BULLETIN DE LA S. M. F.

F. OORT

Sur le schéma de Picard

Bulletin de la S. M. F., tome 90 (1962), p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1962__90__1_0>

Bull. Soc. math. France,
90, 1962, p. 1 à 14.

SUR LE SCHÉMA DE PICARD ;

PAR

FRANS OORT [1]
(Leiden).

Introduction. — Après les travaux de WEIL, ROSENLICHT, CHOW MATSUSAKA et CHEVALLEY sur la construction de la *variété* de Picard, celle-ci vient d'être construite dans le cas d'une variété quelconque par SESHADRI (*Thèse*, à paraître). Comme en général le *schéma* de Picard d'un schéma (réduit) n'est pas réduit, cette construction ne constitue pas la « bonne » solution de ce problème dans le cadre plus général de GROTHENDIECK, sauf dans le cas des courbes algébriques, où la jacobienne (généralisée) d'une courbe algébrique (construite par ROSENLICHT, *cf.* [9] [2]) donne le « vrai » schéma de Picard (*voir* l'Appendice à la fin de cet article). Dans le cadre des schémas, GROTHENDIECK est en train de construire le schéma de Picard (on trouvera des énoncés précis dans [5]).

Dans cet article, on *construit le schéma de Picard d'un k-schéma X à partir du schéma de Picard de X_{red}* (pour les conditions, *voir* § 8, théorème). En combinant ce résultat avec la construction de ROSENLICHT déjà citée, on obtient le schéma de Picard d'une courbe algébrique quelconque, et en le combinant avec les résultats nouveaux de GROTHENDIECK, on construit ainsi le schéma de Picard d'un k-schéma de dimension quelconque (sous certaines conditions).

La technique essentielle est l'utilisation de la correspondance entre la structure multiplicative et additive dans un idéal de carré nul (*cf.* § 6, lemme 3 et proposition). A partir de là, la construction est purement formelle et simple, grâce au langage des schémas et des foncteurs représentables. Le schéma de Picard de X est obtenu comme extension d'un sous-groupe du schéma de Picard de X_{red} par un groupe linéaire.

---

(1) Les recherches pour cet article ont pu être faites grâce à une bourse de l'OTAN (NATO Science Fellowship) accordée par l'Organization Néerlandaise pour le Développement de la Recherche Scientifique (ZWO).

(2) *Voir* la bibliographie à la fin de cet article.

Signalons que le résultat du présent article, dans le cas des courbes algébriques, fait partie d'une thèse, présentée à la Faculté des Sciences de Leiden (*cf.* [8]). Je voudrais exprimer ici toute ma reconnaissance à MM. J.-P. Serre et A. Grothendieck, pour l'intérêt qu'ils ont pris à mon travail et pour leurs suggestions extrêmement utiles.

1. **Les foncteurs** $R^q f(\mathcal{F})$. — Soient X et Y des espaces topologiques, et soit $f: X \to Y$ une application continue. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de groupes sur X, on désigne par $f_*(F)$ le faisceau image directe de $\mathcal{F}$ par f. On définit des faisceaux $R^q f(\mathcal{F})$ sur Y au moyen des préfaisceaux

$$R^q f(\mathcal{F})_U = H^q(f^{-1}(U), \mathcal{F})$$

pour tout ouvert U de Y. On peut aussi considérer les $R^q f(\mathcal{F})$ comme foncteurs dérivés du foncteur $f_*(\mathcal{F}) = R^0 f(\mathcal{F})$ (*cf.* [2], 3.7). Si

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

est une suite exacte de faisceaux de groupes sur X, on en déduit la suite exacte

$$\ldots \to R^q f(\mathcal{F}'') \to R^{q+1} f(\mathcal{F}') \to R^{q+1} f(\mathcal{F}) \to R^{q+1} f(\mathcal{F}'') \to \ldots.$$

2. **Une formule de Künneth.** — Dans le cadre des schémas, on peut généraliser quelques résultats de l'article de Serre [10]. On trouvera des détails dans EGA. Nous utiliserons :

a. Soit U un préschéma affine et soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_U$-modules cohérent. Alors $H^q(U, \mathcal{F}) = 0$ pour $q > 0$.

Donc, d'après un théorème bien connu, si $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ est un recouvrement fini par des ouverts affines d'un schéma X, les homomorphismes

$$H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^q(X, \mathcal{F})$$

sont des isomorphismes.

b. Soit k un corps, et soit $X = (X, \mathcal{O}_X)$ un k-schéma propre (³). *Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_X$-modules, les groupes de cohomologie $H^q(X, \mathcal{F})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie sur k.*

Soit S un préschéma, et soient X et T des S-préschémas grâce à des morphismes $f: X \to S$ et $g: T \to S$. On désigne par $X_T = X \times_S T$ le préschéma obtenu de X par l'extension de la base $g: T \to S$ et l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X_T \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_T} \\ S & \underset{g}{\longleftarrow} & T \end{array}$$

(³) Pour la définition, *cf.* EGA, II, 5.4.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules, on désigne par $\mathcal{F}_T$ le faisceau sur X_T obtenu par l'extension de la base

$$\mathcal{F}_T = \mathcal{F} \otimes_S \mathcal{O}_T$$

(*cf.* EGA, I, 9.1.2).

Lemme 1 (formule de Künneth). — *Soit X un k-schéma algébrique et soit T un k-préschéma. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_X$-modules, on a des isomorphismes canoniques*

$$R^q f_T(\mathcal{F}_T) \simeq H^q(X, \mathcal{F}) \otimes_k \mathcal{O}_T.$$

Comme X est un k-schéma algébrique on peut trouver un recouvrement fini $\mathfrak{V} = \{ V_i \}$ par des ouverts affines. Soit U un ouvert affine de T. Les ouverts (affines) $U_i = V_i \times U$ recouvrent $f_T^{-1}(U) = X \times U$. Comme $\mathcal{F}$ est cohérent, $\mathcal{F}_T$ est cohérent, et l'on peut calculer les groupes de cohomologie $H^q(f_T^{-1}(U), \mathcal{F}_T)$ par le recouvrement $\mathfrak{U} = \{ U_i \} = \{ V_i \times U \}$:

$$H^q(f_T^{-1}(U), \mathcal{F}_T) = H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}_T).$$

Comme U et V_i sont affines on a l'isomorphisme canonique

$$\Gamma(V_i \times U, \mathcal{F}_T) \to \Gamma(V_i, \mathcal{F}) \otimes_k \Gamma(U, \mathcal{O}_T)$$

(*cf.* EGA, I, 9.1.3 et 1.3.7), ce qui prouve que

$$H^q(f_T^{-1}(U), \mathcal{F}_T) \rightleftarrows H^q(C^\star(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \otimes_k \Gamma(U, \mathcal{O}_T))$$

est un isomorphisme [où $C^\star(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ désigne le complexe des cochaînes du recouvrement V dans le faisceau $\mathcal{F}$]. Comme l'application naturelle

$$H^q(C^\star(\mathfrak{V}, \mathcal{F})) \otimes_k \Gamma(U, \mathcal{O}_T) \to H^q(C^\star(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \otimes_k \Gamma(U, \mathcal{O}_T))$$

est un isomorphisme [formule usuelle de Künneth; cette formule reste vraie quand on remplace le corps k par un anneau de base A, si $\Gamma(U, \mathcal{O}_T)$ est plat sur A], on a l'isomorphisme canonique

$$H^q(f_T^{-1}(U, \mathcal{F}_T) \rightleftarrows H^q(X, \mathcal{F}) \otimes_k \Gamma(U, \mathcal{O}_T)$$

[comme $\mathcal{F}$ est cohérent, on a $H^q(X, \mathcal{F}) \rightleftarrows H^q(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$]. Cet isomorphisme commute à la restriction de l'ouvert U, donc les faisceaux $R^q f_T(\mathcal{F}_T)$ et $H^q(X, \mathcal{F}) \otimes_k \mathcal{O}_T$ sont définis par des préfaisceaux isomorphes, d'où le lemme.

Remarque. — Le lemme reste valable dans le cas d'un schéma de base quelconque si $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent, $f : X \to S$ quasi-compact et séparé, et $g : T \to S$ plat.

3. **Préschémas de groupes.** — Soit S un préschéma. Un *S-préschéma de groupes* est un S-préschéma G muni de la donnée pour tout S-préschéma T d'une loi de groupe sur

$$h_G(T) = \mathrm{Hom}_S(T, G)$$

qui soit fonctorielle en T. Donc pour un S-morphisme $f : T' \to T$, l'application

$$f_G : \quad h_G(T) \to h_G(T'),$$

définie par $f_G(g) = g.f$, est un homomorphisme. L'ensemble $h_G(S)$ est supposé non vide ; le morphisme $e_G : S \to G$ qui correspond à l'élément neutre de ce groupe est appelé la *section unitée* de G.

Soient G et L des S-préschémas de groupes. Un morphisme $\alpha : G \to L$ est appelé un *homomorphisme de groupes* si, pour tout S-préschéma T, l'application

$$\alpha_T : h_G(T) \to h_L(T),$$

définie par $\alpha_T(g) = \alpha.g$, est un homomorphisme de groupes.

LEMME 2. — *Soit $\alpha : G \to L$ un homomorphisme de S-préschémas de groupes. Alors il existe un S-préschéma de groupes H, appelé le* noyau *de α, tel que pour chaque S-préschéma T la suite*

$$0 \to h_H(T) \to h_G(T) \to h_L(T)$$

est exacte.

G et S sont des L-préschémas grâce aux morphismes $\alpha : G \to L$ et $e_L : S \to L$. On définit

$$H = G \times_L S.$$

Soit T un S-préschéma. La structure de groupe sur $h_G(T)$ induit une structure de groupe sur $h_H(T)$ (comme α est un homomorphisme), qui est fonctorielle en T. Donc H est un S-préschéma de groupes. Soit p la projection de H sur G. On démontre facilement que $p_T : h_H(T) \to h_G(T)$ est une injection, et le lemme est démontré si l'on démontre $p_T[h_H(T)] = \mathrm{Ker}(\alpha_T)$.

Soit $f : T \to G$ un S-morphisme. Si $f \in \mathrm{Ker}(\alpha_T)$, le morphisme $\alpha.f$ est l'élément neutre de $h_L(T)$, ou bien $\alpha.f = e_L.g$, donc on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & G \arrow[d, "\alpha"] \\ S \arrow[r, "e_L"] & L \end{tikzcd}$$

Dans ce cas f se factorise par

$$f \times g : \quad T \to G \times_L S = H, \qquad \text{donc} \quad p_T[h_H(T)] \supset \mathrm{Ker}(\alpha_T).$$

Supposons, d'autre part, qu'il existe un S-morphisme $h : T \to H$ qui factorise $f : T \to G$. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{h} & H & \xrightarrow{p} & G \\ & & {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ & & S & \xrightarrow[e_L]{} & L \end{array}$$

est commutatif, $\alpha.f$ est l'élément neutre de $h_L(T)$, donc

$$p_T[h_H(T)] \subset \operatorname{Ker}(\alpha_T),$$

et le lemme est démontré.

Remarque. — Dans ce cas, on dit que la suite

$$0 \to H \to G \to L$$

est *exacte*. Si les préschémas de groupes en question sont des k-schémas réduits (« groupes algébriques »), cette terminologie coïncide avec la notion de « suite strictement exacte » de Serre (*cf.* [11], VII.1).

Dans le cas où S est le spectre d'un corps k, tout S-préschéma de groupes est séparé. Dans la suite on parlera donc de k-schémas de groupes. Comme ce résultat n'est pas essentiel pour le présent article, nous ne le démontrerons pas.

4. Foncteurs représentables (*cf.* Grothendieck [4]). — Soient F_1 et F_2 des foncteurs (contravariants) d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans la catégorie des ensembles. On dit que F_1 et F_2 sont *isomorphes*, s'il existe une famille d'isomorphismes

$$A_T : \quad F_1(T) \to F_2(T)$$

(où T parcourt l'ensemble des objets de $\mathcal{C}$) commutant avec les flèches dans les catégories en question. Si P est un objet de $\mathcal{C}$, le foncteur qui associe à tout $T \in \mathcal{C}$ l'ensemble $\operatorname{Hom}(T, P) = h_P(T)$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des ensembles. On dit qu'un facteur contravariant F est *représentable*, s'il existe un objet $P \in C$ et un isomorphisme de foncteurs

$$A : \quad F \to h_P.$$

Soit $\xi \in F(p)$ tel que $A_P(\xi) = \mathrm{id}_P \in \operatorname{Hom}(P, P)$. Si F est représentable, le couple (P, ξ) qui le représente est déterminé à un isomorphisme près.

Voici un exemple d'un foncteur représentable. Soit S un préschéma et soit $\mathcal{M}$ un faisceau localement libre de rang fini sur S. On associe à tout S-préschéma T l'ensemble $\Gamma(T, \mathcal{M}_T)$. Ce foncteur est représentable (*cf.* EGA, II, 1.7).

5. Le foncteur de Picard (*cf.* GROTHENDIECK [3]). — Soit S un préschéma et soit X un S-préschéma grâce à un morphisme $f : X \to S$. Si T est un S-préschéma on a un morphisme $f_T : X_T = X \times_S T \to T$, et l'on définit le groupe des « familles de classes de diviseurs (ou : « familles des faisceaux inversibles ») sur X paramétrées par T », en posant

$$F_X(T) = \Gamma(T, R^1 f_T(\mathcal{O}^\star_{X_T}))$$

(où $\mathcal{O}^\star_{X_T}$ désigne le faisceau des unités de $\mathcal{O}_{X_T}$). Pour $g \in \mathrm{Hom}_S(T', T)$ le morphisme $g_X : X_{T'} \to X_T$ définit un homomorphisme de faisceaux d'anneaux de $\mathcal{O}_{X_T}$ dans $(g_X)_*(\mathcal{O}_{X_{T'}})$. Grâce au fait que cet homomorphisme est local on a un homomorphisme de faisceaux de groupes multiplicatifs $\mathcal{O}^\star_{X_T}$ dans $(g_X)_*(\mathcal{O}^\star_{X_{T'}})$. Donc, pour tout ouvert V de T, on définit ainsi un homomorphisme de $H^1(X \times V, \mathcal{O}^\star_{X_T})$ dans $H^1(X \times g^{-1}(V), \mathcal{O}^\star_{X_{T'}})$. Comme cet homomorphisme commute à la restriction de l'ouvert V, le morphisme $g \in \mathrm{Hom}_S(T', T)$ définit un homomorphisme

$$F_X(g) : \quad F_X(T) \to F_X(T').$$

Comme $F_X(h.g) = F_X(g).F_X(h)$ on a ainsi défini un foncteur contravariant F_X, qu'on appellera le *foncteur de Picard pour le S-préschéma X*.

Supposons que le foncteur F_X soit représentable. Le préschéma P qui le représente est un préschéma de groupes, car $F_X(T) = \Gamma(T, R^1 f_T(\mathcal{O}^\star_{X_T}))$ est muni de façon naturelle d'une structure de groupe. On appellera *P le préschéma de Picard du S-préschéma X*.

REMARQUE. — Cette définition n'est autre qu'une traduction dans le langage fonctoriel des définitions habituelles. Une section dans $R^1 f_T(\mathcal{O}^\star_{X_T}))$ correspond à une famille algébrique de classes de diviseurs sur X paramétrée par T. Un couple (P, ξ) qui représente le foncteur de Picard correspond à une application algébrique $\xi : P \to H^1(X, \mathcal{O}^\star_X)$ avec la propriété universelle que ξ factorise chaque application algébrique dans $H^1(X, \mathcal{O}^\star_X)$. L'homomorphisme $F_X(g)$ correspond à « l'image inverse » d'une famille algébrique de classes de diviseurs. Comparer [12] et [13], ou bien : CHEVALLEY [1].

6. Changement du faisceau structural.

LEMME 3. — *Soit X un préschéma et soit $\mathfrak{J}$ un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ tel que $\mathfrak{J}^2 = 0$. Alors les faisceaux $\mathfrak{J}$* (de groupes additifs) *et* $1 \oplus \mathfrak{J}$ (de groupes multiplicatifs) *sont isomorphes.*

Soit U un ouvert de X. On définit

$$\alpha_U : \quad \Gamma(U, \mathfrak{J}) \to \Gamma(U, 1 \oplus \mathfrak{J}) \qquad \text{par } \alpha_U(n) = 1 + n.$$

Cette application est évidemment bijective. Comme $n, m \in \Gamma(U, \mathcal{J})$ implique $nm = 0$, par la condition $\mathcal{J}^2 = 0$, on a

$$\alpha_U(n+m) = 1 + n + m = (1+n)(1+m),$$

donc α_U est un isomorphisme de groupes. Comme cette application commute à la restriction de l'ouvert U, les préfaisceaux canoniques de $\mathcal{J}$ et de $1 \oplus \mathcal{J}$ sont isomorphes, d'où le lemme.

Lemme 4. — *Soit X un k-schéma propre et connexe. Supposons que X possède un point rationnel sur le corps k. Alors*

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k \oplus \Lambda, \qquad \textit{où} \quad \Lambda = \Gamma(X, \mathfrak{N}_X).$$

Comme X est un k-schéma on a l'inclusion naturelle $k \subset \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Des propriétés de X il résulte que X_{red} est propre et connexe et possède un point rationnel sur k. Donc $\Gamma(X, \mathcal{O}_{X_{\text{red}}}) = k$, et le lemme est démontré par la suite exacte

$$0 \to \Gamma(X, \mathfrak{N}_X) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_{X_{\text{red}}}).$$

Soit A un anneau local, $\mathfrak{p}$ un idéal propre de A, et soit $B = A/\mathfrak{p}$. Alors on a la suite exacte des groupes multiplicatifs

$$1 \to 1 \oplus \mathfrak{p} \to A^\star \to B^\star \to 1.$$

En effet, l'homomorphisme d'anneaux $A \to A/\mathfrak{p} = B$ induit un homomorphisme de groupes multiplicatifs $A^\star \to B^\star$ de noyau $1 \oplus \mathfrak{p}$. Comme A est local, l'anneau B est local et a le même corps de restes que A, ce qui prouve que $A^\star \to B^\star$ est surjectif.

A partir d'ici k désigne un corps, $S = \mathrm{Spec}(k)$, et tous les préschémas envisagés seront des S-préschémas.

Soit $\mathcal{J}$ un faisceau d'idéaux du faisceau structural $\mathcal{O}_X$ d'un préschéma X et soit X' le sous-préschéma de X défini à partir de X par réduction mod $\mathcal{J}$, donc

$$\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X/\mathcal{J}.$$

Pour un préschéma T on a la suite

$$0 \to \mathcal{J}_T \to \mathcal{O}_{X_T} \to \mathcal{O}_{X'_T} \to 0$$

qui est exacte (parce que $\mathcal{O}_T$ est plat sur $\mathrm{Spec}(k) = S$). Donc on a la suite exacte de faisceaux de groupes multiplicatifs

$$1 \to 1 \oplus \mathcal{J}_T \to \mathcal{O}^\star_{X_T} \to \mathcal{O}^\star_{X'_T} \to 1$$

et avec les foncteurs $R^q f_T$ (où l'on écrit $f_T : X \times_S T = X_T \to T$ pour la projection), on a les suites exactes

$$\ldots \to (f_T)_*(\mathcal{O}_{X_T}) \to (f_T)_*(\mathcal{O}_{X'_T}) \xrightarrow{\delta_T} R^1 f_T(\mathfrak{I}_T) \to \ldots,$$

$$\ldots \to (f_T)_*(\mathcal{O}^*_{X_T}) \to (f_T)_*(\mathcal{O}^*_{X'_T}) \xrightarrow{\delta^*_T} R^1 f_T(1 \oplus \mathfrak{I}_T) \to \ldots.$$

Si $\mathfrak{N}_X . \mathfrak{I} = 0$ et $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{N}_X$, on a $\mathfrak{I}^2 = 0$ et dans ce cas le lemme 3 affirme que la correspondance $\alpha(n) = 1 + n$ est un isomorphisme entre les faisceaux $\mathfrak{I}$ et $1 \oplus \mathfrak{I}$. Donc, dans ce cas, on a un isomorphisme

$$\alpha : \quad R^1 f_T(\mathfrak{I}_T) \to R^1 f_T(1 \oplus \mathfrak{I}_T).$$

Proposition. — *Soit X un k-schéma propre et connexe qui possède un point rationnel sur k. Soit $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{N}_X$ un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ tel que $\mathfrak{N}_X . \mathfrak{I} = 0$. On écrit $X' = (X, \mathcal{O}_X/\mathfrak{I})$. Alors pour un k-préschéma T on a*

$$\alpha[\mathrm{Im}(\delta_T)] = \mathrm{Im}(\delta^*_T).$$

On démontre la proposition en trois étapes

$$\text{(i)} \qquad \mathrm{Im}(\delta_T) = \mathrm{Im}[\delta_T : (f_T)_*(\mathfrak{N}_{X'} \otimes \mathcal{O}_T) \to R^1 f_X(\mathfrak{I}_T)].$$

Par la formule de Künneth (*cf.* § 2, lemme 1) on peut écrire

$$(f_T)_*(\mathcal{O}_{X'_T}) = \Gamma(X, \mathcal{O}_{X'}) \oplus \mathcal{O}_T \qquad \text{et} \qquad R^1 f_T(\mathfrak{I}_T) = H^1(X, \mathfrak{I}) \oplus \mathcal{O}_T.$$

Pour

$$g = \sum a_i \otimes b_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_{X'}) \otimes \mathcal{O}_{T,t}$$

on a

$$\delta_T(g) = \sum \delta(a_i) \otimes b_i.$$

Comme X' est également propre et connexe et possède aussi un point rationnel sur k, on peut écrire (*cf.* lemme 4)

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_{X'}) = k \oplus \Lambda', \qquad \text{où} \quad \Lambda' = \Gamma(X, \mathfrak{N}_{X'}) \qquad (\text{avec } \mathfrak{N}_{X'} = \mathfrak{N}_X/\mathfrak{I}).$$

Pour $g = \sum a_i \otimes b_i$ on écrit

$$a_i = \alpha_i + n_i, \qquad \alpha_i \in k, \qquad n_i \in \Lambda'.$$

Comme $\alpha_i \in k \subset \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, donc $\delta(\alpha_i) = 0$, on a

$$\delta_T(g) = \delta_T\left(\sum n_i \otimes b_i\right),$$

et la première étape est démontrée.

$$\text{(ii)} \quad \mathrm{Im}(\delta^*_T) = \mathrm{Im}[\delta^*_T : (f_T)_*(1 \oplus \mathfrak{N}_{X'} \otimes \mathcal{O}_T) \to R^1 f_T(1 \oplus \mathfrak{I}_T)].$$

Soit $g \in (f_T)_*(\mathcal{O}^*_{X'_T})_t$ pour un $t \in T$. Alors il existe un voisinage U de t tel que g est le germe d'un élément de $\Gamma(X \times U, \mathcal{O}^*_{X'_T})$. Comme $\mathcal{O}^*_{X'_T}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{O}_{X'_T}$, on peut écrire

$$g = \sum \alpha_i \otimes b_i + \sum n_i \otimes b_i, \qquad \text{avec} \quad \alpha_i \in k \quad \text{et} \quad n_i \in N' = \Gamma(X', \mathfrak{N}_{X'}).$$

On pose $g' = \sum \alpha_i \otimes b_i$ et, comme g et g' diffèrent par un élément nilpotent, g' est le germe d'un élément de $\Gamma(X \times U, \mathcal{O}^*_{X_T})$. Donc on a $\delta^*_T(g') = 1$, ou bien

$$\delta^*_T(g) = \delta^*_T(g/g').$$

Par réduction mod $\mathfrak{N}_{X'} \otimes \mathcal{O}_T$ de $X' \times T$, la section g/g' s'applique sur 1, donc g/g' est une section du faisceau $1 \oplus \mathfrak{N}_{X'} \otimes \mathcal{O}_T$, et la seconde étape est démontrée.

(iii) On applique une section n dans $\mathfrak{N}_{X'} \otimes \mathcal{O}_T$ sur $1 + n$ dans $1 \oplus \mathfrak{N}_{X'} \otimes \mathcal{O}_T$, et l'on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\ldots \to & (f_T)_*(\mathfrak{N}_{X'} \otimes \mathcal{O}_T) & \xrightarrow{\delta_T} & R^1 f_T(\mathcal{J}_T) & \to \ldots \\
& \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & \\
\ldots \to & (f_T)_*(1 \oplus \mathfrak{N}_{X'} \otimes \mathcal{O}_T) & \xrightarrow{\delta^*_T} & R^1 f_T(1 \oplus \mathcal{J}_T) & \to \ldots .
\end{array}$$

L'application α est un isomorphisme (comme les faisceaux $\mathcal{J}_T$ et $1 \oplus \mathcal{J}_T$ sont isomorphes sous la condition $\mathcal{J}^2 = 0$) et, comme β est bijectif (*N. B.* : β n'est pas nécessairement un homomorphisme), la proposition est démontrée si l'on démontre que le diagramme est commutatif. Pour

$$g \in \Gamma(X \times U, \mathfrak{N}_{X'} \otimes \mathcal{O}_T),$$

où U est un ouvert de T, il existe un recouvrement $\{V_i\}$ de $X \times U$ et des éléments

$$g_i \in \Gamma(V_i, \mathfrak{N}_X \oplus \mathcal{O}_T), \qquad \text{avec} \quad g_j - g_i \in \Gamma(V_i \cap V_j, \mathcal{J}_T),$$

tels que $\delta_T(g)$ est représenté par le cocycle $\gamma_{ij} = g_j - g_i$. Alors $\alpha . \delta_T(g)$ est représenté par le cocycle $\alpha . \gamma_{ij} = 1 + g_j - g_i$. Comme $g_i(g_j - g_i) = 0$, sous la condition $\mathfrak{N}_X . \mathcal{J} = 0$, on a

$$1 + g_j = (1 + g_i)(1 + g_j - g_i), \qquad \text{donc} \quad \alpha . \gamma_{ij} = (1 + g_j)/(1 + g_i),$$

ce qui prouve

$$\alpha . \delta_T(g) = \delta^*_T(1 + g) = \delta_T . \beta(g),$$

d'où la proposition

COROLLAIRE. — *Il y a des espaces vectoriels N et M sur k tels que pour tout k-préschéma T on ait la suite exacte*

$$0 \to N \otimes \mathcal{O}_T \to R^1 f_T(\mathcal{O}^*_{X_T}) \xrightarrow{\sigma} R^1 f_T(\mathcal{O}^*_{X'_T}) \to M \otimes \mathcal{O}_T.$$

On écrit N pour l'image de $\delta : \Gamma(X, \mathcal{O}_{X'}) \to H^1(X, \mathcal{J})$, et, par la formule de Künneth, $N \otimes \mathcal{O}_T$ est le noyau de σ. Comme les faisceaux $\mathcal{J}_T$ et $1 \oplus \mathcal{J}_T$ sont isomorphes, on a

$$R^2 f_T(1 \oplus \mathcal{J}_T) \simeq H^2(X, \mathcal{J}) \otimes \mathcal{O}_T,$$

et l'on pose $H^2(X, \mathcal{J}) = M$, d'où le corollaire.

Remarque. — Dans le cas des *courbes* algébriques on a $H^2(X, \mathcal{J}) = 0$, ce qui donne la suite exacte

$$0 \to N \otimes \mathcal{O}_T \to R^1 f_T(\mathcal{O}^*_{X_T}) \to R^1 f_T(\mathcal{O}^*_{X'_T}) \to 0.$$

7. Faisceaux principaux homogènes. — Soit T un espace topologique et soit $\mathcal{M}$ un faisceau de groupes abéliens (additifs) sur T. Un faisceau d'ensembles $\mathcal{A}$ sur T est dit *principal homogène sur* $\mathcal{M}$ si une application continue $\varphi : \mathcal{M} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est donnée telle que pour $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_t$, $t \in T$, il existe un $m \in \mathcal{M}_t$ et un seul, tel que $\varphi(m, a_1) = a_2$, et telle que $\mathcal{M}$ opère sur $\mathcal{A}$; c'est-à-dire si $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_t$, $a \in \mathcal{A}_t$, alors

$$\varphi(m_1, \varphi(m_2, a)) = \varphi(m_1 + m_2, a).$$

Un exemple naturel d'un faisceau principal homogène est le suivant. Soit

$$0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{F} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{G} \to 0$$

une suite exacte des faisceaux de groupes sur T. Soit $s \in \Gamma(T, \mathcal{G})$. Les éléments de $\mathcal{F}$ qui s'appliquent sur s forment un sous-faisceau (d'ensembles) $\mathcal{A} = \sigma^{-1}(s)$ de $\mathcal{F}$, qui est principal homogène sur $\mathcal{M}$ (et tout faisceau principal homogène s'obtient par le procédé indiqué).

Soit T un préschéma, soit $\mathcal{M}$ un faisceau localement libre sur T et soit $\mathcal{A}$ un faisceau principal homogène sur $\mathcal{M}$. Pour un T-préschéma T' on définit un faisceau $A_{T'}$ principal homogène sur $\mathcal{M}_{T'} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_{T'}$ de la manière évidente.

Lemme 5. — *Soit $\mathcal{M}$ un faisceau localement libre de rang fini sur le préschéma T. Soit $\mathcal{A}$ un faisceau principal homogène sur $\mathcal{M}$. Alors le foncteur $A(T') = \Gamma(T', \mathcal{A}_{T'})$* (de la catégorie des T-préschémas dans la catégorie des ensembles) *est représentable.*

Pour chaque $t \in T$ il existe un voisinage U de t et une bijection $\mathcal{M} \mid U \to \mathcal{A} \mid U$. Le foncteur $\Gamma(U', \mathcal{M}_{T'})$ (pour U' au-dessus de U) est représentable (*cf.* § 4). Comme le foncteur A est de nature locale (pour la définition, *cf.* [4], 5.4), ceci implique que le foncteur A est représentable (*loc. cit.*, corollaire 5.7), et le lemme est démontré.

8. Théorème. — *Soit X un k-schéma propre et soit $F_X(T)$ le foncteur de Picard de X. Supposons que toute composante connexe de X possède un point rationnel sur k. Si le foncteur de Picard $F_{X_{\mathrm{red}}}(T)$ du schéma X_{red} est représentable, le foncteur F_X est représentable.*

Comme X est propre, donc de type fini sur $\mathrm{Spec}(k)$, on peut l'écrire comme somme disjointe d'un nombre fini de parties connexes X_i. Si P_i représente le foncteur de Picard de X_i, le produit des P_i représente le foncteur F_X. On peut donc supposer X connexe.

Soit $\mathfrak{N}_X$ le faisceau des éléments nilpotents du faisceau structural $\mathcal{O}_X$. On définit des sous-schémas X_μ de X par

$$X_\mu = (X, \mathcal{O}_X/\mathfrak{N}_X^\mu).$$

Donc on a $X_1 = X_{\mathrm{red}}$. Comme X est de type fini, il existe un nombre n tel que $\mathfrak{N}_X^\mu = 0$ pour $\mu \geqq n$, donc $X_\mu = X$ dans ce cas. Le schéma X_μ est obtenu à partir de $X_{\mu+1}$ par réduction $\bmod \mathfrak{N}_X/\mathfrak{N}_X^{\mu+1} = \mathfrak{I}_\mu$ et comme $\mathfrak{N}_{X_{\mu+1}}.\mathfrak{I}_\mu = 0$, le théorème est démontré par induction si l'on démontre :

Soit X un k-schéma propre et connexe qui possède un point rationnel sur k. Soit $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{N}_X$ un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ tel que $\mathfrak{N}_X.\mathfrak{I} = 0$. Si le foncteur de Picard $F'(T)$ du schéma $X' = (X, \mathcal{O}_X/\mathfrak{I})$ est représentable, le foncteur de Picard $F(T)$ de X est représentable.

Comme $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{N}_X$ et $\mathfrak{N}_X.\mathfrak{I} = 0$, on peut appliquer le corollaire de la proposition (*cf.* § 6) : il y a des espaces vectoriels N et M et une suite exacte

$$(\bigstar) \qquad 0 \to M \otimes \mathcal{O}_T \to R^1 f_T(\mathcal{O}_{X_T}^\star) \xrightarrow{\sigma} R^1 f_T(\mathcal{O}_{X'_T}^\star) \xrightarrow{\alpha} N \otimes \mathcal{O}_T.$$

Soit F'' le foncteur qui associe à tout préschéma T l'image de $\sigma : F(T) \to F'(T)$. Alors F'' est défini par la suite exacte

$$(\bigstar\bigstar) \qquad 0 \to \Gamma(T, M \otimes \mathcal{O}_T) \to F(T) \to F''(T) \to 0.$$

Par hypothèse, le foncteur F' est représentable, disons $F'(T) = h_G(T)$. Le foncteur $\Gamma(T, N \otimes \mathcal{O}_T)$ est représentable (*cf.* § 4) ; soit L l'objet qui le représente. Soit H le noyau de l'homomorphisme de groupes $\alpha : G \to L$ (*cf.* § 3). Alors on a la suite exacte

$$0 \to h_H(T) \to h_G(T) \xrightarrow{\alpha_T} h_L(T)$$

(*cf.* lemme 2). Comme la suite ($\bigstar$) est exacte, ceci prouve que H représente le foncteur F''.

Soit $\eta \in F''(T)$. On désigne par F_η le « sous-foncteur » de $F_{/T}$ (où $F_{/T}$ est la restriction de F à la catégorie des T-préschémas, *cf.* [4], § 3) défini par : $F_\eta(T)$ est l'ensemble des éléments de $F(T)$ qui s'appliquent par σ sur η ; si T' est un T-préschéma (morphisme structural π), on définit $\pi^\star(\eta) = \eta' \in F''(T')$, et les ensembles $F_{\eta'}(T')$ pour T' un préschéma variable au-dessus de T

définissent un foncteur F_{η}. On considère $\mathfrak{A}$, le sous-faisceau des éléments de $R^1 f_T(\mathcal{O}^*_{X_T})$ qui s'appliquent par σ sur η [pour l'instant T et $\eta \in F''(T)$ restent fixés]. Comme $\sigma : F(T) \to F''(T)$ est surjectif, le faisceau $\mathfrak{A}$ est principal homogène sur $M \otimes \mathcal{O}_T = \mathfrak{M}$ (*cf.* § 7) et l'on a

$$\Gamma(T', \mathfrak{A}_{T'}) = F_{\eta'}(T').$$

Si l'on peut représenter pour chaque $\eta \in F''(T)$ le foncteur F_{η}, on dit que F est *représentable au-dessus* de F'' (*cf.* [4], définition 3.3). Comme

$$F_{\eta'}(T') \simeq \Gamma(T', \mathfrak{A}_{T'}),$$

le lemme 5 prouve que F est représentable au-dessus de F''. Comme F'' est représentable (au moyen de l'objet H), ceci implique que F est représentable (*loc. cit.*, lemme 3.6; F est représenté par une « extension » de H, qui correspond à la suite exacte (★★), par un espace affine de dimension $m = \dim N$), et le théorème est démontré.

REMARQUE. — Le schéma de Picard P de X est obtenu par extension d'un sous-schéma de groupes du schéma de Picard de X_{red} par un « groupe linéaire réduit ». C'est-à-dire qu'il existe un groupe algébrique affine L' et une suite (« strictement ») exacte

$$0 \to L' \to P \to G,$$

où G est le schéma de Picard de X_{red}. Dans le cas des courbes algébriques l'application $P \to G$ est surjective, et P est une extension de G lui-même (*cf.* § 6, remarque).

On remarquera qu'on peut démontrer facilement le lemme 5 et le théorème directement, c'est-à-dire sans utiliser les résultats de GROTHENDIECK sur la nature locale d'un foncteur et sur la notion de représentabilité d'un foncteur au-dessus d'un autre.

APPENDICE.

Voici des indications qui assurent que la jacobienne généralisée J d'une courbe algébrique, réduite, construite par ROSENLICHT ([4]) (*cf.* [9]), est la composante absolument connexe de l'élément neutre du schéma de Picard G de cette courbe ([5]) (sous l'hypothèse qu'on sait construire G).

Comme J donne déjà ensemblistement la « composante connexe » du groupe de Picard $H^1(X, \mathcal{O}^*_X)$ de X, le schéma qui correspond à J est le schéma réduit de la composante absolument connexe G_0 de l'élément neutre de G.

([4]) Pour le cas d'une courbe réductible, *cf.* [9]. p. 521, ou bien *cf.* [8], chap. 2.

([5]) A. GROTHENDIECK vient de me communiquer que la condition $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ suffit pour assurer que le schéma de Picard de X est réduit. Donc, en particulier, le schéma de Picard d'une courbe algébrique quelconque est réduit (*cf.* Appendice et 8, remarques).

L'application algebrique $\zeta : J \to \mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X)$ induit, par un procédé bien connu de CARTIER, une application linéaire $\zeta_* : \mathfrak{t}_J \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ de l'espace tangent à l'élément neutre e de J ($\mathfrak{t}_J$ est le dual de $\mathfrak{m}_{J,e}/\mathfrak{m}^2_{J,e}$) dans le groupe des classes de diviseurs additifs sur X. Soit $\sigma : G_0 \to (G_0)_{\mathrm{red}} = J$ la réduction de $G_0 \bmod \mathfrak{N}_G$. L'application algébrique $\xi : G_0 \to \mathrm{Pic}(X)$ factorise ζ, donc on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{t}_J \arrow[rr, "\zeta_*"] \arrow[dr, "\sigma^*"'] & & H^1(X, \mathcal{O}_X) \\ & \mathfrak{t}_G \arrow[ur, "\xi_*"'] & \end{tikzcd}$$

On sait que ζ_* est bijectif [comme ζ_* est l'application inverse d'une application analogue construite avec des différentielles, *cf.* [8], 2.4.4; ou bien : ζ_* est injectif et $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = \pi = \dim J = \dim \mathfrak{t}_J$]. En particulier, ζ_* est surjectif, donc $\sigma^* : \mathfrak{t}_J \to \mathfrak{t}_G$ est surjectif. On désigne par $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de l'anneau local de l'élément neutre de G, par $\mathfrak{a}$ l'idéal des éléments nilpotents de $\mathfrak{m}$ et par $\mathfrak{m}_{\mathrm{red}} = \mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ l'idéal maximal de l'anneau local de l'élément neutre de J. Comme σ^* est surjectif, l'application

$$\sigma_* : \quad \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{m}_{\mathrm{red}}/\mathfrak{m}^2_{\mathrm{red}}$$

est injective, donc $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}^2$.

LEMME 6. — *Soit A un anneau local nœthérien, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal nilpotent de A tel que $A/\mathfrak{a} = A_{\mathrm{red}}$ est régulier. Alors $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}^2$ implique $\mathfrak{a} = \{0\}$ (donc $A = A_{\mathrm{red}}$).*

« A_{red} est régulier » implique $\dim A_{\mathrm{red}} = \dim(\mathfrak{m}_{\mathrm{red}}/\mathfrak{m}^2_{\mathrm{red}})$, « $\mathfrak{a}$ est nilpotent » implique $\dim A = \dim A_{\mathrm{red}}$ et « $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}^2$ » implique

$$\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim(\mathfrak{m}_{\mathrm{red}}/\mathfrak{m}^2_{\mathrm{red}}).$$

Donc $\dim A = \dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$, ou bien A est régulier. Donc A est intègre, $\mathfrak{a} = \{0\}$, et le lemme est démontré.

Comme J est une variété de groupe et comme σ_* est injectif, les conditions du lemme sont satisfaites, donc $\mathfrak{a} = \{0\}$. Par « translation » on démontre que $\mathfrak{N}_G = 0$, donc $\sigma : G_0 \to J$ est un isomorphisme.

REMARQUES. — Soit $\xi : G \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ la variété de Picard d'une variété X. On sait que dans ce cas $\xi_* : \mathfrak{t}_G \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est injective (*cf.* [13], chap. I, théorèmes 1 et 3). Donc les arguments ci-dessus prouvent que la condition

$$\dim G = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

suffit pour affirmer que G donne la composante absolument connexe de l'élément neutre du schéma de Picard de X.

En général, la condition que l'application tangente soit un isomorphisme ne suffit pas pour assurer que la réduction d'un schéma soit un isomorphisme.