JEAN-LOUIS KOSZUL

Domaines bornés homogènes et orbites de groupes de transformations affines

Bulletin de la S. M. F., tome 89 (1961), p. 515-533
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__515_0>

Bull. Soc. math. France,
89, 1961, p. 515 à 533.

DOMAINES BORNÉS HOMOGÈNES ET ORBITES DE GROUPES DE TRANSFORMATIONS AFFINES ;

PAR

JEAN-LOUIS KOSZUL

(Strasbourg) [1].

Sur un espace homogène complexe, un volume invariant définit avec la structure complexe une forme hermitienne invariante (forme hermitienne canonique de [5]). Si l'espace homogène est holomorphiquement isomorphe à un domaine borné d'un espace C^n, cette forme hermitienne est définie positive, car elle coïncide avec la métrique de Bergmann du domaine *cf.* [1]). Le but du présent travail est de démontrer la réciproque de cette proposition pour une classe d'espaces homogènes complexes suggérée par les exemples de domaines bornés homogènes non symétriques de PJATECKIJ-ŠAPIRO [7]. Cette classe est constituée par certaines orbites ouvertes de groupes de transformations affines complexes. Elle contient, à notre connaissance, tous les domaines bornés homogènes rencontrés jusqu'ici.

La question de savoir si un espace homogène complexe, dont la forme hermitienne canonique est définie positive, est isomorphe à un domaine borné est abordée ici par l'intermédiaire d'un problème de nature analogue, mais sensiblement plus facile, qui concerne la forme bilinéaire invariante définie sur un espace homogène réel par la donnée d'un volume invariant (ou relativement invariant) et d'une connexion plate invariante. On démontre que, si cette forme bilinéaire est définie positive, alors l'espace homogène, muni de sa connexion plate, est isomorphe à un ouvert convexe ne contenant pas de droite dans un espace vectoriel réel. Ce résultat permet de résoudre le problème initial pour les espaces homogènes complexes obtenus en définissant de la manière naturelle une structure complexe dans la variété des

---

[1] Ce travail a été fait à l'Institute for advanced Study, à Princeton, pendant un séjour de l'auteur financé par la National Science Foundation.

vecteurs d'un espace homogène réel muni d'une connexion plate invariante et plus généralement, pour la classe d'espaces homogènes complexes dont il a été question plus haut.

1. Volumes relativement invariants et connexions plates. — Soient G un groupe de Lie connexe et M une variété sur laquelle G opère différentiablement et transitivement à gauche. Par « volume » sur un ouvert U de M, on entend une forme différentielle alternée sur U, de degré égal à la dimension de M et différente de o en tout point de U. On dira qu'un sous-faisceau non vide F du faisceau des germes de volumes sur M est un faisceau de germes de volumes relativement invariants s'il vérifie les conditions suivantes :

a. si σ est une section de F sur un ouvert U, pour toute fonction numérique f localement constante sans zéro sur U, $f\sigma$ est une section de F sur U;

b. si σ et σ' sont deux sections de F sur U, la fonction f définie par $\sigma' = f\sigma$ est localement constante sur U;

c. si σ est une section de F sur U, alors, pour tout $s \in G$, $s\sigma$ est une section de F sur sU.

Tout volume v relativement invariant par G sur M définit un faisceau de germes de volumes relativement invariants dont les sections sur un ouvert U sont les volumes fv, où f est une fonction localement constante et sans zéro sur U. Si M est simplement connexe tout faisceau de germes de volumes relativement invariants sur M s'obtient ainsi. D'une manière générale un faisceau de germes de volumes relativement invariants sur M correspond à un volume sur le revêtement universel de M relativement invariant par le revêtement universel de G.

Supposons donnée sur M une connexion linéaire invariante par G. Si la trace de son tenseur de courbure est identiquement nulle, il existe au voisinage de tout point de M un volume dont la différentielle covariante est nulle, et il existe un faisceau de germes de volumes relativement invariants sur M dont les sections sont les volumes ayant une différentielle nulle.

Dans ce qui suit, on désignera par D une connexion linéaire sur M invariante par G et *localement plate*, c'est-à-dire ayant une courbure et une torsion nulle. On notera F_D le faisceau des germes de volumes ayant une différentielle covariante nulle. Soit F faisceau de germes de volumes relativement invariants sur M; si v et v_D sont respectivement des sections de F et de F_D sur un ouvert $U \subset M$, la fonction f telle que $v = fv_D$ sur U est définie modulo un facteur localement constant par les faisceaux F et F_D. Par suite, il existe sur M une forme différentielle fermée α de degré 1 et une seule, telle que $\alpha = d\operatorname{Log} f$ sur l'ouvert U lorsque f est une fonction numérique sur U telle que le produit par f d'une section de F_D sur U soit une section de F sur U. Cette forme α est visiblement invariante par G du fait que F et F_D vérifient la condition (c). Réciproquement, si α est une forme différentielle de degré 1 sur M, fermée et invariante par G, il existe un faisceau de germes de volumes relativement invariants sur M, et un seul, qui admet pour section tout volume de la forme $f v_D$, où $d \operatorname{Log} f = \alpha$ et où v_D est un volume dont la différentielle covariante est nulle.

Soit α une forme différentielle de degré 1 sur M, fermée et invariante par G. La torsion de D étant nulle, la différentielle covariante $D\alpha$ de α est une forme bilinéaire symétrique sur M. Puisque α et D sont invariants par G, il en est de même de $D\alpha$. Soient a_1, a_1, ..., a_n des *coordonnées affines* sur un ouvert $U \subset M$, c'est-à-dire des coordonnés sur U telles que $D(da_i) = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Soit $K\, da_1 \wedge da_2 \wedge \ldots \wedge da_n$ un volume sur U, section du faisceau associé à α, c'est-à-dire tel que $d \operatorname{Log} K = \alpha$. On a alors

$$D\alpha = \sum_{ij} \frac{d^2 \operatorname{Log} K}{da_i\, da_j}\, da_i\, da_j \quad \text{sur } U.$$

Dans la suite, on s'intéressera particulièrement au cas où $D\alpha$ est définie positive.

2. Orbites ouvertes des représentations affines. — Soient G un groupe de Lie connexe et V un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie. Par *représentation affine* de G dans V, on entendra une loi d'opération à gauche de G dans V telle que, pour tout $s \in G$, l'application $a \to sa$ de V dans V soit une tranformation affine. Étant donnée une réprésentation affine de G dans V, on définit une représentation linéaire $\mathbf{f}$ de G dans V, en posant $\mathbf{f}(s)\, a = sa - s0$ quels que soient $s \in G$ et $a \in V$; on définit une application $\mathbf{q}$ de G dans V en posant $\mathbf{q}(s) = s0$ pour tout $s \in G$. Quels que soient s, $t \in G$, on a

$$\mathbf{f}(s)\, \mathbf{q}(t) + \mathbf{q}(s) = \mathbf{q}(st).$$

Réciproquement, si une application $\mathbf{q}$ de G dans V et une représentation linéaire $\mathbf{f}$ de G dans V vérifient cette condition, en posant $sa = \mathbf{f}(s) a + \mathbf{q}(s)$, on définit une représentation affine de G dans V qui sera notée $(\mathbf{f}, \mathbf{q})$. On dira qu'une représentation affine $(\mathbf{f}, \mathbf{q})$ de G dans V est *complexe* si V possède une structure d'espace vectoriel complexe et si $\mathbf{f}$ est une représentation linéaire complexe. Dans ce qui suit, on supposera que V est un espace vectoriel réel et l'on désignera par ζ la forme différentielle canonique de V, c'est-à-dire la forme différentielle de degré 1 sur la variété V, à valeurs dans l'espace vectoriel V, différentielle de l'application identique de V dans V. Soit $(\mathbf{f}, \mathbf{q})$ une représentation affine de G dans V. On notera f la représentation linéaire de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G définie par $\mathbf{f}$ et l'on notera q la restriction à $\mathfrak{g}$ de la différentielle de $\mathbf{q}$. De la relation

$$\mathbf{f}(s)\, \mathbf{q}(t) + \mathbf{q}(s) = \mathbf{q}(st) \quad \text{quels que soient } s,\ t \in G,$$

il résulte que

$$f(x)\, q(y) - f(y)\, q(x) = q([x, y]) \tag{2.1}$$

quels que soient x, $y \in \mathfrak{g}$.

Pour tout $a \in V$, soit P_a le champ de vecteurs constant défini par a, c'est-à-dire tel que $\zeta(P_a)$ soit l'application constante de V sur a. Pour tout endomorphisme β de V, soit R_β le champ de vecteurs linéaire sur V défini par la condition $\zeta(R_\beta) = \beta$. Si $x \rightarrow L_x$ désigne l'homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur V définie par la loi d'opération de G dans V, alors pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on a

$$(2.2) \qquad L_x = P_{q(x)} - R_{f(x)}.$$

Pour tout point $a \in V$, la dimension de l'orbite de a est égale à la dimension de l'image de l'application linéaire $x \rightarrow q(x) - f(x)\,a$ de $\mathfrak{g}$ dans V. Pour que l'orbite de a soit ouverte, il faut et il suffit que cette application soit surjective. En particulier, l'orbite de o est ouverte lorsque q est surjective.

Dans ce qui suit, on suppose que Ω est une orbite ouverte de G dans V. Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de V, et soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ la base duale. On note $\mathfrak{R}$ le corps des fractions rationnelles à coefficients réels en $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $\mathfrak{R}_\Omega$ l'algèbre des restrictions à Ω des éléments de $\mathfrak{R}$ réguliers sur Ω. Puisqu'il existe une orbite ouverte, il existe des éléments $x_1\, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$ tels que les champs de vecteurs $L_{x_1}, L_{x_2}, \ldots, L_{x_n}$ soient linéairement indépendants sur $\mathfrak{R}$. Puisque les champs L_{x_i} sont des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathfrak{R}$ des champs P_{e_i}, ceci prouve que chaque champ P_{e_i} est combinaison linéaire à cofficients dans $\mathfrak{R}$ de L_{x_i}. Soit α une forme différentielle fermée de dégré 1 sur Ω invariante par G. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\alpha(L_x)$ est une constante et, par conséquent, $\alpha(P_{e_i}) \in \mathfrak{R}_\Omega$ quel que soit i. Ceci prouve que α *est de la forme* $\sum_i A_i\, da_i$, *avec* $A_i \in \mathfrak{R}_\Omega$ pour tout i. La connexion plate naturelle de V induit sur Ω une connexion plate D invariante par G. *La forme bilinéaire symétrique* $D\alpha = \sum_{i,j} \frac{dA_i}{da_j}\, da_i da_j$ *est à coefficients dans* $\mathfrak{R}_\Omega$. Si cette forme n'est pas dégénérée, elle définit un volume $K\, da_1 \wedge da_2 \wedge \ldots \wedge da_n$ sur Ω invariant par G pour lequel $K^2 \in \mathfrak{R}_\Omega$. Ces remarques seront utilisées au paragraphe 4.

On aura également besoin d'une formule donnant la valeur de la forme bilinéaire $D\alpha$ au point o, lorsque $o \in \Omega$. Quels que soient $x, y \in \mathfrak{g}$, on a

$$(D\alpha)(L_x, L_y) = L_x . \alpha(L_y) - \alpha(D_{L_x} L_y),$$

où D_{L_x} désigne la dérivation covariante par rapport au champ de vecteurs L_x. Comme $\alpha(L_y)$ est une constante,

$$(D\alpha)(L_x, L_y) = - \alpha(D_{L_x} L_y).$$

Les champs de vecteurs constants ayant une différentielle covariante nulle,

$$D_{L_x} L_y = - D_{P_{q(x)}} R_f(x) = - P_{f(y) q(x)} \quad \text{au point o.}$$

Soient α_0 et $D\alpha_0$ respectivement les formes linéaires et bilinéaires sur V définies par

$$\alpha_0(\zeta u) = \alpha(u) \qquad \text{et} \qquad (D\alpha_0)(\zeta u, \zeta v) = (D\alpha)(u, v)$$

quels que soient les vecteurs $u, v \in T_0(V)$. Le résultat précédent montre que, quels que soient $x, y \in \mathfrak{g}$, on a

$$(2.3) \qquad (D\alpha_0)(q(x), q(y)) = \alpha_0(f(y)\, q(x)),$$

ce qui détermine $D\alpha_0$ puisque q est surjectif.

3. **Champ de vecteurs H.** — Les lemmes qui suivent permettent moyennant certaines conditions, d'associer à tout point d'une orbite ouverte de représentation affine un point frontière de cette orbite. Ils joueront un rôle essentiel au paragraphe 4.

Soient G un groupe de Lie connexe et M une variété où G opère différentiablement et transitivement. Soit D une connexion linéaire localement plate sur M, invariante par G. Dans le fibre vectoriel $T(M)$ des vecteurs de M, soit N un sous-fibré vectoriel dont les fibres sont de dimension > 0. On suppose N stable par G et stable par transport parallèle. Soit α une forme fermée de degré 1 sur M invariante par G telle que la restriction de $\eta = D\alpha$ à N soit non dégénérée. Il existe alors sur M une section H de N et une seule telle que $\eta(H, X) = \alpha(X)$ pour toute section X de N. Ce champ de vecteurs H est invariant par G et $\alpha(H)$ est donc une constante.

(3.1) Lemme. — $D_H H = -H$.

Comme la courbure et la torsion de D sont nulles, quels que soient les champs de vecteurs X et Y sur M, on a

$$\begin{aligned}(D_H\eta)(X, Y) &= (D_H D_X \alpha)(Y) - (D_{D_H X}\alpha)(Y)\\ &= (D_X D_H \alpha)(Y) - (D_{D_X H}\alpha)(Y)\\ &= (D_X D_H \alpha)(Y) - \eta(D_X H, Y).\end{aligned}$$

Si Y est une section de N, alors

$$(D_H\alpha)(Y) = \eta(H, Y) = \alpha(Y).$$

Comme N est stable par transport paralèlle, il en résulte

$$(D_X D_H \eta)(Y) = (D_X\alpha)(Y) = \eta(X, Y)$$

pour tout champ de vecteurs X. Ainsi, pour tout champ de vecteurs X et toute section Y de N, on a

$$(D_H\eta)(X, Y) = \eta(X, Y) - \eta(D_X H, Y).$$

Il en résulte que, si X et Y sont des sections de N, alors

$$\eta(D_X H, Y) = \eta(X, D_Y H).$$

Pour toute section X de N, on a donc

$$\eta(D_H H, X) = \eta(H, D_X H).$$

Puisque $D_X H$ est encore une section de N, on obtient

$$\eta(D_H H, X) = \alpha(D_X H) = X\alpha(H) - \eta(X, H) = -\eta(X, H).$$

La forme η étant non dégénérée sur N et $D_H H$ étant une section de N, ceci prouve que $D_H H = -H$.

(3.2) Lemme. — *Pour tout point $a \in M$, il existe dans M un arc de géodésique φ défini sur l'intervalle ouvert $[-\infty, 1]$ tel que $\varphi(0) = a$ et $\varphi'(0) = H_a$. Lorsque s tend vers 1, le point $\varphi(s)$ ne tend pas vers un point de M.*

Le champ de vecteurs H étant invariant par le groupe transitif G, il existe une courbe différentiable $\psi : R \to M$ telle que $\psi(0) = a$ et $\psi'(t) = H_{\psi(t)}$ pour tout $t \in R$. Posons $\varphi(s) = \psi(\mathrm{Log}(1-s)^{-1})$ pour tout $s < 1$. On a

$$\varphi'(s) = (1-s)^{-1} H_{\varphi(s)}$$

et, par suite,

$$D_{\varphi'(s)}\varphi'(s) = (1-s)D_{\varphi'(s)}H_{\varphi(s)} + \frac{d}{ds}(1-s)^{-1}H_{\varphi(s)} = (1-s)^{-2}(D_H H + H)_{\varphi(s)}.$$

Compte tenu du lemme (3.1), ceci démontre la première assertion. Si $\varphi(s)$ tendait vers un point $b \in M$ lorsque s tend vers 1, ce point b serait la limite de $\psi(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ et, par suite, on aurait $H_b = 0$. Le champ de vecteurs H étant invariant par G, on aurait $H = 0$, donc $\alpha(X) = 0$ et $\eta(X, Y) = (D\alpha)(X, Y) = 0$ quelles que soient les sections X et Y de N. Or ceci est impossible puisqu'on a supposé que η était non dégénérée sur N et que la dimension des fibres de N était > 0.

Dans ce qui suit, on conserve les hypothèses et les notations précédentes, mais on suppose que M est une orbite ouverte pour une représentation affine $(\mathbf{f}, \mathbf{q})$ de G dans un espace vectoriel réel V et que la connexion invariante D est la connexion induite sur M par la connexion plate naturelle de V. Le lemme (3.2) se traduit alors comme suit :

(3.3) Lemme. — *Pour tout point $a \in M$, la demi-droite $a + t\zeta(H_a)$, où $t < 1$, est contenue dans M et le point $a + \zeta(H_a)$ est un point frontière de M.*

Le point $a' = a + \zeta(H_a)$ étant un point frontière de M, la dimension du sous-groupe de stabilité de a' est plus grande que la dimension du sous-groupe de stabilité de a. Effectivement, on constate facilement que le sous-groupe de stabilité de a' contient le sous-groupe de stabilité de a, ainsi que tout sous-groupe à un paramètre engendré dans G par un élément $x \in \mathfrak{g}$ tel que $L_x - H$ soit nul au point a.

Supposons que $N = T(M)$, la forme $D\alpha$ étant donc non dégénérée. Dans ce cas, s'il existe un point $a^0 \in V$ invariant par G, autrement dit si la représentation affine $(\mathbf{f}, \mathbf{q})$ est équivalente à une représentation linéaire, alors pour tout point $a \in M$, on a $a^0 = a + \zeta(H_a)$. Pour établir ce résultat, il suffira de traiter le cas où $a_0 = 0$, c'est-à-dire le cas où $\mathbf{q} = 0$. Si R_ξ désigne le champ de vecteurs linéaires tel que $\zeta(R_\xi)$ soit la bijection identique de V, alors pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned}(D\alpha)(R_\xi, L_x) &= R_\xi\, \alpha(L_x) - \alpha(D_{R_\xi} L_x)\\ &= \alpha(R_{f(x)}) = -\alpha(L_x) = -(D\alpha)(H, L_x).\end{aligned}$$

Puisque $D\alpha$ est non dégénérée, ceci prouve que $H = -R_\xi$, et par suite $a + \zeta(H_a) = 0$ pour tout $a \in M$.

Ce qui précède montre en particulier que si la forme $D\alpha$ est non dégénérée il existe au plus un point de V invariant par G. On indiquera au paragraphe 6 un exemple dans lequel tous les points frontières de l'orbite ouverte M sont de la forme $a + \zeta(H_a)$ avec $a \in M$.

4. Orbites à forme bilinéaire définie positive.. — Dans ce paragraphe on désigne par G un groupe de Lie connexe et par $(\mathbf{f}, \mathbf{q})$ une représentation affine de G dans un espace vectoriel réel V de dimension finie. On suppose qu'il existe une orbite ouverte Ω de G dans V et que α est une forme différentielle fermée de degré 1, invariante par G sur Ω. Étant donnés deux points a, $b \in \Omega$ tels que le segment d'extrémités a et b soit dans Ω, on notera $\int_a^b \alpha$ l'intégrale de α sur le segment orienté d'origine a et d'extrémité b.

(4.1) Lemme. — *Soient $a \in \Omega$, $b \in V$ tels que $a + \theta b \in \Omega$ pour $0 \leqq \theta < 1$ et que $a + b \notin \Omega$. Si $D\alpha$ est définie positive alors $\int_a^{a+\theta b} \alpha \to +\infty$ lorsque $\theta \to 1$.*

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ une base de formes linéaires sur V. On a vu (§ 2) que $\alpha = \sum_i A_i\, da_i$, où les A_i sont des fractions rationnelles en $a_1, a_2, \ldots a_n$, régulières sur Ω. Par suite,

$$\int_a^{a+\theta b} \alpha = \int_0^\theta F(t)\, dt,$$

où F est une fraction rationnelle en t, régulière pour $0 \leqq t < 1$. Pour la métrique riemannienne

$$D\alpha = \frac{dA_i}{da_j} da_i \, da_j,$$

la longueur du segment d'extrémités a et $a + \theta b$ est

$$l(\theta) = \int_0^\theta \left(\frac{dF}{dt}\right)^{\frac{1}{2}} dt,$$

la fonction $\frac{dF}{dt}$ étant positive du fait que $D\alpha$ est définie positive. Comme la métrique riemannienne $D\alpha$ sur Ω est invariante par le groupe transitif G, cette métrique est complète. Puisque $a + b \notin \Omega$, ceci entraîne que $l(\theta) \to \infty$ lorsque $\theta \to 1$. Il en résulte que, si s est l'ordre de multiplicité de 1 comme pôle de F, on a

$$\frac{s+1}{2} \geqq 1, \qquad \text{donc} \quad s \geqq 1,$$

ce qui démontre le lemme.

(4.2) Lemme. — *Si la forme $D\alpha$ est définie positive, alors Ω est un convexe de V.*

On désignera par $env(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ l'enveloppe convexe d'une famille de points $b_1, b_2, \ldots, b_p \in V$. Puisque Ω est un ouvert connexe, pour prouver que Ω est convexe, il suffit de prouver que si a, b. $c \in \Omega$ et si $env(a, b) \subset \Omega$ et $env(a, c) \subset \Omega$, alors $env(a, b, c) \subset \Omega$. Pour simplifier l'écriture, on pourra supposer que a est l'origine O de V. Soit I l'ensemble des nombres réels t tels que $env(0. b, tc) \subset \Omega$; c'est un intervalle ouvert contenant 0. Pour tout point $c' = tc$ avec $t \in I$, il existe un voisinage ouvert simplement connexe de $env(0, b, c')$ contenu dans Ω. Soit f la primitive de α sur U qui est nulle en 0. Puisque sur U la forme $D\alpha$ est égale à $\sum_{ij} \frac{d^2}{da_i \, da_j} da_i \, da_j$, où les a_i désignent comme plus haut une base de formes linéaires sur V, et $D\alpha$ est définie positive, la fonction f est convexe sur U. Pour tout $e \in env(0, b, c')$ on a donc

$$\int_0^e \alpha = f(e) \leqq \sup(0, f(b), f(c')) = \sup\left(0, \int_0^b \alpha, \int_0^{c'} \alpha\right).$$

Si, de plus, $0 \leqq t \leqq 1$, alors

$$\int_0^{c'} \alpha \leqq \sup\left(0, \int_0^c \alpha\right)$$

et pour tout point $e \in env(o, b, c')$ on aura donc

$$\int_0^{e} \alpha \leqq \sup\left(o, \int_0^{b} \alpha, \int_0^{c} \alpha\right)$$

Supposons alors que l'intervalle I admette une plus petite borne supérieure $\nu \leqq 1$ posons $c^0 = \nu c$. Il existe alors un point d de $env(b, c^0)$ qui n'est pas dans Ω et tout point θd avec $o \leqq \theta < 1$ appartient à Ω. Ce qui précède montre que, pour $o \leqq \theta < 1$ on aurait

$$\int_0^{\theta d} \alpha \leqq \sup\left(o, \int_0^{b} \alpha, \int_0^{c} \alpha\right),$$

ce qui en contradiction avec le lemme (4.1). Par suite, $1 \in I$ et $env(o, b, c) \subset \Omega$, ce qui achève la démonstration.

(4.3) Lemme. — *Si la forme $D\alpha$ est définie positive, le convexe Ω ne contient pas de droite.*

On peut supposer que Ω contient l'origine o de V. Puisque Ω est convexe, la réunion des droites passant par o et contenues dans Ω est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{n}$ de V et pour tout point $a \in V$, les droites passant par a et contenues dans Ω sont les parallèles à $\mathfrak{n}$ passant par a. Soit N le sous-fibré de l'espace fibré vectoriel des vecteurs de Ω constitué par les vecteurs u « parallèles à $\mathfrak{n}$ », c'est-à-dire tels que $\zeta(u) \in \mathfrak{n}$. Puisque les opérations de G dans V sont des transformations affines, N est stable par G. La forme $D\alpha$ étant définie positive, il existe une section H de N telle que $(D\alpha)(H, X) = \alpha(X)$ pour toute section X de N. Compte tenu du lemme (3.3), si $\mathfrak{n}$ était différent de (o), le point $\zeta(H_0)$ appartiendrait à la frontière de Ω, ce qui est impossible puisque $\zeta(H_0) \in \mathfrak{n}$.

Les deux lemmes qui suivent ne seront utilisés qu'au paragraphe 7. On y suppose que $o \in \Omega$, et l'on note comme plus haut par α_0 la forme linéaire sur V telle que $\alpha_0(\zeta u) = \alpha(u)$ pour tout vecteur $u \in T_0(V)$.

(4.4) Lemme. — *Si la forme $D\alpha$ est définie positive, et si H est le champ de vecteurs sur Ω tel que $(D\alpha)(H, X) = \alpha(X)$ pour tout champ de vecteurs X sur Ω, alors pour tout point $b \in \Omega$, on a*

$$\alpha_0(b) < (D\alpha)(H_0, H_0).$$

Soient $\psi : R \to \Omega$ la courbe intégrale du champ H telle que $\psi(o) = o$ et f une primitive de α sur le convexe Ω. Pour tout $\theta \in \mathcal{R}$, soit Ω_θ l'ensemble des points $b \in \Omega$ tels que $f(b) < f(\psi(\theta))$. Puisque $D\alpha$ est définie positive, la fonction f est convexe, et Ω étant convexe il en résulte que Ω_θ est un ouvert convexe. On va montrer que sur Ω_θ le valeurs de α_0 sont au plus égales à $\alpha_0(\psi(\theta))$. Supposons, en effet, que $b \in \Omega_\theta$. Soit P le champ des vecteurs constant sur V tel que $\zeta(P) = b - \psi(\theta)$ et soit m la fonction $\alpha(P)$ sur Ω. Puisque f est convexe et que $f(b) < f(\psi(\theta))$, on a

$$m(\psi(\theta)) = \left[\frac{d}{dt} f(\psi(\theta) + t(b - \psi(\theta)))\right]_{t=0} \leqq 0.$$

D'autre part, puisque $D_H \alpha = \alpha$, on a

$$H.m = (D_H \alpha)(P) = \alpha(P) = m,$$

ce qui entraîne que

$$m(\psi(t)) = \exp(t)\, m(0) \quad \text{pour tout } t \in R.$$

On a donc $m(\theta) \leqq 0$, et ceci signifie que $\alpha_0(b) \leqq \alpha_0(\psi(\theta))$. Ainsi, sur Ω_0, la forme linéaire α_0 est majorée par $\alpha_0(\psi(\theta))$ et, par conséquent, sur Ω, les valeurs de α_0 sont strictement plus petites que la valeur de α_0 au point frontière $\zeta(H_0)$ qui est la limite de $\psi(\theta)$ lorsque $\theta \to \infty$. Comme

$$\alpha_0(\zeta H_0) = \alpha(H_0) = (D\alpha)(H_0, H_0),$$

ceci démontre le Lemme.

(3.5) Lemme. — *Si la forme $D\alpha$ est définie positive et si K est le cône réunion des demi-droites fermées d'extrémité* o *contenues dans* Ω, *alors K est un cône convexe fermé et pour tout point $b \in K - (0)$, on a $\alpha_0(b) < 0$.*

Du fait que Ω est convexe résulte que K est un cône convexe, et ce cône est fermé parce que o est intérieur à Ω. Pour tout point $a \in \Omega$, les demi-droites d'extrémité a contenues Ω se déduisent par translation des demi-droites d'extrémité o contenues dans Ω. Comme les opérations G dans Ω sont des transformations affines, K est donc stable par la représentation linéaire $\mathfrak{f}$ dans V. D'après le lemme (4.4), on a $\alpha_0(b) \leqq 0$ pour tout point $b \in K$. Si $b \in K$ et si $\alpha_0(b) = 0$, alors $\alpha_0(f(x)b) = 0$ pour tout élément x de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, car autrement, l'orbite $\mathfrak{f}(G)b$ de b pour la représentation linéaire $\mathfrak{f}$ sortirait du demi-espace $\alpha_0 \leqq 0$. D'après la formule (2.3), on a

$$\alpha_0(f(x)b) = (D\alpha_0)(q(x), b) \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{g}.$$

La forme $D\alpha_0$ étant non dégénérée, il en résulte que $b = 0$.

(4.7) Théorème. — *Soient G un groupe de Lie connexe et M une variété différentiable de dimension n où G opère différentiablement et transitivement. Soit D une connexion linéaire plate invariante par G sur M, et soit α une forme différentielle fermée de degré* 1 *invariante par G sur M. Si $D\alpha$ est définie positive, alors il existe un espace vectoriel réel V de dimension n, une représentation affine de G dans V et une orbite ouverte Ω de G dans V vérifiant les conditions suivantes :*

a. *Ω est un convexe de V ne contenant aucune droite;*

b. Il existe un difféomorphisme de M sur Ω compatible avec les opérations de G et transformant la connexion D en la restriction à Ω de la connexion plate naturelle de V.

Le cas où M est une orbite ouverte d'une représentation affine de G a été démontré plus haut [lemmes (4.2) et (4.3)]. Montrons d'abord que le théorème s'en déduit lorsqu'on suppose M simplement connexe. Soit a un point de M, et soit $V = T_a(M)$ l'espace des vecteurs de M d'origine a. La connexion D étant plate, pour tout $u \in V$, il existe un champ de vecteurs P_u sur M et un seul tel que $DP_u = 0$ et $(P_u)_a = u$. Soit μ la forme différentielle de degré 1 sur M à valeurs dans V telle que $\mu(P_u) = u$ pour tout $u \in V$. On a $d\mu = 0$, et puisque M est simplement connexe, il existe une application différentiable ρ de M dans V telle que $\rho(a) = 0$ et $d\mu = \rho$. Puisque G laisse invariante la connexion D, on définit une représentation linéaire $\mathbf{f}$ de G dans V par la condition $P_{\mathbf{f}(s)u} = sP_u$ pour tout $s \in G$ et tout $u \in V$. Si $\mathbf{q}$ désigne l'application de G dans V telle que $\mathbf{q}(s) = \rho(sa)$ pour tout $s \in G$, alors on voit facilement que $\mathbf{f}(s)\,\rho(b) + \mathbf{q}(s) = \rho(sb)$ quels que soient $s \in G$ et $b \in M$. Il en résulte que $(\mathbf{f}, \mathbf{q})$ est une représentation affine de G dans V. L'orbite $\Omega = \mathbf{q}(G) = \rho(M)$ est un ouvert de V et (M, ρ) est un revêtement de Ω dont la projection ρ commute avec les opérations de G. Pour tout élément x de l'algèbre de Lie de G, soit L_x le champ de vecteur correspondant à x sur M; puisque ρ commute avec les opérations de G, chaque champ L_x se projette sur Ω. Comme $\alpha(L_x)$ est une constante pour tout x, ceci prouve que α est de la forme $\rho^*\beta$, où β est une forme différentielle fermée de degré 1, invariante par G sur Ω. La projection ρ étant compatible avec la connexion D et la connexion plate naturelle D' de V, on a $D\alpha = \rho^* D'\beta$, donc $D'\beta$ est définie positive. Compte tenu des lemmes (4.2) et (4.3), Ω est donc un convexe ne contenant aucune droite. En particulier, Ω est simplement connexe, donc ρ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration dans le cas où M est simplement connexe. On démontrera maintenant le théorème dans le cas général. Soit $\tilde{M}$ le revêtement universel de M et $\tilde{G}$ le revêtement universel de G opérant transitivement sur $\tilde{M}$. Il existe sur M une connexion plate $\tilde{D}$ et une seule telle que la projection π de $\tilde{M}$ sur M soit compatible avec les connexions $\tilde{D}$ et D. Cette connexion $\tilde{D}$ est invariante par $\tilde{G}$. La forme $\tilde{\alpha} = \pi^*\alpha$ est une forme différentielle fermée de degré 1 invariante par $\tilde{G}$ sur $\tilde{M}$. Comme $\tilde{D}\tilde{\alpha} = \pi^* D\alpha$, la forme $\tilde{D}\tilde{\alpha}$ est définie positive et, d'après ce qui précède, on peut identifier $\tilde{M}$ avec une orbite ouverte d'une représentation affine de G dans un espace vectoriel réel V, la connexion D étant induite par la connexion plate naturelle de V. Tout automorphisme σ du revêtement $(\tilde{M}, \pi)$ de M laisse $\tilde{D}$ invariante; c'est donc la restriction à M d'une transformation affine σ' de V. Si σ n'est pas l'identité, alors σ' n'est pas une translation de V, car cela entraînerait l'existence d'une droite contenue dans M, ce qui est exclu d'après le lemme (4.3). Mais si σ n'est pas une translation, il existe un point $a \in \dot{M}$ et un vecteur $u \in T_a(\tilde{M})$ tels que les vecteurs u et $\sigma^T(u)$ ne se déduisent pas l'un de l'autre par transport parallèle le long du segment de droite d'extrémités a et $\sigma(a)$. La projection de ce segment dans M est un lacet d'origine et d'extrémité $\pi(a)$ et le transport parallèle le long de ce lacet donne un élément du groupe d'holonomie en $\pi(a)$ différent de l'identité. Comme on suppose que D est une connexion plate, ceci est exclu et le revêtement $(\tilde{M}, \pi)$ de M est donc trivial. Ainsi M est simplement connexe et ceci achève la démonstration.

Si dans les hypothèses du théorème ou supposait seulement D localement plate, on ne pourrait plus en déduire les mêmes conclusions. Par exemple, si $G = M = SO(2)$, les opérations de G dans M étant les translations à gauche de G, il existe une forme différentielle $\alpha \neq 0$ de degré 1 sur M, invariante par G, et pour toute connexion invariante D autre que la connexion invariante plate, $D\alpha$ est définie positive (et D est localement plate).

5. **Espaces homogènes complexes définis par une connexion plate.** — On désigne par M une variété différentiable, par $T(M)$ la variété des vecteurs de M et par p la projection de $T(M)$ sur M. Soit G un groupe de Lie connexe opérant transitivement et différentiablement sur M. Soit D une connexion linéaire sur M, localement plate et invariante par G. Il existe sur $T(M)$ une structure complexe, et une seule, telle que pour toute fonction différentiable réelle f définie sur un ouvert $U \subset M$ et telle que $D\,df = 0$ la fonction $fp + \sqrt{-1}\, df$ soit une fonction holomorphe sur $p^{-1}(U)$. En prolongeant de la manière habituelle à $T(M)$ les opérations de G dans M, on voit que G opère par transformations holomorphes dans $T(M)$. Supposons maintenant que la connexion D soit plate globalement. Soit a un point de M et soit $E = T_a(M)$ l'espace vectoriel des vecteurs de M ayant pour origine a. On identifiera $T(M)$ avec la variété $M \times E$ au moyen du difféomorphisme qui applique un point $(b, u) \in M \times E$ sur le vecteur d'origine b déduit de u par transport parallèle. Les opérations de G dans $T(M)$ sont alors de la forme $s(b, u) = (sb, \mathbf{f}(s)u)$, où $\mathbf{f}$ est une représentation linéaire de G dans E. Soit $G' = G \times E$ le produit semi-direct de G et du groupe additif E défini par $\mathbf{f}$. On fait opérer G' dans $T(M)$ en posant $(s, u)\,(b, v) = (sb, \mathbf{f}(s)v + u)$ quels que soient $s \in G$, $b \in M$, u, $v \in E$. Chaque opération de G' dans $T(M)$ est alors un automorphisme holomorphe de $T(M)$, et G' opère transitivement dans $T(M)$.

(5.1) THÉORÈME. — *Soient G un groupe de Lie connexe et M une variété où G opère différentiablement et transitivement. Soit D une connexion plate sur M, invariante par G, et soit $T(M)$ la variété des vecteurs de M munie de la structure complexe définie par D. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a. il existe sur $T(M)$ un volume réel invariant par tout automorphisme holomorhe de $T(M)$ et la forme hermitienne définie par ce volume, et la structure complexe de $T(M)$ est définie positive,

b. il existe sur M une forme différentielle α de degré 1, fermée, invariante par G, telle que $D\alpha$ soit définie positive,

c. la variété complexe $T(M)$ est isomorphe à un domaine borné d'un espace C^n.

Supposons vérifiée la condition (a). Soient $c_i (i=1, 2, \ldots, n)$ des coordonnées affines, c'est-à-dire telles que $D\,dc_i = 0$, sur un ouvert $U \subset M$. Posons $a_i = c_i p$ et $b_i = dc_i$; la restriction à $p^{-1}(U)$ d'un volume v sur $T(M)$ est de la forme

$$K\,da_1 \wedge da_2 \wedge \ldots \wedge da_n \wedge db_1 \wedge db_2 \wedge \ldots \wedge db_n$$

où K est une fonction différentiable. Si v est invariant par les automorphismes holomorphes de $T(M)$, alors K n'est fonction que des a_i. Sur $p^{-1}(U)$, la forme hermitienne définie par v et par la structure complexe de $T(M)$ a donc pour partie réelle

$$\gamma = \sum_{ij} \frac{d \operatorname{Log} K}{da_i\, da_j} (da_i\, da_j + db_i\, db_j).$$

Il existe sur M un volume v_M invariant par G dont la restriction à U est $K\,da_1 \wedge da_2 \wedge \ldots \wedge da_n$. Si α est la forme différentielle invariante par G sur M telle que $Dv_M = \alpha v_M$, alors la restriction à U de la différentielle covariante $D\alpha$ est

$$\sum_{ij} \frac{d^2 \operatorname{Log} K}{da_i\, da_j} da_i\, da_j.$$

Puisque γ est définie positive, il en est de même de $D\alpha$, ce qui démontre que $(a) \Rightarrow (b)$. Montrons maintenant que $(b) \Rightarrow (c)$. D'après le théorème 4.7, si (b) est vérifiée, alors il existe un espace vectoriel V et un ouvert convexe $\Omega \subset V$ ne contenant pas de droite tel que M, avec sa connexion plate, soit isomorphe à Ω muni de la connexion induite par la connexion plate naturelle de V. La variété complexe $T(M)$ est alors isomorphe à l'ouvert $\Omega + \sqrt{-1}\, V \subset V \otimes_R C$ qui est holomorphiquement isomorphe à un domaine borné de l'espace C^n. L'assertion $(c) \Rightarrow (a)$ est une propriété générale des domaines bornés homogènes (*cf.* [1], [10]).

Corollaire. — *Soient G un groupe de Lie connexe et Ω une orbite ouverte d'une représentation affine de G dans un espace vectoriel réel V. Si Ω est contenu dans un ouvert convexe ne contenant pas de droite, alors Ω est un ouvert convexe ne contenant pas de droite.*

En effet, si Ω est contenu dans un ouvert convexe ne contenant pas de droite, alors $\Omega + \sqrt{-1}\, V \subset V \otimes_R C$ est holomorphiquement isomorphe à un domaine borné. Comme la variété complexe $\Omega + \sqrt{-1}\, V$ s'identifie à $T(\Omega)$ muni de la structure complexe définie par la connexion plate de Ω, le théorème montre qu'il existe sur Ω une forme différentielle α fermée de degré 1, invariante par G, dont la différentielle covariante est définie positive. Il en résulte que Ω est un convexe ne contenant pas de droite d'après les lemmes (4.2) et (4.3).

6. **Exemples.** — On dira dans la suite qu'un ouvert d'un espace vectoriel réel est *homogène* s'il admet un groupe transitif de transformations affines. Parmi les ouverts convexes qui ne contiennent pas de droite et qui sont homogènes, les mieux connus sont des cônes admettant un groupe transitif de transformations *linéaires*. A cette classe appartiennent entre autres les domaines de positivité homogènes au sens de Koecher (*cf.* [2], [8], [9]). Dans ce qui suit, on indiquera un procédé de construction d'orbites ouvertes de représentations affines conduisant à des convexes homogènes qui ne sont pas de cônes. Ce procédé est étroitement apparenté aux représentations affines complexes qui feront l'objet du paragraphe suivant.

Soient V et E deux espaces vectoriels réels de dimension finie et Φ une forme bilinéaire symétrique sur E à valeurs dans V. Soient G un groupe de Lie connexe, $(\mathbf{f}, \mathbf{q})$ une représentation affine de G dans V et $\mathbf{h}$ une représentation linéaire de G dans E. On suppose que

$$\mathbf{f}(s)\,\Phi(u, v) = \Phi(\mathbf{h}(s)u, \mathbf{h}(s)v) \tag{6.1}$$

quels que soient $s \in G$ et $u, v \in E$. Soit $G' = G \times E$ le produit semi-direct de G et du groupe additif E défini par $\mathbf{h}$. On définit une représentation affine $(\mathbf{f}', \mathbf{q}')$ de G' dans l'espace vectoriel $V \times E$ en posant

$$\mathbf{f}'(s, u)\,(a, v) = (\mathbf{f}(s)a + \Phi(\mathbf{h}(s)v, u), \mathbf{h}(s)v),$$
$$\mathbf{q}'(s, u) = \left(\mathbf{q}(s) + \frac{1}{2}\Phi(u, u), u\right).$$

Si $E \neq 0$, cette représentation affine n'est pas équivalente à une représentation linéaire. Soit $\Omega = \mathbf{q}(G)$ l'orbite de 0 dans V; l'orbite $\Omega' = \mathbf{q}'(G')$ de $(0, 0)$ dans $V \times E$ est alors l'ensemble des points (a, u) tels que

$$a - \frac{1}{2}\Phi(u, u) \in \Omega.$$

Supposons vérifiées les deux conditions suivantes :

(6.2) Ω est un ouvert convexe ne contenant pas de droite ;

(6.3) pour tout $u \in E$, $\Phi(u, u) \in \Omega$.

Dans ces conditions, l'orbite Ω' est un ouvert convexe ne contenant pas de droite dans $V \times E$. En effet, pour tout $u \in E$, $\Phi(u, u)$ appartient au cône convexe K réunion des demi-droites d'extrémité 0 contenues dans Ω. Soit

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ une base de formes linéaires sur V telles que $\xi_i(a) < 0$ pour tout $a \in K - (0)$. Les valeurs sur Ω des formes linéaires ξ_i admettent une borne supérieure m, et Ω' est contenu dans l'ouvert U constitué par les points $(a, u) \in V \times E$ tels que $\xi_i\left(a - \frac{1}{2}\Phi(u, u)\right) < m$. Chaque forme $\xi_i\Phi$ étant définie négative, U est un convexe ne contenant pas de droite. Comme Ω' est visiblement ouvert, le corollaire du théorème (5.1) montre donc que Ω' est un convexe ne contenant pas de droite.

Voici le détail de cette construction dans le cas le plus simple. On suppose que $V = R$ (corps des nombres réels) et que G est le groupe multiplificatif des nombres réels > 0. La représentation affine $(\mathbf{f}, \mathbf{q})$ de G dans R est définie par $\mathbf{f}(s)a = s^2 a$ et $\mathbf{q}(s) = s^2 - 1$ pour tout $s \in G$ et tout $a \in R$. On suppose que $E = R^p$ et que la représentation linéaire $\mathbf{h}$ de G dans E est telle que $\mathbf{h}(s)u = su$ pour tout $s \in G$ et tout $u \in E$. Si Φ est la forme euclidienne naturelle de R^p, alors les conditions (6.1), (6.2) et (6.3) sont vérifiées. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_p$ les coordonnées naturelles de $V \times E = R \times R^p$ et soit

$$F = x_0 + 1 - \frac{1}{2}\sum_{1=i}^{i=p} x_i^2.$$

L'orbite Ω' a pour équation $F > 0$. Si $r = 1 + p/2$, alors $F^{-r}\, dx_0 \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p$ est un volume sur Ω' invariant par $G' = G \times E$. La forme différentielle invariante fermée correspondante est

$$\alpha = d \operatorname{Log} F^{-r} = -r F^{-1}\left(dx_0 - \sum_{i=1}^{i=p} x_i\, dx_i\right)$$

et l'on a

$$D\alpha = r^{-1}\alpha^2 + rF^{-1}\sum_{1=i}^{i=n} dx_i^2.$$

Si H est le champ de vecteurs sur Ω' tel que $(D\alpha)(H, X) = \alpha(X)$ pour tout champ de vecteurs X sur Ω', on a $H = -F\dfrac{d}{dx_0}$. Tout point de la frontière de H est de la forme $a + \zeta(H_a)$, avec $a \in \Omega'$. Le domaine $\Omega' + \sqrt{-1}\, R^{n+1} \subset C^{p+1}$ est isomorphe à un domaine borné homogène symétrique, forme ouverte de l'espace homogène complexe compact $\mathbf{U}(p+1)/\mathbf{U}(p) \times \mathbf{U}(1)$. On sait que ce domaine n'est pas isomorphe à un domaine de la forme $\Gamma + \sqrt{-1}\, R^{n+1}$. où Γ est un cône ouvert.

7. Domaines de Pjateckij-Šapiro. — On désigne par G un groupe de Lie connexe, par V un espace vectoriel réel et par $(\mathbf{f}, \mathbf{q})$ une représentation affine de G dans V. Soient E un espace vectoriel complexe de dimension finie et Ψ une forme hermitienne sur E à valeurs dans $V^c = V \otimes C$, c'est-à-dire une application de $E \times E$ dans V^c qui est C-linéaire par rapport au premier facteur et qui vérifie la condition $\Psi(u, v) = \overline{\Psi(v, u)}$ quels que soient u, $v \in E$. Soit $\mathbf{h}$ une représentation linéaire complexe de G dans E telle que

$$\mathbf{f}(s)\,\Psi(u, v) = \Psi(\mathbf{h})(s)\,u,\, \mathbf{h}(s)v)$$

quels que soient $s \in G$ et u, $v \in E$. On suppose que l'orbite $\Omega = \mathbf{q}(G)$ de o est un ouvert de V. L'ensemble des points $(a + \sqrt{-1}\,b,\, u)$ de $V^c \times E$ tels que $a - \frac{1}{2}\Psi(u, u) \in \Omega$ est alors un ouvert Ω^* de $V^c \times E$. On va montrer qu'il existe un groupe de transformations affines complexes de $V^c \times E$ qui opère transitivement dans Ω^*. Soit G^* le groupe de Lie dont l'espace topologique sous-jacent est $G \times V \times E$ et dont la loi de multiplication est donnée par

$$(s, a, u)\,(t, b, v) = (st,\, \mathbf{f}(s)\,b + a + \lambda(s, u, v),\, \mathbf{h}(s)v + u),$$

avec

$$\lambda(s, u, v) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,(\Psi(\mathbf{h}(s)v, u) - \Psi(u, \mathbf{h}(s)v))$$

quels que soient s, $t \in G$, $a, b \in V$ et u, $v \in E$. L'application $(s, a, u) \to (s, a, -u)$ est un automorphisme involutif de G^*; le sous-groupe des éléments de G^* invariants par cet automorphisme est le produit semi-direct de G et du groupe additif V défini par $\mathbf{f}$. On définit une représentation affine complexe $(\mathbf{f}^*, \mathbf{q}^*)$ de G^* dans $V^c \times E$ en posant

$$\mathbf{f}^*(s, c, u)\,(a + \sqrt{-1}\,b,\, v) = (\mathbf{f}(s)\,a + \sqrt{-1}\,\mathbf{f}(s)\,b + \Psi(\mathbf{h}(s)v, u),\, \mathbf{h}(s)v),$$
$$\mathbf{q}^*(s, c, u) = \left(\mathbf{q}(s) + \sqrt{-1}\,c + \frac{1}{2}\Psi(u, u),\, u\right)$$

quels que soient $s \in G$, a, b, $c \in V$ et u, $v \in E$. L'orbite de l'origine est l'ouvert $\mathbf{q}^*(G^*) = \Omega^*$.

Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, (f, q) la représentation affine de $\mathfrak{g}$ dans V définie par $(\mathbf{f}, \mathbf{q})$ et h la représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ dans E définie par $\mathbf{h}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^*$ de G^* s'identifie à $\mathfrak{g} \times V \times E$ et la représentation affine (f^*, q^*) de $\mathfrak{g}^*$ dans $V^c \times E$ définie par $(\mathbf{f}^*, \mathbf{q}^*)$ est

$$f^*(x, c, u)\,(a + \sqrt{-1}\,b,\, v) = (f(x)\,a + \sqrt{-1}\,f(x)\,b - \Psi(v, u),\, h(x)\,v),$$
$$q^*(x, c, u) = (q(x),\, c,\, u),$$

où $x \in \mathfrak{g}$, a, b, $c \in V$ et u, $v \in E$.

Soit w un volume réel sur $V^c \times E$ invariant par translation. Supposons qu'il existe sur Ω un volume réel Fw invariant par les opérations de G^*.

L'image réciproque de la forme différentielle $d\,\mathrm{Log}F$ par $\mathbf{q}^\star$ a pour valeur sur $\mathfrak{g}^\star \subset T(G^\star)$ la forme $\mathrm{Tr}f$. Par suite, l'image réciproque de $d\,\mathrm{Log}F$ par l'injection naturelle $\Omega \to \Omega^\star$ est une forme différentielle invariante fermée α sur Ω telle que

$$\alpha_0(q(x)) = \mathrm{Tr}f^\star(x, 0, 0) = 2\,\mathrm{Tr}f(x) + \mathrm{Tr}h(x).$$

Soit η la partie réelle de la forme hermitienne invariante définie sur $\Omega^\star$ par le volume Fw et la structure complexe. Si η_0 désigne la forme bilinéaire sur $V^c \times E$ définie par la valeur de η au point origine, un calcul simple montre que

$$\begin{aligned}&\eta\big((a+\sqrt{-1}\,b,\, u),\, (a'+\sqrt{-1}\,b',\, u')\big)\\ &\quad = (D\alpha_0)(a, a') + (D\alpha_0)(b, b') - \alpha_0(\Psi(u, u') + (\Psi(u', u))\end{aligned}$$

quels que soient a, b, a', $b' \in V$ et u, $u' \in E$. Ainsi, pour que η soit définie positive, il faut et il suffit que $D\alpha$ soit définie positive et que $\alpha_0(\mathrm{Re}\,\Psi)$ soit définie négative. On observera qu'en général la forme α_0 est linéairement indépendante de la forme invariante fermée sur Ω qui correspond à un volume sur Ω invariant par G.

(7.1) THÉORÈME. — *Pour que l'espace homogène complexe $\Omega^\star$ soit isomorphe à un domaine borné, il faut et il suffit que la forme η soit définie positive.*

On sait que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit K le cône réunion des demi-droites d'extrémité o contenues dans Ω. Puisque $D\alpha$ est définie positive, on sait que K est fermé et que $\alpha_0(a) < 0$ pour tout point $a \in K - (0)$ [lemme (4.6)]. Soit K' le cône fermé constitué par les points $\Psi(u, u)$, où $u \in E$. Puisque $\alpha_0(\mathrm{Re}\,\Psi)$ est définie négative $\alpha_0(a) < 0$ pour tout point $a \in K' - (0)$. Soit W l'ensemble des formes linéaires ξ sur V telles que $\xi(a) < 0$ pour tout $a \in K \cup K' - (0)$. Puisque $K \cup K'$ est fermé, W est un ouvert du dual $V^\star$ de V. Soient ζ_1, ζ_2, ..., ζ_{n-1} des éléments de V qui, avec α_0, constituent une base de $V^\star$. Puisque $\alpha_0 \in W$ et que W est ouvert, il existe un nombre $t > 0$ tel que les formes linéaires

$$\xi_i = \alpha_0 + t\zeta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad \xi_n = \alpha_0 - t\sum_{i=1}^{i=n-1} \zeta_i$$

soient dans W. Les formes ξ_i étant négatives sur $K - (0)$, il existe un nombre m tel que $\xi_i(a) < m/2$ pour tout $a \in \Omega$ et tout i. Les formes ξ_i étant négatives ou nulles sur K', chaque forme bilinéaire $\psi_i = \xi_i(\mathrm{Re}\,\Psi)$ est négative. Pour tout point $(a+\sqrt{-1}\,b,\, u) \in \Omega^\star$, on a

$$a - \frac{1}{2}\Psi(u, u) \in \Omega, \qquad \text{donc} \quad \xi_i(a) - \frac{1}{2}\Psi(u, u) < \frac{m}{2}$$

et, par suite, $\xi_i(a) < m/2$ quel que soit i. Il en résulte que, si $e_1, e_2, \ldots, e_n$ est la base de V duale de la base $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, on définit un isomorphisme holomorphe θ de $\Omega^\star$ sur un ouvert Λ de $V^c \times E$ en posant

$$\theta(\Sigma_i z_i e_i,\ u) = (\Sigma_i (z_i + m)(z_i - m)^{-1} e_i,\ \Pi_i (z_i - m)^{-1} u)$$

pour tout point $(\Sigma_i z_i e_i,\ u) \in \Omega^\star$. Lorsque $(\Sigma_i z_i e_i,\ u) \in \Omega^\star$, on a

$$z_i + \bar{z}_i < m, \qquad \text{donc} \quad |(z_i + m)(z_i - m)^{-1}| < 2.$$

De plus, si $v = \Pi_i (z - m)^{-1} u$, on a

$$\alpha_0(\Psi(v, v)) = \alpha_0(\Psi(u, u))\, \Pi_i |z_i - m|^{-2} = \frac{1}{n} \Sigma_j \psi_j(u, u)\, \Pi_i |z_i - m|^{-2},$$

car

$$\alpha_0 = \frac{1}{n} \Sigma_j \xi_j.$$

Compte tenu des inégalités $z_i + \bar{z}_i - \psi_i(u, u) < m$, ceci entraîne

$$-\alpha_0(\Psi(v, v)) < \frac{2^{n-1}}{m^n}.$$

Comme la forme $-\alpha_0(\mathrm{Re}\,\Psi)$ est définie positive, il en résulte que Λ est un domaine borné de l'espace $V^c \times E$, ce qui achève la démonstration.

Avec la construction précédente, on obtient une classe d'espaces homogènes complexes $\mathcal{C}$ qui contient les classes de domaines bornés homogènes introduites par P. Šapiro [7] et, par conséquent, tous les domaines bornés symétriques classiques. Les domaines bornés symétriques exceptionnels appartiennent également à la classe $\mathcal{C}$. Pour celui de dimension complexe 27, on choisit pour Ω l'intérieur de l'ensemble des points de la forme $1 - a^2$ dans l'algèbre de Jordan exceptionnelle réelle dont la forme bilinéaire fondamentale est définie positive, et l'on suppose que $E = 0$ (*cf.* [9]). Pour le domaine exceptionnel de dimension complexe 16, la construction se fait avec $\dim V = 8$ et $\dim E = 8$. On observera que, même lorsque $E = 0$, les domaines bornés homogènes qu'on obtient ne sont généralement pas symétriques (*cf.* Vinberg [9]).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Cartan (Élie). — Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes, *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg*, t. 11, 1936, p. 110-162.

[2] Koecher (Max) — Positivitätsbereiche im R^n, *Amer. J. Math.*, t. 79, 1957, p. 575-596.

[3] Koecher (Max). — Die Geodätischen von Positivitätsbereichen, *Math. Ann.*, t. 135, 1958, p. 192-202.

[4] Koecher (Max). — Analysis in reellen Jordan Algebren, *Nachr. Akad. Wiss. Götingen, Math.-phys. Kl.*, 1958, p. 67-74.

[5] Koszul (Jean-Louis). — Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes, *Can. J. Math.*, t. 7, 1955, p. 562-576.

[6] PJATECKIJ-ŠAPIRO (I. I). — Sur un problème de É. Cartan (en russe), *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, nouv. série, t. 124, 1959, p. 272-273.

[7] PJATECKIJ-ŠAPIRO (I. I.). — Géométrie des domaines homogènes et théorie des fonctions automorphes : solution d'un problème de É. Cartan (en russe), *Uspekhi mat. Nauk*, t. 14, 1959, p. 190-192.

[8] ROTHAUS (Oscar S.). — Domains of positivy, *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg*, t. 24, 1960, p. 189-235.

[9] VINBERG (E. B.). — Cônes homogènes (en russe), *Doklady Akad. Nauk S.S.S.R.*, nouv. série, t. 135, 1960, p. 9-12.

[10] WEIL (André). — *Introduction à l'étude des variétés kählériennes.* — Paris Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, n° 1267; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, n° 6).

(Manuscrit reçu le 10 juin 1961.)

Jean-Louis KOSZUL,
Professeur à la Faculté des Sciences, Université de Strasbourg,
Strasbourg (Bas-Rhin).