BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE EYMARD

Sur les applications qui laissent stable l'ensemble des fonctions presque-périodiques

Bulletin de la S. M. F., tome 89 (1961), p. 207-222

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__207_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__207_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES APPLICATIONS QUI LAISSENT STABLE L'ENSEMBLE DES FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES ;

PAR PIERRE EYMARD.

(Paris).

Considérons deux groupes G_1, G_2 , et soient $A(G_1), A(G_2)$ deux classes de fonctions numériques définies sur G_1 et G_2 respectivement. Le problème se pose de déterminer les applications φ de G_2 dans G_1 qui envoient $A(G_1)$ dans $A(G_2)$, c'est-à-dire telles que, pour toute $f \in A(G_1)$, on ait $f \circ \varphi \in A(G_2)$.

Dans le cas où G_2, G_1 sont abéliens localement compacts, avec pour classe $A(G_i)$ celle des fonctions sur G_i qui sont transformées de Fourier de fonctions sommables sur le groupe dual $\hat{G}_i (i = 1, 2)$, l'étude de cette question a été faite au cours de ces dernières années par A. BEURLING, H. HELSON, W. RUDIN et P. J. COHEN.

Le présent article est consacré à l'examen du problème obtenu en prenant pour classe $A(G_i)$ l'ensemble des *fonctions presque-périodiques* sur le groupe G_i (supposé discret) ($i = 1, 2$). Pour obtenir des résultats précis, je suis amené à faire des hypothèses sur les groupes G_1 et G_2 . Le groupe G_1 est supposé *abélien*, par ailleurs quelconque. En ce qui concerne G_2 , une condition nécessaire (théorème 1) assez restrictive sur φ est énoncée sous la seule hypothèse que G_2 est dénombrable, et la caractérisation complète des applications φ est donnée dans les deux cas suivants :

- a. G_2 n'admet pas de sous-groupe propre d'indice fini (théorème 2) ;
- b. G_2 admet un nombre fini de générateurs (théorème 3).

Sous les hypothèses indiquées, je montre qu'il n'y a pas d'autres applications φ de G_2 dans G_1 transformant $A(G_1)$ en $A(G_2)$ que celles qui sont évidentes, fabriquées à partir d'un nombre fini d'homomorphismes et de translations, et que j'appelle « linéaires par morceaux ». L'outil essentiel de la démonstration est un lemme de finitude sur la circonférence (lemme 4). Ces résultats ont été annoncés dans [2].

En terminant cette introduction, je tiens à remercier M. J. DIXMIER, dont les remarques m'ont été précieuses pour la rédaction de ce travail.

I. Préliminaires.

1. Notations et rappel. — Soit G un groupe discret. On désigne par $\mathcal{C}(G)$ l'espace des fonctions définies sur G , à valeurs complexes, bornées, muni de la topologie de la convergence uniforme sur G . Si $a \in G$ et $f \in \mathcal{C}(G)$, on pose $f_a(x) = f(ax)$ pour tout $x \in G$. Soit $A(G)$ l'ensemble des fonctions *presque-périodiques* sur G , c'est-à-dire des $f \in \mathcal{C}(G)$ telles que l'ensemble des f_a , où a parcourt G , soit relativement compact dans $\mathcal{C}(G)$.

On désigne par T le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Si G est abélien, on note $\hat{G}$ le groupe compact dual de G ; si $x \in G$, et $\hat{x} \in \hat{G}$, on note $\langle \hat{x}, x \rangle$ la valeur en x du caractère $\hat{x}$.

Suivant [6] (chap. VII), on associe à G un groupe compact $\bar{G}$ et un homomorphisme α de G sur un sous-groupe partout dense de $\bar{G}$, tels qu'une fonction f appartient à $A(G)$ si et seulement s'il existe une fonction continue $\bar{f}$ sur $\bar{G}$ vérifiant $f(x) = \bar{f}[\alpha(x)]$ pour tout $x \in G$. Le groupe $\bar{G}$ s'interprète comme spectre de l'algèbre de Banach $A(G)$ et $f \rightarrow \bar{f}$ comme la transformation de Gelfand sur cette algèbre. Si, plus particulièrement, G est abélien, $\bar{G}$ s'identifie au groupe de tous les caractères, continus ou non, sur $\hat{G}$, l'homomorphisme α , qui dans ce cas est injectif, associant à chaque $x \in G$ le caractère (continu) qu'il définit sur $\hat{G}$. (cf. aussi [3]).

2. Applications presque-périodiquement-régulières.

DÉFINITION 1. — Soient G_1, G_2 deux groupes discrets et φ une application de G_2 dans G_1 . On dit que φ est *presque-périodiquement-régulière* (pp-régulière) si, pour toute $f \in A(G_1)$, on a $f \circ \varphi \in A(G_2)$. On pose

$$f \circ \varphi(x) = f[\varphi(x)].$$

Soient trois groupes G_1, G_2, G_3 et φ une application de G_3 dans G_2 , ψ une application de G_2 dans G_1 . Si φ et ψ sont pp-régulières, alors l'application composée $\psi \circ \varphi$ est pp-régulière de G_3 dans G_1 .

Soient G un groupe et h un élément fixé de G . Les translations $x \rightarrow hx$ et $x \rightarrow xh$ sont des applications pp-régulières de G sur G .

Soient G_2 et G_1 deux groupes; tout homomorphisme σ de G_2 dans G_1 est une application pp-régulière : cela résulte de l'identité

$$(f \circ \sigma)_a = f_{\sigma a} \circ \sigma \quad (a \in G_2; f \in A(G_1))$$

et de la continuité de l'application $f \rightarrow f \circ \sigma$ de $\mathcal{C}(G_1)$ dans $\mathcal{C}(G_2)$. En particulier, soit H un sous-groupe d'un groupe G : la restriction à H d'une $f \in A(G)$ est dans $A(H)$, et si φ est une application pp-régulière de G dans un groupe G_1 , la restriction de φ à H est pp-régulière de H dans G_1 .

PROPOSITION 1. — Soient G_1 et G_2 deux groupes discrets, G_1 étant supposé abélien, et φ une application de G_2 dans G_1 . Pour que φ soit pp-régulière de G_2 dans G_1 , il faut et il suffit qu'elle soit pp-régulière en tant qu'application de G_2 dans G'_1 , où G'_1 est le sous-groupe de G_1 engendré par $\varphi(G_2)$.

DÉMONSTRATION.

a. Soit φ pp-régulière de G_2 dans G'_1 , et $f \in A(G_1)$. La restriction de f à G'_1 est dans $A(G'_1)$, donc $f \circ \varphi \in A(G_2)$ et φ est pp-régulière de G_2 dans G_1 .

b. Soit φ pp-régulière de G_2 dans G_1 , et $\hat{x}'$ un caractère sur G'_1 . Si $\hat{x}$ est un caractère sur G_1 prolongeant $\hat{x}'$, $\hat{x}' \circ \varphi = \hat{x} \circ \varphi \in A(G_2)$. Les $\hat{x}'$ formant un ensemble total dans $A(G'_1)$, φ est pp-régulière de G_2 dans G'_1 .

REMARQUE. — Cet énoncé n'est pas valable sans hypothèse sur G_1 : par exemple, prendre pour G_1 un groupe n'ayant d'autres fonctions presque-périodiques que les constantes, pour G_2 un sous-groupe cyclique infini de G_1 , et pour φ une application non pp-régulière de G_2 dans G_2 .

PROPOSITION 2. — Soient G_2, G_1 deux groupes discrets et φ une application de G_2 dans G_1 ; soient α_1 (resp. α_2) la représentation canonique de G_1 (resp. G_2) dans le groupe compact associé $\bar{G}_1$ (resp. $\bar{G}_2$); soient K un groupe compact et β un homomorphisme de G_2 dans K . Alors :

1° s'il existe une application continue ψ de K dans $\bar{G}_1$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\psi} & \bar{G}_1 \\ \beta \uparrow & & \uparrow \alpha_1 \\ G_2 & \xrightarrow{\varphi} & G_1 \end{array}$$

soit commutatif, φ est pp-régulière de G_2 dans G_1 .

2° si φ est pp-régulière de G_2 dans G_1 , il existe une application continue $\bar{\varphi}$ et une seule de $\bar{G}_2$ dans $\bar{G}_1$, telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bar{G}_2 & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \bar{G}_1 \\ \alpha_2 \uparrow & & \uparrow \alpha_1 \\ G_2 & \xrightarrow{\varphi} & G_1 \end{array}$$

soit commutatif.

DÉMONSTRATION.

1° Soit $f \in A(G_1)$ et $\bar{f}$ la fonction continue sur $\bar{G}_1$ telle que $f = \bar{f} \circ \alpha_1$. Pour tout $x \in G_2$, on a

$$f \circ \varphi(x) = \bar{f}[\alpha_1 \circ \varphi(x)] = \bar{f}[\psi \circ \beta(x)] = \bar{f} \circ \psi[\beta(x)].$$

L'homomorphisme β est une application pp-régulière de G_2 dans K . Étant continue sur K , $\bar{f} \circ \psi \in A(K)$. Donc $\bar{f} \circ \psi \circ \beta = f \circ \varphi \in A(G_2)$.

2° $f \rightarrow f \circ \varphi$ est un homomorphisme continu de l'algèbre de Banach $A(G_1)$ dans l'algèbre de Banach $A(G_2)$. Par transformation de Gelfand on obtient une application continue $\bar{\varphi}$ du spectre $\bar{G}_2$ de $A(G_2)$ dans le spectre $\bar{G}_1$ de $A(G_1)$ telle que, pour toute $f \in A(G_1)$, on ait $\overline{f \circ \varphi}(\bar{x}) = \bar{f} \circ \bar{\varphi}(\bar{x})$ pour tout $\bar{x} \in \bar{G}_2$. Alors, pour tout $\gamma \in G_2$:

$$\bar{f}[\alpha_1 \circ \varphi(\gamma)] = \overline{f \circ \varphi}(\gamma) = \overline{f \circ \varphi}[\alpha_2(\gamma)] = \bar{f}[\bar{\varphi} \circ \alpha_2(\gamma)]$$

Les $\bar{f}$ séparant $\bar{G}_1$, on a $\alpha_1 \circ \varphi = \bar{\varphi} \circ \alpha_2$. Enfin $\bar{\varphi}$ est unique, car $\alpha_2(G_2)$ est dense dans $\bar{G}_2$.

3. Applications linéaires par morceaux. — Dans toute la suite, si G est un groupe, on désignera par $\mathcal{F}(G)$ l'ensemble des sous-groupes distingués et d'indice fini dans G .

PROPOSITION 3. — *Soit, sur un groupe G , f une fonction presque-périodique ne prenant qu'un nombre fini de valeurs distinctes. Alors il existe un sous-groupe $H \in \mathcal{F}(G)$ tel que f soit constante sur chaque classe de G modulo H .*

DÉMONSTRATION.

1° Observons d'abord que, dans un groupe compact $\bar{G}$, tout ensemble U ouvert et fermé est réunion de classes modulo un certain sous-groupe $\bar{K} \in \mathcal{F}(\bar{G})$. En effet, si $x \in U$, $x^{-1}U$ est ouvert et fermé, et contient l'unité de $\bar{G}$; cet ensemble contient un sous-groupe ouvert ([4], p. 54), donc d'indice fini, et par conséquent $x^{-1}U$ contient même un $L_x \in \mathcal{F}(\bar{G})$; ainsi tout $x \in U$ appartient à une classe xL_x modulo L_x , classe elle-même contenue dans U ; la famille des xL_x forme un recouvrement ouvert de U , dont on peut extraire un recouvrement fini : U est réunion des $x_i L_{x_i}$ pour $i = 1, 2, \dots, n$; le sous-groupe $\bar{K} = \bigcap_{i=1}^n L_{x_i}$ répond à la question.

2° Prenons pour $\bar{G}$ le groupe compact associé à G , soit α l'homomorphisme canonique de G dans $\bar{G}$ et soit $\bar{f}$ la fonction continue sur $\bar{G}$ telle que $f(x) = \bar{f}[\alpha(x)]$ sur G . La fonction $\bar{f}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes sur $\alpha(G)$, donc sur $\bar{G}$, car $\alpha(G)$ est dense dans $\bar{G}$. Soient $U_1, U_2, \dots, U_p$ les parties de $\bar{G}$ sur lesquelles sont prises les différentes valeurs de $\bar{f}$. Chaque U_j est ouvert et fermé dans $\bar{G}$, donc réunion de classes modulo un $\bar{K}_j \in \mathcal{F}(\bar{G})$. Posons $\bar{H} = \bigcap_{j=1}^p \bar{K}_j$; $\bar{f}$ est constante sur chaque classe de $\bar{G}$ modulo $\bar{H}$. Le sous-groupe $H = \alpha^{-1}(\bar{H})$ remplit la condition exigée.

PROPOSITION 4. — Soient G_2, G_1 deux groupes, G_1 étant supposé abélien, et $H \in \mathcal{F}(G_2)$. Pour une application φ de G_2 dans G_1 , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(P₁) pour tout $y \in H$, l'application $x \rightarrow \varphi(yx) - \varphi(x)$ de G_2 dans G_1 est constante sur chaque classe de G_2 modulo H ;

(P₂) si l'on choisit des représentants $x_1, x_2, \dots, x_p$ des classes de G_2 modulo H , il existe pour chaque $i = 1, 2, \dots, p$;

a. un homomorphisme σ_i de H dans G_1 ;

b. un $h_i \in G_1$,

tels que : $x = yx_i, y \in H$ entraînent $\varphi(x) = h_i + \sigma_i(y)$.

DÉMONSTRATION.

1° Supposons (P₁). Posons $h_i = \varphi(x_i)$ et $\sigma_i(y) = \varphi(yx_i) - \varphi(x_i)$. Il résulte immédiatement de (P₁) que σ_i est un homomorphisme sur H , donc (P₂).

2° Supposons (P₂). Soient $y \in H$ fixé et z variable dans H . Alors

$$\varphi(yzx_i) - \varphi(zx_i) = h_i + \sigma_i(yz) - [h_i + \sigma_i(z)] = \sigma_i(y)$$

ne dépend pas de z , donc (P₁).

DÉFINITION 2. — Soit φ une application d'un groupe G_2 dans un groupe abélien G_1 telle qu'il existe un $H \in \mathcal{F}(G_2)$ de sorte que φ remplisse les conditions équivalentes (P₁) et (P₂). On dit que φ est linéaire par morceaux, et que H lui est associé.

Alors tout $K \in \mathcal{F}(G_2)$ tel que $K \subset H$ est associé à φ ; c'est évident d'après (P₁).

LEMME 1. — Soient φ une application de G_2 dans G_1 et $L \in \mathcal{F}(G_2)$ tel que la restriction de φ à toute classe de G_2 modulo L soit translatée à droite d'une application linéaire par morceaux de L dans G_1 . Alors φ est linéaire par morceaux.

DÉMONSTRATION. — Par hypothèse, il existe des représentants $s_1, s_2, \dots, s_m$ de G_2 modulo L et des applications linéaires par morceaux φ_i de L dans G_1 telles que, si $x = ys_i$ et $y \in L$, on ait $\varphi(x) = \varphi_i(y)$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Soit $H \in \mathcal{F}(G_2)$ un sous-groupe associé à toutes les φ_i . Il est clair que φ et H satisfont à (P₁).

LEMME 2. — Soient G_1, G_2 deux groupes discrets; on suppose $\mathcal{F}(G_2)$ dénombrable et G_1 abélien. Pour qu'une application φ de G_2 dans G_1 soit linéaire par morceaux, il faut et il suffit que, quel que soit $\hat{x} \in \hat{G}_1$, l'application $\hat{x} \circ \varphi$ de G_2 dans T soit linéaire par morceaux.

DÉMONSTRATION. — La condition est évidemment nécessaire d'après (P₁). La condition est suffisante : pour tout $L \in \mathcal{F}(G_2)$, définissons l'ensemble $E(L) \subset \hat{G}_1$ par :

$$\hat{x} \in E(L)$$

si et seulement si L est associé à l'application linéaire par morceaux $\hat{x} \circ \varphi$. Par hypothèse $\hat{G}_1$ est réunion des $E(L)$ quand L parcourt $\mathcal{F}(G_2)$. D'autre part, chaque $E(L)$ est fermé dans $\hat{G}_1$: en effet, d'après (P₁), $\hat{x} \in E(L)$ si et seulement si, pour tout y fixé $\in L$, l'application

$$x \rightarrow \langle \hat{x}, \varphi(yx) - \varphi(x) \rangle$$

de G_2 dans T est constante sur chaque classe modulo L ; fixons une telle classe $x_i L$ et un $y \in L$; la fonction

$$F(\hat{x}, x) = \langle \hat{x}, \varphi(yx) - \varphi(x) \rangle$$

est continue en $\hat{x}$ sur $\hat{G}_1$ et constante, pour chaque $\hat{x}$ fixé $\in E(L)$, quand x parcourt $x_i L$: elle est donc constante, pour chaque $\hat{x}$ fixé $\in \overline{E(L)}$, quand x parcourt $x_i L$, ce qui prouve que $E(L)$ est fermé. Comme $\mathcal{F}(G_2)$ est dénombrable, il existe au moins un $H \in \mathcal{F}(G_2)$ tel que $E(H)$ soit d'intérieur non vide; alors $\hat{G}_1$ est recouvert par un nombre fini de translatés de $E(H)$:

$\hat{G}_1 = \bigcup_{i=1}^p [\hat{x}_i + E(H)]$. Pour tout $i = 1, 2, \dots, p$, soit $H_{\hat{x}_i}$ un sous-groupe appartenant à $\mathcal{F}(G_2)$ et associé à $\hat{x}_i \circ \varphi$. Posons $K = H \cap H_{\hat{x}_1} \cap \dots \cap H_{\hat{x}_p}$. On a $K \in \mathcal{F}(G_2)$.

Soient $y \in K$ et $\hat{x} \in \hat{G}_1$. On a $\hat{x} = \hat{x}_i + \hat{x}'$ pour un $i = 1, 2, \dots, p$ au moins, et $\hat{x}' \in E(H)$. L'application

$$x \rightarrow \langle \hat{x}, \varphi(yx) - \varphi(x) \rangle = \langle \hat{x}_i, \varphi(yx) - \varphi(x) \rangle \langle \hat{x}', \varphi(yx) - \varphi(x) \rangle$$

de G_2 dans T est constante sur chaque classe de G_2 modulo K , car le premier facteur est constant sur chaque classe modulo $H_{\hat{x}_i}$, le second sur chaque classe modulo H . Ainsi K est associé à toutes les applications $\hat{x} \circ \varphi$. Les $\hat{x}$ séparant G_1 , l'application $x \rightarrow \varphi(yx) - \varphi(x)$ de G_2 dans G_1 est constante sur chaque classe de G_2 modulo K : φ est linéaire par morceaux.

LEMME 3. — Soient G_2 un groupe à génération finie et G_1 un groupe abélien. Pour qu'une application φ de G_2 dans G_1 soit linéaire par morceaux, il suffit qu'elle satisfasse à la condition :

(P₃) pour tout $y \in G_2$, il existe un $H_y \in \mathcal{F}(G_2)$ tel que l'application $x \rightarrow \varphi(yx) - \varphi(x)$ soit constante sur chaque classe de G_2 modulo H_y .

DÉMONSTRATION. — Posons $\theta(y; x) = \varphi(yx) - \varphi(x)$. Quels que soient $x, y, z \in G_2$, on a

$$\theta(z y; x) = \theta(z; yx) + \theta(y; x).$$

Soient $y_1, y_2, \dots, y_n$ des générateurs de G_2 , et $H = \bigcap_{i=1}^n H_{y_i}$. On a

$H \in \mathcal{F}(G_2)$. Soit $y = y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \dots y_{\alpha_q}$, où $\alpha_j = 1, 2, \dots$, ou n , un élément de G_2 . On a

$$\theta(y; x) = \theta(y_{\alpha_1}; y_{\alpha_2} \dots y_{\alpha_q} x) + \theta(y_{\alpha_2}; y_{\alpha_3} \dots y_{\alpha_q} x) + \dots + \theta(y_{\alpha_q}; x).$$

Pour y fixé, chacun des θ intervenant au second membre est translaté par rapport à x d'un $\theta(y_i; x)$, donc constant sur chaque classe de G_2 modulo H_{y_i} , donc constant sur chaque classe de G_2 modulo H . Par suite, leur somme $\theta(y; x)$ est constante sur chaque classe de G_2 modulo H et φ est linéaire par morceaux.

PROPOSITION 5. — Soient G_2 et G_1 deux groupes, G_1 étant supposé abélien. Toute application φ linéaire par morceaux de G_2 dans G_1 est pp-régulière.

DÉMONSTRATION. — Adoptons les notations de (P_2) dans la proposition 4. Soit $f \in A(G_1)$. Pour chaque $i = 1, 2, \dots, p$, définissons sur G_2 la fonction

$$g_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin Hx_i, \\ f[h_i + \sigma_i(y)] & \text{si } x = yx_i, \text{ avec } y \in H. \end{cases}$$

La fonction $y \rightarrow f[h_i + \sigma_i(y)]$ appartient à $A(H)$, d'où résulte, H étant un sous-groupe d'indice fini de G_2 , que $g_i \in A(G_2)$. Or on a $f \circ \varphi(x) = \sum_{i=1}^p g_i(x)$, donc $f \circ \varphi \in A(G_2)$.

L'objet principal de ce travail est d'établir, sous certaines hypothèses sur G_2 , une réciproque de la proposition 5. La difficulté se concentrera en un lemme de finitude que nous démontrons dans la section suivante.

II. Un lemme de finitude.

On désigne par T l'ensemble des nombres complexes de module 1.

LEMME 4. — Soit $s = (n_1, n_2, \dots, n_q, \dots)$ une suite strictement croissante d'entiers positifs telle que, si $\nu(n)$ désigne le nombre d'entiers $\leq n$ qui appartiennent à s , on ait $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(n)/n \neq 0$. Si $\varepsilon > 0$, soit $Z(\varepsilon)$ l'ensemble des $z \in T$ tels que, pour tout $n_q \in s$, on ait

$$|1 - z^{n_q}| \leq \varepsilon.$$

Alors $Z(\varepsilon)$ est fini dès que $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, où $\varepsilon_0 > 0$ est un nombre indépendant de la suite s .

DÉMONSTRATION.

1° Munissons T de sa topologie usuelle d'espace compact. Remarquons d'abord que, pour démontrer le lemme, il suffit d'établir l'assertion suivante :

(α) il existe un $\varepsilon_0 > 0$ indépendant de s tel que le point $z = 1$ soit isolé dans $Z(2\varepsilon_0)$.

En effet, supposons (α) vraie. Alors tout point de $Z(\varepsilon_0)$ est isolé dans $Z(\varepsilon_0)$: s'il en était autrement, il existerait un $z \in Z(\varepsilon_0)$ et une suite infinie de points $z_p = z \exp(i\theta_p) \in Z(\varepsilon_0)$ et tels que $\lim_{p \rightarrow \infty} \theta_p = 0$; alors des inégalités

$$|1 - z^{n_q} \exp(in_q \theta_p)| \leq \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad |1 - z^{n_q}| \leq \varepsilon_0 \\ (n_q \in s; p \text{ entier} \geq 1)$$

résulterait que, pour tout $n_q \in s$ et tout $p \geq 1$,

$$|1 - \exp(in_q \theta_p)| \leq 2\varepsilon_0;$$

les $\exp(i\theta_p)$ formeraient une suite infinie de nombres appartenant à $Z(2\varepsilon_0)$ et tendant vers 1, ce qui contredit (α).

Par conséquent, si (α) est vraie, $Z(\varepsilon_0)$ est un ensemble fermé dans T dont tous les points sont isolés, c'est-à-dire un ensemble *fini*. Pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, il en est de même de $Z(\varepsilon) \subset Z(\varepsilon_0)$.

2° Nous démontrons (α) par l'absurde. Posons $\eta = 2 \operatorname{Arc} \sin \varepsilon_0$ et $\rho = \frac{2\pi}{\eta} - 2$.

Si le point $z = 1$ n'est pas isolé dans $Z(2\varepsilon_0)$, il existe une suite infinie d'angles θ_p (p entier ≥ 1) telle que les $\exp(i\theta_p) \in Z(2\varepsilon_0)$ et telle que $\lim_{p \rightarrow \infty} \theta_p = 0$. De plus il est loisible de supposer que $0 < \theta_p$ quel que soit p , et que la suite θ_p décroît assez rapidement pour les besoins de la démonstration : posons

$$k_p = \text{partie entière de } \eta/\theta_p;$$

On supposera qu'on a, pour tout $p \geq 1$,

$$(2) \quad k_{p+1} > B\rho k_p,$$

où $B > 1$ est une constante dont on précisera le choix ultérieurement. Pour chaque entier $p \geq 1$, appelons :

s_p , la suite de tous les entiers $q \geq 1$ tels que $|1 - \exp(iq \theta_p)| \leq 2\varepsilon_0$;

t_p , la suite d'entiers $s_1 \cap s_2 \cap \dots \cap s_p$;

$\nu_p(n)$, le nombre d'entiers $\leq n$ qui appartiennent à t_p .

En étudiant la structure des t_p , et par une estimation de $\nu_p(n)$, on va démontrer l'assertion suivante :

(β) On peut choisir ρ (autrement dit ε_0) et B de sorte que, pour tout entier $p \geq 1$, il existe un entier N_p et un nombre λ_p tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nu_p(n)/n \leq \lambda_p & \text{dès que } n > N_p; \\ \text{et} & \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p = 0. \end{array} \right.$$

(β) entraîne (α). En effet soit s une suite remplissant la condition du lemme 4. Il est clair que, pour tout $p \geq 1$, $s \subset t_p$, et donc $\nu(n) \leq \nu_p(n)$. Alors de (β) résulte que $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(n)/n = 0$, ce qui contredit l'hypothèse sur s , d'où (α).

3° *Démonstration de l'assertion (β) :*

a. p étant fixé, la suite s_p est réunion de « sections » d'entiers consécutifs appartenant à s_p , ces « sections » étant séparées par des « lacunes » d'entiers consécutifs n'appartenant pas à s_p . Soit σ_p le nombre d'éléments d'une section; ce nombre est variable avec la section considérée, mais, excepté la première section (qui a k_p éléments), on a

$$(2) \quad 2k_p \leq \sigma_p \leq 2k_p + 2.$$

Soit σ'_p le nombre d'éléments d'une lacune, nombre variable avec la lacune considérée; des inégalités

$$(2\pi - 2\eta)/\theta_p - 1 \leq \sigma'_p \leq (2\pi - 2\eta)/\theta_p + 1,$$

on tire

$$\rho k_p - 1 \leq \sigma'_p \leq \rho k_p + \rho + 1$$

et a fortiori,

$$(3) \quad (\rho - 1)k_p \leq \sigma'_p \leq (\rho + 1)k_p,$$

pourvu que $k_1 \geq \rho + 1$, ce qu'il est loisible de supposer. Désormais $\rho > 1$.

b. Pour étudier la suite t_p , introduisons les notations suivantes : soient $T_p(n)$ l'ensemble des entiers $\leq n$ qui appartiennent à s_p et sont $> k_p$; $\tau_p(n)$ leur nombre;

$T_{p-1,p}(n)$ l'ensemble des entiers $\leq n$ qui appartiennent à $s_p \cap s_{p-1}$ et sont $> k_p$; $\tau_{p-1,p}(n)$ leur nombre, etc.;

$T_{1,2,\dots,p-1,p}(n)$ l'ensemble des entiers $\leq n$ qui appartiennent à $s_p \cap s_{p-1} \cap \dots \cap s_1 = t_p$ et sont $> k_p$; $\tau_{1,2,\dots,p-1,p}(n)$ leur nombre.

Les inégalités (2) et (3) montrent que, dès que $n > k_p$, on a

$$(4) \quad \tau_p(n) \leq \frac{2k_p + 2}{(\rho - 1)k_p} (n - k_p) \leq \frac{3(n - k_p)}{\rho - 1}.$$

Pour tout entier $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$, l'ensemble $T_{p-j,\dots,p}(n)$ est une suite d'entiers formée d'un certain nombre α_j de « sections pleines » de s_{p-j} et d'un certain nombre β_j de « morceaux de sections » de s_{p-j} , qui sont les ensembles d'entiers consécutifs appartenant à s_{p-j} , supérieur à k_p et ne figurant pas dans des « lacunes » de $s_p, s_{p-1}, \dots, s_{p-j+1}$. On va établir des relations entre les α_j et les β_j en étudiant le passage de $j-1$ à j . Chaque « section pleine » ou « morceau de section » de s_{p-j+1} donne au plus 2 « morceaux de sections » de s_{p-j} , car le « morcellement » ne peut se produire qu'aux extrémités. D'autre part, chaque section pleine de s_{p-j+1}

donne au moins $E[2B\rho/(\rho+4)] - 2$ sections pleines de s_{p-j} , comme il résulte des relations (1), (2), (3) [on pose $E(x) =$ partie entière de x] : en effet la section pleine de s_{p-j+1} a au moins $2k_{p-j+1}$ éléments; une section pleine et une lacune de s_{p-j} ont ensemble au plus $2k_{p-j} + 2 + (\rho+1)k_{p-j} \leq (\rho+4)k_{p-j}$ éléments; après, « évidemment » par les lacunes de s_{p-j} , il apparaît donc au moins $E[2k_{p-j+1}/(\rho+4)k_{p-j}]$ sections ou morceaux de section de s_{p-j} , d'où la minoration annoncée. On a donc les inégalités

$$\beta_j \leq 2(\alpha_{j-1} + \beta_{j-1}); \quad \alpha_j \geq E\left(2B \frac{\rho}{\rho+4} - 2\right) \alpha_{j-1},$$

d'où

$$(5) \quad \frac{\beta_j}{\alpha_j} \leq \frac{2}{E\left(2B \frac{\rho}{\rho+4} - 2\right)} \left(1 + \frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}}\right).$$

Soit enfin, conformément aux notations précédentes, σ_{p-j+1} le nombre d'éléments d'une section pleine de s_{p-j+1} . Majorons le nombre σ des éléments de cette section qui appartiennent à s_{p-j} . D'après (2) et (3), on a

$$\begin{aligned} \sigma &\leq 2k_{p-j} + 2 + \frac{2k_{p-j} + 2}{(\rho-1)k_{p-j}} \sigma_{p-j+1} \\ &\leq 3k_{p-j} + \frac{3}{\rho-1} \sigma_{p-j+1} \leq \frac{3}{B\rho} k_{p-j+1} + \frac{3}{\rho-1} \sigma_{p-j+1}, \end{aligned}$$

et donc

$$(6) \quad \sigma \leq 3\left(\frac{1}{B\rho} + \frac{1}{\rho+1}\right) \sigma_{p-j+1}.$$

c. Choisissons ε_0 assez petit (i.e. ρ assez grand) pour que de (6) vienne

$$(7) \quad \sigma \leq \frac{\sigma_{p-j+1}}{5}.$$

Choisissons la suite θ_p assez rapidement décroissante (i.e. B assez grand) pour que de (5) vienne, par récurrence sur j ,

$$(8) \quad \beta_j/\alpha_j \leq 1/4.$$

Alors, d'après (2) et (7), on a, pour tout $j = 0, 1, \dots, p-2$,

$$\begin{cases} \tau_{p-j, \dots, p}(n) \geq 2k_{p-j} \alpha_j, \\ \tau_{p-j-1, \dots, p}(n) \leq \frac{2k_{p-j} + 2}{5} \alpha_j + (2k_{p-j} + 1) \beta_j \end{cases}$$

et donc, d'après (8),

$$\frac{\tau_{p-j-1, \dots, p}(n)}{\tau_{p-j, \dots, p}(n)} \leq \frac{2k_{p-j} + 2}{10k_{p-j}} + \frac{2k_{p-j} + 1}{2k_{p-j}} \frac{\beta_j}{\alpha_j} \leq C < 1,$$

où C est une constante. Multipliant membre à membre ces inégalités relatives aux divers $j = 0, 1, 2, \dots, p-2$, on aboutit, en utilisant (4), à

$$\tau_{1,2,\dots,p}(n) \leq \tau_p(n) C^{p-1} \leq \frac{3 C^{p-1}}{\rho-1} (n - k_p),$$

d'où

$$\nu_p(n) \leq k_p + \tau_{1,2,\dots,p}(n) \leq \left(1 - \frac{3 C^{p-1}}{\rho-1}\right) k_p + \frac{3 C^{p-1}}{\rho-1} n.$$

On voit par conséquent que, dès que $n \geq N_p = 2^p k_p$,

$$\nu_p(n)/n \leq \frac{1}{2^p} \left(1 - \frac{3 C^{p-1}}{\rho-1}\right) + \frac{3 C^{p-1}}{\rho-1} = \lambda_p, \quad \text{avec} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p = 0,$$

ce qui achève la démonstration de (β) et du lemme 4.

III. Caractérisation des applications p.p.-régulières.

1. Un lemme d'équirépartition. — Désignons par G un groupe discret tel qu'il existe un isomorphisme $x \rightarrow \hat{a}(x)$ de G sur un sous-groupe de T . Alors $\hat{a}$ est un *générateur topologique* du groupe compact dual $\hat{G}$, i.e. l'ensemble des $p\hat{a}$, où $p \in \mathbb{Z}$, est partout dense dans $\hat{G}$. Réciproquement, l'existence d'un générateur topologique de $\hat{G}$ implique que G est isomorphe à un sous-groupe de T . Désignons par μ la mesure de Haar sur $\hat{G}$ telle que $\mu(\hat{G}) = 1$. Avec ces notations on a le lemme suivant :

LEMME 5. — Soient E un ensemble fermé dans $\hat{G}$ et $\hat{E}$ son intérieur. Si $\nu(n)$ désigne le nombre d'entiers p tels que $1 \leq p \leq n$ et tels que $p\hat{a} \in E$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(n)/n \geq \mu(\hat{E}).$$

DÉMONSTRATION. — Dans [1], B. ECKMANN démontre que la suite $p\hat{a}$ est *équirépartie* dans $\hat{G}$, c'est-à-dire qu'on a

$$(9) \quad \int_{\hat{G}} f(\hat{x}) d\mu(\hat{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n f(p\hat{a})$$

pour toute fonction f continue sur $\hat{G}$.

Soit $\hat{x} \rightarrow F(\hat{x})$ la fonction qui vaut 1 si $\hat{x} \in \hat{E}$, 0 si $\hat{x} \notin \hat{E}$. Si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe une fonction f continue sur $\hat{G}$ telle que $0 \leq f \leq F$ et

$$(10) \quad \int_{\hat{G}} f(\hat{x}) d\mu(\hat{x}) \geq \mu(\hat{E}) - \varepsilon.$$

Or, pour tout n entier ≥ 1 ,

$$(11) \quad \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n f(p\hat{a}) \leq \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n F(p\hat{a}) \leq \nu(n)/n.$$

De (9), (10), (11) vient que

$$\mu(\hat{E}) - \varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(n)/n,$$

ce qui, ε étant arbitraire, établit le lemme.

2. Une condition nécessaire de pp-régularité.

THÉOREME 1. — Soient G_2 un groupe discret dénombrable et G_1 un groupe discret isomorphe à un sous-groupe de T ⁽¹⁾. Si φ est une application pp-régulière de G_2 dans G_1 , il existe un sous-groupe $L \in \mathcal{F}(G_2)$ tel que :

(P₁) pour tout couple y, y' d'éléments de G_2 équivalents modulo L , il existe un sous-groupe $H_{y,y'} \in \mathcal{F}(G_2)$ tel que l'application de G_2 dans G_1 : $x \rightarrow \varphi(yx) - \varphi(y'x)$ soit constante sur chaque classe de G_2 modulo $H_{y,y'}$.

DÉMONSTRATION. — Soit $\hat{x} \in \hat{G}_1$; c'est une fonction presque-périodique sur G_1 ; φ étant pp-régulière, la fonction $x \rightarrow \langle \hat{x}, \varphi(x) \rangle$ est donc presque-périodique sur G_2 . Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, ε_0 étant la constante du lemme 4. Puisque $\hat{x} \circ \varphi \in A(G_2)$, il existe un nombre fini d'éléments de G_2 , soient $h_1, h_2, \dots, h_m$ tels que, pour tout $y \in G_2$,

$$\min_{i=1, \dots, m} \sup_{x \in G_2} |\langle \hat{x}, \varphi(yx) \rangle - \langle \hat{x}, \varphi(h_i x) \rangle| \leq \varepsilon.$$

Pour tout système fini $k_1, k_2, \dots, k_n$ d'éléments de G_2 , désignons par $E(k_1, k_2, \dots, k_n)$ l'ensemble des $\hat{x} \in \hat{G}_1$, tels que, pour tout $y \in G_2$,

$$\min_{j=1, \dots, n} \sup_{x \in G_2} |\langle \hat{x}, \varphi(yx) \rangle - \langle \hat{x}, \varphi(k_j x) \rangle| \leq \varepsilon.$$

Ce qui précède montre que $\hat{G}_1$ est réunion des $E(k_1, k_2, \dots, k_n)$ pour tous les systèmes finis possibles. Or l'ensemble de ces systèmes est dénombrable, car G_2 est dénombrable; de plus chacun des $E(k_1, k_2, \dots, k_n)$ est fermé dans $\hat{G}_1$; par conséquent l'un d'entre eux au moins, soit $E = E(s_1, s_2, \dots, s_p)$, est d'intérieur non vide.

Pour tout $i = 1, 2, \dots, p$, soit F_i la partie de G_2 définie par : $y \in F_i$ si et seulement si l'ensemble fermé $E_i(y)$ des $\hat{x} \in E$ qui vérifient

$$\sup_{x \in G_2} |\langle \hat{x}, \varphi(yx) \rangle - \langle \hat{x}, \varphi(s_i x) \rangle| \leq \varepsilon$$

⁽¹⁾ Les groupes G_1 remplissant cette hypothèse ont été étudiés par ECKMANN dans [1], et aussi par HALMOS et SAMELSON, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 28, 1948, p. 254.

Exemple : tout groupe abélien dénombrable sans torsion.

est d'intérieur non vide. Puisque, pour tout $y \in G_2$, $E = \bigcup_{i=1}^p E_i(y)$, G_2 est réunion des ensembles $F_1, F_2, \dots, F_p$.

Quels que soient $x, y \in G_2$ et $i = 1, 2, \dots, p$, posons

$$\theta_{i,y}(x) = \varphi(yx) - \varphi(s_i x)$$

et montrons que, pour i et $y \in F_i$ fixés, l'ensemble $\theta_{i,y}(G_2)$ est fini. Soit $\hat{a}$ un générateur topologique de $\hat{G}_1$. L'application $x \rightarrow \langle \hat{a}, x \rangle$ étant injective de G_1 dans T , il faut voir que l'ensemble $Z' \subset T$ formé des nombres $\langle \hat{a}, \theta_{i,y}(x) \rangle$ est fini quand x parcourt G_2 . Soit $s = (n_1, n_2, \dots, n_q, \dots)$ la suite strictement croissante des entiers $n_q \geq 1$ tels que $n_q \hat{a} \in E_i(y)$. Comme $E_i(y)$ est d'intérieur non vide, avec les notations des lemmes 4 et 5, s vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(n)/n > 0,$$

d'après le lemme 5. Or, en vertu des définitions de s et de $E_i(y)$, on a, pour tout $n_q \in s$ et tout $z \in Z'$,

$$|1 - z^{n_q}| \leq \varepsilon$$

et donc Z' , contenu dans $Z(\varepsilon_0)$, est fini, d'après le lemme 4.

Dans G_2 définissons la relation : $y \sim y'$ si et seulement si G_2 a une image finie dans G_1 par l'application $x \rightarrow \varphi(yx) - \varphi(y'x)$. Il est clair que $\sim$ est une relation d'équivalence compatible avec la multiplication à droite par les éléments de G_2 ; les classes d'équivalence sont les classes à droite de G_2 modulo le sous-groupe L' des $y \sim e$. Or, nous avons montré qu'il existe des $s_1, s_2, \dots, s_p \in G_2$, en nombre fini, tels que, à tout $y \in G_2$ corresponde au moins l'un des s_i de sorte que l'application de G_2 dans G_1 :

$$x \rightarrow \theta_{i,y}(x) = \varphi(yx) - \varphi(s_i x)$$

ne prenne qu'un nombre fini de valeurs distinctes. C'est dire que $\sim$ admet un système fini de représentants, et donc que L' est d'indice fini.

Soit alors $L \subset L'$ un sous-groupe distingué et d'indice fini dans G_2 . Si $y \sim y' \pmod{L}$, la fonction

$$x \rightarrow \langle \hat{a}, \varphi(yx) - \varphi(y'x) \rangle$$

est presque-périodique sur G_2 et ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes. D'après la proposition 3, il existe un sous-groupe $H_{y,y'} \in \mathcal{F}(G_2)$ tel que cette fonction soit constante sur chaque classe de G_2 modulo $H_{y,y'}$; $\hat{a}$ étant injectif, il en est de même de l'application $x \rightarrow \varphi(yx) - \varphi(y'x)$ de G_2 dans G_1 , ce qui achève la démonstration du théorème 1.

3. Cas où G_2 n'a pas de sous-groupe propre d'indice fini.

THÉOREME 2. — Soit G_2 un groupe dénombrable n'admettant pas de sous-groupe d'indice fini différent de G_2 , et soit G_1 un groupe abélien quelconque. Pour qu'une application φ de G_2 dans G_1 soit pp-régulière, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme

$$\varphi(x) = h + \sigma(x),$$

où σ est un homomorphisme de G_2 dans G_1 , et h un élément fixe de G_2 .

DÉMONSTRATION. — La condition est suffisante : nous l'avons remarqué en I (§ 2). Montrons qu'elle est nécessaire. Soit φ une application pp-régulière de G_2 dans G_1 ; pour tout $x \in G_2$, posons

$$\sigma(x) = \varphi(x) - \varphi(e).$$

Si $\hat{x} \in \hat{G}_1$, $\hat{x} \circ \sigma$ est une application pp-régulière de G_2 dans T , à laquelle nous appliquons le théorème 1. Les sous-groupes L et $H_{y,y'}$ coïncidant avec G_2 , pour chaque y fixé appartenant à G_2 , l'application

$$x \rightarrow \langle \hat{x}, \sigma(yx) - \sigma(x) \rangle$$

est constante sur G_2 et vaut $\langle \hat{x}, \sigma(y) \rangle$, valeur obtenue pour $x = e$. Quels que soient $x, y \in G_2$, on a donc

$$\langle \hat{x}, \sigma(yx) - \sigma(x) - \sigma(y) \rangle = 1,$$

ce qui entraîne que σ est un homomorphisme, car les $\hat{x}$ séparent G_1 .

REMARQUE. — L'hypothèse $\mathcal{F}(G_2) = \{G_2\}$ équivaut à la suivante : $\bar{G}_2$ est connexe. En effet, par transformation de Gelfand, l'algèbre de Banach $A(G_2)$ est isomorphe à l'algèbre de toutes les fonctions continues sur $\bar{G}_2$. Supposons $\bar{G}_2$ non connexe; alors il existe sur $\bar{G}_2$ une fonction continue non constante ne prenant que les valeurs 0 et 1; il existe donc dans $A(G_2)$ un idempotent non trivial, ce qui, d'après la proposition 3, implique l'existence dans G_2 d'un sous-groupe distingué d'indice fini distinct de G_2 . Réciproquement, si H est un tel sous-groupe, la fonction caractéristique de H est un idempotent non trivial de $A(G_2)$, ce qui entraîne que le spectre $\bar{G}_2$ de $A(G_2)$ n'est pas connexe.

COROLLAIRE. — Soient K un groupe compact, G_2 un sous-groupe dénombrable de K tel que $\mathcal{F}(G_2) = \{G_2\}$ et G_1 un groupe abélien. Soit φ une application de G_2 dans G_1 telle que $\varphi(e) = 0$. Alors, si φ se prolonge en une application continue de K dans $\bar{G}_1$, φ est un homomorphisme.

Cela résulte immédiatement de la proposition 2 et du théorème 2.

En particulier, si G est un groupe abélien dénombrable tel que $\bar{G}$ soit connexe, toute application continue de $\bar{G}$ conservant G et l'élément neutre induit sur G un homomorphisme.

4. Cas où G_2 est à génération finie.

THÉOREME 3. — Soit G_2 un groupe à génération finie, et soit G_1 un groupe abélien. Pour qu'une application φ de G_2 dans G_1 soit pp-régulière, il faut et il suffit qu'elle soit linéaire par morceaux ⁽²⁾.

DÉMONSTRATION. — D'après la proposition 5, la condition est suffisante; montrons qu'elle est nécessaire. Soit φ une application pp-régulière de G_2 dans G_1 . Remarquons que, G_2 étant à génération finie, $\mathcal{F}(G_2)$ est dénombrable : en effet tout sous-groupe appartenant à $\mathcal{F}(G_2)$ est lui-même à génération finie ⁽³⁾; il n'y a donc pas plus de tels sous-groupes que de systèmes finis d'éléments de G_2 ; or G_2 est dénombrable. Par suite du lemme 2, on peut, pour la démonstration, se placer dans le cas où $G_1 \subset T$.

Alors on applique le théorème 1. Soient L et $H_{y,y'}$ les sous-groupes appartenant à $\mathcal{F}(G_2)$ introduits dans l'énoncé de ce théorème, et soient $s_1, s_2, \dots, s_m$ des représentants de G_2 modulo L . Pour chaque $i = 1, \dots, m$, considérons l'application φ_i de L dans G_1 définie par

$$\varphi_i(x) = \varphi(s_i x) \quad (x \in L).$$

D'après le théorème 1, pour tout $y \in L$ fixé, l'application

$$x \rightarrow \varphi(s_i y x) - \varphi(s_i x) = \varphi_i(y x) - \varphi_i(x)$$

de L dans G_1 est constante sur chaque classe de L modulo $H_y = L \cap H_{s_i y, s_i}$. Ainsi φ_i satisfait à la condition (P_3) du lemme 3; L étant à génération finie, il résulte de ce lemme que, pour tout i , φ_i est une application linéaire par morceaux de L dans G_1 . Enfin le lemme 1 montre que φ est une application linéaire par morceaux.

COROLLAIRE. — Soient K un groupe compact, G_2 un sous-groupe à génération finie de K et G_1 un groupe abélien. Soit φ une application de G_2 dans G_1 . Si φ se prolonge en une application continue de K dans $\bar{G}_1$, φ est une application linéaire par morceaux.

Cela résulte immédiatement de la proposition 2 et du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] ECKMANN (Beno). — Ueber monothetische Gruppen, *Comment. Math. Helvet.*, t. 16, 1943-1944, p. 249-263.
- [2] EYMARD (Pierre). — Applications laissant stable l'ensemble des fonctions presque-périodiques sur certains groupes discrets, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 249, 1959, p. 2459-2461.

⁽²⁾ Pour le cas $G_2 = G_1 = Z$, cf. W. RUDIN [5], p. 47-48.

⁽³⁾ Se reporter à KUROSH, *The theory of groups*, Tome 2. — New York, Chelsea, publishing Company, 1956, p. 36.

- [3] LOOMIS (Lynn H.). — *An introduction to abstract harmonic analysis*. — Princeton, Toronto, London, Van Nostrand, 1953.
- [4] MONTGOMERY (D.) and ZIPPIN (L.). — *Topological transformation groups*. — New York, Interscience Publishers, 1955 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 1).
- [5] RUDIN (Walter). — The automorphisms and the endomorphisms of the group algebra of the unit circle, *Acta Math.*, t. 95, 1956, p. 39-55.
- [6] WEIL (André). — *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. — Paris, Hermann, 1940 (Act. scient. et ind., 869).

(Manuscrit reçu le 25 février 1961.)

Pierre EYMARD,
Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre-Curie,
Paris, 5^e.