BULLETIN DE LA S. M. F.

LARS GÅRDING

# Transformation de Fourier des distributions homogènes

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 89 (1961), p. 381-428
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__381_0>

*Bull. Soc. math. France*,
89, 1961, p. 381 à 428.

# TRANSFORMATION DE FOURIER DES DISTRIBUTIONS HOMOGÈNES ;

PAR

LARS GÅRDING
(Lund).

**Introduction.** — La théorie de la transformation de Fourier des fonctions et des distributions homogènes a été étudiée par GEL'FAND et SHAPIRO [2] et par GEL'FAND et SHILOV dans leur traité [3]. Nous reprenons entièrement ce sujet; nous en faisons une étude systématique englobant l'analyse des singularités.

On dit qu'une distribution $f(x) = f_\alpha(x)$ dans $R^l$ est homogène de degré $\alpha$ si $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ pour tout $\lambda > 0$. Le nombre $\alpha$ peut être complexe. Une telle distribution est tempérée, et elle a des restrictions bien définies

$$f(x)\,|_{x \in V}$$

à toute variété $V$ régulière de dimension $l-1$ qui ne touche aucune droite passant par l'origine. Soit $\gamma(x) > 0$ régulière (de classe $C^\infty$) et homogène de degré 1. Toute variété $\gamma = 1$ a cette propriété. Soit

$$F(x) = \mathcal{F} f(x) = \int e^{ix\xi} f(\xi)\,\tau(\xi), \qquad \tau(\xi) = d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \ldots \wedge d\xi_l$$

la transformée de Fourier de $f$. En passant aux coordonnées polaires par rapport à $\gamma(x)$ on trouve après un calcul formel que

$$(1) \qquad F(x) = e(\alpha') \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(x\xi) f_\alpha(\xi)\,\sigma(\xi),$$

où $\alpha$ et $\alpha'$ sont liés par $\alpha + \alpha' = -l$, $e(\alpha) = \exp\left(\frac{1}{2}\pi i \alpha\right)$,

$$\sigma(\xi) = \xi_1\, d\xi_2 \wedge \ldots \wedge d\xi_l - \xi_2\, d\xi_1 \wedge d\xi_3 \wedge \ldots + \ldots$$

et

$$\chi_\beta(s) = \int_0^\infty e^{is\rho}\rho^{-\beta-1}\,d\rho = \Gamma(-\beta)\,e^{-\pi i\beta}s^\beta$$

avec $0 \leqq \arg s \leqq \pi$. Il faut interpréter $\chi_\beta$ comme une distribution sur l'axe réel, valeur limite pour $\operatorname{Im} s \downarrow 0$ de la fonction analytique pour $\operatorname{Im} s > 0$ que constitue l'expression à droite si $\beta \neq$ entier $\geqq 0$. Si $p =$ entier $\geqq 0$ il faut poser

$$\chi_p(s) = \left|\frac{d}{d\beta}(\beta - p)\,\chi_\beta(s)\right|_{\beta=p}.$$

En particulier, on trouve que

$$\chi_0(s) = \log|s|^{-1} + i(\pi - \arg s).$$

Si $\operatorname{Re}\beta > -1$, $\chi_\beta$ est localement intégrable, si $\beta = -1$ on trouve que

$$\chi_{-1}(s) = \mathrm{P}s^{-1} + \pi i\,\delta(s),$$

où P est la valeur principale.

Les distributions $\chi_\beta(s)$ ont la propriété que

$$\frac{d}{ds}\chi_\beta(s) = \chi_{\beta-1}(s).$$

Si $\beta \neq p$, elles sont homogènes d'ordre $\beta$; si $\beta = p$ elles sont quasi homogènes : la différence $\chi_p(\lambda s) - \lambda^p\chi_p(s)$ est une fonction régulière (dans ce cas un multiple de $s^p$). Notre premier résultat principal (lemme **1.6.2**) est que (1) vaut pour une distribution homogène quelconque $f_\alpha$ pourvu que $\alpha \neq p'$. En particulier on peut donner un sens précis à l'intégrale où il faut regarder $f_\alpha$ comme distribution sur la variété $\gamma(x) = 1$. Si $f_\alpha$ est régulier, ou analytique pour $x \neq 0$, l'intégrale de (1) a les mêmes propriétés. Dans le cas exceptionnel, la différence des deux membres est un polynome homogène de degré $p$ qui dépend du choix de $\gamma$. Pour les fonctions, (1) est dû à Gel'fand et Shapiro [2].

On peut se débarasser du cas exceptionnel en prenant un quotient : soit $\Phi_\alpha$ l'espace des distributions homogènes de degré $\alpha$, et soit $N_\alpha$ l'espace des éléments de $\Phi_\alpha$ qui sont des polynomes ou bien des distributions à support d'origine. On a $N_\alpha = 0$, sauf pour $\alpha = p$ où $N_\alpha$ est l'espace des polynomes $Q_p$, homogènes de degré $p$, et pour $\alpha = p'$ où $N_\alpha$ est l'espace des $Q_p(\partial/\partial x)\,\delta(x)$. Soit maintenant $H_\alpha = \Phi_\alpha/N_\alpha$, et soit $G_\alpha$ le sous-espace des éléments de $H_\alpha$ qui sont de classe $C^\infty$ en dehors de l'origine. On prend sur $H_\alpha$ la topologie induite par la topologie de l'espace des distributions tempérées et sur $G_\alpha$ la topologie de la convergence uniforme de toutes les dérivées sur les parties compactes de $R$ privé de l'origine. Si $\alpha \neq p$, on peut identifier $G_\alpha$ avec la classe $C^\infty$ sur n'importe quelle variété $\gamma(x)=1$ ; pour $\alpha=p$ il faut prendre le quotient par $N_p$. On voit aisément (théorème **1.2.1**) que

$$\int_{\gamma(x)=1} f_\alpha(x)\, g_{\alpha'}(x)\, \sigma(x)$$

est une dualité entre $H_\alpha$ et $G_{\alpha'}$, et que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ induit une transformation linéaire $\Lambda$ sur les $H$ qui est un homéomorphisme linéaire $H_\alpha \to H_{\alpha'}$ et $G_\alpha \to G_{\alpha'}$ ayant les propriétés classiques de $\mathcal{F}$ (*voir* théorème **1.6.1**). On peut aussi donner les transformations analogues à $\mathcal{F}$ opérant sur les fonctions paires et impaires respectivement (fin du **1.6**). Ce sont là les principaux résultats du chapitre **1**. Il est assez long : il a fallu commencer par un bref exposé de la théorie des distributions sur une variété. En effet, si cette théorie se trouve chez de RHAM [**11**], ce n'est pas sous une forme très maniable. Il a fallu aussi rappeler une partie de la théorie des distributions régulières par rapport à certaines variables (SCHWARTZ **10**).

Dans le second chapitre, on étudie les singularités de la transformation de Fourier d'une distribution $f$ homogène de degré $\alpha'$,

$$g(x)=e(\alpha)\int_{\gamma(\xi)=1} \chi_\alpha(x\xi)\, f(\xi)\, \sigma(\xi),$$

qui devient singulière sur une variété régulière $S : s(\xi)=0$ de la façon suivante :

$$f(\xi)=\chi_\beta(s(\xi))\, P_\mu(\xi),$$

où $P_\mu$ est régulier (de classe $C^\infty$) et homogène de degré $\mu$. On suppose de plus que $s$ (réel) est régulier et homogène de degré $m\neq 1$, ce qui entraîne $\alpha+m\beta+\mu+l=0$. Sous ces conditions, $g$ est régulier sauf si le plan $x\xi=0$ touche la variété $S$, c'est-à-dire $g$ est régulier en dehors du dual $S'$ de $S$. Près d'un point $x_0$ de $S'$ tel que $x_0\xi=0$ touche $S$ en un seul point $\eta_0$, $g$ a un développement asymptotique de la forme

$$e(\alpha)\,(2\pi)^{l/2}\,|\,m-1\,|^{-1}\,|\operatorname{Hess} s'(x)\,|^{\frac{1}{2}}\,\theta_0(-\varepsilon)\, i^\nu$$
$$\times\sum_0^\infty R_k(x)\,\chi_{\alpha+\beta+\frac{l}{2}+k}(\varepsilon s(x)) + \text{fonctions régulières.}$$

Ici $R_k$ sont des fonctions régulières, $R_0(x)=P_\mu(\eta)$ si $x$, $\eta$ sont des points correspondants sur $S'$ et $S$ respectivement; $s'(x)=0$ est l'équation de $S'$ convenablement normé, $\nu$ est la signature positive de la matrice $(\partial^2 s'(x)/\partial x_j\, \partial x_k)$ au point $x_0$, supposée non-singulière; $\varepsilon$ est le signe du quotient $x_0\xi/s(\xi)$ au point $\eta_0$ et $\theta_0(t)=\frac{1}{2}(1+\operatorname{sgn} t)$. On trouve des énoncés précis dans le théorème **2.4.1**. Notons que les singularités de $f$ et de sa transformée de

Fourier $g$ sont en correspondance ponctuelle. Si $f$ n'est pas homogène, ce n'est pas le cas : à un point singulier de $f$ correspond un comportement à l'infini de $g$, et réciproquement.

Le chapitre 2 se termine par une application du théorème ci-dessus aux solutions élémentaires des opérateurs différentiels homogènes à coefficients constants; on retrouve en particulier des résultats de Borovikov [1]. Notons qu'il existe pour les opérateurs différentiels fortement hyperboliques à coefficients analytiques des résultats plus complets concernant aussi le domaine complexe : voir J. Leray [7].

Le théorème 2.4.1 est un corollaire d'un résultat (théorème 2.3.1) portant sur des intégrales de la forme

$$\int \varphi(s(u, t))\, P(u, t)\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_q; \tag{2}$$

où $P$ est une fonction régulière de $t$ et de certaines autres variables $u = u_1$, $u_2, \ldots$, à support compact pour $u$ fixe; $\varphi$ est une distribution sur la droite, régulière hors de l'origine; $s$ une fonction réelle à gradient non nul, dont le gradient en $t$ s'annule en un point $(v, \tilde{t})$ où la matrice $A = \partial^2 s/\partial t_j\, \partial t_k$ n'est pas singulière. Autrement dit, la variété $s(v, t) = 0$ a un point quadratique régulier $\tilde{t}$. On trouve que, près de $v$, l'intégrale (2) a un développement asymptotique suivant des distributions $\psi^{(k)}(s_0(u))$, où $\psi^{(k)}$ sont des intégrales successives d'une certaine distribution $\psi$ et $s_0(u)$ est la valeur de $s(u, t)$ au point $t = t_0(u)$ voisin de $\tilde{t}$, en lequel le gradient de $s$ par rapport à $t$ s'annule. La distribution $\psi$ est régulière en dehors de l'origine et se déduit de $\varphi$ par la formule

$$2\pi i \psi = \varphi \circ \left( i^{\nu} \chi_{\frac{1}{2}q-1} + i^{q-\nu} \check{\chi}_{\frac{1}{2}q-1} \right),$$

où $\nu$ est la signature positive de $A$, $\check{\chi}_\beta(s) = \chi_\beta(-s)$; $\varphi_1$ et $\varphi_2$ étant des distributions régulières hors de l'origine; $\varphi_1 \circ \varphi_2$ est une quelconque des distributions de même sorte telles que

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 - \int_{-a}^{+a} \varphi_1(s-t)\, \varphi_2(t)\, dt \qquad (a > 0),$$

soit régulière à l'origine. L'utilité des $\chi$ vient en grande partie du fait que

$$\chi_\alpha \circ \chi_\beta \equiv 2\pi i \chi_{\alpha+\beta+1}, \qquad \check{\chi}_\alpha \circ \check{\chi}_\beta \equiv 2\pi i \check{\chi}_{\alpha+\beta+1},$$

$$\chi_\alpha \circ \check{\chi}_\beta \equiv 0,$$

modulo des fonctions régulières à l'origine. Le théorème 2.3.1 n'est pas nouveau; sous une autre forme on le trouve chez D. Ludwig [8]. Un résultat analogue dans le domaine complexe se trouve aussi chez Leray [7].

## CHAPITRE 1. — Distributions homogènes.

**1. Distributions.** — Rappellons quelques points de la théorie des distributions (SCHWARTZ [9]) sur une variété (de RHAM [11]).

1° *Notations.* — Soit $X$ une variété de classe $C^\infty$, notons $x$ les points de $X$ et $x_1, \ldots, x_l$ les coordonnées de $x$. Posons

$$\partial_\nu = (\partial/\partial x)_\nu = (\partial/\partial x_{\nu_1}) \ldots (\partial/\partial x_{\nu_p}),$$

où $\nu_1, \ldots, \nu_p$ sont des entiers entre 1 et $l$. L'ordre $p$ de cette dérivée sera noté $|\nu|$.

Soit $C(X) = C^\infty(X)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes indéfiniment différentiables sur $X$; notons $C_0(K)$ et $C_0(X)$ les sous-espaces des éléments de $C(X)$ à support dans un compact fixe $K$ de $X$ et à support compact libre respectivement. Soit $\mathcal{R}$ un recouvrement de $X$ par des compacts $K_1, K_2, \ldots$, où l'on a choisi des systèmes de coordonnées $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$. Avec les seminormes

$$|g, K|_p = \sup_j \sup_{h_j} \sup_{K \cap K_j} |h_j(x)|,$$

où $p = 0, 1, 2, \ldots$ et $h_j$ parcourt toutes les dérivées de $g$ d'ordre $\leqq p$ par rapport à $x^{(j)}$, $C_0(K)$ devient un espace de Fréchet réflexif. Sa topologie ne dépend pas de $\mathcal{R}$. Il en est de même pour $C(X)$; on prend les mêmes seminormes où $K$ parcourt une suite dénombrable de compacts épuisant $X$. La topologie de $C_0(X)$ sera celle de Schwartz : limite inductive des $C_0(K)$. Notons qu'un sous-ensemble $B$ de $C_0(X)$ est borné si et seulement si les supports de tous les éléments de $B$ sont contenus dans un $K$ fixe et $B$ est borné dans $C_0(K)$.

Considérons aussi les formes différentielles de degré maximal $l$ sur $X$,

$$(1) \qquad \omega(x) = g(x)\tau(x), \qquad \tau(x) = \tau(x_1, \ldots, x_l) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l.$$

Notons $\Omega(X)$, $\Omega_0(K)$ et $\Omega_0(X)$ les espaces linéaires de ces formes pour lesquelles $g$ appartient à $C(X)$, $C_0(K)$ et $C_0(X)$ respectivement.

Nous supposerons toujours que $X$ soit orientable, c'est-à-dire qu'il existe des formes réelles $\varepsilon \in \Omega(X)$ qui sont $\neq 0$ partout. Alors

$$\omega \to \omega(x)/\varepsilon(x)$$

est un homéomorphisme linéaire

$$\Omega(X) \to C(X), \qquad \Omega_0(K) \to C_0(K), \qquad \Omega_0(X) \to C_0(X).$$

Si $X$ est un ouvert de $R^l$, la distinction entre les fonctions et les formes est inutile; toute forme s'écrit sous la forme (1) dans un seul système de coordonnées.

Soit $X$ orientable et orienté par $\rho(x) > 0$ où $\rho \in \Omega(X)$ est réel. Si $X$ est un ouvert de $R^l$ nous prenons toujours $\rho = \tau(x) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l$. Les distributions sur $X$ sont, par définition, les éléments du dual de $\Omega_0(X)$. Nous noterons $C'(X)$ ce dual et $C'_0(X)$ le sous-espace des distributions à support compact. Chaque fonction localement intégrable $f(x)$ définit une distribution, à savoir,

$$\omega \to \int_X f(x)\,\omega(x), \qquad \omega \in \Omega_0(X).$$

On identifie $f$ avec cette distribution, et l'on emploie l'une ou l'autre notation

$$(f, \omega) = \int_X f(x)\,\omega(x)$$

pour la valeur de la distribution $f \in C'(X)$ au point $\omega$ de $\Omega_0(X)$. De même, une distribution sera notée comme les fonctions par $f$, $g$, ... ou par $f(x)$, $g(x)$, .... Si $X$ est un ouvert $U$ de $R^l$, la formule $\omega(x)$ s'identifie avec $g(x)\,\tau(x)$ où $g \in C_0(U)$ et nous écrivons

$$(f, g) = \int_U f(x)\,g(x)\,\tau(x)$$

pour $(f, \omega)$. Si $U$ contient o, la distribution de Dirac $g \to g(0)$ sera notée par $\delta(x)$ et sa valeur $g(0)$ sur $g$, c'est-à-dire sur $g(x)\,\tau(x)$, par

$$(\delta, g) = \int \delta(x)\,g(x)\,\tau(x).$$

Rappellons que $C_0(X)$, et *a fortiori* $C(X)$, est dense dans $C'(X)$. Les dérivées $(\partial/\partial x)_\nu f(x)$ d'une distribution sont définies dans le domaine (ouvert) $V$ des coordonnées $x_1, \ldots, x_1$ par

$$\int (\partial/\partial x)_\nu f(x)\,g(x)\,\tau(x) = (-1)^{|\nu|} \int f(x)\,(\partial/\partial x)_\nu g(x)\,\tau(x),$$

où $g(x)\,\tau(x) \in \Omega_0(V)$. Localement, toute distribution s'écrit sous la forme d'une somme finie

$$f(x) = \sum \partial_\nu F_\nu(x), \tag{2}$$

où les $F_\nu$ sont des fonctions continues. On voit que cette représentation de $f$ est équivalente à la suivante

$$f(x) = \sum h_\nu(x)\,\partial_\nu G_\nu(x),$$

où $h_\nu \in C(V)$ et les $G_\nu$ sont continues. En effet toute somme de cette forme peut s'écrire sous la forme (2).

Soient $x_1, \ldots, x_l$ et $y_1, \ldots, y_l$ deux systèmes de coordonnées ayant un domaine commun $V$. Alors pour une distribution quelconque $f$ on a

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

dans $V$. En effet, cette règle s'étend par continuité des fonctions aux distributions.

Soient $X$ et $Y$ des variétés, et

$$y \to x(y)$$

une application de classe $C^\infty$, biunivoque et de rang $l$ partout. Alors on a une application réciproque

$$(4) \qquad f(x) \to f(x(y))$$

des fonctions. C'est un homéomorphisme linéaire $C(X) \to C(Y)$ qui s'étend en un homéomorphisme linéaire $C'(X) \to C'(Y)$ pour les distributions définies par

$$(5) \qquad \int_Y f(x(y))\, \omega(y) = \varepsilon \int_X f(x)\, \omega(y(x)),$$

où $x \to y(x)$ est l'inverse de $y \to x(y)$; $\varepsilon = 1$ si ces applications conservent l'orientation et $\varepsilon = -1$ dans le cas contraire. En effet, puisque $\omega(y) \to \varepsilon\, \omega(y(x))$ est un homéomorphisme $\Omega_0(Y) \to \Omega_0(X)$, son adjoint (4) est bien un homéomorphisme linéaire.

Si $X$ et $Y$ sont des ouverts de $R^l$, (5) s'écrit

$$(6) \qquad \int_Y f(x(y))\, g(y)\, \tau(y) = \int_X f(x)\, g(y(x))\, |J(x)|\, \tau(x),$$

où $J(x) = \tau(y(x))/\tau(y)$ est le Jacobien.

Exemple. — Soient $y(x) = Ax + a$ linéaire en $x$, $A$ une matrice non-singulière, $a \in R^l$. Si $f(x)$ est une distribution sur $R^l$, $f(Ay + a)$ est défini par (6) avec $x(y) = A^{-1}(y - a)$ et $J(x) = \text{dét} A$. En permutant $x$ et $y$ on a donc

$$\int \delta(x - a)\, g(x)\, \tau(x) = g(a),$$

$$\delta(Ax - a) = |\,\text{dét} A\,|^{-1}\, \delta(x - A^{-1} a).$$

2° *Distributions de moins de l variables.* — Soit

$$X = Y \times Z,$$

où $Y = R^p$ et $Z = R^q$. Il est clair que l'injection

$$C(Y) \ni f(y) \to f(y) \in C(X)$$

est un homéomorphisme linéaire dans $C(X)$ où l'image de $C(Y)$ est l'ensemble des fonctions $f(x) = f(y, z)$ qui ne dépendent pas de $z$ dans l'un ou l'autre des sens équivalents

$$(7) \qquad \partial f(y, z)/\partial z_k = 0 \qquad (\forall k),$$

$$(8) \qquad f(y, z+b) = f(y, z) \qquad (\forall b).$$

On a le même résultat pour les distributions (Schwartz [6]), l'injection

$$C'(Y) \ni f(y) \to f(y) \in C'(X)$$

étant définie par

$$(f, g) = \int f(y) \left( \int g(y, z) \tau(z) \right) \tau(y);$$

c'est l'adjoint de l'application

$$(9) \qquad g(y, z) \to \int g(y, z) \tau(z)$$

qui est bornée $C_0(X) \to C_0(Y)$.

On peut définir une injection analogue pour les variétés. Soient $X$ et $Y$ deux variétés de dimensions $l$ et $p$ respectivement. Étant donnée une application $x \to y(x)$ de $X$ dans $Y$, on a une application

$$(10) \qquad f(y) \to f(y(x))$$

dans la direction inverse pour les fonctions. Nous allons l'étendre aux distributions sous condition que

$$(11) \qquad l \geqq p, \qquad y(x) \in C^\infty, \qquad y(x) \text{ de rang } p \text{ partout.}$$

Dans ce cas, il existe une application $A$ unique, linéaire et bornée, l'analogue de (9),

$$\omega(x) \to \omega'(y) = (A\omega)(y)$$

de $\Omega_0(X)$ dans $\Omega_0(Y)$ telle que

$$\int f(y(x))\, \omega(x) = \int f(y)\, A\omega(y)$$

pour tout $f \in C(Y)$, et l'on définit (10) comme l'adjoint de $A$. Explicitement $A$ s'obtient comme il suit. Soit $\rho(y) > 0$ l'orientation de $Y$, et soit $X_y$ la sous-variété de $X$,

$$X_y: \quad x(y) = y.$$

Alors

$$\omega(x) = \omega_y(x) \wedge \rho_0(y)$$

définit une application linéaire $\Omega(X) \to \Omega(X_y)$ et une orientation de $X_y$, et

$$(A\omega)(y) = \left(\int_{X_y} \omega_y(x)\right) \rho_0(y), \qquad \omega \in \Omega_0(x),$$

a les propriétés énoncées ci-dessus.

**Exemple.** — Soit $X$ un ouvert de $R^l$, et soit $s(x) \in C(X)$, réel tel que $\operatorname{grad} s \neq 0$ partout; soit $f$ une distribution sur $K$. La distribution $f(s(x))$ est définie par la formule

$$\int f(s(x))\, g(x)\, \tau(x) = \int_V f(t)\, h(t)\, dt,$$

où $V$, $g$ et $h$ ont les significations suivantes : $V$ est l'ensemble (ouvert) des valeurs prises par $s(x)$; $g \in C_0(X)$;

$$h(t) = \int_{s(x)=t} g(x) \frac{\tau(x)}{ds(x)}.$$

En particulier, si $V \ni 0$,

$$\int \delta^{(j)}(s(x))\, g(x)\, \tau(x) = (-1)^j h^{(j)}(0).$$

Notons qu'on a aussi

$$h(t) = \int_X g(x)\, \delta(t - s(x))\, \tau(x).$$

La démonstration du lemme suivant se réduit immédiatement au cas où $X = R^p \times R^q$, elle sera laissée au lecteur.

**Lemme. 1.1.** — L'application

$$f(y) \to f(y(x))$$

est un homéomorphisme linéaire de $C(Y)$ dans $C(X)$ et de $C'(Y)$ dans $C'(X)$.

**Note.** — On n'a pas caractérisé les images de $C(Y)$ et de $C'(Y)$. Si $X = Y \times R^q$ et si $x \to y(x)$ est la projection

$$x = (y, z) \to y,$$

ce sont les sous-espaces constitués par les éléments respectifs de $C(x)$ et de $C'(X)$ qui ne dépendent pas de $z$, dans l'un ou l'autre des sens (7) ou (8).

**Exemple** : *Distributions homogènes.* — On dit qu'une partie $A$ de $R^l$ est un cône si $\lambda A = A$ pour tout $\lambda > 0$. Par exemple, $R^l$ et l'ouvert

$$(12) \qquad \dot{R}^l = R^l - \{0\},$$

c'est-à-dire $R^l$ privé de l'origine, ont cette propriété. Soit $U$ un cône ouvert, et soit $\alpha$ un nombre complexe. Nous dirons qu'une distribution $f(x)$ est homogène de degré $\alpha$ dans $U$ si

$$\lambda > 0 \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x).$$

Par exemple, $|x|^\alpha$ est homogène de degré $\alpha$ pour $x \neq 0$, $\partial_\nu \delta(x)$ est homogène de degré $-|\nu| - l$ dans $R^l$. Le support d'une telle distribution est un cône fermé (dans $U$). Soit

$$\Phi_\alpha(U)$$

l'ensemble des distributions dans $U$, homogènes de degré $\alpha$. C'est un sous-espace fermé de $C'(U)$. En effet, c'est l'espace où s'annulent les applications continues $f(x) \to f(\lambda x) - \lambda^\alpha f(x)$.

De même, soit

$$F_\alpha(U)$$

le sous-espace de $\Phi_\alpha(U)$ dont les éléments sont de classe $C^\infty$ pour $x \neq 0$. Si $U$ ne contient pas l'origine, $F_\alpha(U)$ est un sous-espace fermé de $C(U)$.

Soit $\gamma(x) \in F_1(\dot{R}^l)$ avec $\gamma > 0$. Le changement de variable

$$(13) \qquad x \to (y, t), \qquad t = \log \gamma(x), \qquad y = x/\gamma(x)$$

applique $\dot{R}^l$ sur le produit $Y \times R$ où $Y$ est la variété $\gamma(x) = 1$. Alors, si $f \in \Phi_\alpha(\dot{R}^l)$,

$$(14) \qquad F(x, t) = \gamma(x)^{-\alpha} f(x)$$

ne dépend pas de $t$; la réciproque vaut; donc

$$f \to F$$

est un homéomorphisme linéaire de $\Phi_\alpha(\dot{R}^l)$ sur l'espace des distributions dans $C'(Y \times R)$ qui ne dépendent pas de $t$ et de $F_\alpha(\dot{R}^l)$ sur l'espace des fonctions de $C(Y \times R)$ qui ne dépendent pas de $t$. Comme ces deux espaces s'identifient avec $C'(Y)$ et $C(Y)$ respectivement on a, en particulier,

Lemme 1.2. — $F_\alpha(\dot{R}^l)$ est dense dans $\Phi_\alpha(\dot{R}^l)$.

3° *Distributions régulières en certaines variables.* — Soit $X = Y \times Z$, où $Y = R^p$ et $Z = R^q$. Une distribution $f$ sur $X$ est dite régulière en $z$ (Schwartz [10] : intégralement semi-régulière en $z$) si elle s'écrit localement sous la forme

$$(15) \qquad f(x) = \sum h_\nu(x)\, (\partial/\partial x)_\nu F_\nu(x),$$

où $h_\nu \in C(X)$ et toutes les dérivées de $F_\nu(x) = F_\nu(y, z)$ par rapport à $z$ sont continues. Une représentation équivalente à (15) est évidemment la suivante

$$f(x) = \sum (\partial/\partial y)_\nu G_\nu(y, z), \tag{16}$$

où les $G$ ont la même propriété que les $F$. Toute distribution indépendante de $z$ est régulière en $z$. On voit tout de suite que si $x \to x'$ est un changement de variable qui conserve $Y$, c'est-à-dire si

$$y'(y, z) \text{ est fonction de } y \text{ seul,}$$

alors $f$ régulier en $z$ entraîne $f'(y', z') = f(y, z)$ régulier en $z'$. Si $f$ est régulier en $z$, alors, vu (16),

$$\int f(y, z) g(y, z) \tau(y) \in C(Z) \tag{17}$$

pour tout $g \in C(X)$, à support compact dans $Y$ pour $z$ fixe, les dérivées s'obtenant en opérant sous le signe d'intégration. En particulier on peut définir un produit

$$h(z) f(y, z) \in C'(X)$$

pour tout $h \in C'(Z)$.

Plus généralement nous allons démontrer

LEMME 1.3. — Soit $X = Y \times Z \times U$, où $Y = R^p$, $Z = R^q$, $U = R^m$ et soit $f_1 \in C'(X)$ régulier en $z$, $u$ et $f_2 \in C'(X)$ régulier en $y$, $u$. Alors le produit

$$f_1(x) f_2(x)$$

est bien défini, et il est régulier en $u$.

PREUVE. — Nous avons localement

$$f_1(y, z, u) = \sum (\partial/\partial y)_\nu G_{1\nu}(y, z, u), \tag{18}$$

$$f_2(y, z, u) = \sum (\partial/\partial z)_\mu G_{2\mu}(y, z, u), \tag{19}$$

où toutes les dérivées des $G_{1\nu}$ par rapport à $z$, $u$ et toutes les dérivées des $G_{2\mu}$ par rapport à $y$, $u$ sont continues. Posons, par définition

$$(f_1 f_2, g) = \sum (-1)^{|\mu|+|\nu|}$$
$$\times \int (\partial/\partial y)_\nu (\partial/\partial z)_\mu G_{1\nu}(y, z, u)\, G_{2\mu}(y, z, u)\, g(y, z, u)\, \tau(x),$$

où les dérivées n'opèrent pas sur $\dot{y}$ et $\dot{z}$. Il est clair que la fonction à intégrer a la forme

$$\sum H_\nu(y, z, u)\,(\partial/\partial x)_\nu g(y, z, u),$$

où toutes les dérivées des $H_\nu$ par rapport à $u$ sont continues. Donc $f_1 f_2$ est régulier en $u$. Si les $G_{1\nu}$ et les $G_{2\mu}$ sont réguliers en $x$, $f_1 f_2$ est le produit ordinaire. En approximant les $G$ dans (18) et (19) par des fonctions régulières on obtient des fonctions régulières $F_1$ et $F_2$ voisines de $f_1$ et $f_2$ telles que

$$(f_1 f_2, g) = \lim\,(F_1 F_2, g), \qquad g \in C_0(X)$$

pour $F_1 \to f_1$ et $F_2 \to f_2$. Il en résulte que le produit $f_1 f_2$ ne dépend pas du choix des $G$. Notons que $f_1 f_2 = f_2 f_1$ et que

$$(h f_1) f_2 = f_1 (h f_2)$$

pour $h \in C(X)$.

Nous aurons besoin de la notion de régularité partielle aussi sur une variété. Soient $X$ et $Z$ deux variétés de dimensions $l$ et $q \leqq l$, et soit $x \to z(x)$ une application $X \to Z$ telle que

$$(20) \qquad z(x) \in C^\infty, \qquad z(x) \text{ de rang } q \text{ partout.}$$

Nous dirons que la distribution $f(x) \subset C'(X)$ est régulière en $z$ si elle se met localement sous la forme (15) ou sous la forme équivalente (16), où $(x_1, \ldots, x_l) = (y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_q)$ sont des coordonnées de $X$ telles que

$$z_1(x) = \zeta_1(z(x)), \quad \ldots, \qquad z_q(x) = \zeta_q(z(x)),$$

$\zeta_1, \ldots, \zeta_q$ étant des coordonnées de $Z$.

Remarquons que si $f$ est régulier en $z$ et si $z'(x)$ est assez voisin de $z(x)$, alors $f$ est régulier en $z'$ au moins sur une partie relativement compacte donnée de $X$. En effet, dans ce cas, $z'$ satisfait encore à (20) et $(y_1, \ldots, z'_1, \ldots)$, ou $z'_1(x) = \zeta_1(z'(x)), \ldots$, sont encore des coordonnées sur $X$ [1].

Notons le lemme suivant dont la démonstration est déjà faite

LEMME 1.4. — Si $f \subset C'(X)$ est régulier en $z$, la restriction

$$f(x)\,|_{z(x)=z}$$

et le produit

$$(21) \qquad f(x)\,h(z(x)), \qquad h \in C'(Z)$$

sont des distributions bien définies, respectivement sur la variété $X_z : z(x) = z$ et sur $X$.

[1] Cette remarque est à la base du lemme 1.6.

EXEMPLE. — On a

LEMME 1.5. — La restriction

$$f(x) \to f(x)\,|_{\gamma(x)=1} \tag{22}$$

est un homéomorphisme linéaire

$$\Phi_\alpha(\dot{R}^l) \to C'(Y)$$

et

$$F_\alpha(\dot{R}^l) \to C(Y),$$

où $Y$ est la variété $\gamma(x) = 1$.

PREUVE. — Faisons le changement de variable (13). Alors (22) se réduit à

$$F(y, t) \to F(y, t)\,|_{t=0},$$

où $F$ ne dépend pas de $t$. Évidemment, cette application est l'inverse de l'injection

$$C'(Y) \ni F(y) \to F(y) \in C'(Y \times R).$$

Par conséquent, le lemme est un corollaire du lemme 1.2.

Supposons que dans le produit (21), $f$, $h$ et $z$ soient des fonctions d'un paramètre $u$. Plus tard nous rencontrerons des situations où il faut étudier les propriétés de l'intégrale

$$\int f(x, u)\, h(z(x, u), u)\, \omega(x), \qquad \omega \in \Omega_0(X), \tag{23}$$

comme fonction de $u$. Le cas spécial suivant en est typique

$$\int f(x)\, h(ux)\, g(x)\, \tau(x), \tag{24}$$

où $f \in C'(R^l)$, $g \in C_0(R^l)$, $h \in C'(R)$ et $ux$ est un produit scalaire

$$ux = u_0 + u_1 x_1 + \ldots + u_l x_l.$$

Soit donc $U$ une variété, $u \in U$, et soit $x, u \to z(x, u)$ une application $X \times U \to Z$ de classe $C^\infty$ telle que

$$x \to z_0(x) = z(x, u_0)$$

satisfait à (20) pour un $u_0$ fixé dans $U$. On a

LEMME 1.6. — Supposons que $f(x, u) \in C'(X \times U)$ soit régulier en $z(x, u_0)$, $u$ pour $u$ proche de $u_0$ et que $h(z, u) \in C'(Z \times U)$ soit régulier en $u$ proche de $u_0$. Alors, étant donné un ouvert relativement compact $V$ de $X$, la restriction de $f$ à $V \times U$ est régulière en $(z(x, u), u)$ pour $u$ proche de $u_0$; le produit

$$f(x, u)\, h(z(x, u), u)$$

est régulier en $u$ proche de $u_0$. En particulier, proche de $u_0$, l'intégrale (23) est fonction régulière de $u$ pour tout $\omega$.

Preuve. — Par une partition de l'unité, on se ramène à une situation locale. Soient

$$(25) \qquad y_1, \quad \ldots, \quad y_p, \quad \xi_1^0, \quad \ldots, \quad \xi_q^0$$

des coordonnées de $x$ telles que

$$\xi_1^0(x) = \zeta_1(z(x, u_0)), \ \ldots,$$

$\zeta_1, \ldots$ étant des coordonnées de $Z$, et que

$$f(x, u) = F(y_1, \ldots, \xi_1^0, \ldots, u_1, \ldots),$$

$F$ étant régulier en $\xi_1^0, \ldots, u_1 \ldots$. Alors près de $u = u_0$,

$$(26) \qquad y_1, \quad \ldots, \quad y_p, \quad \xi_1, \quad \ldots, \quad \xi_q,$$

où

$$\xi_1(x) = \zeta_1(z(x, u)), \ \ldots$$

sont encore des coordonnées sur $X$. Comme le passage de (25) à (26) ne change pas $y_1, \ldots$, on a encore

$$f(x, u) = G(y_1, \ldots, \xi_1, \ldots, u_1, \ldots)$$

$G$ étant régulier en $\xi_1, \ldots, u_1, \ldots$. Par hypothèse,

$$h(z(x, u), u) = H(\xi_1, \ldots, u_1, \ldots),$$

$H$ étant régulier en $u_1, \ldots$. Donc le lemme résulte du lemme 1.3.

Exemple. — Si $f \in C(R^l)$, l'intégrale (24) est régulière en $u$ pour $u_1, \ldots, u_m \neq 0$. On obtient d'ailleurs immédiatement ce résultat par un changement de variable linéaire transformant $ux$ en l'une des nouvelles coordonnées.

4° *Transformation de Fourier.* — Posons

$$x_\nu = x_{\nu_1} \ldots x_{\nu_p}.$$

L'espace des fonctions $g$ de $C(R^l)$ pour lesquelles les semi-normes

$$|g|_p = \sup |x_\nu \partial_{\nu'} g(x)|; \qquad x \in R^l, \qquad |\nu| \leqq p, \qquad |\nu'| \leqq p,$$

sont finies forment un Fréchet réflexif que nous appellerons $S = S(R^l)$. Il est dense dans son dual $S'$, l'espace des distributions tempérées. Pour qu'une distribution $f$ soit tempérée, il faut et il suffit qu'il existe un $c > 0$ et un $k$ tel que

$$|(f, g)| \leq c|g|_k, \qquad g \in C_0(R^l).$$

En particulier, toute distribution à support compact est tempérée. La transformation de Fourier

$$(\mathcal{F} f)(x) = \int e^{ix\xi} f(\xi)\,\tau(\xi),$$

et sa conjuguée

$$(\overline{\mathcal{F}} f)(x) = \int e^{-ix\xi} f(\xi)\,\tau(\xi),$$

où $x\xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_l\xi_l$ sont des homéomorphismes linéaires $S \to S$ tel que

$$(27) \qquad \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = (2\pi)^l, \qquad \overline{\mathcal{F} f} = \overline{\mathcal{F}}\bar{f}.$$

On étend $\mathcal{F}$ à $S'$ par dualité,

$$(\mathcal{F} f, g) = (f, \mathcal{F} g), \qquad f \in S', \qquad g \in S$$

et de même pour $\overline{\mathcal{F}}$. On voit que $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont des homéomorphismes linéaires $S' \to S'$ satisfaisant à (27).

Exemple. —

$$\mathcal{F}\delta = \overline{\mathcal{F}}\delta = 1, \qquad \mathcal{F}1 = \overline{\mathcal{F}}1 = (2\pi)^l\delta,$$
$$\mathcal{F}\partial_\nu\delta = i^{-|\nu|}x_\nu, \qquad \overline{\mathcal{F}}\partial_\nu\delta = i^{|\nu|}x_\nu;$$
$$\mathcal{F}x_\nu = i^{-|\nu|}\partial_\nu\delta, \qquad \overline{\mathcal{F}}x_\nu = i^{|\nu|}\partial_\nu\delta.$$

Exemple. — Nous allons voir plus tard que les distributions homogènes dans tout l'espace sont tempérées :

$$\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(R^l) \subset S'.$$

On a

$$(28) \qquad \mathcal{F}\Phi_\alpha = \overline{\mathcal{F}}\Phi_\alpha = \Phi_{\alpha'},$$

où $\alpha'$ est le conjugué de $\alpha$ défini par

$$(29) \qquad \alpha + \alpha' = -l.$$

En effet, posons $g_\lambda(x) = \lambda^{-l}g(x/\lambda)$. Alors $(\mathcal{F} g_\lambda)(x) = (\mathcal{F} g)(\lambda x)$. Par conséquent, si $f \in \Phi_\alpha$ on a

$$\begin{aligned}\int \mathcal{F} f(\lambda x)g(x)\tau(x) &= \int \mathcal{F} f(x)g_\lambda(x)\tau(x)\\ &= \int f(x)\mathcal{F} g_\lambda(x)\tau(x) = \int f(x)\mathcal{F} g(\lambda x)\tau(x)\\ &= \lambda^{\alpha'}\int f(x)\mathcal{F} g(x)\tau(x) = \int \lambda^{\alpha'}\mathcal{F} f(x)g(x)\tau(x),\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\mathcal{F} f \in \Phi_{\alpha'}$ et de même pour $\bar{\mathcal{F}}$. Par conséquent $\mathcal{F}\Phi_\alpha \subset \Phi_{\alpha'}$. Combiné avec (27) ceci entraîne (28).

La convolution

$$f \star g(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, \tau(y)$$

est une application $S \times S \to S$ et $S' \times S \to S' \cap C(R^l)$. Elle s'étend à une application $S' \times C'_0(R^l) \to S'$. Dans tous les cas,

$$\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F} f \mathcal{F} g, \qquad \bar{\mathcal{F}}(f \star g) = \bar{\mathcal{F}} f \bar{\mathcal{F}} g.$$

En particulier,

$$\mathcal{F} fg = (2\pi)^{-l} \mathcal{F} f \star \mathcal{F} g, \qquad \bar{\mathcal{F}} fg = (2\pi)^{-l} \bar{\mathcal{F}} f \star \bar{\mathcal{F}} g$$

sur $S' \times S$.

**2. Dualité homogène.** — Soit $\gamma(x) > 0$ une fonction sur $\dot{R}^l$ indéfiniment différentiable et homogène de degré 1. Comme nous allons souvent utiliser des coordonnées polaires par rapport à $\gamma$, nous donnerons ici quelques formules à cet égard. Soit

$$\sigma(x) = \sum (-1)^{j-1} x_j\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \ldots \wedge dx_l.$$

Alors on a

$$(1) \qquad \sigma(x) \wedge d\gamma(x) = \gamma(x)\, \tau(x)$$

$$(2) \qquad \tau(x) = \gamma(x)^{l-1}\, d\gamma(x) \wedge \sigma(x/\gamma(x))$$

$$(3) \qquad d[f(x)\, \sigma(x)] = \sum \left( x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + l f \right) \tau(x).$$

Plus généralement, posons

$$X_j = x_1, \ldots, x_{j-1}, \quad x_{j+1}, \ldots, x_l$$

et

$$\tau_j(x) = \tau(X_j), \qquad \sigma_j(x) = \sigma(X_j)$$

de sorte que, par exemple,

$$\sigma(x) = \sum_j (-1)^{j-1} x_j\, \tau_j(x).$$

Alors

$$(4) \quad d[f(x)\, \sigma_j(x)] = \left( \sum_{k=1}^{l} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + (l-1)^j f \right) \tau_j + (-1)^j \frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma(x)$$

Posons

$$\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(\dot{R}^l), \qquad F_\alpha = F_\alpha(\dot{R}^l).$$

Nous écrirons $f = f_\alpha$ pour les distributions dans $\Phi_\alpha$. Il est clair que

$$\Phi_\alpha f_\beta \subset \Phi_{\alpha+\beta}, \qquad F_\alpha f_\beta \subset F_{\alpha+\beta}$$

si $f_\beta \in F_\beta$, Vu (3), la forme

$$f_{-l}(x)\,\sigma(x)$$

est close. Donc, si nous définissons le conjugué $\alpha'$ de $\alpha$ par (1.29), l'intégrale suivante, définie sur le produit $F_\alpha \times F_{\alpha'}$,

$$(5) \qquad \langle f_\alpha, f_{\alpha'} \rangle = \int_{\gamma=1} f_\alpha(x) f_{\alpha'}(x)\,\sigma(x)$$

ne dépend pas de $\gamma$. Vu que les éléments de $\Phi_\alpha$ sont réguliers en $\gamma(x)$, elle est définie sur $\Phi_\alpha \times F_{\alpha'}$; dans ce cas encore, elle est indépendante de $\gamma$, puisque $F_\alpha$ est dense dans $\Phi_\alpha$.

THÉORÈME 2.1. — Mis en dualité par (5), chacun des espaces $\Phi_\alpha$ et $F_{\alpha'}$ est le dual de l'autre.

PREUVE. — Vu le lemme 1.1.5, il suffit de vérifier que, $Y$ étant la variété $\gamma(x) = 1$, la forme bilinéaire

$$\int_{\gamma(x)=1} f(x)\,g(x)\,\sigma(x)$$

est une dualité entre $C'(Y)$ et $C(Y)$, chacun de ces espaces étant le dual de l'autre. Or ceci est évident : $\sigma(x) \neq 0$ sur $Y$ et, puisque $Y$ est compact, $C(Y)$ est un Fréchet réflexif.

NOTE. — Soient $f_\alpha \in \Phi_\alpha$ et $g \in C(\dot{R}^l)$. Alors, vu que $f_\alpha$ est régulier en $\gamma(x)$,

$$\langle f_\alpha, g \rangle_\gamma = \int_{\gamma(x)=1} f_\alpha(x)\,g(x)\,\sigma(x)$$

est une forme bilinéaire continue sur $\Phi_\alpha \times C(\dot{R}^l)$, qui dépend de $\gamma$. Vu (1) on peut aussi l'écrire

$$\int f_\alpha(x)\,\delta(\gamma(x) - 1)\,g(x)\,\tau(x).$$

NOTE. — La formule (4) montre qu'on a

$$\int_{\gamma=1} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\sigma(x) = (-1)^{j-1} \int_{\gamma=1} \left[ \sum x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + (l-1) f \right] \tau_j(x).$$

En particulier on a une formule d'intégration par parties dans (5), à savoir

$$(6) \qquad \int_{\gamma=1} \frac{\partial}{\partial x_j} (f_{\alpha+1}(x) f_{\alpha'}(x))\,\sigma(x) = 0.$$

Elle vaut évidemment sur $F_{\alpha+1} \times F_\alpha$, et elle s'étend par continuité à $\Phi_{\alpha+1} \times F_{\alpha'}$.

**3. L'application $T_\alpha$.** — Soit $f_\alpha \in F_\alpha(R^l)$ et soit $g \in C_0(R^l)$ nul près de o. En prenant des coordonnées polaires $r = \gamma(x)$, $y = x/\gamma(x)$ dans

$$(f_\alpha, g) = \int f_\alpha(x)\, g(x)\, \tau(x),$$

on obtient, vu (2.2),

$$(f_\alpha, g) = \langle f_\alpha, T_{\alpha'} g \rangle_\gamma, \tag{1}$$

où

$$T_{\alpha'} g(x) = \int_0^\infty r^{-\alpha'} g(rx)\, dr/r \tag{2}$$

appartient à $F_{\alpha'}(\dot{R}^l)$. Soit

$$S(\dot{R}^l)$$

l'espace des fonctions de $S(R^l)$ qui s'annulent avec toutes leurs dérivées à l'origine. Il est clair que $T_{\alpha'}$ est une application continue $S(\dot{R}^l) \to F_{\alpha'}(\dot{R}^l)$; donc, vu les lemmes **1.1.2** et **1.1.5**, (1) s'étend par continuité au produit $\Phi_\alpha(\dot{R}^l) \times S(\dot{R}^l)$.

Note. — En particulier, soit $f_\alpha$ homogène dans tout l'espace, soit $g \in C_0(R^l)$, et fixons $h \in C_0(R^l)$ égal à 1 près de l'origine. Alors, la forme

$$(f_\alpha, g) = (f_\alpha, hg) + (f_\alpha, (1-h)g)$$

se prolonge en une forme linéaire continue sur $S(R^l)$ : toute distribution homogène dans l'espace est tempérée.

Nous allons prolonger $T_\alpha$ à $S = S(R^l)$. Soit $p$ générique pour les entiers $\geqq 0$. Si $\operatorname{Re} \alpha < 0$, l'intégrale (2) avec $\alpha'$ remplacé par $\alpha$, converge aussi pour $g \in S$, et l'on a, par des intégrations par parties,

$$T_\alpha g(x) = \int_0^\infty (\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p))^{-1}\, r^{-\alpha+p}\, g^{(p+1)}(rx)\, dr, \tag{3}$$

où

$$g^{(p)}(rx) = \left(\frac{d}{dr}\right)^p g(rx) = \sum_{|\nu|=p} x_\nu\, (\partial_\nu g)(rx).$$

Plus généralement, si $\operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} p$ et si $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots, p-1$, l'intégrale (3) converge et ne dépend pas de $p$. Nous la prenons comme définition de $T_\alpha$ si $\alpha \neq p$.

On voit que, pour $x \neq 0$ fixé, $T_\alpha g(x)$ est une fonction méromorphe de $\alpha$ avec des pôles simples pour $\alpha = p$. Nous poserons, par définition,

$$T_p g(x) = \left[ \frac{d}{d\alpha} (\alpha - p) T_\alpha g(x) \right]_{\alpha = p}. \tag{4}$$

Autrement dit, dans le développement de Laurent pour $T_\alpha g(x)$ autour de $\alpha = p$, $T_p g(x)$ est le terme constant. Un calcul facile donne

$$T_p g(x) = \frac{1}{p!} \int_0^\infty \left( \log \frac{1}{r} - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{p} \right) g^{(p+1)}(rx)\, dr. \tag{5}$$

Notons que

$$T_p g(x) = \frac{1}{p!} \int_0^\infty \log \frac{1}{r} g^{(p+1)}(rx)\, dr$$

au polynome homogène de degré $p$, près :

$$\frac{1}{p!} \left( 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p} \right) \sum_{|\nu| = p} x_\nu \partial_\nu g(0).$$

Notons aussi que si $f_\alpha \in F_\alpha(\dot{R}^l)$, si $\gamma \in F_1(\dot{R}^l)$ avec $\gamma > 0$ et si $h(r) \in C_0(R)$ a son support dans $r > 0$, alors

$$g(x) = f_\alpha(x)\, h(\gamma(x)) \in C_0(\dot{R}^l) \tag{6}$$

et

$$T_\alpha g(x) = f_\alpha(x) \int_0^{+\infty} h(r)\, dr/r. \tag{7}$$

**Lemme 3.1.** — *Soit $\lambda > 0$. Alors*

$$T_\alpha g(\lambda x) = \lambda^\alpha T_\alpha g(x)$$

*pour $\alpha \neq p$ et*

$$T_p g(\lambda x) = \lambda^p T_p g(x) - \frac{\lambda^p}{p!} \log \lambda \sum_{|\nu| = p} x_\nu \partial_\nu g(0)$$

*pour $\alpha = p$. Les applications*

$$T_\alpha : C_0(\dot{R}^l) \to F_\alpha(\dot{R}^l), \qquad T_\alpha : S \to C(\dot{R}^l)$$

*sont bornées, la première étant surjective.*

**Preuve.** — Immédiate, vu (2), (3), (5) et (7).

**4. Distributions homogènes dans tout l'espace.** — Maintenant nous allons nous intéresser aux distributions $f_\alpha$ qui sont homogènes dans tout l'espace. Nous poserons désormais

$$\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(R^l).$$

Nous savons que $\Phi_\alpha \subset S'$. Soit $N_\alpha$ l'espace des éléments de $\Phi_\alpha$ qui sont des polynomes ou bien des distributions ayant l'origine pour support. On a $N_\alpha = 0$ sauf dans le cas $\alpha = p$, où $N_\alpha$ est l'espace des polynomes $Q_p$, homogènes de degré $p$, et dans le cas $\alpha = p'$, où $N_\alpha$ est l'espace des $Q_p(\partial/\partial x)\,\delta(x)$.

Lemme 4.1. — Soit $f_\alpha(x)$ homogène pour $x \neq 0$. Alors

$$(1) \qquad \langle f_\alpha, N_{\alpha'} \rangle = 0$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que $f_\alpha$ ait un prolongement homogène à tout l'espace. Ce prolongement est unique modulo $N_\alpha$.

Note. — La condition (1) n'existe que pour $\alpha = p'$; alors elle signifie

$$\langle f_{p'}, Q_p \rangle = 0, \qquad \forall\, Q_p$$

et le prolongement de $f_{p'}$ est unique à une distribution du type $Q_p(\partial/\partial x)\,\delta(x)$. Ce lemme se trouve chez Ge'lfand et Shilov [3].

Preuve. — On a pour tout $\alpha$

$$(f_\alpha, g) = \langle f_\alpha, T_{\alpha'} g \rangle_\gamma$$

quand $g$ s'annule suffisamment à l'origine. En vertu du lemme 3.1, le second membre, avec un $\gamma$ déterminé, a un sens pour $g \in S$. Il définit dans tout l'espace une distribution tempérée (qui peut dépendre de $\gamma$), donc un prolongement $f'$ de $f_\alpha$.

On a

$$(2) \qquad \int f'(\lambda x)\, g(x)\, \tau(x) = \lambda^{-l} \int f'(x)\, g(x/\lambda)\, \tau(x) = \lambda^{-l} \langle f_\alpha, T_{\alpha'} g_\lambda \rangle_\gamma,$$

où $g_\lambda(x) = g(x/\lambda)$. Par conséquent, vu le lemme 3.1,

$$f'(\lambda x) = \lambda^\alpha f'(x)$$

si $\alpha \neq p'$ et

$$(3) \qquad f'(\lambda x) = \lambda^{p'} f'(x) + (-1)^p (p\,!)^{-1} \lambda^{p'} \log \lambda \sum \langle f_{p'}, x_\nu \rangle\, \partial_\nu\, \delta(x)$$

si $\alpha = p'$. Donc, si $f_\alpha$ a la propriété (1), $f'$ est homogène pour tout $x$. Réciproquement, supposons que $f_\alpha$ ait un prolongement homogène $f''$. Alors, $f' - f''$ a pour support l'origine, c'est-à-dire, il existe un polynome $Q$ tel que

$$f'(x) = f''(x) + Q(\partial/\partial x)\,\delta(x).$$

Si $\alpha \neq p'$, le dernier terme est homogène de degré $\alpha$, ce qui entraîne $Q = 0$. Si $\alpha = p'$, nous obtenons, vu (3),

$$\begin{aligned} f'(\lambda x) - \lambda^{p'} f'(x) &= (-1)^p (p\,!)^{-1} \lambda^{p'} \log \lambda \sum \langle f_{p'}, x_\nu \rangle\, \partial_\nu\, \delta(x) \\ &= \left( Q(\lambda^{-1}\, \partial/\partial x)\, \lambda^{-l} - \lambda^{p'} Q(\partial/\partial x) \right) \delta(x). \end{aligned}$$

Comme les puissances entières de $\lambda$ et leurs produits par $\log \lambda$ sont linéairement indépendants, on a $\langle f_{p'}, x_\nu \rangle = 0$ pour tout $\nu$, c'est-à-dire (1).

Comme tout $Q_p(\partial/\partial x)\,\delta(x)$ est homogène de degré $p'$, la démonstration est achevée.

LEMME 4.2. — Soit $f_\alpha \in \Phi_\alpha$ et $g \in S$. Alors la formule

$$(f_\alpha, g) = \langle f_\alpha, T_{\alpha'} g \rangle_\gamma + (f_\alpha^{(\gamma)}, g) \tag{4}$$

définit une distribution unique $f_\alpha^{(\gamma)} \in \Phi_\alpha$, fonction linéaire de $f_\alpha$, qui a l'origine pour support et qui est nulle sauf si $\alpha = p'$.

NOTE. — Si $\alpha \neq p'$, le premier terme du second membre droit de (4) ne dépend pas de $\gamma$; si $\alpha = p'$, il en dépend.

PREUVE. — La démonstration du lemme précédent montre que $\langle f_\alpha, T_{\alpha'} g \rangle_\gamma$ définit une distribution homogène de degré $\alpha$ dans tout l'espace. Puisque

$$(f_\alpha, g) = \langle f_\alpha, T_{\alpha'} g \rangle_\gamma$$

quand $g$ s'annule près de l'origine, cette distribution est égale à $f_\alpha$ pour $x \neq 0$. Sa différence $f_\alpha^{(\gamma)}$ avec $f_\alpha$ est donc nulle, sauf si $\alpha = p'$; c'est alors une distribution homogène de degré $p'$ ayant l'origine pour support. On a donc (4).

Passons maintenant aux espaces quotients

$$H_\alpha = \Phi_\alpha / N_\alpha. \tag{5}$$

Pour $\alpha \neq p, p'$, on a $H_\alpha = \Phi_\alpha$. Soit $G_\alpha$ l'espace des éléments de $H_\alpha$ qui sont de classe $C^\infty$ en dehors de l'origine. Comme les éléments de $N_\alpha$ ont cette propriété, $G_\alpha$ est bien défini. On a $G_\alpha = F_\alpha(\dot{R}^l)$ pour $\alpha \neq p$. Si $\alpha = p$, il faut prendre le quotient par les polynomes homogènes de degré $p$. Comme $N_\alpha$ est de dimension finie, $G_\alpha$ est un Fréchet réflexif. Le lemme 4.1 montre que $\langle f_\alpha, f_{\alpha'} \rangle$ est une dualité sur $H_\alpha \times G_{\alpha'}$. Le même lemme combiné avec le théorème 2.1 donne

THÉORÈME. — Mis en dualité par (2.5), chacun des espaces $H_\alpha$ et $G_{\alpha'}$ est le dual de l'autre.

5. **Les distributions $\chi$.** — Nous allons étudier une famille de distributions à une variable qui sont fondamentales dans la théorie de la transformation de Fourier des distributions homogènes. Soit $\alpha$ un nombre complexe arbitraire, et soit $s$ une variable complexe. Posons, par définition

$$\chi_\alpha(s) = e^{-\pi i \alpha}\,\Gamma(-\alpha)\,s^\alpha,$$

où $\alpha \neq p$ et

$$s^\alpha = e^{\alpha \log s}; \qquad 0 \leq \arg s \leq \pi i, \qquad s \neq 0.$$

Pour $s$ fixé, $\chi_\alpha(x)$ est fonction méromorphe de $\alpha$ ayant des pôles simples pour $\alpha = p$.

Nous posons, conformément à (3.4),

$$(1) \qquad \chi_p(s) = \left[\frac{d}{d\alpha}(\alpha - p)\,\chi_\alpha(s)\right]_{\alpha=p}$$

de sorte que $\chi_p(s)$ est le terme constant de $\chi_\alpha(s)$ dans son développement de Laurent autour de $\alpha = p$. Un calcul facile donne

$$\chi_p(s) = (p\,!)^{-1} s^p \left(\log s^{-1} + \pi i + \Gamma'(1) + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}\right).$$

Souvent nous utiliserons seulement la partie singulière de cette fonction,

$$\chi_p(s) \equiv (p\,!)^{-1} s^p \log s^{-1} \pmod{s^p}.$$

Notons quelques propriétés évidentes des fonctions $\chi_\alpha$ :

$$(2) \qquad \chi'_{\alpha+1} = \chi_\alpha,$$

$$(3) \qquad s\chi_\alpha = (\alpha + 1)\,\chi_{\alpha+1}, \qquad \alpha \neq p, \qquad \alpha \neq -1,$$

$$(3') \qquad s\chi_p \equiv (p+1)\,\chi_{p+1} \bmod s^{p+1},$$

$$(3'') \qquad s\chi_{-1} = -1,$$

$$(4) \qquad \lambda > 0, \quad \alpha \neq p \Rightarrow \chi_\alpha(\lambda s) = \lambda^\alpha \chi_\alpha(s),$$

$$(4') \qquad \lambda > 0 \Rightarrow \chi_p(\lambda s) \equiv \lambda^p \chi_p(s) \bmod s^p,$$

$$(5) \qquad \alpha \text{ réel} \neq p, \quad s \text{ réel} \Rightarrow \chi_\alpha(-s) = e^{-\pi i \alpha}\,\overline{\chi_\alpha(s)},$$

$$(5') \qquad \alpha \text{ réel} = p, \quad s \text{ réel} \Rightarrow \text{même chose} \bmod s^p.$$

Pour $\alpha$ fixé, $\chi_\alpha(s)$ est fonction analytique multiforme de $s \neq 0$. Nous avons défini une branche principale pour $\operatorname{Im} s > 0$ et nous allons définir $\chi_\alpha(s)$ comme distribution tempérée sur l'axe réel. La valeur de $\chi_\alpha$ pour $\varphi \in C_0(\boldsymbol{R})$ sera, par définition, la limite

$$\int \chi_\alpha(s)\,\varphi(s)\,ds = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \chi_\alpha(s + i\varepsilon)\,\varphi(s)\,ds.$$

Si Re $\alpha > -1$, la limite existe, la fonction $\chi_\alpha(s)$ étant intégrable au voisinage de l'origine. Si Re $\alpha \leq -1$, la limite existe aussi. En effet, en vertu de (2) on a

$$\int \chi_\alpha(s + i\varepsilon)\,\varphi(s)\,ds = (-1)^k \int \chi_{\alpha+k}(s + i\varepsilon)\,\varphi^{(k)}(s)\,ds$$

pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots$; en prenant $k$ assez grand on se ramène au cas précédent. Comme illustration, écrivons les distributions $\chi_{-p}$ sous forme explicite. En posant

$$(6) \qquad \varkappa_0(s) = \log \frac{1}{|s|}, \qquad \theta_0(s) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} s)$$

on a, évidemment,

$$\chi_0(s) \equiv \varkappa_0(s) + \pi i \theta_0(s) \qquad (\text{mod constante}).$$

Par conséquent si nous posons

$$(7) \qquad \varkappa_{-p}(s) = \left(\frac{d}{ds}\right)^p \varkappa_0(s), \qquad \theta_{-p}(s) = \left(\frac{d}{ds}\right)^p \theta_0(s),$$

nous aurons

$$(8) \qquad \chi_{-p}(s) = \varkappa_{-p}(s) + \pi i \theta_{-p}(s).$$

Observons que $\theta_{-p} = \delta^{(p-1)}$, $\delta$ étant la distribution de Dirac, et que $\varkappa_{-1}$, $\varkappa_{-2}$, ... sont les dérivées successives de la distribution $\varkappa_{-1}$, définie par la valeur principale

$$\int \varkappa_{-1}(s)\,\varphi(s)\,ds = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|s| \geq \varepsilon} \varphi(s)\,ds/s.$$

Étudions maintenant quelques intégrales, étendues à $\dot{R}^l$ et aux variétés $\gamma = 1$ contenant les noyaux $\chi_\alpha(x\xi)$.

Lemme 5.1. — La formule

$$(9) \qquad g(x) \to \int \chi_{\alpha'}(x\xi)\,g(\xi)\,\tau(\xi)$$

définit une application continue $S \to C(\dot{R}^l)$. La formule

$$(10) \qquad f_\alpha(x) \to \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(x\xi)\,f_\alpha(\xi)\,\sigma(\xi)$$

définit une application continue $F_\alpha(\dot{R}^l) \to C(\dot{R}^l)$, qui se prolonge en une application continue $\Phi_\alpha(\dot{R}^l) \to S'$. Dans tous les cas, les dérivées de ces deux intégrales s'obtiennent par dérivation sous le signe d'intégration :

$$(11) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j} \int \chi_{\alpha'}(x\xi)\,g(\xi)\,\tau(\xi) = \int \chi_{\alpha'-1}(x\xi)\,\xi_j\,g(\xi)\,\tau(\xi),$$

$$(12) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(x\xi)\,f_\alpha(\xi)\,\sigma(\xi) = \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'-1}(x\xi)\,\xi_j\,f_\alpha(\xi)\,\sigma(\xi).$$

Note. — Si $f_\alpha \in F_\alpha$ est analytique, l'intégrale (10) est même analytique en $x$.

Note. — Vu (4) et (4'), l'intégrale (9) est homogène de degré $\alpha'$ modulo $N_{\alpha'}$, donc homogène si $\alpha' \neq p$. Si $f_\alpha \in F_\alpha$, l'intégrale (10) a la même propriété. De plus, elle ne dépend pas de $\gamma$ si $\alpha' \neq p$. Si $\alpha' = p$, alors, vu que

$$d[\chi_p(x\xi)\,f_{p'}(\xi)\,\sigma(\xi)] = (p!)^{-1}(x\xi)^p f_{p'}(\xi)\,\tau(\xi),$$

changer $\gamma$ ajoute à l'intégrale un polynome de $N_p$. Ces propriétés de (10) subsistent par continuité pour $f_\alpha \in \Phi_\alpha$.

NOTE. — Vu (2.6), si $f_{\alpha+1} \in F_{\alpha+1}$, alors

$$\int_{\gamma=1} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\chi_{\alpha'}(x\xi) f_{\alpha+1}(\xi))\, \sigma(\xi) = 0$$

pour $\alpha' \neq p$. Si $\alpha' = p$, cette intégrale est un polynome appartenant à $N_p$. Même résultat pour $f_{\alpha+1} \in \Phi_{\alpha+1}(\dot{R}^l)$.

PREUVE. — Si $x_j \neq 0$, nous pouvons choisir $\eta_j = \xi x$ et $\eta_k = \xi_k$, $k \neq j$, comme nouvelles coordonnées dans (9) et (10) qui s'écrivent respectivement

$$\varepsilon \int \chi_{\alpha'}(\eta_j)\, g(\xi(\eta, x))\, \tau(\xi(\eta, x)),$$

$$\varepsilon \int \chi_{\alpha'}(\eta_j) f_\alpha(\xi(\eta, x))\, \sigma(\xi(\eta, x)),$$

$\varepsilon$ étant le signe du Jacobien. D'où la première partie du lemme et la première note. Le même changement de variable montre que, pour $\varepsilon \to 0$,

$$\int \chi_{\alpha'}(x\xi + i\varepsilon)\, g(\xi)\, \tau(\xi) \to \int \chi_{\alpha'}(x\xi)\, g(\xi)\, \tau(\xi)$$

dans $C(\dot{R}^l)$. Vu (2), on obtient la dérivée $\partial/\partial x_j$ du premier membre en dérivant sous le signe d'intégration. Par conséquent on a (11); (12) s'obtient de la même manière. Notons aussi qu'on a

$$\int \chi_{\alpha'}(x\xi)\, \partial g/\partial x_j\, \tau(x) = -\int \chi_{\alpha'-1}(x\xi)\, \xi_j\, g(x)\, \tau(x). \tag{13}$$

Soient $f_\alpha \in F_\alpha$ et $g \in S$ nul près de l'origine. Alors on a

$$\int \left( \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(x\xi) f_\alpha(\xi)\, \sigma(\xi) \right) g(x)\, \tau(x) = \int_{\gamma=1} \left( \int \chi_{\alpha'}(x\xi)\, g(x)\, \tau(x) \right) f_\alpha(\xi)\, \sigma(\xi). \tag{14}$$

En effet, cette égalité vaut pour $\chi_{\alpha'}(x\xi + i\varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$, donc pour $\varepsilon = 0$. En vertu de (9), le second membre est une fonction bornée de $g \in S$ pour $f_\alpha \in \Phi_\alpha(\dot{R}^l)$. Donc le premier membre est une forme linéaire continue de $g$ qui sera, par définition, l'intégrale (10) pour $f_\alpha \in \Phi_\alpha(\dot{R}^l)$. Il est clair que l'application (10) correspondante est continue, et l'on déduit de (13) et (14) que (12) est encore valable quand l'intégrale est une distribution.

**6. Transformation de Fourier.** — Nous allons donner des expressions explicites de la transformation de Fourier d'une distribution appartenant à $\Phi_\alpha(R^l)$.

**Lemme 6.1.** — Soit $g \in S$. Alors, si $\alpha \neq p$, on a

$$T_\alpha \mathcal{F} g(x) = e(\alpha) \int \chi_\alpha(x\xi) g(\xi) \tau(\xi), \tag{1}$$

$$T_\alpha \overline{\mathcal{F}} g(x) = e(\alpha) \int \chi_\alpha(-x\xi) g(\xi) \tau(\xi), \tag{2}$$

où $x \neq 0$ et

$$e(\alpha) = e^{\frac{1}{2}\pi i \alpha}.$$

Si $\alpha = p$, on a les mêmes égalités modulo $N_p$.

**Preuve.** — Si $\varepsilon > 0$ et $\operatorname{Re} \alpha < 0$, vu la définition de $\chi_\alpha$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^{-\alpha-1} e^{-\varepsilon r} \mathcal{F} g(rx)\, dr &= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{ir(x\xi + i\varepsilon)} r^{-\alpha-1}\, dr \right) g(\xi) \tau(\xi) \\ &= \int_0^\infty \Gamma(-\alpha)\, e(-\alpha)\, (x\xi + i\varepsilon)^\alpha g(\xi) \tau(\xi) \\ &= e(\alpha) \int_0^\infty \chi_\alpha(x\xi + i\varepsilon) g(\xi) \tau(\xi).\end{aligned}$$

Transformant le premier membre par des intégrations par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{r^{p-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p)} \left(\frac{d}{dr}\right)^{p+1} e^{-\varepsilon r} \mathcal{F} g(rx)\, dr \\ &\quad = \int \chi_\alpha(x\xi + i\varepsilon) g(\xi) \tau(\xi).\end{aligned} \tag{3}$$

Il en résulte que, pour $x \neq 0$, les deux côtés sont des fonctions méromorphes de $\alpha$ ayant des pôles simples pour $\alpha = p$.

En particulier, (1) vaut pour $\alpha \neq p$. En multipliant les deux membres de (3) par $\frac{d}{d\alpha}(\alpha - p)$ et en faisant ensuite $\alpha = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p!} \int_0^\infty \left( \log \frac{1}{r} - 1 - \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{p} \right) \left( \frac{d}{dr} \right)^{p+1} e^{-\varepsilon r} \mathcal{F} g(rx)\, dr \\ &\quad = e(p) \int \left( \chi_p(x\xi + i\varepsilon) - \frac{(x\xi + i\varepsilon)^p}{p!} \frac{1}{2} \pi i \right) g(\xi) \tau(\xi).\end{aligned}$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, nous arrivons au résultat cherché (1). Notons que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p!} \int \left( \log \frac{1}{r} \right) \left( \frac{d}{dr} \right)^{p+1} \mathcal{F} g(rx)\, dr \\ &\quad \equiv \frac{e(p)}{p!} \int \log \frac{1}{|x\xi|} (x\xi)^p g(\xi) \tau(\xi) \pmod{N_p}.\end{aligned}$$

La formule (2) se démontre par la même méthode.

LEMME 6.2. — Soit $f_\alpha \in \Phi_\alpha(R^l)$ et soit $f_\alpha^{(\gamma)}$ la distribution définie dans le lemme 4.2. On a

$$(4)\qquad (\mathcal{F} f_\alpha)(x) = e(\alpha')\int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(x\xi) f_\alpha(\xi)\,\sigma(\xi) + \mathcal{F} f_\alpha^{(\gamma)}(x),$$

$$(5)\qquad (\overline{\mathcal{F}} f_\alpha)(x) = e(\alpha')\int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(-x\xi) f_\alpha(\xi)\,\sigma(\xi) + \overline{\mathcal{F}} f_\alpha^{(\gamma)}(x),$$

où les derniers termes sont nuls pour $\alpha \neq p'$. Les dérivées des intégrales s'obtiennent en opérant sous le signe d'intégration.

NOTE. — Si $\alpha' = p$, les intégrales dépendent de $\gamma$; un changement de $\gamma$ équivaut à une addition d'un polynome de $N_p$. De plus, si supp $f_\alpha$ est l'origine, les intégrales sont nulles.

NOTE. — Pour $f_\alpha = 1$ on a $\mathcal{F} f_\alpha = \overline{\mathcal{F}} f_\alpha = (2\pi)^l \delta(x)$. Par conséquent

$$(6)\qquad \delta(x) = (2\pi i)^{-l}\int_{\gamma=1} \chi_{-l}(x\xi)\,\sigma(\xi) = (2\pi i)^{-l}\int_{\gamma=1} \chi_{-l}(-x\xi)\,\sigma(\xi).$$

Cette formule avec $\gamma = |\xi|$ est due à GEL'FAND et SHAPIRO [2]. Une formule équivalente a été employée par F. JOHN [5]. L'emploi de $\sigma$ et un $\gamma$ arbitraire vient de J. LERAY [6]. Le calcul suivant donne une démonstration très courte

$$(2\pi)^l \delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int e^{ix\xi - \varepsilon\gamma(\xi)}\,\tau(\xi) = \int_{\gamma=1}\left(\int_0^\infty e^{-(\varepsilon - ix\xi)\rho}\rho^{l-1}\,d\rho\right)\sigma(\xi)$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} i^{-l}\int_{\gamma=1} \chi_{-l}(x\xi + i\varepsilon)\,\sigma(\xi).$$

Prenant la partie réelle de l'intégrale (6), vu (4.10) on obtient

$$\delta(x) = (2\pi)^{-l}(-1)^{l/2}\int_{\gamma=1} \chi_{-l}(x\xi)\,\sigma(\xi) \qquad [l \equiv 0(2)],$$

$$\delta(x) = (2\pi)^{-l}(-1)^{(l-1)/2}\int_{\gamma=1} \theta_{-l}(x\xi)\,\sigma(\xi) \qquad [l \equiv 1(2)].$$

NOTE. — Soit $a(\xi)$ un polynome homogène de degré $m$. Pourvu qu'on ait défini des distributions $1/a(\xi)$ dans $\dot{R}^l$ (il suffit pour cela de l'avoir fait sur $\gamma = 1$) le lemme (5.1) et (6) montrent que la distribution

$$(7)\qquad E(x) = (2\pi i)^{-l}\int_{\gamma=1} \chi_n(x\xi)\,a(\xi)^{-1}\,\sigma(\xi),$$

où $n = m - l$, satisfait à

$$a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x) = \delta(x).$$

C'est donc une solution élémentaire de $a(\partial/\partial x)$. Pour $a$ elliptique, c'est-à-dire, $a(\xi) \neq 0$ par $\xi \neq 0$, (7) est classique; le lemme **4.1** montre que $E(x)$ est analytique pour $x \neq 0$. Si $a$ est du type principal, c'est-à-dire si $a_\xi(x) \neq 0$ pour $\xi \neq 0$, on peut définir $1/a(\xi)$ comme valeur principale, et (7) donne une solution élémentaire explicite. Dans le cas général, la possibilité de la division avec $a(\xi)$ sur la variété $\gamma = 1$ résulte d'un théorème de Hörmander [4].

Preuve. — Avec $g \in S$ on a, vu le lemme **4.2**,

$$(\mathcal{F} f_\alpha, g) = (f_\alpha, \mathcal{F} g) = \langle f_\alpha, T_{\alpha'} \mathcal{F} g \rangle_\gamma + (f_\alpha^{(\gamma)}, \mathcal{F} g)$$
$$= \langle f_\alpha, T_{\alpha'} \mathcal{F} g \rangle_\gamma + (\mathcal{F} f_\alpha^{(\gamma)}, g).$$

Or, vu le lemme **6.1**,

$$\langle f_\alpha, T_{\alpha'} \mathcal{F} g \rangle_\gamma = e(\alpha') \int_{\gamma=1} f_\alpha(\xi) \left( \int \chi_{\alpha'}(x\xi) g(x) \tau(x) \right) \sigma(\xi).$$

Vu la définition de

$$\int_{\gamma=1} f_\alpha(\xi) \chi_{\alpha'}(x\xi) \sigma(\xi)$$

on a donc

$$\langle f_\alpha, T_{\alpha'} \mathcal{F} g \rangle_\gamma = \int \left[ e(\alpha') \int_{\gamma=1} f_\alpha(\xi) \chi_{\alpha'}(x\xi) \sigma(\xi) \right] g(x) \tau(x),$$

c'est-à-dire (4). Pour $\overline{\mathcal{F}}$, la démonstration est la même. Finalement, le lemme **5.1** montre qu'on obtient les dérivées en dérivant sous le signe d'intégration.

Comme

$$\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}} : \quad \Phi_\alpha \to \Phi_{\alpha'}; \qquad \mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}} : \quad N_\alpha \to N_{\alpha'},$$

sont des homéomorphismes linéaires, ils induisent des homéomorphismes linéaires $H_\alpha \to H_{\alpha'}$ que nous appellerons $\Lambda$ et $\overline{\Lambda}$. On a

Théorème **6.1**. — Les applications

$$\Lambda, \overline{\Lambda} : \quad H_\alpha \to H_{\alpha'}$$

et

$$\Lambda, \overline{\Lambda} : \quad G_\alpha \to G_{\alpha'} \tag{8}$$

sont des homéomorphismes linéaires telles que

$$\Lambda \overline{\Lambda} = \overline{\Lambda} \Lambda = (2\pi)^l. \tag{9}$$

Les applications

$$\Lambda : \quad H_\alpha \to H_{\alpha'}, \qquad \Lambda : \quad G_{\alpha'} \to G_\alpha \tag{10}$$

sont adjointes, il en est de même pour $\overline{\Lambda}$. Sous forme explicite on a

$$(11) \qquad (\Lambda f_\alpha)(x) = e(\alpha') \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(x\xi) f_\alpha(\xi)\, \sigma(\xi),$$

$$(12) \qquad (\overline{\Lambda} f_\alpha)(x) = e(\alpha') \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(-x\xi) f_\alpha(\xi)\, \sigma(\xi).$$

Si $\alpha$ est réel,

$$(13) \qquad \overline{\Lambda f_\alpha} = \overline{\Lambda}\, \overline{f}_\alpha.$$

Preuve. — (11) et (12) résultent du lemme **6.2**, (8) du lemme **5.1**, (9) et (13) des mêmes propriétés de $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$. Finalement, si $f_\alpha \in F_\alpha$ et $f_{\alpha'} \in F_{\alpha'}$, en remplaçant $\chi_{\alpha'}(x\xi)$ par $\chi_{\alpha'}(x\xi + i\varepsilon)$, et en faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient, vu (11)

$$\langle \Lambda f_\alpha, f_{\alpha'} \rangle = \langle f_\alpha, \Lambda f_{\alpha'} \rangle.$$

Par continuité on a le même résultat sur le produit $H_\alpha \times G_{\alpha'}$, ce qui démontre que les applications (10) sont adjointes. Même raisonnement pour $\overline{\Lambda}$.

Remarques.

1° Posons $\partial_j = \partial / i\, \partial x_j$. On voit que

$$\partial_j \Lambda = \Lambda x_j, \qquad \partial_j \overline{\Lambda} = -\overline{\Lambda} x_j,$$
$$x_j \Lambda = -\Lambda \partial_j, \qquad x_j \overline{\Lambda} = \overline{\Lambda} \partial_j.$$

2° Soit $\alpha$ réel. Alors, vu (13),

$$\langle \Lambda f_\alpha, \overline{\Lambda f_{\alpha'}} \rangle = (2\pi)^l \langle f_\alpha, \overline{f}_{\alpha'} \rangle.$$

Par conséquent, si $\alpha = \alpha'$, c'est-à-dire $\alpha = -l/2$, $\Lambda$ est un isomorphisme $G_\alpha \to G_{\alpha'}$ muni de la structure d'espace de Hilbert donnée par $\langle f_\alpha, \overline{f}_{\alpha'} \rangle$.

3° Soit $A(f_\alpha, f_{\alpha'})$ une forme bilinéaire continue sur $G_\alpha \times G_{\alpha'}$. Il sera commode de l'écrire formellement comme une intégrale

$$\int_{\substack{\gamma(x)=1 \\ \gamma(y)=1}} A(x, y)\, f_\alpha(x)\, f_{\alpha'}(y)\, \sigma(x) \wedge \sigma(y),$$

avec un noyau $A(x, y)$, homogène de degré $\alpha$ en $x$, et $\alpha'$ en $y$. On peut justifier ce langage : un tel $A$ existe comme distribution sur $\dot{R}^l \times \dot{R}^l$. Alors, si $\delta(x, y)$ est le noyau de $\langle f_\alpha, f_{\alpha'} \rangle$, (9) peut s'écrire

$$(2\pi i)^l \delta(x, y) = \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(\xi x)\, \chi_\alpha(-\xi y)\, \sigma(\xi).$$

*Distributions paires et impaires.* — Posons d'une manière générale

$$f^{\pm}(x) = \frac{1}{2}(f(x) \pm f(-x)),$$

ce qui définit $H^{\pm}_{\alpha}$ et $G^{\pm}_{\alpha}$. On voit que $\langle f^{+}_{\alpha}, f^{-}_{\alpha'}\rangle = \langle f^{-}_{\alpha}, f^{+}_{\alpha'}\rangle = 0$ et que $H^{\pm}_{\alpha}$ et $G^{\pm}_{\alpha'}$ sont duals l'un de l'autre avec la dualité $\langle f^{\pm}_{\alpha}, f^{\pm}_{\alpha'}\rangle$ (signes se correspondant). De même, soit $\Lambda^{\pm} = \frac{1}{2}(\Lambda \pm \overline{\Lambda})$. On trouve que $\Lambda^{\pm}$ sont des homéomorphismes linéaires $H^{\pm}_{\alpha} \to H^{\pm}_{\alpha'}$ et $G^{\pm}_{\alpha} \to G^{\pm}_{\alpha'}$ tels que

$$(\Lambda^{+})^2 = (\Lambda^{-})^2 = (2\pi)^l.$$

Donc, en opérant sur les fonctions paires, on a

$$(2\pi i)^l \delta^{+}(x, y) = \int \chi^{+}_{\alpha'}(\xi x)\, \chi^{+}_{\alpha}(\xi y)\, \sigma(\xi),$$

où $\delta^{+}$ est le noyau de $\langle f^{+}_{\alpha}, f^{+}_{\alpha'}\rangle$. Vu (5.8) on a

$$\chi^{+}_{-p}(s) = \varkappa_{-p}(s) \qquad \text{si} \quad p \equiv 0(2),$$
$$\chi^{+}_{-p}(s) = \pi i \theta_{-p}(s) \qquad \text{si} \quad p \equiv 1(2).$$

Par exemple, si $l \equiv 0(2)$, on obtient

$$(2\pi i)^l \delta^{+}(x, y) = (\pi i)^2 \int \theta_{-1}(x\xi)\, \theta_{1-l}(y\xi)\, \sigma(\xi).$$

## Chapitre 2. — Analyse des singularités.

**1. Convolution des $\chi_{\alpha}$.** — Nous savons que les fonctions $\chi_{\alpha}(s)$ et

$$\check{\chi}_{\alpha}(s) = \chi_{\alpha}(-s)$$

sont analytiques pour $\operatorname{Im} s > 0$ et $\operatorname{Im} s < 0$ respectivement. Posons

$$\chi^{\varepsilon}_{\alpha}(s) = \chi_{\alpha}(s + i\varepsilon), \qquad \check{\chi}^{\varepsilon}_{\alpha}(s) = \check{\chi}_{\alpha}(s - i\varepsilon) \qquad (s \text{ réel}),$$

où $\varepsilon \geqq 0$. Regardons les convolutions

$$(1) \qquad \begin{cases} \chi^{\varepsilon}_{\alpha} \star \chi^{\varepsilon}_{\beta}(s) = \int \chi^{\varepsilon}_{\alpha}(s-t)\, \chi^{\varepsilon}_{\beta}(t)\, dt, \\ \chi^{\varepsilon}_{\alpha} \star \check{\chi}^{\varepsilon}_{\beta}(s) = \int \chi^{\varepsilon}_{\alpha}(s-t)\, \check{\chi}^{\varepsilon}_{\beta}(t)\, dt, \\ \check{\chi}^{\varepsilon}_{\alpha} \star \check{\chi}^{\varepsilon}_{\beta}(s) = \int \check{\chi}^{\varepsilon}_{\alpha}(s-t)\, \check{\chi}^{\varepsilon}_{\beta}(t)\, dt. \end{cases}$$

Lemme 1.1. — Si

$$(2) \qquad \operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\beta + 1 < 0,$$

ces convolutions sont des distributions bien définies dans $S'$. Elles dépendent continûment de $\varepsilon \geqq 0$. Considérées comme fonctions de $\alpha$ et de $\beta$ elles sont méromorphes; leurs singularités sont des singularités polaires simples, qui ne se rencontrent pas. Pour $\alpha = p$ on calcule ces distributions en appliquant l'opérateur

$$\left| \frac{d}{d\alpha}(\alpha - p) \right|_{\alpha=p}$$

aux membres gauches, et de même pour $\beta = p$.

Preuve. — Vu (2), les intégrales convergent pour $\varepsilon > 0$. En effet, par exemple,

$$\chi_\alpha^\varepsilon(s-t)\,\chi_\beta^\varepsilon(t) = O(|t+i\varepsilon|^{\mathrm{Re}\,\alpha+\mathrm{Re}\,\beta}\log|t+i\varepsilon|)$$

pour $t$ grand. Soit $\varphi \in C_0(R)$, telle que $\varphi = 1$ près de l'origine. Alors

$$\begin{aligned}\chi_\alpha^\varepsilon \star \chi_\beta^\varepsilon = {} & \chi_\alpha^\varepsilon\varphi \star \chi_\beta^\varepsilon\varphi + \chi_\alpha^\varepsilon(1-\varphi)\star\chi_\beta^\varepsilon\varphi \\ & + \chi_\alpha^\varepsilon\varphi\star\chi_\beta^\varepsilon(1-\varphi) + \chi_\alpha^\varepsilon(1-\varphi)\star\chi_\beta^\varepsilon(1-\varphi).\end{aligned}$$

Au second membre, les trois premiers termes ont un facteur à support compact, ils sont bien définis pour $\varepsilon > 0$ et, vu (1.5.1), ils ont les propriétés qui énoncent le lemme. Le dernier terme est une intégrale ordinaire uniformément convergente pour $\varepsilon \geqq 0$; on constate tout de suite qu'il a les mêmes propriétés.

Le même raisonnement vaut pour les autres convolutions.

Lemme 1.2. — Sous la condition (2) on a

$$(3) \qquad \begin{cases} \chi_\alpha \star \chi_\beta = 2\pi i\chi_{\alpha+\beta+1}, \\ \check{\chi}_\alpha\star\chi_\beta = \chi_\alpha\star\check{\chi}_\beta = 0, \\ \check{\chi}_\alpha\star\check{\chi}_\beta = 2\pi i\check{\chi}_{\alpha+\beta+1}. \end{cases}$$

Preuve. — Nous allons calculer les transformées de Fourier des $\chi_\alpha$. Pour $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$, vu la définition de $\chi_\alpha$, on a, avec $e(\alpha) = e^{\pi i\alpha/2}$,

$$\chi_\alpha(s) = e(-\alpha)\int_0^\infty t^{-1-\alpha}\,e^{ist}\,dt \qquad (\mathrm{Im}\,s \geqq 0),$$

$$\check{\chi}_\alpha(s) = e(-\alpha)\int_{-\infty}^0 (-t)^{-1-\alpha}\,e^{ist}\,dt \qquad (\mathrm{Im}\,s \leqq 0).$$

Donc, pour $\varepsilon \geqq 0$,

$$\overline{\mathcal{F}}\chi_\alpha^\varepsilon(t) = 2\pi\,e(-\alpha)\,\theta_0(t)\,t^{-1-\alpha}\,e^{-\varepsilon t},$$
$$\overline{\mathcal{F}}\check{\chi}_\alpha^\varepsilon(t) = 2\pi\,e(-\alpha)\,\theta_0(-t)\,(-t)^{-1-\alpha}\,e^{\varepsilon t} = \overline{\mathcal{F}}\chi_\alpha^\varepsilon(-t).$$

En particulier,

$$(4) \qquad \begin{cases} \overline{\mathcal{F}}\chi_\alpha^\varepsilon\,\overline{\mathcal{F}}\chi_\beta^\varepsilon = 2\pi i\,\overline{\mathcal{F}}\chi_{\alpha+\beta+1}^{2\varepsilon}, \\ \overline{\mathcal{F}}\check{\chi}_\alpha^\varepsilon\,\overline{\mathcal{F}}\chi_\beta^\varepsilon = \overline{\mathcal{F}}\chi_\alpha^\varepsilon\,\overline{\mathcal{F}}\check{\chi}_\beta^\varepsilon = 0, \\ \overline{\mathcal{F}}\check{\chi}_\alpha^\varepsilon\,\overline{\mathcal{F}}\check{\chi}_\beta^\varepsilon = 2\pi i\,\overline{\mathcal{F}}\check{\chi}_{\alpha+\beta+1}^{2\varepsilon} \end{cases}$$

pour $t \neq 0$. Si

(5) $$\operatorname{Re}\alpha + 1 < 0, \qquad \operatorname{Re}\beta + 1 < 0,$$

on a les mêmes égalités pour tout $t$, et, les trois fonctions $\chi_\alpha^\varepsilon$, $\chi_\beta^\varepsilon$ et $\chi_\alpha^\varepsilon \star \chi_\beta^\varepsilon$ étant intégrables,

$$\overline{\mathcal{F}}(\chi_\alpha^\varepsilon \star \chi_\beta^\varepsilon) = \overline{\mathcal{F}}\chi_\alpha^\varepsilon\, \overline{\mathcal{F}}\chi_\beta^\varepsilon.$$

Donc, vu (4),

$$\chi_\alpha^\varepsilon \star \chi_\beta^\varepsilon = 2\pi i \chi_{\alpha+\beta+1}^{2\varepsilon}.$$

Vu le lemme 1.1, un prolongement analytique en $\alpha$ et $\beta$ montre qu'on a la même relation pour $\varepsilon \geqq 0$ et sous la condition (2). On a donc démontré la première des relations (3); les autres s'obtiennent de la même manière.

Lemme 1.3. — Pour $a > 0$ et $|s| < a$, on a

(6) $$\int_{-a}^{+a} \chi_\alpha(s-t)\,\chi_\beta(t)\,dt = 2\pi i \chi_{\alpha+\beta+1}(s) + R_1(s),$$

$$\int_{-a}^{+a} \chi_\alpha(s-t)\,\check{\chi}_\beta(t)\,dt = R_2(s),$$

$$\int_{-a}^{+a} \check{\chi}_\alpha(s-t)\,\check{\chi}_\beta(t)\,dt = 2\pi i \check{\chi}_{\alpha+\beta+1}(s) + R_2(s),$$

où les $R$ sont réguliers pour $|s| < a$.

Preuve. — Soit $\varkappa(t)$ la fonction caractéristique de l'intervalle $|t| < a$. Il est clair que la distribution

$$\chi_\alpha(s-t)\,\chi_\beta(t)\,\varkappa(t)$$

est régulière en $s$ pour $s \neq 0$, $\pm a$. Donc, la première intégrale est régulière pour $s \neq 0$ et, vu la propriété (1.5.2) des $\chi$, il suffit de démontrer (6) pour $\operatorname{Re}(\alpha + \beta + 1) < 0$. Soient $h \in C(R)$, $h(t) = 0$ pour $|t| < a/3$, $h(t) = 1$ pour $|t| > 2a/3$. Comme

$$\chi_\alpha(s-t)\,\chi_\beta(t)\,h(t)\,\varkappa(t)$$

est régulier en $s$, il suffit de démontrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_\alpha(s-t)\,\chi_\beta(t)\,(1 - h(t))\,dt = 2\pi i \chi_{\alpha+\beta+1}(s) + R_1(s).$$

Vu le lemme 1.2, il suffit donc que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_\alpha(s-t)\,\chi_\beta(t)\,h(t)\,dt$$

soit régulier en $s$. Ici, l'intégrale est la somme de deux termes, à savoir

$$\int \chi_\alpha(s-t)(1-h(s-t))\,\chi_\beta(t)\,h(t)\,dt$$

qui est visiblement régulier et

$$\int \chi_\alpha(s-t)\,h(s-t)\,\chi_\beta(t)\,h(t)\,dt,$$

où la fonction à intégrer est régulière et

$$O(|t|^{1+\mathrm{Re}\,\alpha+\mathrm{Re}\,\beta}\log|t|)$$

pour $t\to\infty$. Vu les propriétés des $\chi$, des dérivations par rapport à $s$ améliorent cette croissance; donc ce terme aussi est régulier et l'on a démontré (6). Les autres s'obtiennent de la même manière.

**2. Convolutions généralisées.** — Soit $U$ une variété de dimension $m$; notons $u_1, \ldots, u_m$ les coordonnées de $u\in U$. Soit $s(u)\in C^\infty(U)$ réel avec

$$s_u = (\partial s/\partial u_j) \neq 0$$

partout. De plus, soit $\varphi\in C'(R)$ une distribution telle que

$$\varphi(t)\in C(R) \qquad \text{pour} \quad t\neq 0$$

et notons

$$\varphi^{(k)} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

des intégrales successives de $\varphi$. Nous allons étudier des distributions $F\in C'(U)$, régulières en dehors de $S: s(u)=0$, qui, près de $S$, ont un développement

$$F\sim\sum_0^\infty F_k(u)\,\varphi^{(k)}(s(u)), \tag{1}$$

les $F_k$ étant réguliers, et le signe $\sim$ étant pris dans le sens que

$$\text{ordre}\left(F-\sum_0^n F_k(u)\,\varphi^{(k)}(s(u))\right) > \text{ordre}\,\varphi + n.$$

Ceci entraîne évidemment que la restriction de $F_0(u)$ à $S$ est unique. La restriction d'un $F_k$ dépend des choix des $F_0, \ldots, F_{k-1}$, mais elle ne dépend pas des choix des $\varphi^{(k)}$.

Remarque. — Dans des applications nous allons prendre

$$\varphi^{(k)} = \chi_{\beta+k}$$

avec un $\beta$ donné. Comme, vu (1.5.3) et (1.5.3')

$$s\chi_{\beta+k} = (\beta+k+1)\chi_{\beta+k+1}$$

si $\beta+k \neq p$ et

$$s\chi_{\beta+k} \equiv (\beta+k+1)\chi_{\beta+k+1} \bmod s^{\beta+k+1}$$

si $\beta+k=p$, on constate facilement que dans ce cas tout $F$, ayant le développement (1) a, près de $S$, la forme

$$P(u)\chi_\beta(s(u)) + R(u)$$

pour $\beta \neq p' = -1, -2, \ldots$ ou bien

$$P(u)\chi_\beta(s(u)) + P_0(u)\chi_0(s(u)) + R(u),$$

pour $\beta = p'$; $P$, $P_0$ et $R$ sont réguliers, mais ils ne sont pas complètement déterminés par $F$. Pour simplifier, nous allons plus tard réunir ces deux formules en une seule

$$P(u).\chi_\beta(s(u)) + R(u),$$

où le point du premier terme signifie qu'il faut lire $P\chi_\beta$ si $\beta \neq p'$ et $P\chi_\beta + P_0\chi_0$ si $\beta = p'$. Remarquons finalement que, si les $F_k$ dans (1) sont réels, on peut choisir $P$ (et $P_0$) réels.

Soient maintenant $\varphi_1$ et $\varphi_2$ deux distributions sur $R$, régulières en dehors de l'origine. Notons

$$\varphi_1 \circ \varphi_2$$

une distribution ayant la même propriété et, de plus, la suivante :

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)(s) - \int_{-a}^{+a} \varphi_1(s-t)\varphi_2(t)\,dt \qquad (a>0),$$

est régulier près de $s=0$. Notons que l'intégrale est régulière pour $s \neq 0$, $\pm a$, et que changer $a$ lui ajoute une distribution régulière près de $s=0$. Donc $\varphi_1 \circ \varphi_2$ existe et ne dépend pas de $a$. On constate facilement que

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3 \equiv \varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3),$$
$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)^{(k)} \equiv \varphi_1^{(k)} \circ \varphi_2 \equiv \varphi_1 \circ \varphi_2^{(k)}$$

modulo des fonctions régulières. En particulier, vu le lemme **1.3**,

$$\chi_\alpha \chi_\beta \equiv 2\pi i \chi_{\alpha+\beta+1},$$
$$\check{\chi}_\alpha \check{\chi}_\beta \equiv 2\pi i \check{\chi}_{\alpha+\beta+1},$$
$$\chi_\alpha \check{\chi}_\beta \equiv 0.$$

Désormais nous utiliserons aussi $P$, $Q$ et $R$, munis ou non d'indices comme symboles génériques pour les fonctions régulières d'une ou de plusieurs variables.

**Théorème 2.1.** — *Soit $I(u) : a(u) < t < b(u)$ un intervalle de $R$ qui contient le point $t = 0$, et qui est fonction régulière de $u$. Alors, près de $S$, on a*

$$\int_{I(u)} \chi_\beta(s-t)\, P(u, t)\, \varphi(t)\, dt \sim \sum_0^\infty R_k(u)\, \psi^{(k)}(s(u)), \tag{3}$$

*où*

$$\psi = \varphi \circ \chi_\beta; \tag{4}$$

*les $R_k$ ne dépendent que de $P$ et de $\beta$;*

$$R_0(u) = P(u, 0) \tag{5}$$

*sur $S$.*

Note. — Vu le lemme **1.3**, si $\varphi = \chi_\alpha$ on peut prendre

$$\psi = 2\pi i \chi_{\alpha+\beta+1}.$$

Si $\varphi = \check{\chi}_\alpha$, $\psi$ est régulier et, par conséquent, l'intégrale (3) aussi.

Note. — En changeant $s$ en $-s$ et $t$ en $-t$ on obtient

$$\int_{I(u)} \check{\chi}_\beta(s-t)\, P(u, t)\, \varphi(t)\, dt \sim \sum R_k(u)\, \check{\psi}^{(k)}(s)$$

où

$$\check{\psi}(s) = \int_{-a}^{+a} \varphi(-s-t)\, \chi_\beta(t)\, dt = \check{\varphi} \star \check{\chi}_\beta(s)$$

avec les mêmes $R_k$ pourvu qu'on ait

$$P(u, -t) = P(u, t).$$

Preuve. — Soit $\varkappa(u, t)$ la fonction caractéristique de $a(u) < t < b(u)$. La distribution

$$\chi_\beta(s-t)\, P(u, t)\, \varphi(t)\, \varkappa(u, t)$$

étant régulière en $s$ pour $s$ petit et $\neq 0$, (3) est une fonction régulière près de $S$ et pour $s \neq 0$.

De plus, comme $P$ est régulier, on a

$$P(u, t) = \sum_0^{n-1} Q_k(u)\, (s-t)^k + (s-t)^n\, Q_n'(u, t),$$

où $Q'_n$ et les $Q_k$ sont réguliers. Vu (1.5.3) et (1.5.3′), modulo une fonction régulière, l'intégrale (3) est la somme de

$$(6)\qquad (\beta+1)\ldots(\beta+n)\int_{I(u)} \chi_{\beta+n}(s-t)\, Q'_n(u,t)\,\varphi(t)\,dt$$

et des

$$(7)\qquad (\beta+1)\ldots(\beta+k)\,Q_k(u)\int_{I(u)} \chi_{\beta+k}(s-t)\,\varphi(t)\,dt$$

pour $k=0, \ldots, n-1$. Il est clair que (6) appartient à toute classe $C^r$ donnée quand on prend $n$ suffisamment grand et que (7) s'écrit

$$(\beta+1)\ldots(\beta+k)\,Q_k(u)\,(\chi_\beta \star \varphi)^{(k)}$$

modulo une fonction régulière près de $S$. Donc on a (3) et (4); on voit de suite que (5) est vrai.

Du théorème (1.1) on déduit facilement

**Théorème 2.2.** — *Soit $\varepsilon=\pm 1$ et soit $\nu$ la signature positive de $\varepsilon$, $\nu(\varepsilon)=1$ si $\varepsilon=1$ et $\nu(\varepsilon)=0$ si $\varepsilon=-1$. Alors, près de $S$, on a*

$$\int_{I(u)} \varphi\left(s+\frac{1}{2}\varepsilon t^2\right) P(u,t)\,dt \sim (2\pi i)^{-1}\sqrt{2\pi}\sum_0^\infty R_k(u)\,\psi^{(k)}(s(u)),$$

*où les $R$ ne dépendent que de $P$ et*

$$\psi=\varphi\circ(i^{\varepsilon}\chi_{-1/2}+i^{1-\varepsilon}\check{\chi}_{-1/2}).$$

**Preuve.** — Posons

$$\theta_{-1/2}(s)=\sqrt{\pi}\,s^{-1/2}\,\theta_0(s);\qquad \operatorname{Im} s \geqq 0 \qquad (0\leqq \arg s \leqq \pi i).$$

La définition de $\chi$ et un bref calcul donnent

$$(8)\qquad \chi=\check{\theta}+i\theta,\qquad \check{\chi}=\theta+i\check{\theta};$$
$$\theta=\frac{1}{2}(\check{\chi}-i\chi),\qquad \check{\theta}=\frac{1}{2}(\chi-i\check{\chi}),$$

où l'on a omis l'indice $-1/2$. De plus, formellement, un changement de variables $\frac{1}{2}t^2\to t$ donne pour l'intégrale du théorème, si $\varepsilon=1$,

$$2(2\pi)^{-1/2}\int_{-a^2(u)}^{b^2(u)} \varphi(s-t)\,\mathrm{P}'(u,t)\,\check{\theta}(t)\,dt,$$

où

$$\mathrm{P}'(u,t)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{P}(u,\sqrt{|t|})+\mathrm{P}(u,-\sqrt{|t|})\right)$$

est régulier. Si $\varepsilon=-1$, il faut remplacer $\check{\theta}$ par $\theta$. On justifie ce calcul en approchant $\varphi$ par une fonction régulière $\varphi'$. Puis on fait tendre $\varphi'$ vers $\varphi$. Vu (8), le théorème résulte donc du théorème **1.1.**

**3. Convolutions généralisées, suite.** — Nous allons généraliser le théorème **2.2** en remplaçant $t$ par plusieurs variables $t_1, \ldots, t_q$ et $s + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$ par une fonction régulière réelle $s(u, t)$ dont le gradient $s(u, t)$ est différent de zéro partout. Nous allons étudier une intégrale

$$(1) \qquad \int_{M(u)} \varphi(s(u, t))\, \mathrm{P}(u, t)\, \tau(t)$$

où $M(u)$ est un ouvert relativement compact, ayant pour frontière une variété régulière $N$, qui est fonction régulière de $u$. Soit $n(u, t) = 0$ l'équation de $N$ et soit $\chi(u, t)$ la fonction caractéristique de $M$. Il est clair que

$$(2) \qquad \varphi(s(u, t))\, \mathrm{P}(u, t)\, \chi(u, t)$$

est une distribution bien définie sur $U \times R^p$ pourvu que $s_{u,t}$ et $n_{u,t}$ soient indépendants quand $s = n = 0$, c'est-à-dire si les variétés $s(u, t) = 0$ et $n(u, t) = 0$ soient régulières et ne se touchent pas. Sous les conditions suivantes :

Il existe un $v \in U$ tel que

1° $s(v, t) = s_t(v, t) = 0$ n'a pas de solutions dans $M \cup N$;
2° $s(v, t) = 0$ ne touche pas la variété $N(v)$,

cette distribution est évidemment régulière en $u$ près de $v$; par conséquent, vu le lemme **1.1.6**, l'intégrale (1) est fonction régulière de $u$ près de $v$ sous les mêmes conditions.

Supposons maintenant que la première condition ne soit pas vérifiée en un point $u = v$. Plus précisément, nous supposons que

*a.* Il existe un point $v$ où

$$s(v, t) = s_t(v, t) = 0$$

a une seule solution $t = \tilde{t}$. Pour ce $t$, la matrice

$$s_{tt}(v, t) = (\partial^2 v/\partial t_j\, \partial t_k)$$

n'est pas singulière et

$$s_u(v, t) = (\partial s/\partial u_j) \neq 0.$$

*b.* La variété $s(v, t) = 0$ ne touche pas la variété $N(v)$.

Sous la première condition, près de $v$, l'équation

$$s_t(u, t) = 0$$

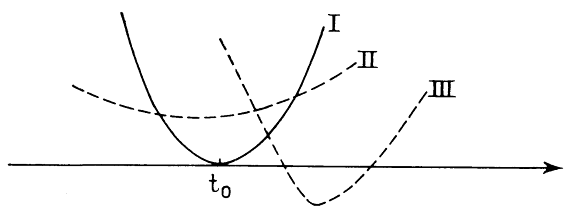
a une solution unique

$$t = t_0(u).$$

fonction régulière de $u$, telle que $t_0(v) = \tilde{t}$. Posons

$$s_0(u) = s(u, t_0(u)).$$

La figure ci-dessous donne, pour $q = 1$, la représentation de la fonction $s$ pour trois valeurs de $u$ et pour $s_{tt}(v, t_0) > 0$; I correspond à $u = v$; $s_0(u)$ est le minimum de $s$ au voisinage de $t = t_0$.




THÉORÈME 3.1. — *On a*

$$\int_{M(u)} \varphi(s(u, t)) \, \mathrm{P}(u, t) \, \tau(t) \sim (2\pi)^{q/2} \, |\, \text{dét} \, \mathrm{A}(u) \,|^{-1/2} \sum_{0}^{\infty} R_k(u) \, \psi^{(k)}(s_0(u)),$$

*où $A(u)$ est la matrice*

$$A(u) = s_{tt}(u, t_0(u)),$$

*$\nu = \nu(A)$ sa signature positive et*

$$2\pi i \psi = \varphi \circ \left( i^{\nu} \chi_{\frac{1}{2}q-1} + i^{q-\nu} \check{\chi}_{\frac{1}{2}q-1} \right);$$

*les $R_k$ ne dépendent que de $P$ et de $|\, s \,|$; enfin*

$$R_0(u) = P(u, t_0(u))$$

*pour* $s_0(u) = 0$.

NOTE. — On trouve à peu près le même résultat dans D. LUDWIG [5].

PREUVE. — Remarquons d'abord que si $P$ est nul près de $(v, t_0(v))$, alors (2) est régulière en $u$ près de $v$. Dans ce cas vu le lemme (1.1.6), l'intégrale (1) est régulière près de $v$. Par conséquent, il suffit de démontrer le théorème en supposant le support de $P$ près de $(v, t_0(v))$.

Supposons d'abord que $q = 1$; posons $t = t_1$. Près de $(v, t_0(v))$, $s$ a la forme

$$s(u, t) = s_0(u) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 h(u, t)$$

où $s_0$ et $h$ sont des $R$ et

$$h(u, t_0) = s_{tt}(u, t_0) = A(u) \neq 0;$$

$h$ a le signe de $A(v)$ et

$$h + \frac{1}{2}(t - t_0) h_t \neq 0.$$

Par conséquent. en posant

$$t' = (t - t_0) \mid h(u, t) \mid^{1/2},$$

on a

$$(3) \qquad dt'/dt = \mid h(u, t) \mid^{-1/2} \operatorname{sgn} h \left( h + \frac{1}{2}(t - t_0) h_t \right) > 0.$$

Choisissons le support de $P$ assez petit pour qu'on ait (3) sur ce support. Alors on peut utiliser $t'$ comme nouvelle variable d'intégration dans (1) qui devient

$$(4) \qquad \int \varphi\left( s_0(u) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} A(v) t'^2 \right) P(u, t)(dt/dt')\, dt'.$$

Choisissons encore ce support assez petit pour qu'on y ait

$$(5) \qquad \partial s_0(u)/\partial u \neq 0.$$

Ceci est possible parce que, vu $(a)$, on a

$$\frac{\partial}{\partial u} s_0(v) = \frac{\partial}{\partial u} s(v, t_0) \neq 0.$$

Vu (5), on peut choisir l'une des coordonnées $u_1, \ldots$ égale à $s_0(u)$, et (4) s'écrit

$$\int \varphi\left( s_0(u) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} A(v) t'^2 \right) P'(u, t')\, dt',$$

où

$$(6) \qquad P'(u, t') = P(u, t)(dt/dt'),$$

Alors, vu le théorème 2.2, (4) a la forme

$$\sim \sqrt{2\pi} \sum_0^\infty R'_k(u) \psi^{(k)}(s_0(u)),$$

où

$$2\pi i \psi = \varphi \circ (i^{\nu(A)} \chi_{-1/2} + i^{1-\nu(A)} \check{\chi}_{-1/2}),$$

les $R'_k$ ne dépendent que de $P$ et de $s$ et

$$R'_0(u) = P'(u, 0)$$

pour $s_0(u) = 0$. Vu (6) et (3), on a

$$P'(u, 0) = P(u, t_0)\,|\,A(u)\,|^{-1/2}.$$

Donc, en posant

$$R'_k(u) = |\,A(u)\,|^{-1/2}\,R_k(u),$$

on obtient le théorème pour $q = 1$, car il est clair qu'un changement de signe de $s$ a pour seul effet de changer le signe de $s_0$.

Dans le cas général nous allons raisonner par récurrence. En intégrant d'abord par rapport à $t_q$ nous avons à considérer

$$(7)\qquad \int\left(\int \varphi(s(u, t))\,P(u, t)\,dt_q\right)\tau(t'),$$

où $t' = t_1, \ldots, t_{q-1}$. Soit $I$ l'intégrale en $t_q$. Notre théorème avec $q = 1$ et $u$, $t'$ comme paramètres, appliqué à $I$, montre que, près de $(v, t'_0)$, on a

$$(8)\qquad I \sim \sqrt{2\pi}\,|\,\text{dét}B(u, t')\,|^{-1/2}\sum_0^{\infty} Q_k(u, t')\,\psi'^{(k)}(g(u, t'))$$

où

$$(9)\qquad 2\pi i\psi' = \varphi \circ (i^{\nu(B)}\chi_{-1/2} + i^{1-\nu(B)}\check{\chi}_{-1/2})$$

et

$$(10)\qquad Q_0(u, t') = P(u, t')$$

pour $g(u, t') = 0$. Ici

$$(11)\qquad g(u, t') = s(u, t),$$

$$(12)\qquad B(u, t') = s_{qq}(u, t),$$

avec $t_q = t_q(u, t')$ la solution de

$$(13)\qquad s_q(u, t) = 0.$$

Dans ces formules on a utilisé la notation

$$s_j = \partial s/\partial t_j, \qquad s_{jk} = \partial^2 s/\partial t_j\,\partial t_k.$$

Appliquons maintenant, par récurrence, le théorème aux intégrales

$$(14)\qquad \sqrt{2\pi}\int |\,\text{dét}B(u, t')\,|^{-1/2}\,Q_k(u, t)\,\psi^{(k)}g(u, t))$$

en supposant, ce qui est permis, que le support de $Q_k$ soit assez voisin de $(v, t'_0)$. Le résultat est que (14) a le développement

$$(15)\qquad (2\pi)^{q/2}\,|\,\text{dét}B(U, t'_0)\,|^{-1/2}\,|\,\text{dét}C(u)\,|^{-1/2}\sum_{j=0}^{\infty} R_{kj}(u)\,\psi_k^{(j)}(g_0(u))$$

où $t'_0 = t'_0(u)$ est la solution de

$$g_j(u, t) = 0 \qquad (j < q) \tag{16}$$

et où

$$g_0(u) = g(u, t'_0(u)),$$
$$C(u) = g_{jk}(u, t'_0(u)) \qquad (j, k < q),$$
$$2\pi i \psi_k = \psi'^{(k)}\left(i^{\nu(C)}\chi_{(q-3)/2} + i^{q-1-\nu(C)}\check{\chi}_{(q-3)/2}\right). \tag{17}$$

De plus,

$$R_{kk}(u) = Q_k(u, t'_0(u)) \tag{18}$$

pour $g_0(u) = 0$.

Maintenant, remarquons que, vu (9) et (17) et les propriétés de la composition $\circ$, on a

$$2\pi i \psi_k^{(j)} = \left\{ \varphi \circ \left( i^{\nu(B)+\nu(C)}\chi_{\frac{1}{2}q-1} + i^{q-\nu(B)-\nu(C)}\check{\chi}_{\frac{1}{2}q-1} \right) \right\}^{(j+k)} \tag{19}$$

modulo une fonction régulière. Par conséquent, comme l'intégrale (14) et les termes de (15) sont arbitrairement réguliers si $k$ et $j$ sont suffisamment grands, on a

$$\int \varphi(s(u, t))\, P(u, t)\, \tau(t)$$
$$\sim (2\pi)^{q/2}\,|\,\text{dét}\, B(u, t'_0)\,\text{dét}\, C(u)\,|^{-1/2} \sum_0^\infty R_k(u)\, \psi^{(k)}(g_0(u))$$

où $2\pi i \psi$ est donné par la parenthèse $\{\quad\}$ dans (19) et, vu (10) et (18),

$$R_0(u) = P(u, t'_0, t_q(u, t'_0))$$

pour $g_0(u) = 0$. Pour achever la démonstration il suffit donc d'établir que :

$$\nu(A) = \nu(B) + \nu(C), \tag{20}$$
$$\text{dét}\, A(u) = \text{dét}\, B(u, t'_0)\, \text{dét}\, C(u), \tag{21}$$
$$t_0(u) = (t'_0, t_q(u, t'_0)), \tag{22}$$
$$g_0(u) = s_0(u). \tag{23}$$

Exprimons les dérivées de $g$ au moyen des dérivées de $s$. Vu (11),

$$g_j(u, t') = s_j(u, t) + s_q t_{q.j}; \qquad t_{q.j} = \partial t_q / \partial t_j. \tag{24}$$

Donc (13) et (16) sont équivalents à

$$s_j(u, t) = 0 \qquad (j \leqq q).$$

Autrement dit, on a (22) et par conséquent aussi

$$g_0(u) = s(u, t_0(u)) = s_0(u),$$

c'est-à-dire (23). Une dérivation de (24) et (13) par rapport à $t_k$ $(k < q)$ donne

$$g_{jk}(u, t') = s_{jk}(u, t) + s_{jq}t_{q.k} + s_{kq}t_{q.j} + s_{qq}t_{q.j}t_{q.k}$$

et

$$s_{qk}(u, t) + s_{qq}(u, t)t_{q.k}) = 0,$$

où $t_q = t_q(u, t')$. Donc

$$g_{jk}(u, t') = s_{jk}(u, t) - s_{jq}s_{kq}s_{qq}^{-1}.$$

Vu (12) et (22)

$$B(u, t'_0) = s_{qq}(u, t_0).$$

Par conséquent, comme $A(u) = s_{jk}(u, t_0))$, on voit que (20) et (21) sont vrais. Finalement, on vérifie sans difficulté la dernière partie du théorème.

**4. Analyse des singularités de la transformation de Fourier des distributions homogènes.** — Revenons à la formule donnant la transformation de Fourier $g = g_\alpha$ d'une distribution $f = f_{\alpha'} \in H_{\alpha'}$, à savoir

$$g(x) = e(\alpha)\int_{\gamma(\xi)=1} \chi_\alpha(x\xi)f(\xi)\,\sigma(\xi).$$

Il s'agira de faire une description sommaire des singularités de $g$ quand on connaît les singularités de $f$. D'abord supposons que $f$ soit régulier au voisinage de $x_0\xi = 0$. Alors, évidemment, $g(x)$ est régulier près de $x_0$. On peut dire de plus : il suffit que $f$ soit régulier par rapport à $x_0\xi$ en tout point $\xi$ de $x_0\xi = 0$. Cet énoncé est une conséquence du lemme 1.1.6 [remplacer $x$, $u$ par $\xi$, $x$ et $z(x, u)$ par $x\xi$]. En particulier, soit $S : s(\xi) = 0$ l'équation d'une variété régulière homogène, de codimension 1 dans $\gamma$ et supposons que $f$ soit régulier en dehors de $S$ et que, sur $S$, $f$ soit régulier par rapport aux $(l-1)$ premières coordonnées d'un système de coordonnées, dont la dernière est $s(\xi)$. Alors $g$ est régulier en tout point $x$ tel que le plan $x\xi = 0$ ne touche pas $S$; autrement dit, $g$ est régulier en dehors de l'enveloppe $S'$ de $S$. Le théorème qui suit décrira le comportement de $g$ sur $S'$.

Soit $s(\xi)$ homogène de degré $m \neq 1$ ($m$ réel). Soit $\eta_0$ un point de $S$ et $Y_0$ le point correspondant sur $S'$, c'est-à-dire le plan $y_0\xi = 0$ touche $S$ en $\eta_0$. Nous supposons qu'on a

$$s_\xi \neq 0, \qquad \operatorname{Hess} s = \operatorname{dét} s_{\xi\xi} \neq 0$$

près de $\eta_0$. Alors $y_0$ est proportionnel à $s_\xi(\eta_0)$. Comme $s_\xi$ est homogène de degré $m - 1 \neq 0$, l'homothétie $\eta_0 \to \lambda\eta_0$ $(\lambda > 0)$ permet de réaliser la condition

$$y_0 = \varepsilon s_\xi(\eta_0) \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Si $\varepsilon = 1$, $y_0.\xi$ et $s(\xi)$ varient dans le même sens quand on traverse $S$ au point $\eta_0$. Si $\varepsilon = -1$, les sens sont opposés. Comme $\operatorname{Hess} s(\xi) \neq 0$ près de $\eta_0$, l'équation

$$(1) \qquad x = \varepsilon s_\xi(\eta)$$

a une solution régulière $\eta = \eta(x)$ près de $y_0$, homogène de degré $(m-1)^{-1}$ en $x$. [Comme $y_0 \to -y_0$ a pour seul effet de changer $\varepsilon$ en $-\varepsilon$, $\eta(x) = \eta(-x)$ est aussi solution de $-x = -\varepsilon s_\xi(\eta)$].

Nous posons, par définition,

$$(2) \qquad s'(x) = (m-1)\, s(\eta).$$

Alors $s'(x) = s'(-x)$ est homogène de degré $m' = m/(m-1)$ et $s' = 0$ est l'équation de $S'$ près de $\pm y_0$. Notons que l'inverse de (1) est

$$\eta = \varepsilon\, s'_x(x)$$

et que les matrices $s_{\xi\xi}$ et $s'_{xx}$ sont inverses :

$$(3) \qquad s_{\xi\xi}^{-1}(\eta) = s'_{xx}(x).$$

En effet, (1) donne

$$dx = \varepsilon\, s_{\xi\xi}(\eta)\, d\eta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon\, s_{\xi\xi}^{-1}(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Vu le théorème d'Euler,

$$s_{\xi\xi}(\eta)\,\eta = (m-1)\, s_\xi(\eta).$$

donc

$$\eta = (m-1)\, s_{\xi\xi}^{-1}(\eta) \frac{\partial s}{\partial \eta} = \varepsilon (m-1) \frac{\partial}{\partial x} s(\eta(x)) = \varepsilon\, s'_x(x)$$

et

$$\varepsilon\, s'_{xx}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\eta = \varepsilon\, s_{\xi\xi}^{-1}(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta}\eta = \varepsilon\, s_{\xi\xi}^{-1}(\eta).$$

Nous allons supposer que $f$ devient singulier sur $S$; plus précisément que $f$ soit de la forme

$$\varphi(s(\xi))\, P(\xi),$$

où $P$ est une fonction régulière et $\varphi$ est une distribution régulière en dehors de l'origine. La fonction $f$ doit être homogène de degré $\alpha'$; si nous supposons que $P = P_\mu$ soit homogène de degré $\mu$ il faut donc que $\varphi$ soit homogène de degré $\beta$, où

$$\alpha + m\beta + \mu + l = 0.$$

Mais dans ce cas, $\varphi$ est une combinaison linéaire de $\chi_\beta$ et $\check{\chi}_\beta$ et par conséquent, en changeant le signe de $s$, il suffit de poser

$$f = \chi_\beta(s(\xi))\, F_\mu(\xi).$$

Si $\beta = p$, cette fonction n'est pas homogène, mais le résultat reste le même.

Pour simplifier les énoncés concernant les supports des fonctions homogènes, nous convenons de noter $[\xi]$ le rayon engendré par les $\lambda\xi$ avec $\lambda > 0$. Nous convenons aussi d'utiliser la notation de la remarque de 2.2.

THÉORÈME 4.1. — *Si le support de $P_\mu$ est suffisamment voisin de $[\eta_0]$, alors; en prenant les signes supérieurs ou inférieurs, on a, pour $[x]$ voisin de $[y_0]$,*

$$(4) \qquad \begin{aligned}\int_{\gamma=1} &\chi_\alpha(\pm x\xi)\,\chi_\beta(s(\xi))\,P_\mu(\xi)\,\sigma(\xi)\\ &= \theta_0(\mp\varepsilon)\,(2\pi)^{l/2}\,|m-1|^{-1}\,|\operatorname{Hess} s'_x|^{1/2}\\ &\quad\times i^\nu\,R_{\mu'}(x)\,.\,\chi_{\alpha+\beta+l/2}(\pm\varepsilon\, s'_x(x)) + R'_\alpha(x),\end{aligned}$$

*où $\nu$ est la signature positive de $s'_{xx}(y_0)$; $R'_\mu$ est homogène de degré $\mu' = \mu(m-1)^{-1}$ et*

$$R'_\mu(x) = P_\mu(\eta(x))$$

*sur $S'$. La fonction $R_\mu$ ne dépend pas des signes de $s$, $\varepsilon$ et $x$. Si $\alpha$, $\beta$ et $P_\mu$ sont réels, on peut prendre $R'_\mu$ réel.*

NOTE. — Si $\alpha$ et $\alpha+\beta+l/2$ ne sont pas des entiers, $R'_\alpha$ est homogène de degré $\alpha$.

NOTE. — Il est clair que le théorème est vrai aussi pour $P_\mu$ à support arbitraire pourvu que $s_\xi \neq 0$ et que $\eta_0$ soit le seul point où $x_0\xi = 0$ touche $S$.

NOTE. — Quand $P_\mu(\xi)$ est remplacé par $P_\mu(x, \xi)$, régulier en $x$, $\xi$ et homogène de degré $\mu$ en $\xi$, le théorème reste vrai pour $x$ voisin de $y_0$, $R'_\mu$ n'étant plus nécessairement homogène. Nous démontrerons le théorème sous cette forme plus générale.

NOTE. — Vu (1.5.4), (1.5.4′) et (1.2.3), on a

$$\begin{aligned}&d(\chi_\alpha(x\xi)\,\chi_\beta(s(\xi)\,P_\mu(\xi)\,\sigma(\xi))\\ &\quad= ((\alpha\,!)^{-1}(x\xi)^\alpha\chi_\beta(s(\xi)) + \chi_\alpha(x\xi)\,(\beta\,!)^{-1}s(\xi)^\beta)\,P_\mu(\xi)\,\tau(\xi),\end{aligned}$$

où les deux termes du second membre doivent être remplacés par 0 quand $\alpha$ ou $\beta$ ne sont pas entiers.

Par conséquent, modulo une fonction régulière de $x$, l'intégrale (4) ne dépend pas de $\gamma$.

**Preuve.** — Vu la dernière Note, on peut supposer que l'intégrale est étendue au plan $\xi_1 = \eta_{0.1} = 1$. On a

$$s(\xi) = s(\eta) + s_\xi(\eta)(\xi - \eta) + O(|\xi - \eta|^2)$$

et

$$(5) \qquad x\xi = \varepsilon s_\xi(\eta)\xi = m\varepsilon s(\eta) + \varepsilon s_\xi(\eta)(\xi - \eta).$$

Faisons un changement de variables linéaire et unimodulaire

$$\xi_2, \ldots \to t = (t_2, \ldots, t_l)$$

tel que $t = 0$ pour $\xi = \eta$ et

$$t_2 = t_2(x, \xi) = s(\eta) + s_\xi(\eta)(\xi - \eta)$$

et posons

$$(6) \qquad s^\star(x, t) = s(\xi) = t_2 + O(t_2^2 + \ldots + t_l^2).$$

Nous allons voir que

$$(7) \qquad (\operatorname{Hess} s(\xi))_{\xi=\eta,\, s(\eta)=0} = -(m-1)^2(\operatorname{Hess}_{t_3,\ldots,t_l} s^\star(x, t))_{t=0}.$$

En effet, par une transformation linéaire et unimodulaire des $t$ on peut faire en sorte que

$$s^\star(x, t) = t_2 + \sum_2^l c_j t_j^2 + O(|t|^3).$$

Comme $\xi \to \xi_1, t_2, \ldots, t_l$ a la même propriété et comme $s$ est homogène de degré $m$, on a

$$(8) \qquad \operatorname{Hess} s(\xi) = \operatorname{Hess}_\xi \xi_1^m s(1, t_2/\xi_1, \ldots)$$

$$= \operatorname{Hess}_{\xi_1, t}\left(\xi_1^{m-1} t_2 + \xi_1^{m-2} \sum_2^l c_j t_j^2 + O(|t|^3)\right)$$

et, par conséquent,

$$[\operatorname{Hess} s(\xi)]_{\xi=\eta,\, s(\eta)=0} = -(m-1)^2 c_3 \ldots c_l,$$

d'où (7). Vu (3). (5) et (6), si l'on utilise la variable $t$, l'intégrale (4) devient

$$\int \chi_\alpha(\pm\varepsilon(s'(x) + t_2))\, \chi_\beta(s^\star(x, t)\, P_\mu(x, \xi(t, x))\, \tau(t).$$

Vu (7) et le fait que $\operatorname{Hess} s(\xi) \neq 0$ près de $\eta_0$, on peut utiliser le théorème 3.1 pour faire une intcgration en $t_3, \ldots, t_l$, le résultat étant

$$(9) \qquad \int \chi_\alpha(\pm\varepsilon(s'(x) + t_2))\, \chi_{\beta+\frac{1}{2}l-1}(t_2).P'(x, t_2)\, i^{\nu(B)}(2\pi)^{\frac{l}{2}-1}|\operatorname{d\acute{e}t} B|^{-1/2}\, dt_2$$

$$+ \int \chi_\alpha(\pm\varepsilon(s'(x) + t_2))\, R'(x, t_2)\, dt_2,$$

où

(10) $$B(x) = (s^{\star}_{jk}(x, 0)) \qquad (j, k = 3, \ldots, l).$$

$\nu(B)$ est la signature positive de $B$, $P'$ ne dépend pas du signe de $s$ et

$$P'(x, t_2) = P_{\mu}(x, \eta(x)) \qquad \text{pour} \quad t_3 = \ldots t_l = 0.$$

La seconde intégrale de (9) est visiblement régulière et la première se calcule par le théorème 2.1. Vu (7) et (10) le résultat est le suivant.

$$\begin{aligned}0_0(\mp \varepsilon)\, i^{\nu(B)+1} |\, m - 1\,|^{-1} (2\pi)^{l/2} \,|\, \mathrm{Hess}\, s(\eta)\,|^{-1/2} \\ \times R_{\mu'}(x) . \chi_{\alpha+\beta+\frac{l}{2}}(\pm \varepsilon s'(x)) + R'(x),\end{aligned}$$

où $R_{\mu'}$ ne depend pas des signes de $s$ et de $\varepsilon$ et $R_{\mu'}(x) = P_{\mu}(x, \eta(x))$ sur $S'$. Vu (3),

$$\mathrm{Hess}\, s'(x) = (\mathrm{Hess}\, s(\eta))^{-1}$$

et, en regardant les matrices symétriques dans (8), on voit que $\nu(B) + 1$ est la signature positive de $s_{\xi\xi}(\eta)$ pour $\eta = \eta_0$, qui, vu (3), est aussi la signature positive de $s'_{xx}(y_0)$. Il est clair que le dernier énoncé du théorème est vrai.

En effet, si $P_{\mu}$, $\alpha$ et $\beta$ sont réels on peut évidemment prendre $P'$ et $R_{\mu}$ réels.

Traitons enfin le cas où $P_{\mu}$ ne dépend pas de $x$. Nous dirons qu'une distribution $G(x)$ est quasi-homogène de degré $\alpha$ si $\lambda^{\alpha} G(x) - G(\lambda x)$ est régulière pour tout $\lambda > 0$. On constate que pour que le premier terme du second membre de (4) soit quasi-homogène de degré $\alpha$, il faut et il suffit que $R_{\mu'}$ soit homogène de degré $\mu' = \mu/m - 1$. En effet, $\mathrm{Hess}\, s'(x)$ étant homogène de degré $l(2 - m)(m - 1)$, on a

$$l\left(1 - \frac{1}{2} m\right)(m - 1)^{-1} + \mu' + \left(\alpha + \beta + \frac{l}{2}\right) m (m - 1)^{-1} = \alpha$$

si, et seulement si

$$\alpha + m\beta + (m - 1)\mu' = -l.$$

Évidemment, nous pouvons trouver $R_{\mu'}$ et $R'_{\alpha}$ tels que (4) soit vrai sur une variété $\gamma(x) = 1$. Alors, en faisant $R_{\mu'}$ homogène de degré $\mu'$, on voit que (4) vaut pour tout $x \neq 0$ ayant une direction voisine de celle de $y_0$, à condition qu'on le prenne comme définition de $R'_{\alpha}$. Si $\alpha$ et $\alpha + \beta + l/2$ ne sont pas des entiers, on peut faire $R'_{\alpha}$ homogène de degré $\alpha$.

**5. Applications aux solutions élémentaires.** — Soit $s(\xi)$ un polynome réel, homogène de degré $m$ et supposons que la variété $S : s(\xi) = 0$ soit sans singularité. Soit $\varkappa_{-p}(s) = \mathrm{Re}\, \chi_{-p}(s)$ [*voir* (1.3.8)] et soit $n > 0$ un entier. Alors

$$E(x) = \mathrm{Re}\, (2\pi i)^{-l} (n - 1)!^{-1} (-1)^n \int_{\gamma=1} \chi_{mn-l}(x\xi)\, \varkappa_{-n}(s(\xi))\, \sigma(\xi)$$

est une solution élémentaire réelle de l'opérateur différentiel $s(\partial/\partial x)^n$. En effet, vu (1.5.3) et (1.5.3''),

$$s^n \varkappa_{-n}(s) = \mathrm{Re}\, s^n \chi_{-n}(s) = (-1)^n (n-1)!$$

donc, vu (1.6.6),

$$s(\partial/\partial x) E(x) = \mathrm{Re}(2\pi i)^{-l} \int_{\gamma=1} \chi_{-l}(x\xi)\,\sigma(\xi) = \delta(x).$$

Nous avons choisi cette solution élémentaire à titre d'exemple; on peut évidemment en construire d'autres. Nous savons que $E(x)$ est régulier si le plan $x\xi = 0$ ne touche pas la variété $S$ (on voit facilement qu'il est même analytique). Supposons $x$ voisin d'un point $y_0$ tel que $y_0\xi = 0$ touche $S$ aux points $\xi = \pm\eta_0$ seulement. [S'il y en a d'autres, il faut faire une somme dans la formule (1) ci-dessous.] En multipliant $\eta_0$ par une constante positive convenable on peut faire en sorte que

$$y_0 = \varepsilon s_\xi(\eta_0) \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Soit $\eta = \eta(x)$ la solution unique de

$$x = \varepsilon s_\xi(\eta)$$

pour $x$ voisin de $y_0$ et posons

$$s'(x) = s(\eta(x)).$$

Soit $\nu$ la signature positive de $s_{\xi\xi}(\eta_0)$, supposé non-singulier.

THÉORÈME 5.1. — *Près de $y_0$, on a*

$$(1) \qquad E(x) = \varphi(x) P_0(x) . \mathrm{Re}\, i^{-\nu} \chi_{(m-1)n - \frac{l}{2}}(s'(x)) + R(x),$$

*où*

$$\varphi(x) = (-1)^{\theta_0(-\varepsilon)mn} (2\pi)^{-l/2} (m-1)^{-1} (n-1)!^{-1} |\mathrm{Hess}\, s'(x)|^{1/2},$$

*$P_0$ et $R$ sont réels et $P_0(x) = 1$ sur $S'$.*

NOTE. — $\mathrm{Hess}_\xi s(\xi)$ est homogène de degré $l(m-2)$. Donc, si $l$ et $m$ sont impairs et si une nappe connexe de la variété $s(\xi) = 0$ est invariante pour $\xi \to -\xi$, la variété a des points singuliers où notre formule ne vaut pas. On peut démontrer que, près d'une nappe non-singulière, on peut choisir $P_0$ et $R(x)$ analytiques. Pour $n = 1$, notre théorème contient les résultats de BOROVIKOV [1].

NOTE. — Les solutions élémentaires des opérateurs differentiels fortement hyperboliques $s(x, \partial/\partial x)$ à coefficients variables analytiques font l'objet d'une étude très poussée de J. LERAY [7]. Il donne le prolongement analytique des solutions élémentaires près de l'enveloppe $S'$ de $S$, qui est le cône caractéristique. Pour $s$ à coefficients constants, ses résultats contiennent (1).

PREUVE. — Soit $N$ un voisinage conique régulièrement borné de $\eta_0$. Vu le théorème 4.1 on a, près de $y_0$,

$$\text{(2)}\qquad \int_{N\cap(\gamma=1)} \chi_\alpha(\pm x\xi)\chi_{-n}(s(\xi))\,\sigma(\xi) = \theta_0(\mp\varepsilon)\,\psi(x)\,i^\nu P_0(x).\chi_\mu(\pm\varepsilon s'(x)) + R_\alpha(x),$$

où

$$\psi(x) = (m-1)^{-1}(2\pi)^{l/2}\,|\operatorname{Hess} s'(x)|^{1/2},$$
$$\alpha = mn - l, \qquad \mu = (m-1)n - l/2.$$

$P_0$ est homogène de degré 0, indépendant du signe de $s'$ et $P_0(x) = 1$ sur $S'$. Vu (1.5.5),

$$\varkappa_{-n}(s) = \frac{1}{2}\,(\chi_{-n}(s) + (-1)^n\chi_{-n}(-s)),$$

et il est clair que $s \to -s$ dans (2) entraîne $\nu \to l-\nu$, $\varepsilon \to -\varepsilon$ et $s' \to -s'$. Donc,

$$\int_{N\cap(\gamma=1)} \chi_\alpha(\pm x\xi)\,\varkappa_{-n}(s(\xi))\,\sigma(\xi) = \frac{1}{2}\psi(x)P_0(x)\,(\theta_0(\pm\varepsilon)\,i^\nu\chi_\mu(\pm\varepsilon s') + (-1)^n\theta_0(\pm\varepsilon)\,i^{l-\nu}\chi_\mu(\pm\varepsilon s') + R_\alpha(x).$$

Comme $\varkappa_{-n}(s(-\xi)) = (-1)^{mn}\varkappa_n(s(\xi))$, une intégration sur $(-N)\cap(\gamma=1)$ change la dernière intégrale en

$$(-1)^{mn}\int_{N\cap(\gamma=1)} \chi_\alpha(\mp x\xi)\,\varkappa_{-n}(s(\xi))\,\sigma(\xi).$$

Donc, la partie singulière de l'intégrale

$$\int_{\gamma=1} \chi_\alpha(x\xi)\varkappa_{-n}(s(\xi))\,\sigma(\xi)$$

vaut $\frac{1}{2}\psi(x)P_0(x)$ fois la distribution

$$\text{(3)}\qquad (\theta_0(-\varepsilon)\,i^\nu + (-1)^n\theta_0(\varepsilon)\,i^{l-\nu})\,\chi_\mu(\varepsilon s') + (-1)^{mn}(\theta_0(\varepsilon)\,i^\nu + (-1)^n\theta_0(-\varepsilon)\,i^{l-\nu})\,\chi_\mu(-\varepsilon s').$$

Maintenant, vu (1.5.5), on a

$$\text{(4)}\qquad \chi_\mu(-s) = (-1)^{-mn+n+\frac{1}{2}l}\,\overline{\chi}_\mu(s).$$

Donc, pour $\varepsilon = 1$, (3) vaut

$$(-1)^n i^l(i^{-\nu}\chi_\mu(s') + i^\nu\overline{\chi}_\mu(s')).$$

Si $\varepsilon = -1$, il faut évidemment multiplier par $(-1)^{mn}$. Par conséquent, vu les définitions de $E(x)$, $\psi(x)$ et $\varphi(x)$,

$$E(x) = \varphi(x) P_0(x) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{Re}(i^{-\nu}\chi_\mu(s') + i^\nu \bar{\chi}_\mu(s')) + R_\alpha(x);$$

puisque

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}(i^{-\nu}\chi_\mu(s') + i^\nu \bar{\chi}_\mu(s')) = \operatorname{Re} i^{-\nu}\chi_\mu(s'),$$

la démonstration est achevée.

## BIBLIOGRAPHIE.


[1] Borovikov (V. A.). — La solution élémentaire des équations linéaires aux dérivées partielles à coefficients constants [en Russe], *Trudy Moskovskogo matematičeskogo Obščestva*, t. 8, 1959, p. 199-257.

[2] Gel'fand (I. M.) et Šapiro (Z. Ja.). — Les fonctions homogènes et leurs applications [en russe], *Usp. Mat. Nauk U. S. S. R.*, t. 10, 1055, n° 3, p. 3-70.

[3] Gel'fand (I. M.) et Shilov (G. E.). — *Les fonctions généralisées et leurs applications*, t. 3, [en russe], Moskva, 1958.

[4] Hörmander (Lars). — On the division of distributions by polynomials, *Arkiv för Matematik*, t. 3, 1958, p. 555-568.

[5] John (F.). — The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 2, 1950, p. 273-304.

[6] Leray (Jean). — Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy, III), *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 81-180.

[7] Leray (Jean). — Problème de Cauchy, IV, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 1-100.

[8] Ludwig (D.). — *Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem.* — New York, New York University, Institute of mathematical Sciences, 1959 (multigraphié).

[9] Schwartz (Laurent). — *Théorie des distributions*, t. 1 et 2. — Paris, Hermann, 1950-1951 (Act. scient. et ind., 1091-1222).

[10] Schwartz (Laurent). — Distributions semi-régulières et changements de coordonnées, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 36, 1957, p. 109-127.

[11] Rham (G.). — *Variétés différentiables, formes, courants, formes harmoniques.* — Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind. 1222).


(Manuscrit reçu le 12 avril 1961.)

Lars Gårding,
Professeur à l'université,
Lund (Suède).