BULLETIN DE LA S. M. F.

ARISTIDE DELEANU

Une généralisation du théorème du point fixe de Schauder

Bulletin de la S. M. F., tome 89 (1961), p. 223-226
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__223_0>

Bull. Soc. math. France
89, 1961, p. 223 à 226.

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DU POINT FIXE DE SCHAUDER ;

PAR

ARISTIDE DELEANU.

(Bucarest).

Cette Note emploie la terminologie de [1]. $H^q(X)$ désigne le $q^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie au sens de Čech, à coefficients rationnels de l'espace X. Un espace topologique compact est dit *simple*, quand ses groupes de cohomologie sont ceux d'un point.

Soit X un espace compact et ξ une application continue de X en lui-même, telle que le nombre de Lefschetz $\Lambda_\xi(X)$ soit défini, dans le sens généralisé de [2]. Soit Y une partie fermée de X, telle que

$$\xi(Y) \subset Y \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n>0} \xi^n(X) \subset Y.$$

Soit i^* l'homomorphisme de $H(X)$ dans $H(Y)$ induit par l'inclusion $i: Y \subset X$. Alors on a le lemme suivant :

LEMME. — *Si $T(i^*(H^q(X))$ désigne la trace de l'endomorphisme du groupe $i^*(H^q(X))$ induit par ξ, on a la relation*

$$\Lambda_\xi(X) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q T(i^*(H^q(X)).$$

PREUVE. — On a

$$\text{image de } i^* \approx H^q(X)/\text{noyau de } i^*,$$

donc, vu la proposition (a) de [2], les traces $T(i^{*-1}(0))$ et $T(i^*(H^q(X))$ sont définies, et l'on a

$$T(H^q(X)) = T(i^{*-1}(0)) + T(i^*(H^q(X)).$$

Mais on voit, comme dans [2], page 230, que

$$T(i^{\star-1}(0))=0,$$

d'où le résultat cherché.

THÉORÈME. — *Soit C un espace compact, qui est rétracte de voisinage d'espace convexoïde et soit ξ une application continue de C en lui-même. S'il existe une partie fermée et simple K de C telle que*

$$\bigcap_{n>0} \xi^n(C)\subset K,$$

alors ξ possède au moins un point fixe; l'indice total des points fixes de ξ est $+1$.

PREUVE. — Posons

$$F=\bigcap_{n>0} \xi^n(C).$$

Supposons tout d'abord C connexe. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H(C) \arrow[rr, "i^\star"] \arrow[dr, "j^\star"'] & & H(F) \\ & H(K) \arrow[ur, "k^\star"'] & \end{tikzcd}$$

où $i^\star$, $j^\star$, $k^\star$ sont les homomorphismes induits par les inclusions $i : F\subset C$, $j : K\subset C$, $k : F\subset K$.

Il en résulte, pour tout $q\geqq 1$:

$$i^\star(H^q(C))=k^\star j^\star(H^q(C))=k^\star(0)=0.$$

D'autre part, on a, vu la connexion de C,

$$T(i^\star(H^0(C))=1,$$

donc, en tenant compte du lemme ci-dessus :

$$\Lambda_\xi(C)=1.$$

Cela signifie, en vertu du théorème 4 de [3] que ξ possède au moins un point fixe.

Si C n'est pas connexe, on sait ([3]) que C a un nombre fini de composantes connexes C_1, C_2, ..., C_r, dont chacune est un rétracte d'espace convexoïde. K étant simple, donc connexe, il existe un indice α tel que $K\subset C_\alpha$. En particulier, on a

$$\bigcap_{n>0} \xi^n(C)\subset C_\alpha.$$

Il s'ensuit, vu la compacité de C et le fait que C_α est ouvert dans C, qu'il existe un entier $m > 0$ tel que

$$\xi^m(C) \subset C_\alpha.$$

D'autre part, il existe un indice β tel que $\xi(C_\alpha) \subset C_\beta$. Si α et β étaient distincts, on aurait

$$\xi^{m+1}(C) \subset \xi(C_\alpha) \subset C_\beta \quad \text{et} \quad \xi^{m+1}(C) \subset \xi^m(C) \subset C_\alpha,$$

donc

$$\xi^{m+1}(C) = \emptyset,$$

ce qui est absurde. On a donc

$$\xi(C_\alpha) \subset C_\alpha.$$

En considérant l'espace C_α et la restriction $\xi \mid C_\alpha$, on est ramené au cas étudié plus haut, où l'espace C était connexe : ξ possède au moins un point fixe dans C_α, et $\Lambda_\xi(C_\alpha) = 1$. Comme les autres composantes connexes de C ne peuvent contenir des points fixes de ξ, on a encore cette fois-ci,

$$\Lambda_\xi(C) = 1.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Soit C un espace compact, qui est rétracte de voisinage d'espace convexoïde, et soient* $(D_j)\, j = 1, \ldots, n\, (n \neq 1)$ *des ouverts de C deux à deux disjoints et tels que chaque $\overline{D}_j$ soit un rétracte de C simple. Soit ξ une application continue de C en lui-même, telle que :*

1° $\xi(\overline{D}_j) \subset \overline{D}_j\ (j = 1, \ldots, n)$;

2° *Il existe une partie fermée et simple* K *de* C, *telle que*

$$\bigcap_{n>0} \xi^n(C) \subset K.$$

Dans ces conditions, ξ possède au moins un point fixe dans l'ensemble $C - \bigcup_{j=1}^{n} D_j.$

Preuve. — Supposons que $\bigcup_{j=1}^{n} \dot{D}_j$ ne contienne aucun point fixe de ξ. En vertu du théorème ci-dessus, on a

$$\Lambda_\xi(C) = 1. \tag{1}$$

K étant simple, il existe une composante connexe C_α de l'espace C telle que $K \subset C_\alpha$. Il est aisé de vérifier que chaque intersection

$$\overline{D}_j \cap K \qquad (1 \leqq j \leqq n)$$

est non-vide; par conséquent, les $\bar{D}_j$ étant simples, donc connexes, on a

$$\bar{D}_j \subset C_\alpha \qquad (1 \leqq j \leqq n).$$

Alors, en vertu de la définition de [3], page 240 :

$$i_\xi(D_j) = i_{\xi \mid C_\alpha}(D_j).$$

Mais C_α est un rétracte d'espace convexoïde et $\bar{D}_j$ est rétracte de C_α. On peut alors appliquer le lemme 3 de [3] :

$$i_{\xi \mid C_\alpha}(D_j) = i_{\xi \mid \bar{D}_j}(D_j).$$

En tenant compte aussi du lemme 4 de [3], il vient finalement :

$$i_\xi(D_j) = \Lambda_{\xi \mid \bar{D}_j}(\bar{D}_j) = 1 \qquad (1 \leqq j \leqq n). \tag{2}$$

On déduit des relations (1) et (2) et du théorème 4 de [3] :

$$i_\xi\left(C - \bigcup_{j=1}^{n} \bar{D}_j\right) = \Lambda_\xi(C) - \sum_{j=1}^{n} i_\xi(D_j) = 1 - n \neq 0,$$

ce qui signifie, toujours en vertu du théorème 4 de [3], que l'ensemble $C - \bigcup_{j=1}^{n} \bar{D}_j$ contient au moins un point fixe de ξ.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] LERAY (Jean). — Sur les équations et les transformations, *J. Math. pures et appl.*, 9^e série, t. 24, 1945, p. 201-248.

[2] LERAY (Jean), — Théorie des points fixes : indice total et nombre de Lefschetz, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 221-233.

[3] DELEANU (Aristide). — Théorie des points fixes : sur les rétractes de voisinage des espaces convexoïdes, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 235-243.

(Manuscrit reçu le 13 mars 1961).

Aristide DELEANU
Institutul de Matematicà
al Academiei R. P. R.,
Str. M. Eminescu, 47,
Bucuresti 3 (Roumanie).