots, y_k)$ par une fonction indéfiniment différentiable (de toutes les variables) est encore une distribution semi-régulière (resp. transrégulière) en $(y_1, \ldots, y_k)$. Ainsi ψ définie ci-dessus est encore transrégulière en f. De plus, pour vérifier qu'une distribution est semi-régulière sur un ouvert, il suffit de vérifier qu'elle l'est sur un voisinage de tout point de cet ouvert.

Enfin dans un système de coordonnées locales $(y_1, \ldots, y_l)$ toute distribution transrégulière en $(y_1, \ldots, y_k)$ est semi-régulière en $(y_{k+1}, \ldots, y_l)$.

(²) On sait qu'une distribution est dite d'ordre n au sens des fonctions continues (resp. des mesures) si elle peut s'exprimer comme somme finie de dérivées d'ordre au plus n de fonctions continues (resp. de mesures). L'ordre au sens des fonctions continues d'une distribution est au moins égal à son ordre au sens des mesures et au plus égal à son ordre au sens des mesures augmenté de la dimension de l'espace plus un. On voit que dans la définition de la transrégularité, il est inutile de préciser s'il s'agit de l'ordre dans l'un ou l'autre sens.

(³) « φ de support assez petit » signifie ici :

Si K est le support de φ, il existe un ouvert non vide Ω de $\mathbf{R}^k$ tel que si $(y_1, \ldots, y_k) \in \Omega$ et $(y_{+1}, \ldots, y_l) \in K$, le point de coordonnées $(y_1, \ldots, y_l)$ est dans W.

Démontrons maintenant que ψ est semi-régulière en x sur W. Au voisinage d'un point où f ne s'annule pas, ψ est une fonction indéfiniment différentiable et *a fortiori* une distribution semi-régulière. Au voisinage d'un point de W, où f s'annule, on peut, grâce à la propriété (a) de f prendre comme coordonnées locales (x, f). Alors ψ étant transrégulière en f est encore semi-régulière en x.

Si $\sigma > 0$, ψ est une fonction $[\sigma]$ fois continûment dérivable sur $U \times I$, et par suite $B_\sigma(v, \varphi)$ est $[\sigma]$ fois continûment dérivable.

L'affirmation (iii) résultera des lemmes que voici :

LEMME 1. — *Soient V une sous-variété de U et f une fonction indéfiniment différentiable sur $U \times I$ dont la différentielle ne s'annule pas. Supposons vérifiées les hypothèses (a) et (b) de la proposition* 1.

Alors pour toute fonction v mesurable et localement bornée sur $U \times I$, toute fonction φ indéfiniment dérivable et de support compact dans I, tout $(x_0, s_0) \in V \times I$ et tout $\sigma > 1$, il existe un nombre C tel que

$$B_\sigma(v, \varphi) \leqq C\chi_\sigma[f(x, s_0)] + O(|x - x_0|^{\sigma+1}),$$

ou B_σ est définie comme dans la proposition 1.

Démonstration. — Nous supposerons que $(0, 0) \in V \times I$, et nous nous placerons sur un voisinage de ce point.

Nous pouvons choisir sur un voisinage de O dans U un système de coordonnées tel que

$$x_1 = f(x, 0).$$

En posant

$$g(s) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, s),$$

il vient

$$g(0) = 1$$

et

$$f(x, s) = g(s)\, x_1 + s\, f_1(x, s),$$

où f_1 est une fonction indéfiniment différentiable. D'après l'hypothèse (b) les dérivées partielles de f par rapport aux x_j ($j > 1$) s'annulent pour x nul et s quelconque et par suite :

$$f_1(x, s) = O(|x|^2).$$

La formule des accroissements finis donne alors

$$f(x, s) = \chi_\sigma(x_1)\,[g(s)]^\sigma + O(|s|.|x|^{\sigma+1}).$$

En portant cette relation dans la définition de B_σ, on obtient

$$B_\sigma(v, \varphi) = \chi_\sigma(x_1)\int v(x, s)\,\varphi(s)\,[g(s)]^\sigma ds + \int v(x, s)\,\varphi(s)\,O(|s|.|x|^{\sigma+1})\,ds \tag{1}$$

et de cette relation, le lemme se déduit immédiatement.

LEMME 2. — *Les hypothèses du lemme* 1 *étant vérifiées, suposons qu'on ait de plus :*

$$v(x, s) = v_0(x) + (s - s_0)\,v_1(x, s),$$

ou v_0 *est continue et strictement positive et* v_1 *localement bornée. Alors il existe un voisinage* I' *de* s_0 *tel que si* φ *est positive et a son support contenu dans* I', *on peut trouver un nombre strictement positif* C *de facon à vérifier :*

$$B_\sigma(v, \varphi) = C\chi_\sigma[f(x, s_0)] + O(|x - x_0|^{\sigma+1})$$

(sauf si φ est identiquement nulle !).

Démonstration. — La première intégrale figurant dans la formule (1) devient

$$v_0(x)\int [g(s)]^\sigma \varphi(s)\,ds + \int v_1(x, s)[g(s)]^\sigma s\,\varphi(s)\,ds$$

et le deuxième terme sera strictement inférieur au premier si le support de φ est assez petit.

Ce lemme achève de démontrer la proposition 1. En gros cette proposition nous permettra, dans certaines circonstances, de construire des solutions usuelles présentant des singularités sur une sous-variété V. Si nous voulons construire des solutions distributions présentant des singularités d'ordre arbitrairement élevé, nous aurons recours à la variante suivante :

PROPOSITION 1'. — *Dans la proposition* 1, *on peut remplacer les affirmations* (ii) *et* (iii) *par les suivantes :*

(ii') *pour* $\sigma < 0$ *et non entier,* $B_\sigma(v, \varphi)$ *est d'ordre au plus* $-[\sigma]$ *au sens des fonctions continues* [4];

(iii') *pour* $\sigma < -l$ *et non entier, si* v *ne s'annule pas sur* $V \times I$, *tout* $s \in I$ *possède un voisinage* I' *tel que si* φ *est positive et de support contenu dans* I', $B_\sigma(v, \varphi)$ *est d'ordre au moins* $-[\sigma] - l$ *au sens des mesures* [4] (l désigne la dimension de X).

Démonstration. — (ii') se démontre comme (ii).

Pour démontrer (iii') supposons de nouveau que $(0, 0) \in V \times I$. On peut alors trouver un voisinage I' de O sur la droite, un nombre

---

[4] *Cf.* note [2].

strictement positif C et, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, un point de U, $x_\varepsilon = (x_{\varepsilon 1}, \ldots, x_{\varepsilon l})$ vérifiant

$$|x_\varepsilon| \leqq C\varepsilon$$

de façon que les relations

$$s \in I' \qquad \text{et} \qquad |x - x_\varepsilon| \leqq \varepsilon$$

entraînent

$$f(x, s) > 0.$$

Soit p l'ordre au sens des mesures de $B_\sigma(v, \varphi)$ et soit α une fonction d'une variable, indéfiniment dérivable, positive, de support contenu dans $[-1, +1]$ et vérifiant $\alpha(0) > 0$. Posons

$$\alpha_\varepsilon(x) = \prod_{j=1}^{l} \alpha\left(\frac{x_j - x_{\varepsilon j}}{\varepsilon}\right).$$

Il existe une constante C' telle que

$$\int \chi_\sigma[f(x, s)]\, v(x, s)\, \varphi(s)\, \alpha_\varepsilon(x)\, ds\, dx \leqq C' \varepsilon^{-p}$$

(le second membre résulte de la majoration des dérivées de α_ε jusqu'à l'ordre p). L'intégrale qui figure dans cette inégalité est une intégrale de Riemann, d'où une nouvelle constante C'' telle que

$$\varepsilon^{\sigma+l} \leqq C'' \varepsilon^{-p},$$

ce qui implique

$$\sigma + l + p \geqq 0,$$

C. Q. F. D.

II. — Éléments de Géométrie caractéristique.

L'étude faite dans cette partie et dans III a un caractère purement local. Certaines des affirmations qui y seront faites pourront n'être valables que sur un certain voisinage d'un point sans que nous le rappelions chaque fois.

Nous supposons que a est un opérateur linéaire à *coefficients scalaires analytiques,* nous noterons m son ordre et g sa partie d'ordre m dont nous supposerons d'abord les coefficients *réels.* g ne peut s'annuler que sur un ensemble analytique, nous supposerons cet ensemble vide.

On sait qu'une hypersurface est dite *caractéristique* si elle est définie au voisinage de chacun de ses points par une équation $f = 0$, où

$$g[x, f'(x)] = 0$$

quand x est sur l'hypersurface et qu'elle est dite caractéristique *simple* si de plus :

$$g'_{\xi}[x, f'(x)] \neq 0,$$

g'_{ξ} désignant la différentielle de g où l'on a fixé x.

Dans le produit de U par le dual X^* de X, nous noterons K l'ensemble des points (x, ξ) vérifiant

$$g(x, \xi) = 0, \qquad g'_{\xi}(x, \xi) \neq 0.$$

S'il existe une hypersurface caractéristique simple, K n'est pas vide et c'est alors une sous-variété de dimension $2l - 1$.

Nous poserons

$$\Lambda(\xi, x) = (x, -\xi) \qquad (\xi \in X^*, x \in X).$$

L'opérateur Λ permet de faire correspondre à une forme linéaire sur $U \times X^*$ un champ de vecteurs tangents à $U \times X^*$. Nous définirons un champ de vecteurs B tangents à K en posant en chaque point de K :

$$B = \Lambda g' = (g'_{\xi}, -g'_x).$$

C'est un champ de vecteurs caractéristique de l'équation de Pfaff sur K :

$$\langle \xi, dx \rangle = 0.$$

On appellera *bande bicaractéristique* une trajectoire de B et *bicaractéristique simple* la projection sur U d'une bande bicaractéristique (5).

Nous dirons qu'une sous-variété $\overline{W}$ de K est *transverse* si elle possède les deux propriétés suivantes :

(*a*) la projection $(x, \xi) \to x$ de $\overline{W}$ dans U a un rang égal à la dimension de $\overline{W}$;

---

(5) Donnons une définition plus intrinsèque de ces notions.

U étant une variété différentiable, nous noterons U^* le fibré des formes linéaires tangentes à U, T^*_x sa fibre au-dessus de x, ϖ la projection de U^* sur U. L'application $\varpi^*_{(x,\xi)}$ tangente à ϖ applique $T_{(x,\xi)}$ sur T_x.

On reconnaît en g'_{ξ} la différentielle de la restriction de g à T^*_x. Sa valeur en (x, ξ) s'identifie à un élément de T_x.

On définit une forme différentielle ξdx sur U^* par

$$\langle \xi\, dx, X \rangle = \langle \xi, \varpi^*_{(x,\xi)} X \rangle.$$

La forme $d(\xi dx)$ définit en chaque point une application Λ' de $T_{(x,\xi)}$ dans $T^*_{(x,\xi)}$, On peut vérifier que Λ' est inversible et l'on définit alors Λ comme l'inverse de Λ'. Du fait que Λ est antisymétrique :

$$\langle g', \Lambda g' \rangle = 0,$$

ce qui exprime que B est tangent à K.

(*b*) le vecteur g'_ξ n'est pas tangent à la projection W de $\overline{W}$ sur U.

Une sous-variété V de U sera appelée une *caractéristique au sens de Lie* s'il existe des sous-variétés $\overline{V}$ et $\overline{W}$ de K, $\overline{W}$ transverse, $\overline{V}$ engendrée par les bandes bicaractéristiques qui s'appuient sur $\overline{W}$ telle que V soit la projection de $\overline{V}$ sur U. Nous dirons que V est engendrée par $\overline{W}$. On voit qu'il y a identité entre les caractéristiques au sens de Lie de dimension 1 (engendrées par un point) et les bicaractéristiques simples; d'après la théorie classique des équations aux dérivées partielles du premier ordre, il y a aussi identité entre les caractéristiques de Lie de dimension $l-1$ et les hypersurfaces caractéristiques simples.

LEMME 1. — *Soit f une fonction analytique telle que l'équation*

$$f(x) = 0$$

définisse une hypersurface caractéristique simple. Au voisinage de chaque point de cette hypersurface, on peut trouver un système de coordonnées locales analytiques dans lequel :

(*a*) $x_1 = f$;

(*b*) *le vecteur* $g'_\xi\,[x, f'(x)]$ *est tangent aux courbes*

$$x_1 = 0\ (x_3, \ldots, x_l) = \text{Cte}$$

qui sont des bicaractéristiques simples;

$$(c)\quad a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = g_1(x)\left[\frac{\partial^m}{\partial x_1^{m-1}\,\partial x_2} + a_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right][g_2(x)\ u(x)];$$

où a_1 est d'ordre au plus $m-2$ en x_1 et g_1 et g_2 sont des fonctions analytiques qui ne s'annulent pas.

Démonstration. — En faisant choix d'un système de coordonnées caractéristiques régulières (LERAY [8], chap. 2, nº 4) on assure toutes les affirmations du lemme, à cela près que a_1 peut encore contenir un terme en $\dfrac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}}$ (mais sans autre dérivation).

Un tel terme s'élimine grâce au choix de g_2.

LEMME 2. — *Soit*

$$z \to (y(z), \eta(z))$$

une application différentiable de $\mathbf{R}^k$ dans K. Supposons que

$$\left\langle \frac{\partial y}{\partial z_j}, \eta(z)\right\rangle \neq 0.$$

et appelons $(x(z,t),\ \xi(z,t))$ *la solution du système différentiel*

$$\frac{d}{dt}(x,\xi) = B \tag{1}$$

qui vaut (y,η) *pour* $t = 0$. *Alors*

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial z_j}, \xi \right\rangle \neq 0.$$

Démonstration. — Nous allons démontrer plus : l'expression

$$h(z,t) = \left\langle \frac{\partial x}{\partial z_j}, \xi \right\rangle$$

est indépendante de t.

En effet $\dfrac{\partial x}{\partial z_j}$ vérifie le système aux variations

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial z_j}\right) = \sum_{n=1}^{l}\left[\frac{\partial g'_\xi}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial z_j} + \frac{\partial g'_\xi}{\partial \xi_n}\frac{\partial \xi_n}{\partial z_j}\right],$$

en sorte que

$$\frac{\partial h}{\partial t} = m\left\langle g'_x, \frac{\partial x}{\partial z_j}\right\rangle + (m-1)\left\langle g'_\xi, \frac{\partial \xi}{\partial z_j}\right\rangle - \left\langle g'_x, \frac{\partial x}{\partial z_j}\right\rangle = (m-1)\frac{\partial g}{\partial z_j},$$

quantité qui est nulle puisque nous restons sur K.

[Comme on peut voir, la démonstration revient à s'assurer que la forme $\langle \xi, dx \rangle$ est un invariant du système (1) sur K].

Remarque 1. — Tout ce qui précède reste vrai lorsque les coefficients de g sont complexes à condition de remplacer toutes les variétés qui interviennent, à commencer par U, par des variétés analytiques complexes. Nous allons maintenant introduire une condition qui entraîne dans ce cas l'existence d' « assez » d'hypersurfaces caractéristiques dont la partie réelle soit une hypersurface (assez pour appliquer la proposition 1).

Coefficients complexes. — Nous posons maintenant

$$g = g_R + i\, g_I,$$

où g_R et g_I sont des opérateurs homogènes d'ordre m à coefficients réels, le premier supposé non nul. Il leur correspond comme ci-dessus des sous-variétés K_R et K_I de $U \times X^*$ et les champs de vecteurs tangents respectivement à K_R et K_I :

$$B_R = \Lambda g'_R, \qquad B_I = \Lambda g'_I.$$

Toutefois, si g_I est identiquement nul, nous entendrons par K_I l'ouvert $U \times K^*$ tout entier.

Soit A une bande bicaractéristique de g_R qui ait un point dans K_I. Pour que A soit tout entière contenue dans K_I, il faut et il suffit que, sur A :

$$C(x, \xi) = \langle B_R, g'_I \rangle = 0.$$

(La première égalité est à considérer comme la définition de C.)

Or, il vient

$$C = -\langle B_I, g'_R \rangle = \langle g'_{R,\xi}, g'_{I,x} \rangle - \langle g'_{R,x}, g'_{I,\xi} \rangle$$

de sorte que la condition :

(C) *C s'annule en tout point* $(x, \xi) \in K_R \cap K_I$;

est nécessaire et suffisante pour que $K_R \cap K_I$ soit engendré à la fois par des bandes bicaractéristiques de g_R et par des bandes bicaractéristiques de g_I (6).

Un calcul direct montre que $C\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ est la partie d'ordre $2m - 1$ du commutant

$$[g_R, g_I] = (i/2)[g, \bar{g}].$$

On voit donc que (C) est une condition nécessaire pour que l'équation $a.u = f$ possède une solution quelle que soit f indéfiniment différentiable (HÖRMANDER [5], [7]).

Nous supposerons désormais que g vérifie (C).

Appelons K l'ensemble des points de $K_R \cap K_I$ où les vecteurs $g'_{R,\xi}$, et $g'_{I,\xi}$ sont linéairement indépendants. Si K n'est pas vide, c'est une variété de dimension $2l - 2$.

On peut définir sur K deux fonctions α, β telles que

$$C' = \alpha g'_R + \beta g'_I,$$

ce qui entraîne

$$B_C = \Lambda C' = \alpha B_R + \beta B_I$$

---

(6) La relation

$$\langle g'_I, \Lambda g'_R \rangle + \langle g'_R, \Lambda g'_I \rangle = 0$$

exprime tout simplement que Λ est antisymétrique.

On reconnaît en C la parenthèse de Poisson de g_R et g_I (*cf.* Elie CARTAN [1], chap. XII, n° 123). Elle donne à l'ensemble des fonctions différentiables sur U^* une structure d'algèbre de Lie. La relation

$$B_C = [B_R, B_I]$$

exprime alors que l'application $g \to \Lambda g'$ est un homorphisme d'algèbres de Lie.

(la première égalité est à considérer comme la définition de B_C). Or un calcul direct donne

$$[B_R, B_I] = B_C,$$

de sorte que B_R et B_I engendrent sur K un module de champs de vecteurs complètement intégrable.

Nous appellerons *bande bicaractéristique* une variété intégrale à deux dimensions de ce module de champs de vecteurs. Une bande bicaractéristique est donc engendrée par l'ensemble des bandes bicaractéristiques de g_R qui s'appuient sur une bande bicaractéristique donnée de g_I. La projection sur U d'une bande bicaractéristique sera appelée une *bicaractéristique bien simple* (7).

Nous dirons qu'une sous-variété $\overline{W}$ de K est *transverse* si elle possède les deux propriétés suivantes :

(*a*) la projection de $\overline{W}$ dans U a un rang égal à la dimension de W;

(*b*) aucune combinaison linéaire non nulle de $g'_{R,\xi}$ et $g'_{I,\xi}$ n'est tangente à la projection W de $\overline{W}$ sur U.

Une sous-variété V de U sera appelée une *caractéristique au sens de Lie* s'il existe des variétés $\overline{V}$ et $\overline{W}$ de K, $\overline{W}$ transverse, $\overline{V}$ engendrée par les bandes bicaractéristiques qui s'appuient sur $\overline{W}$ telle que V soit la projection de $\overline{V}$ sur U. Nous dirons encore que V est engendrée par $\overline{W}$.

Il y a maintenant identité entre les bicaractéristiques bien simples et les caractéristiques au sens de Lie de dimension 2. Les caractéristiques aux sens de Lie de dimension $l - 1$ sont des hypersurfaces caractéristiques à la fois pour g_R et g_I, c'est-à-dire qu'elles sont la partie réelle d'une hypersurface complexe caractéristique pour g (*cf.* remarque 1).

III. — **Solutions singulières d'une équation.**

Tous les opérateurs qui interviendront dans cette partie sont à coefficients scalaires et analytiques.

---

(7) Dans une première rédaction de cet article on définissait, moyennant quelques complications, une notion de bicaractéristique simple d'une équation à coefficients complexes. Dans le cas d'une équation à coefficients constants, on retrouvait ainsi la définition utilisée dans Hörmander [7] : une bicaractéristique simple est dans ce cas l'ensemble des points $x + \mathcal{R}\,[z\, g'(\xi)]$, z variant dans $\mathbf{C}$, x fixé dans X, ξ fixé dans $X^\star$ et vérifiant $g(\xi) = 0$ et $g'(\xi) \neq 0$. Une telle bicaractéristique est bien simple si elle est de dimension 2 c'est-à-dire si $g'_R(\xi)$ et $g'_I(\xi)$ sont linéairement indépendants. Signalons que dans ce dernier cas on trouve aussi des solutions singulières comme cas particulier de l'étude de la partie IV sur les systèmes à coefficients constants. Par contre le cas g'_I colinéaire à g'_R nous échappe. Pour les coefficients constants il est traité dans Hörmander [7].

b désigne un opérateur à coefficients holomorphes sur un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^l$ et de la forme

$$b = \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m-1}\,\partial x_2} - \sum_{k=0}^{m-2} a_{m-k}\frac{\partial^k}{\partial x_1^k},$$

où les a_j sont des opérateurs d'ordre au plus j qui ne contiennent plus de dérivation en x_1.

Les résultats que nous allons donner maintenant sont classiques ainsi que leur démonstration qu'on trouvera (pour $m = 2$) dans HADAMARD [4] (Livre II, chap. 3). Nous la donnons pour être complet et pour disposer de certains des calculs par la suite.

PROPOSITION 1. — *Il existe une unique fonction holomorphe au voisinage de l'origine v vérifiant*

$$\begin{aligned} &b.v = F, \\ &\frac{\partial^n v}{\partial x_1^n} = n!\,v_n \qquad \textit{pour} \quad n = 0, \ldots, m-2 \quad \textit{et} \quad x_1 = 0, \\ &v = w \qquad \textit{pour} \quad x_2 = 0; \end{aligned}$$

ou F, v_n, w sont données holomorphes, v_n et w vérifiant les conditions de compatibilité évidentes pour $x_1 = x_2 = 0$.

Démonstration. — En posant

$$\begin{aligned} v &= \sum v_p x_1^p/p!, \\ F &= \sum F_p x_1^p/p!, \\ w &= \sum w_p x_1^p/p!, \end{aligned}$$

il vient

$$(1) \qquad \sum \frac{\partial v_{n+m-1}}{\partial x_2}\frac{x_1^p}{p!} = \sum \left[\sum_{n=0}^{m-2} a_{m-n}.v_{p+n} + F_p\right]\frac{x_1^p}{p!},$$

d'où, pour tout $p \geqq 0$:

$$(2) \quad v_{p+m-1} = w_{p+m-1} + \int_0^{x_2} F_p(s, x_3, \ldots, x_l)\,ds + \int_0^{x_2} \Phi_{0,p}\,ds + \int_0^{x_2} \Phi_p\,ds,$$

où

$$\Phi_{0,p} = \sum_{n=0}^{m-2} a_{m-n}^{(0)}.v_{p+n},$$

$a_j^{(0)}$ étant ce que devient a_j quand on y fait $x_1 = 0$. Quant à Φ_p, il ne dépend que des coefficients suivants dans le développement des a_j en série entière de x_1 et des v_k, $k \leqq p + m - 3$.

La formule (2) établit déjà l'unicité de la solution du problème aux limites étudié. Elle permet de calculer les coefficients du développement en série de puissances de $x_2, \ldots, x_l$ donnant v_p ($p \geqq m - 1$) à l'aide d'un polynôme où entrent des coefficients des développements en séries de $v_0, \ldots, v_{p-1}$, w, F et des coefficients des opérateurs a_j. Ce polynôme n'a que des coefficients positifs.

Nous allons donc démontrer l'existence en établissant la convergence de la série trouvée pour v par la méthode des séries majorantes (Goursat [3], t. II, chap. 19 et 22). Il est bien connu qu'il suffit de faire cette démonstration pour $v_0, \ldots, v_{m-2}$, w nuls et F quelconque. Toute série à coefficients positifs sera alors une série majorante pour $v_0, \ldots, v_{m-2}$ et w.

Nous remplacerons F et les coefficients des a_j par des séries majorantes en remplaçant l'équation aux dérivées partielles donnée par

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m-1}\,\partial x_2} = \frac{A}{1 - \frac{1}{\rho}\left(\frac{x_1}{\tau} + x_2 + \ldots + x_l\right)} \left[\sum_{n=0}^{m-2} \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} \sum_{\substack{|\alpha| \leqq m-n \\ \alpha_1 = 0}} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} + 1\right],$$

où A est assez grand, ρ assez petit et $0 < \tau < 1$. A cette nouvelle équation, il s'agit de trouver une solution donnée par un développement en série à coefficients positifs. Pour ce faire, nous poserons

$$f(x_1, \ldots, x_l) = g(\varphi, \chi),$$
$$\varphi = x_1 + \tau x_2, \qquad \chi = x_3 + \ldots + x_l$$

de sorte que l'équation devient

$$\frac{\partial^m g}{\partial \varphi^m} = \frac{A}{\tau\left[1 - A(\tau + \ldots + \tau^{m-1}) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\varphi}{\tau} + \chi\right)\right]}(D^+ g + 1),$$

où D^+ est un opérateur à coefficients constants positifs d'ordre total m et d'ordre $m - 1$ en φ. Le coefficient qui figure au second membre est donné par une série à coefficients positifs si l'on a pris τ assez petit pour que

$$A \sum_{n=1}^{m-1} \tau^n < 1.$$

On obtient alors la fonction cherchée en prenant les données de Cauchy de g pour $\varphi = 0$ représentées par des séries à coefficients positifs (on peut par exemple les prendre nulles) et en appliquant le théorème de Cauchy-Kowalewsky.

PROPOSITION 2. — *Pour tout σ distinct d'un entier $< m$ il existe une fonction holomorphe v qui ne s'annule pas à l'origine et vérifie*

$$b.(x_\sigma^1 v) = 0$$

au sens des fonctions analytiques au voisinage de tout point où $x_1 \neq 0$.

Démonstration. — Nous posons encore

$$v = \sum v_p x_1^p/p!,$$

avec $v_p = 0$ pour $p < 0$ et

$$v_\sigma = x_1^\sigma v = \sum v_p x_1^{p+\sigma}/p!,$$

d'où

$$\frac{\partial^k v_\sigma}{\partial x_1^k} = \sum \frac{(p+\sigma+1)\dots(p+\sigma+k)}{(p+1)\dots(p+k)} v_{p+k} \frac{x_1^{p+\sigma}}{p!},$$

de sorte que l'équation à vérifier devient

$$(3) \qquad \sum_p \frac{(p+\sigma+1)\dots(p+\sigma+m-1)}{(p+1)\dots(p+m-1)} \frac{\partial v_{p+m-1}}{\partial x_2} \frac{x_1^{p+\sigma}}{p!}$$
$$= \sum_p \sum_{n=0}^{m-2} \frac{(p+\sigma+1)\dots(p+\sigma+n)}{(p+1)\dots(p+n)} a_{m-n}.v_{p+n} \frac{x_1^{p+\sigma}}{p!}.$$

Cette formule permet de déterminer par récurrence les coefficients v_p par un calcul exactement semblable à celui qui faisait passer de (1) à (2). Pour établir la convergence de la série trouvée, remarquons que (3) ne diffère de (1) que par la présence de coefficients numériques qui tendent vers 1 quand p tend vers l'infini. Du fait que ces coefficients sont majorés et minorés et de la convergence pour tous $v_0, \dots, v_{m-2}, w$ de la série donnée par (2), la convergente suit.

On peut se donner arbitrairement la valeur de v pour $x_2 = 0$ de sorte que la proposition est établie.

COROLLAIRE. — *Soit f une fonction analytique réelle vérifiant $g'_\xi(x, f') \neq 0$ et telle que l'hypersurface S d'équation $f(x) = 0$ soit caractéristique pour l'opérateur a. Pour tout σ différent d'un entier $< m$ et tout $x_0 \in S$, il existe une fonction v analytique sur un voisinage de x_0 où elle vérifie*

$$a.[v\chi_\sigma(f)] = 0$$

au sens des distributions.

Démonstration. — a et f s'étendent à un ouvert du complexifié de X. Le lemme II.1 permet alors d'appliquer la proposition 2. La (restriction au réel de la) fonction v obtenue vérifie l'équation annoncée puisque les $\chi_\sigma(x_1)$ et les $x_1^\sigma/\Gamma(\sigma+1)$ vérifient les mêmes relations de dérivation et de multiplication par x_1 tant qu'il ne figure dans ces relations ni indice ni exposant qui soit un entier négatif.

REMARQUE 1. — En raisonnant comme dans MALGRANGE [10] on peut déduire de ce résultat une condition nécessaire de a-convexité lorsque a est un opérateur à coefficients analytiques vérifiant la condition (C).

THÉORÈME 1. — *Soit a un opérateur à coefficients analytiques. Supposons les coefficients de g réels et soit V une caractéristique au sens de Lie simple et analytique. Tout $x_0 \in V$ possède un voisinage W sur lequel est définie une distribution u qui vérifie*

$$a.u = 0 \qquad \text{et} \qquad Sg.(u) = V \cap W.$$

Démonstration. — Si V est une hypersurface, le corollaire de la proposition 2 est une version plus précise du théorème.

Sinon, soit $\overline{W}$ une sous-variété transverse de K qui engendre V, soit $\overline{V}$ la variété engendrée par les bandes bicaractéristiques qui s'appuient sur $\overline{W}$ et soit (x, ξ) le point de $\overline{V}$ dont $x \in V$ est la projection. Soit H une hypersurface analytique réelle passant par x_0 telle qu'en aucun point de $H \cap V$ le vecteur $g'_\xi(x, \xi)$ ne soit tangent à H.

Nous pouvons construire une famille $\{T_s\}_{s\in I}$ de sous-variétés analytiques à $l-2$ dimensions de H passant toutes par l'intersection de V avec un voisinage de x_0 dans H et telles que

$$T = \{(x, s);\, x \in T_s\}$$

soit une sous-variété analytique de $H \times I$ qui n'est tangente à aucune droite $x = \text{Cte}$, du moins sur un certain voisinage de x_0.

Le théorème des fonctions implicites permet de définir sur un ouvert de T contenant $\{x_0\} \times I$ une fonction analytique η à valeurs dans X^* telle que pour tout $y \in T_s$, l'hyperplan d'équation

$$\langle \eta(y), x - y \rangle = 0$$

soit tangent à T_s, que

$$g[y, \eta(y)] = 0$$

et que

$$\eta(x_0) = \xi_0.$$

Posons

$$\overline{T}_s = \{(x, \xi);\, x \in T_s,\, \xi = \eta(x)\}.$$

$\overline{T}_s$ est une sous-variété transverse de K d'après sa construction et le choix de H. Désignons par $\overline{S}_s$ la variété engendrée par les bandes bicaractéristiques qui s'appuient sur $\overline{T}_s$ et par S_s la projection de $\overline{S}_s$ sur U. Posons encore :

$$S = \{ (x, s);\, x \in S_s \}.$$

Au voisinage d'un point (x_0, s_0) $(s_0 \in I)$, S peut être définie par une equation $f = 0$ où f est analytique et $f' \neq 0$. De plus si nous considérons a comme défini sur $U \times I$ (s n'y figurant pas lorsqu'on l'exprime dans un système de coordonnées compatible avec la structure de produit), S est pour cet opérateur une hypersurface caractéristique simple. Nous pouvons appliquer le corollaire de la proposition 2, obtenant ainsi une solution de la forme $\chi_\sigma(f)\, v(x, s)$, où v est analytique et $v(x_0, s_0) \neq 0$. La proposition I.1 ou la proposition I.1′ (selon la valeur de σ) permet alors de construire des solutions ayant les propriétés annoncées. f vérifie en effet l'hypothèse (a) de ces propositions d'après le lemme II.2 et le choix de T.

Remarque 2. — Des précisions sur les singularités obtenues sont données par les propositions I.1 et I.1′ et par le lemme I.2.

Théorème 2. — *Soit a un opérateur à coefficients analytiques vérifiant la condition* (C) *et soit V une caractéristique au sens de Lie analytique de a. Tout $x_0 \in V$ possède un voisinage W sur lequel est définie une distribution u qui vérifie*

$$a.u = 0 \qquad et \qquad Sg.(u) = V \cap W.$$

Démonstration. — Exactement comme celle du théorème 1, à cela près que H doit être prise de dimension $l - 2$ et les T_s de dimension $l - 3$. S_s sera alors de nouveau de dimension $l - 1$, les bandes bicaractéristiques étant de dimension 2.

IV. — Solutions singulières de certains systèmes à coefficients constants.

a désigne maintenant une matrice à q lignes et p colonnes dont les coefficients sont des polynômes. Nous supposerons $q > p$. La $j^{\text{ième}}$ ligne de $a(\xi)$ sera notée $a_j(\xi)$. Nous appellerons m_j le maximum des degrés des éléments de a_j. g_j sera la matrice ligne dont chaque élément est la partie homogène de degré m_j de l'élément correspondant de a_j. La *partie principale* g de a sera la matrice dont la $j^{\text{ième}}$ ligne est g_j.

Nous dirons que $\xi \in X^*$ est un covecteur caractéristique s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}^p$ non nul tel que

$$g(\xi).\lambda = 0,$$

nous dirons alors que λ est associé à ξ. Nous dirons que le covecteur caractéristique ξ est *simple* s'il existe λ associé à ξ tel que les q vecteurs $g'_j(\xi).\lambda$ soient linéairement indépendants. Une *hypersurface caractéristique* sera une hypersurface définie localement par une équation $f(x) = 0$ où $f'(x)$ est un covecteur caractéristique en tout point de l'hypersurface. Elle sera dite *simple* si f' l'est. Une *bicaractéristique* sera une sous-variété affine de X de la forme $x + V(\xi, \lambda)$ où ξ est un covecteur caractéristique, λ lui est associé et $V(\xi, \lambda)$ est le sous-espace vectoriel de X engendré par les vecteurs $g'_j(\xi).\lambda$. Elle sera dite *simple* si elle est de dimension q. Notons que si $V(\xi, \lambda)$ est une bicaractéristique simple, ξ est un covecteur caractéristique simple et si ξ est un covecteur caractéristique simple on peut trouver λ tel que $V(\xi, \lambda)$ soit une bicaractéristique simple.

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant :

Théorème. — *Soit a un opérateur différentiel matriciel à q lignes et p colonnes ($p < q$) dont les coefficients sont constants. Pour toute bicaractéristique simple V de a, il existe une distribution u définie sur X et vérifiant*

$$a.u = 0, \qquad Sg.(u) \subset V \qquad \textit{et} \qquad Sg.(u) \neq \emptyset.$$

Réduction au cas $p = 1$. — Nous pouvons supposer que V passe par l'origine. C'est alors le sous-espace vectoriel de X engendré par les vecteurs $g'_j(\xi).\lambda$ où ξ est un covecteur caractéristique simple et λ lui est associé. Nous construirons des solutions de la forme $u_\lambda = u\lambda$. En d'autres termes, nous chercherons des distributions scalaires u vérifiant le système d'équations

$$\left[a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right).\lambda\right].u = 0.$$

Moyennant le choix d'une base appropriée de X, et au besoin la multiplication de u par une exponentielle, ce système prend la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial^{m_j} u}{\partial x_1^{m_j - 1}\, \partial x_j} = \sum_{n=0}^{m_j - 2} a^j_{m_j - n} \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n},$$

j parcourant les entiers de 2 à $q + 1$ inclus et les a^j_k étant des opérateurs différentiels en $(x_2, \ldots, x_l)$ d'ordre k au plus.

Proposition. — *Soit a un opérateur différentiel à coefficients constants portant sur une seule fonction ($p = 1$). Supposons que l'hyperplan S d'équation*

$$\langle \xi, x \rangle = \alpha$$

soit caractéristique simple pour a. Il existe alors pour tout σ non entier une fonction analytique v ne s'annulant pas sur S telle que

$$a.[\chi_\sigma(\langle \xi, x \rangle - \alpha)v] = 0.$$

De plus, si ξ et α sont des fonctions analytiques d'un paramètre z, on peut prendre v analytique en (x, z).

Démonstration. — Supposons d'abord que l'équation de S a été ramenée à $x_1 = 0$ et a à la forme (1) et posons

$$v = \sum v_k x_1^k / k!.$$

Nous allons commencer par calculer les v_k de façon formelle.

La formule (III.3) nous donne ici, en posant

$$k_j = k + 1 - m_j,$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \sum_{n=0}^{m_j-2} \frac{(k_j+n+1)\dots k}{(k_j+n+1+\sigma)\dots(k+\sigma)} a_{m_j-n} v_{k_j+n}.$$

Nous appellerons le second membre v_k^j. Nous pouvons toujours prendre $v_0 = 1$.

Supposons calculés $v_1, \dots, v_{k-1}$. Il s'agit alors de savoir si les $v_k^j (j = 2, 3, \dots, q+1)$ sont bien les dérivées partielles d'une fonction. Or il vient, en posant

$$k_{jj'} = k + 2 - m_j - m_{j'},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_k^j}{\partial x_{j'}} = {} & \sum_{n=0}^{m_j-2} \frac{(k_j+n+1)\dots k}{(k_j+n+1+\sigma)\dots(k+\sigma)} \\ & \sum_{n'=0}^{m_{j'}-2} \frac{(k_{jj'}+n+n'+1)\dots(k_j+n)}{(k_{jj'}+n+n'+1+\sigma)\dots(k_j+n+\sigma)} a_{m'-n'} - a_{m_j-n} v_{k_{jj'}+n+n} \\ = {} & \sum_{(n,n')} \frac{(k_{jj'}+n+n'+1)\dots k}{(k_{jj'}+n+n'+1+\sigma)\dots(k+\sigma)} a_{m_j-n} a_{m_{j'}-n'} v_{k_{jj'}+n+n'} = \frac{\partial v_k^{j'}}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

La convergence pour tout x de la série obtenue peut se vérifier comme dans la démonstration de la proposition III.2 ou directement en majorant les coefficients par récurrence. Par la même occasion, on vérifie l'analyticité en z, compte tenu de ce qu'en ramenant le système à la forme (1) on obtient des coefficients analytiques en z.

Marche de la construction. — Quelques considérations d'ordre heuristique faciliteront peut-être la lecture de la suite. Au point où nous en sommes, nous savons construire des solutions avec singularités « en χ_σ » sur un hyperplan caractéristique. Seulement, on ne peut certainement pas appliquer la proposition I.1 en ne disposant que d'hyperplans comme hypersurfaces singulières. Mais considérons une famille d'hyperplans dépendant d'un paramètre z et qui enveloppe une hypersurface S strictement convexe. Soit donnée pour chacun de ces hyperplans une distribution ayant une singularité en χ_σ sur ledit hyperplan et dépendant analytiquement de z. Il est assez intuitif que si l'on intègre cette distribution par rapport à z, on va obtenir une distribution dont les singularités sont concentrées sur l'enveloppe des hyperplans. Nous voulons nous servir de distributions ainsi construites pour appliquer la proposition I.1 mais dans l'exposition nous allons grouper l'intégration en z avec l'intégration en s.

Le système étant sous la forme (1), V a pour équations

$$x_1 = x_{q+2} = \ldots = x_l = 0.$$

Posons $q' = l - q$ (si $q \geqq l - 1$, la démonstration est toute faite!) et à $z \in \mathbf{R}^{q'}$ faisons d'abord correspondre le point $y \in X$ tel que

$$\begin{aligned} y_1 &= (z_1/2)\,(z_2^2 + \ldots + z_{q'}^2), \\ y_2 &= \ldots = y_{q+1} = 0, \\ y_{q+j} &= z_j \qquad (j \geqq 2). \end{aligned}$$

Il existe alors, d'après le théorème des fonctions implicites, un voisinage W de l'origine dans $\mathbf{R}^{q'}$ où est définie une fonction ξ analytique à valeurs dans X^* ayant les propriétés suivantes :

(a) pour tout z, ξ est un covecteur caractéristique;

(b) l'hyperplan $\langle \xi, x - y \rangle = 0$ est tangent au paraboloïde parcouru par y quand $z_1 =$ Cte;

(c) $\xi(0) = (1, 0, \ldots, 0)$.

ξ étant ainsi défini et α valant $\langle \xi, y \rangle$, nous appliquons la proposition ci-dessus, obtenant des solutions de la forme

$$\chi_\sigma(\langle \xi, x - y \rangle)\, v(x, z) = v_\sigma(x, z).$$

Nous posons enfin :

$$u(x) = \int v_\sigma(x, z)\, \varphi(z_1)\, \psi(z_2, \ldots, z_{q'})\, dz$$

où φ et ψ sont des fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts.

Différentiabilité en dehors de V. — Il s'agit de démontrer que $v_\sigma(x, z)$ est semi-régulière en x sur $\complement V \times W$. Notons S l'hyperplan d'équation

$\langle \xi, x-y \rangle = 0$. Au voisinage d'un point où $x \notin S$, v_σ est indéfiniment différentiable en (x, z), plaçons-nous donc en un point où $x \in S$, $x \notin V$ (se rappeler que S dépend de z). D'après la transrégularité en $\langle \xi, x-y \rangle$, il s'agit de vérifier qu'en un tel point la variété $x = \mathrm{Cte}$ n'est pas tangente à

$$T = \{ (x, z);\, x \in S \}.$$

Supposons d'abord que

$$x_2 = \ldots = x_{q+1} = 0.$$

Dans ce cas, la vérification est bien facile.

Dans le cas général, il s'agit de vérifier qu'on peut trouver une dérivation D en z seulement telle que

$$D\langle \xi, x-y \rangle \neq 0.$$

On peut supposer, quitte à diminuer W, qu'aucun vecteur non nul de la forme

$$\sum_{j=1}^{q} t_j g'_j(\xi)$$

ne vérifie

$$x_2 = \ldots = x_{q+1} = 0.$$

Posons donc

$$\begin{aligned} x &= x' + \sum t_j g'_j(\xi), \\ x'_2 &= \ldots = x'_{q+1} = 0. \end{aligned}$$

Il vient d'abord

$$\begin{aligned} \langle \xi, x \rangle &= \langle \xi, x' \rangle + \sum t_j \langle \xi, g'_j(\xi) \rangle \\ &= \langle \xi, x' \rangle. \end{aligned}$$

Puis, en appelant X_j le vecteur de composantes

$$X_{j,k} = \sum_{n=0}^{l} D\xi_n \frac{\partial^2 g_j}{\partial \xi_k \partial \xi_n},$$

$$Dx' + \sum Dt_j g'_j(\xi) + \sum t_j X_j = Dx = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} D\langle \xi, x-y \rangle = {} & \langle D\xi, x'-y \rangle - \langle \xi, Dy \rangle \\ & - \sum Dt_j \langle \xi, g'_j(\xi) \rangle - \sum t_j \langle \xi, X_j \rangle. \end{aligned}$$

Le troisième terme est nul. D'autre part :

$$\langle \xi, X_j \rangle = (m_j - 1) \langle D\xi, g'_j(\xi) \rangle = (m_j - 1) Dg_j = 0.$$

Il reste donc

$$D \langle \xi, x - y \rangle = \langle D\xi, x' - y \rangle - \langle \xi, Dy \rangle$$

qui n'est autre que la même dérivée calculée en considérant x' comme indépendant de z. Mais alors, si $x' \neq 0$, on a déjà vérifié qu'on pouvait la trouver non nulle, si $x' = 0$ mais $y \neq 0$, c'est tout aussi facile, enfin, si l'on avait $x' = y = 0$ ce serait que $x \in V$.

Existence de points singuliers. — u est une fonction de $(x_2, \ldots, x_{q+1})$ à valeurs dans l'espace des distributions en $(x_1, x_{q+2}, \ldots, x_l)$. Elle possède en tant que telle une restriction w au sous-espace

$$x_2 = \ldots = x_{q+1} = 0.$$

Nous allons montrer que w présente un point singulier à l'origine, ce qui achèvera la démonstration du théorème.

Posons

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x_{q+2}, \ldots, x_l), \\ |\bar{x}|^2 &= x_{q+2}^2 + \ldots + x_l^2, \\ f(x, z_1) &= (z_1/2)\,|\bar{x}|^2 - x_1. \end{aligned}$$

Il vient, pour $x_2 = \ldots = x_{q+1} = 0$:

$$\langle \xi, x - y \rangle = f - (z_1/2)\,|\bar{x} - \bar{y}|^2.$$

On peut alors écrire pourvu que σ soit positif :

$$w(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma + 1)} \int \varphi(z_1)\, N(x, z_1)\, dz_1,$$

avec

$$N = \int_{f \geq \frac{z_1}{2} |\bar{x} - \bar{y}|^2} [f - (z_1/2)\,|\bar{x} - \bar{y}|^2]^\sigma\, \alpha(x, z_1, \bar{y})\, d\bar{y},$$

où α est une fonction indéfiniment différentiable nulle quand $\bar{y}$ est en dehors d'un certain compact. Nous restreindrons désormais z_1 à un intervalle ouvert I dont l'adhérence ne contient que des nombres strictement positifs [ce qui a pour effet que le paraboloïde

$$y_1 = (z_1/2)\,|\bar{y}|^2$$

tourne toujours sa concavité du même côté].

En posant

$$r = \sqrt{\frac{z_1}{2f}}\,(\bar{y} - \bar{x}),$$

on trouve

$$N = \left(\frac{2}{z_1}\right)^{(l-q-1)/2} f^{\sigma'} \int_{|r| \leqq 1} (1 - |r|^2)^\sigma \alpha\left(x, z_1, \bar{x} + r\sqrt{\frac{2f}{z_1}}\right) dr,$$

où

$$\sigma' = \sigma + \frac{l - q - 1}{2}.$$

Nous poserons

$$K(x, z_1, t) = \left(\frac{2}{z_1}\right)^{(l-q-1)/2} \int_{|r| \leqq 1} (1 - |r|^2)^\sigma \alpha(x, z_1, \bar{x} + tr)\, dr,$$

$$J(x, z_1) = K\left[x, z_1, \sqrt{\frac{2f(x, z_1)}{z_1}}\right],$$

de sorte que

$$N(x, z_1) = f^{\sigma'} J(x, z_1);$$

la fonction K est indéfiniment différentiable, nous allons essentiellement utiliser le fait qu'elle est lipschitzienne.

Soit $c \in I$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} J(x, z_1) = J(x, c) & \\ & + K\left[x, z_1, \sqrt{\frac{2f(x, c)}{c}}\right] - K\left[x, c, \sqrt{\frac{2f(x, c)}{c}}\right] \\ & + K\left[x, z_1, \sqrt{\frac{2f(x, z_1)}{z_1}}\right] - K\left[x, z_1, \sqrt{\frac{2f(x, c)}{c}}\right]; \end{aligned}$$

d'où nous déduisons

$$\begin{aligned} J(x, z_1) = J_0(x) + (z_1 - c)\, J_1(x, z_1) & \\ + \sqrt{f(x, z_1)}\, J_2(x, z_1) + \sqrt{f(x, c)}\, J_3(x, z_1), & \end{aligned}$$

où les fonctions J_j sont localement bornées et de plus J_0 strictement positive au voisinage de l'origine et continue.

N apparaît ainsi comme la somme de quatre termes. Aux deux premiers nous appliquons le lemme I.2 en faisant jouer à J_0 et J_1 le rôle des fonctions qui s'appelaient v_0 et v_1 dans l'énoncé de ce lemme. Aux deux autres termes nous appliquons le lemme I.1. Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

Il existe un voisinage I' de c tel que si φ est positive et de support contenu dans I', il existe $C > 0$ tel que

$$w(x) = C\chi_{\sigma'}[f(x, c)] + O(|x|^{\sigma' + 1/2}).$$

Remarque. — La démonstration que nous venons de donner ne fournit que des solutions suffisamment régulières. Comme les coefficients sont constants, nous obtiendrons des singularités d'ordre aussi élevé que nous voudrons en dérivant les solutions ainsi obtenues.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CARTAN (Élie). — *Lecons sur les invariants intégraux.* Paris, Hermann, 1922.

[2] GÅRDING (Lars). — Transformation de Fourier des distributions homogènes, *Bull. Soc. math. France*, t. 89, 1961, p. 381-428.

[3] GOURSAT (Édouard). — *Cours d'Analyse mathématique*, tome II, 7e édition. Paris, Gauthier-Villars, 1949 (Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris).

[4] HADAMARD (Jacques). — *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.* Paris, Hermann, 1932 (Leçons professées à l'Université Yale).

[5] HÖRMANDER (Lars). — Differential equations without solutions, *Math. Annalen*, t. 140, 1960, p. 169-173.

[6] HÖRMANDER (Lars). — Opérateurs différentiels à caractéristiques non singulières, *Colloques internationaux du Centre national de la Recherche scientifique : Équations aux dérivées partielles* [117, 1962, Paris] (à paraître).

[7] HÖRMANDER (Lars). — *Linear differential operators* (à paraître).

[8] LERAY (Jean). — Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy (Problème de Cauchy, I), *Bull. Soc. math. France*, t. 85, 1957, p. 389-429.

[9] LE ROUX (Jean). — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles, 3e partie, *J. Math. pures et appl.*, 5e série, t. 4, 1898, p. 402-408.

[10] MALGRANGE (Bernard). — Sur les ouverts convexes par rapport à un opérateur différentiel, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 254, 1962, p. 614-615.

[11] RIESZ (Marcel). — L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, *Acta Math.*, t. 81, 1948, p. 1-223.

[12] SCHWARTZ (Laurent). — Distributions semi-régulières et changements de coordonnées, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 36, 1957, p. 109-127.

[13] ZERNER (Martin). — Solutions de l'équation des ondes présentant des singularités sur une droite, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 250, 1960, p. 2980-2982.

[14] ZERNER (Martin). — Sur les singularités des distributions vérifiant une équation aux dérivées partielles à coefficients analytiques, *Colloques internationaux du Centre national de la Recherche scientifique : Équations aux dérivées partielles* [117, 1962, Paris] (à paraître).

(Manuscrit reçu le 5 août 1962, révisé le 21 janvier 1963.)

Martin ZERNER, Faculté des Sciences,
place Victor-Hugo, Marseille, 3 (Bouches-du-Rhône)