BULLETIN DE LA S. M. F.

A.H.M. LEVELT

Sur l'expression de l'intégrale élliptique complète par la fonction hypergéométrique, qui résulte de l'étude de l'équation le Tricomi

Bulletin de la S. M. F., tome 90 (1962), p. 157-160

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1962__90__157_0>

Bull. Soc. math. France,
90, 1962, p. 157 à 160.

SUR L'EXPRESSION DE L'INTÉGRALE ÉLLIPTIQUE COMPLÈTE PAR LA FONCTION HYPERGONOMÉTRIQUE, QUI RÉSULTE DE L'ÉTUDE DE L'ÉQUATION LE TRICOMI.

PAR

A. H. M. LEVELT (*).

L'équivalence des propositions 68 et 69 du travail précédent de J. LERAY se trouve être un cas particulier du lemme suivant :

LEMME. — *Si c est un nombre complexe* $\neq -1, -2, \ldots,$ *on a l'identité*

$$(1)\qquad (1+14x+x^2)^{\frac{3}{2}c+\frac{1}{4}} F\left(3c+\frac{1}{2}, 2c+\frac{1}{2}; c+1; x\right) = (1-z)^{c+\frac{1}{6}} F\left(c+\frac{1}{6}, \frac{1}{6}; c+1; z\right),$$

où $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ *désigne la fonction hypergéométrique de Gauss, et les variables* x *et* z *sont liés par*

$$(2)\qquad \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{-27x(1-x)^4}{(x^2+14x+1)^3}.$$

La définition des fonctions multiformes entrant en jeu doit être précisée comme suit : la relation (2) définit z comme fonction uniforme de x quand $|x|$ est suffisamment petit, de façon que $z \leqq 0$ pour $x \geqq 0$. Les fonctions $(1+14x+x^2)^{\frac{3}{2}c+\frac{1}{4}}$ et $(1-z)^{c+\frac{1}{6}}$ sont telles qu'elles aient la limite 1 quand x s'approche de 0.

Avant d'indiquer une démonstration de ce lemme, appliquons-le au problème traité par J. LERAY : considérons l'intégrale elliptique complète

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}},$$

(*) L'auteur est boursier de l'Organisation Néerlandaise pour le Développement de la Recherche Scientifique (Z. W. O.).

où g_2, g_3 sont réels, $g_2^3 \neq 27 g_3^2$ et e_1 est le plus grand zéro réel de $4t^3 - g_2 t - g_3$; on sait que

$$\omega_1 = \frac{\pi}{\beta} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; x\right), \tag{3}$$

$x < 0$ et $\beta > 0$ étant donnés par

$$g_2 = \frac{1}{12}\beta^4 (x^2 + 14x + 1), \qquad g_3 = \frac{1}{216}\beta^6 (x+1)(x^2 - 34x + 1) \quad (^1). \tag{4}$$

En appliquant le cas particulier $c = 0$ du lemme précédent à la relation (3), nous obtenons

$$\omega_1 = \frac{\pi}{\beta}(1 + 14x + x^2)^{-\frac{1}{4}}(1-z)^{\frac{1}{6}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}; 1; z\right), \tag{5}$$

où x et z sont liés par la relation (2), qu'on met aisément sous la forme

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(x+1)(x^2 - 34x + 1)}{(x^2 + 14x + 1)^{\frac{3}{2}}},$$

de sorte que nous trouvons

$$z = \frac{g_3 - \left(\frac{1}{3} g_2\right)^{\frac{3}{2}}}{g_3 + \left(\frac{1}{3} g_2\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}(1-z)^{\frac{1}{6}} &= \left(\frac{2(x^2 + 14x + 1)^{\frac{3}{2}}}{(x+1)(x^2 - 34x + 1) + (x^2 + 14x + 1)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}} \\ &= \frac{\beta (x^2 + 12x + 1)^{\frac{1}{4}}}{108^{\frac{1}{6}}\left(g_3 + \left(\frac{1}{3} g_2\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}}.\end{aligned} \tag{7}$$

L'équivalence des propositions **68** et **69** de J. Leray est exprimée par la relation

$$\begin{aligned}&\int_{e_1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}} \\ &\quad = \frac{\pi}{3^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{3}}}\left(g_3 + \left(\frac{1}{3} g_2\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{6}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}; 1; \frac{g_3 - \left(\frac{1}{3} g_2\right)^{\frac{3}{2}}}{g_3 + \left(\frac{1}{3} g_2\right)^{\frac{3}{2}}}\right),\end{aligned} \tag{8}$$

(1) Whittaker (E. T.) and Watson (G. W.). — *A course of modern analysis*, 4th edition. — Cambridge, at the University Press, 1935. *Voir* le paragraphe 22.301, p. 499, et l'exemple 5, p. 516.

déduite de (5), (6) et (7). Les fonctions

$$g_2 \to \left(\frac{1}{3} g_2\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad (g_2, g_3) \to \left(g_3 + \left(\frac{1}{3} g_2\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{6}}$$

sont définies de façon qu'elles prennent des valeurs positives quand $g_2 > 0$, respectivement $g_2 > 0$ et $g_3 > 0$.

Démonstration du lemme. — La relation (1) résulte de la formule

$$(9) \quad F\left(3c + \frac{1}{2}, 2c + \frac{1}{2}; c + 1; x\right)$$
$$= (1 + 14x + x^2)^{-\frac{3}{2}c - \frac{1}{4}} F\left(\frac{1}{2}c + \frac{1}{12}, \frac{1}{2}c + \frac{5}{12}; c + 1; \frac{108x(1-x)^4}{(x^2 + 14x + 1)^3}\right)$$

quand on porte dans le second membre le cas particulier $a = c + \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{6}$ de la formule bien connue de Gauss :

$$(10) \quad F(a, b; 1 + a - b; z)$$
$$= (1 - z)^{-a} F\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a - b; 1 + a - b; \frac{-4z}{(1-z)^2}\right).$$

La relation (9) a été déjà trouvée par É. Goursat ([2]).

La démonstration de (9) donnée par Goursat ressemble à celle de J. Leray : il prouve que la fonction de x figurant au second membre de (9) est une solution de l'équation différentielle hypergéométrique pour des valeurs convenables des paramètres.

On doit à Riemann ([3]) une démonstration plus claire : il a découvert les transformations du troisième degré des fonctions hypergéométriques.

Indiquons maintenant une démonstration de la relation (9) en suivant les idées de Riemann et en conservant ses notations.

La fonction $F(3c + 1, 2c + 1; c + 1; x)$ est un représentant de la classe $P(c, c, 4c, x)$, tandis que $P\left(c, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, z\right)$ est représentée

---

([2]) Goursat (Édouard). — Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, Série 2, t. 10, 1881, Supplément, p. 142. *Voir* la formule (136). La formule en question contient une erreur de signe.

([3]) Riemann (Bernhard). — Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen, *Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, herausgegeben von Heinrich Weber, 2. Auflage. — New York, Dover Publications, 1953, p. 67-83. Les pages 76, 77 et 78 de cet article contiennent une théorie complète mais assez condensée, des transformations quadratiques et cubiques.

par $F\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{12}, \frac{1}{2}c+\frac{5}{12}; c+1; z\right)$. Il s'agit de trouver une relation entre $P(c, c, 4c, x)$ et $P\left(c, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, z\right)$ quand x et z sont liés par une transformation algébrique convenable. De la définition de $P(\lambda, \mu, \nu, x)$ on déduit que $P(c, c, 4c, x)$ et $P(c, 4c, c, x_1)$ représentent les mêmes fonctions quand $x_1 - 1 = (x-1)^{-1}$. Ensuite on tire du tableau I de la page 76 de RIEMANN que $P(c, 4c, c, x_1)$ et $P(2c, 2c, 2c, x_3)$ représentent les mêmes fonctions si $4x_1(1-x_1) = (4x_3(1-x_3))^{-1}$. Du tableau II résulte la même assertion pour $P(2c, 2c, 2c, x_3)$ et $P\left(\frac{1}{3}, c, \frac{1}{2}, x_5\right)$ si $x_5 = 4(1-x_3+x_3^2)^3/27x_3^2(1-x_3)^2$. Finalement on trouve que $P\left(\frac{1}{3}, c, \frac{1}{2}, x_5\right)$ et $P\left(c, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, z\right)$ représentent les mêmes fonctions quand $z = x_5^{-1}$. En composant les transformations consécutives, on a $P(c, c, 4c, x)$ exprimée par $P\left(c, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, z\right)$ quand

$$z = 108x(1-x)^4/(x^2+14x+1)^3.$$

La formule (9) est une conséquence facile de ce fait.

(Manuscrit reçu le 22 novembre 1961.)

A. H. M. LEVELT,
97, boulevard Jean-Jaurès,
Fresnes (Seine).