

BULLETIN DE LA S. M. F.

CIPRIAN FOIAS

Une remarque sur l'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes en dimension n

Bulletin de la S. M. F., tome 89 (1961), p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__1_0

© Bulletin de la S. M. F., 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR L'UNICITÉ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES EN DIMENSION n ,

PAR

CIPRIAN FOIAS.

(Bucarest).

Le but de cette note est de donner des classes intermédiaires de solutions (dans tout l'espace) des équations de Navier-Stokes en dimension n , classes dans lesquelles l'unicité soit assurée. Pour les cas $n=2$ et $n=3$ nos résultats sont voisins à ceux correspondants de J.-L. LIONS-G. PRODI ⁽¹⁾ et G. PRODI ⁽²⁾, résultats qui d'ailleurs nous ont inspiré.

1. Soit $\mathbf{L}^p = \overset{n}{\underset{1}{X}} L^p(\mathbb{R}^n)$, soit \mathbf{L}_1^p l'espace de $u \in \mathbf{L}^p$ tels que $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \in \mathbf{L}^p$ ($j=1, 2, \dots, n$) muni par la norme usuelle ⁽³⁾, et soient \mathbf{S}^2 , resp. \mathbf{S}_1^2 l'adhérence dans \mathbf{L}^2 , resp. \mathbf{L}_1^2 , de l'ensemble \mathbf{S}_0^∞ des $\mathbf{u} = (u_j)$ de $\mathbf{C}_0^\infty = \overset{n}{\underset{1}{X}} C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tels que

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

⁽¹⁾ LIONS (J.-L.) et PRODI (Giovanni). — Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 248, 1959, p. 3519-3521.

⁽²⁾ PRODI (Giovanni). — Un teorema di unicita per le equazioni di Navier-Stokes, *Annali di Mat. pura ed appl.*, t. 48, 1959, p. 173-182; quant aux théorèmes d'unicité donnés, dans ce cas ($n=3$), dans : KICELEV (A. A.) et LADYZENSKAJA (O. A.). — Sur l'existence et l'unicité de la solution du problème non stationnaire pour un liquide visqueux incompressible, *Izvestija Akad. Nauk SSSR*, t. 21, 1957, p. 655-680, ils sont contenus dans les nôtres.

⁽³⁾ Sauf mention spéciale, tous les espaces considérés sont des espaces réels; leurs topologies et les normes correspondantes sont celles usuelles; la norme dans \mathbf{L}^p , resp. \mathbf{L}_1^p , sera désignée par $\|\cdot\|_p$, resp. $\|\cdot\|_{p_1}$.

Par définition, une solution, resp. solution forte, des équations de Navier-Stokes sera une fonction $\mathbf{u}(t) \in L^2((-\infty, T); \mathbf{S}^2)$, resp. $L^2((-\infty, T); \mathbf{S}_1^2)^{(4)}$, nulle pour $t < 0$ et vérifiant au sens de la théorie des distributions, le système

$$(1) \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} - \nu \Delta u_j + \frac{\partial(u_j u_k)}{\partial x_k} = f_j + u_j^0 \otimes \delta + \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad (k, j = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

où $\nu, T > 0$, $\mathbf{f}(t) \in L^2((-\infty, T); \mathbf{L}^2)$, $\mathbf{f}(t) = 0$ pour $t < 0$, $u^0 \in \mathbf{S}^2$

sont donnés d'avance (et fixés!), p est une distribution sur $(-\infty, T) \times R^n$

$$\text{et } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}.$$

Soit $\mathfrak{F} = \overset{n}{\underset{1}{X}} \mathfrak{S}_n$, où \mathfrak{S}_n est l'espace de L. Schwartz des fonctions numériques (réelles), définies sur R^n indéfiniment différentiables et rapidement décroissantes (vers l'infini), et soit, par définition,

$$(2) \quad b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \Phi) = \int_{R^n} u_k v_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k} dx,$$

où $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2$ et $\Phi \in \mathfrak{F}$. Soit \mathbf{S} l'ensemble des $\mathbf{u} \in \mathfrak{F}$ tels que $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$.

Dans ce qui suit, un rôle important sera joué par la proposition suivante :

PROPOSITION PRÉLIMINAIRE. — Soit \mathbf{u} une solution des équations de Navier-Stokes. Il existe alors un ensemble de mesure nulle $N(\mathbf{u}) \subset [0, T[$ dépendant seulement de \mathbf{u} , tel que pour tout $t_0 \notin N(\mathbf{u})$, $t_0 \in [0, T[$ on ait (6)

$$(3) \quad (\mathbf{u}(t_0), \Phi_0(t_0)) = (\mathbf{u}^0, \Phi_0(0)) + \int_0^{t_0} (\mathbf{f}(t), \Phi_0(t)) dt + \\ + \int_0^{t_0} [(\mathbf{u}(t), \Phi_0'(t)) + \nu(\mathbf{u}(t), \Delta \Phi_0(t)) \\ + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \Phi_0(t))] dt$$

quelle que soit $\Phi_0(t) \in C^1([0, t_0]; \mathbf{S}) \quad (7)$.

(4) Pour un espace de Banach X et un intervalle $I \subset R^1$, $L^p(I; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, désigne l'espace des fonctions de puissance p -ième sommable à valeurs dans X . Évidemment on a $L^p(I; \mathbf{L}^p) = \overset{n}{\underset{1}{X}} L^p(I \times R^n)$.

(5) Évidemment toute solution forte est aussi une solution (tout simplement), et comme $u_j, u_k \in L^1(R^n)$ il résulte que $u_j u_k$ est une distribution (tempérée), donc $\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j u_k)$ a un sens.

(6) $(,)$ désigne le produit scalaire dans \mathbf{L}^2 .

(7) Pour un espace vectoriel topologique X , $C^1([0, t_0]; X)$ désigne l'espace des fonctions à valeurs dans X , définies et continûment dérivables sur $[0, t_0]$. La topologie dans $C^1([0, t_0]; X)$ étant celle de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées.

Nous allons démontrer cette proposition par plusieurs étapes, en utilisant quelques idées de G. PRODI [voir la note (2)].

LEMME. — \mathbf{S}_0^∞ est dense dans \mathbf{S} (par rapport à la topologie de \mathfrak{S}).

En effet, dans le cas contraire il existerait un vecteur $\mathbf{T} = (T_j)$ tel que T_j soient des distributions tempérées, $\langle \mathbf{T}, \mathbf{u} \rangle = 0$ (8) pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_0^\infty$ (donc $\mathbf{T} = \text{grad } T_0$) et $\langle \mathbf{T}, \mathbf{u}^0 \rangle \neq 0$ pour un certain $\mathbf{u}^0 \in \mathbf{S}$. Comme $\Delta T_0 = \text{div } \mathbf{T}$ est tempérée, T_0 l'est aussi, donc $\langle \mathbf{T}, \mathbf{u}^0 \rangle = \langle \text{grad } T_0, \mathbf{u}^0 \rangle = \langle T_0, \text{div } \mathbf{u}^0 \rangle = 0$,

C. Q. F. D.

En vertu de ce lemme, $C^1([0, t_0]; \mathbf{S}_0^\infty)$ est dense dans $C^1([0, t_0]; \mathbf{S})$ et par conséquent il suffit de démontrer la relation (3) en supposant que $\Phi_0(t) \in C^1([0, t_0]; \mathbf{S}_0^\infty)$. Pour cela remarquons d'abord que si $\Phi(t) \in C_0^\infty((-\infty, T); \mathbf{S}_0^\infty)$ (9) alors, en vertu de (1), on a

$$(4) \quad \int_0^T [-\langle \mathbf{u}(t), \Phi'(t) \rangle - \nu \langle \mathbf{u}(t), \Delta \Phi(t) \rangle - b \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \Phi(t) \rangle] dt \\ = \langle \mathbf{u}^0, \Phi(0) \rangle + \int_0^T \langle \mathbf{f}(t), \Phi(t) \rangle dt.$$

Soit $e(t) \in C_0^\infty(R^1)$ telle que $e(t) \geq 0$, $e(t) = e(-t)$ pour tout t , $e(t) = 0$ pour $|t| \geq 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e(t) dt = 1$, et soit $e_\delta(t) = \delta^{-1} e(\delta^{-1} t)$, $\delta > 0$.

LEMME. — Pour tout $\Phi \in \mathbf{S}_0^\infty$, on a

$$(5) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T e_\delta(t) \langle \mathbf{u}(t), \Phi \rangle dt = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^0, \Phi \rangle.$$

En effet, soit $I_\delta(t) \in C_0^\infty((-\infty, T))$ égale à $\frac{1}{2} - \int_0^t e_\delta(\tau) d\tau$ pour $t \geq -1$ et soit $\Phi(t) = I_\delta(t) \Phi$, $\delta < T$. Alors $\Phi(t) \in C_0^\infty((-\infty, T); \mathbf{S}_0^\infty)$ et par conséquent on déduit de (4)

$$\left| \int_0^T e_\delta(t) \langle \mathbf{u}(t), \Phi \rangle dt - \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^0, \Phi \rangle \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta | \langle \mathbf{f}(t), \Phi \rangle | dt \\ + \frac{1}{2} \int_0^\delta | \nu \langle \mathbf{u}(t), \Delta \Phi \rangle + b \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \Phi \rangle | dt \rightarrow 0,$$

pour $\delta \rightarrow 0$,

C. Q. F. D.

(8) \langle, \rangle désigne la dualité entre \mathfrak{S} et $\mathfrak{S}' = \frac{n}{1} \mathfrak{S}'_n$.

(9) Pour un espace vectoriel topologique \mathcal{X} , $C_0^\infty((-\infty, T); \mathcal{X})$ désigne l'espace des fonctions à valeurs dans \mathcal{X} , définies et indéfiniment dérivables dans $(-\infty, T)$ ayant le support compact. Sa topologie se définit d'une manière évidente. Notons que

$$C_0^\infty((-\infty, T); \mathbf{C}_0^\infty) = \frac{n}{1} C_0^\infty((-\infty, T) \times R^n).$$

Reprenons maintenant la démonstration proprement dite de la proposition.
Pour $\delta < T - t_0$, nous avons ⁽¹⁰⁾

$$e_\delta \star \Phi_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_\delta(t - \tau) \overline{\Phi_0}(\tau) d\tau \in C_0^\infty((-\infty, T); \mathbf{S}_0^z)$$

et par conséquent, en vertu de (4) nous obtenons

$$\begin{aligned} (6) \quad & \int_0^T e_\delta(t - t_0) (\mathbf{u}(t), \Phi_0(t_0)) dt - \int_0^T e_\delta(t) (\mathbf{u}(t), \Phi_0(0)) dt \\ & - \int_0^T [(\mathbf{u}(t), e_\delta \star \overline{\Phi_0'}(t)) + \nu(\mathbf{u}(t), e_\delta \star \overline{\Delta \Phi_0}(t)) + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), e_\delta \star \Phi_0(t))] dt \\ & = \int_0^T (\mathbf{f}(t), e_\delta \star \overline{\Phi_0}(t)) dt + (\mathbf{u}^0, e_\delta \star \overline{\Phi_0}(0)). \end{aligned}$$

Or, on vérifie sans peine que pour $\delta \rightarrow 0$

$$(6^I) \quad \begin{cases} e_\delta \star \overline{\Phi_0'}(t) \rightarrow \overline{\Phi_0'}(t), & e_\delta \star \overline{\Delta \Phi_0}(t) \rightarrow \overline{\Delta \Phi_0}(t), \\ e_\delta \star \overline{\Phi_0}(t) \rightarrow \overline{\Phi_0}(t) & \text{dans } L^2((0, T); \mathbf{L}^2) \end{cases}$$

$$(6^{II}) \quad e_\delta \star \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\Phi_0}(t) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\Phi_0}(t), \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad \text{dans } L^\infty((0, T) \mathbf{L}^\infty)$$

et

$$(6^{III}) \quad (\mathbf{u}^0, e_\delta \star \overline{\Phi_0}(t)) \rightarrow \frac{1}{2} (\mathbf{u}^0, \Phi_0(0)),$$

donc en faisant dans (6) $\delta \rightarrow 0$ et en tenant compte des convergences (5), (6^I)-(6^{III}) on obtient

$$\begin{aligned} (6^{IV}) \quad & \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T e_\delta(t - t_0) (\mathbf{u}(t), \Phi_0(t)) dt \\ & = \int_0^{t_0} [(\mathbf{u}(t), \Phi_0'(t)) + \nu(\mathbf{u}(t), \Delta \Phi_0(t)) + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \Phi_0(t))] dt \\ & \quad + \int_0^{t_0} (\mathbf{f}(t), \Phi_0(t)) dt + (\mathbf{u}^0, \Phi_0(0)). \end{aligned}$$

Mais

$$(6^V) \quad \left| \int_0^T e_\delta(t - t_0) \mathbf{u}(t) dt - \mathbf{u}(t_0) \right|_2 \leq (2 \sup e(t)) \frac{1}{2\delta} \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0)|_2 dt$$

et comme $\mathbf{u}(t) \in L^2((-\infty, T); \mathbf{L}^2) \subset L^1((0, T); \mathbf{L}^2)$, il existe (en vertu d'une conséquence immédiate du théorème de Lebesgue sur la dérivation de

⁽¹⁰⁾ On fera la convention qu'une barre au-dessus d'une fonction définie dans un intervalle de R^1 signifie que cette fonction a été prolongée sur R^1 par la valeur 0.

l'intégrale indéfinie d'une fonction numérique) un ensemble de mesure nulle $N(\mathbf{u}) \subset \{0, T\}$ tel que pour tout $t_0 \notin N(\mathbf{u})$ on ait

$$(6^{VI}) \quad \frac{1}{2\delta} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0)|_2 dt \rightarrow 0 \quad \text{pour } \delta \rightarrow 0.$$

La relation (3) s'ensuit maintenant de (6^{IV})-(6^{VI}), ce qui achève la démonstration de la proposition.

2. Soit $\mathbf{v} \in \mathbf{S}_0^\infty$ et soit $E_t \star \mathbf{v}$ ⁽¹¹⁾ la solution usuelle du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{u}$. On vérifie sans peine (par exemple par l'intermédiaire de la transformation de Fourier) que $E_t \star \mathbf{v} \in C^1((0, t_0); \mathfrak{S})$ et comme

$$\operatorname{div} E_t \star \mathbf{v} = E_t \star \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

que de plus $E_t \star \mathbf{v} \in C^1((0, t_0); \mathbf{S})$. En prenant la fonction $\Phi_0(t)$ (de la proposition préliminaire) égale à $E_{t_0-t} \star \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{S}_0^\infty$, nous obtenons directement le

THÉOREME 1. — *Soit \mathbf{u} une solution des équations de Navier-Stokes. Alors il existe un ensemble de mesure nulle $N(\mathbf{u}) \subset \{0, T\}$ dépendant seulement de \mathbf{u} , tel que pour tout $t_0 \notin N(\mathbf{u})$, $t_0 \in \{0, T\}$ on ait*

$$(7) \quad (\mathbf{u}(t_0), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}^0, E_{t_0} \star \mathbf{v}) \\ + \int_0^{t_0} [b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), E_{t_0-t} \star \mathbf{v}) + (\mathbf{f}(t), E_{t_0-t} \star \mathbf{v})] dt,$$

quel que soit $\mathbf{v} \in \mathbf{S}_0^\infty$.

La relation (6) permet d'étudier les solutions des équations de Navier-Stokes. Dans ce but donnons d'abord quelques lemmes.

LEMME. — *Pour tout $p \geq 2$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty$ nous avons*⁽¹²⁾

$$(8) \quad \|E_t \star \mathbf{v}\|_{\frac{2p}{p-2}} \leq C_0 |\mathbf{v}|_2 \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{p}\right)}, \quad (t \in (0, T_0), T_0 < \infty),$$

et

$$(9) \quad |E_t \star \mathbf{v}|_{\frac{2p}{p-2}} \leq C_1 |\mathbf{v}|_2 \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}p}, \quad (t \in (0, \infty))$$

⁽¹¹⁾ Où l'on a effectivement un produit de composition entre la solution élémentaire E de $\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta$ et ν .

⁽¹²⁾ Dans la suite C_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) désigneront des constantes.

En effet il suffit de démontrer ces inégalités pour une composante $\nu = \nu_j$, de $\mathbf{v} = (\nu_j)$. Mais dans ce cas nous avons ⁽¹³⁾

$$\begin{aligned} |E_t \star \nu|_{\frac{2p}{p-2}} &\leq C_2 \left| \widehat{E_t \star \nu} \right|_{\frac{2p}{p+2}} = C_2 |e^{-\nu t(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)} \hat{\nu}(\lambda)|_{\frac{2p}{p+2}} \\ &\leq C_2 |\hat{\nu}|_2 |e^{-\nu t(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)}|_p \leq C_3 |\nu|_2 \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2} \frac{n}{p}}, \end{aligned}$$

[ce qui prouve (9)] et d'une manière analogue

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} E_t \star \nu \right|_{\frac{2p}{p-2}} \leq C_2 |\lambda_j e^{-\nu t(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)} \hat{\nu}(\lambda)|_{\frac{2p}{p+2}} \leq C_4 |\nu|_2 \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{n}{p}\right)}$$

où $j = 1, 2, \dots, n$. La relation (8) s'ensuit maintenant de (9) et de la dernière suite d'inégalités.

LEMME. — Pour $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in L^2$ et $\mathbf{v} \in C_0^\infty$ on a

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} |b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, E_t \star \mathbf{v})| \\ |b(\mathbf{w}, \mathbf{u}, E_t \star \mathbf{v})| \end{array} \right\} \leq C_5 |\mathbf{w}|_2 |\mathbf{u}|_p |\mathbf{v}|_2 \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{n}{p}\right)}$$

où $0 < t \leq T_0$, $T_0 < +\infty$ et $2 \leq p \leq +\infty$ ⁽¹⁴⁾.

Comme c'est une conséquence immédiate de la définition (2), de l'inégalité de Hölder et de (8), passons au dernier

LEMME. — Pour $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_1^\infty$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{S}_0^\infty$ on a

$$(11) \quad |b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, E_t \star \mathbf{v})| \leq C_6 \|\mathbf{u}\|_2 |\mathbf{u}|_p |\mathbf{v}|_2 \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2} \frac{n}{p}}$$

où $0 < t < \infty$ et $2 \leq p \leq \infty$.

Soit $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_0^\infty$; alors

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, E_t \star \mathbf{v}) = -b(\mathbf{u}, E_t \star \mathbf{v}, \mathbf{u})$$

d'où (11) s'ensuit, en utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité (9). La validité de (11), pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_1^\infty$, en résulte par continuité. C. Q. F. D.

Nous pouvons maintenant donner nos deux théorèmes qui constituent le but de cette note. Pour cela soit

$$(12) \quad \mathcal{J}_n((0, T)) = \bigcup_{p > n} \bigcup_{q > \frac{2p}{p-n}} L^q((0, T); \mathbf{L}^p).$$

⁽¹³⁾ Où l'accent désigne la transformée de Fourier.

⁽¹⁴⁾ Où $|\mathbf{u}|_p = +\infty$ si $\mathbf{u} \notin \mathbf{L}^p$.

PREMIER THÉORÈME D'UNICITÉ. — *La solution des équations de Navier-Stokes est unique dans la classe $\mathcal{J}_n((0, T)) \cap L^\infty((0, T); \mathbf{L}^2)$.*

DÉMONSTRATION. — Soit $\mathbf{u}_i (i=1, 2)$ une solution des équations de Navier-Stokes appartenant à cette classe. Soient $t_0 < T_0$ tels que $T_0 < T$ et $\mathbf{w}(t) = \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)$ soit presque partout nulle dans $(0, t_0)$. De (7) on déduit que pour tout $t \in (t_0, T[-N(\mathbf{u}_i)$ et $\mathbf{v} \in S_0^\infty$ on ait

$$(\mathbf{u}_i(t), \mathbf{v}) = \int_{t_0}^t [b(\mathbf{u}_i(\tau), \mathbf{u}_i(\tau), E_{t-\tau} \star \mathbf{v}) + (\mathbf{f}(\tau), E_{t-\tau} \star \mathbf{v})] d\tau + (\mathbf{u}_i(t_0), E_{t-t_0} \star \mathbf{v})$$

et par suite

$$(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}) = \int_{t_0}^t [b(\mathbf{u}_1(\tau), \mathbf{w}(\tau), E_{t-\tau} \star \mathbf{v}) + b(\mathbf{w}(\tau), \mathbf{u}_2(\tau), E_{t-\tau} \star \mathbf{v})] d\tau$$

d'où, en tenant compte de (10) et du fait que presque partout $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{S}^2$ on obtient

$$(13) \quad |\mathbf{w}(t)|_2 \leq C_5 \sum_{i=1}^2 \int_{t_0}^t |\mathbf{u}_i(\tau)|_{p_i} |\mathbf{w}(\tau)|_2 \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}(1+\frac{n}{p_i})}},$$

où p_i sont choisis de la manière que

$$(13') \quad \mathbf{u}_i \in L^{q_i}((0, T); \mathbf{L}^{p_i}) \quad \text{avec} \quad q_i > \frac{2p_i}{p_i - n} \quad (i=1, 2),$$

et $t \notin N(\mathbf{u}_1) \cap N(\mathbf{u}_2)$. De (13)-(13') on déduit que pour tout $t_1 \in (t_0, T_0)$ on ait (presque partout)

$$|\mathbf{w}(t)|_2 \leq C_5 \left[\sum_{i=1}^2 C_{6+i} \left(\int_0^T (|\mathbf{u}_i(t)|_{p_i})^{q_i} dt \right)^{\frac{1}{q_i}} (t-t_0)^{\frac{p_i-n}{2p_i} - \frac{1}{q_i}} \right] \text{vrai max}_{t_0 \leq t \leq t_1} |\mathbf{w}(t)|_2$$

où $t \in (t_0, t_1)$, donc

$$\left(\text{vrai max}_{t_0 \leq t \leq t_1} |\mathbf{w}(t)|_2 \right) [1 - C_9(t_1 - t_0)^{r_1} - C_{10}(t_1 - t_0)^{r_2}] \leq 0$$

où $r_1, r_2 > 0$. Cette dernière relation entraîne que pour $t \leq t_0 + C_{11}$ (où C_{11} est indépendante de t_0 ⁽¹⁵⁾) on a $|\mathbf{w}(t)|_2 = 0$ presque partout. De cette manière, en prenant $t_0 = 0$, on obtient $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$ presque partout pour $t \leq C_{11}$ et par conséquent aussi pour $t \leq 2C_{11}$, puis pour $t \leq 3C_{11}$ etc., ce qui achève la démonstration du théorème.

(15) Mais qui dépend de T_0 fixe mais arbitraire dans $(0, T[$.

DEUXIÈME THÉORÈME D'UNICITÉ. — *La solution forte des équations de Navier-Stokes est unique dans la classe $\mathcal{S}_n((o, T))$.*

Ce fait est un corollaire immédiat du théorème antérieur et du suivant :

THÉORÈME 2. — *Toute solution forte \mathbf{u} des équations de Navier-Stokes telle que $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_n((o, T))$ appartient à $L^\infty((o, T_0); \mathbf{L}^2)$ quel que soit $T_0 \in (o, T)$.*

DÉMONSTRATION. — Soit $p_0 > n$ et $q_0 > \frac{2p_0}{p_0 - n}$ tels que $u \in L^{q_0}((o, T), \mathbf{L}^{p_0})$.

De (7) et (11) on déduit

$$|\mathbf{u}(t)|_2 \leq C_6 \int_0^t \|\mathbf{u}(\tau)\|_2 |\mathbf{u}(\tau)|_p \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2} \frac{n}{p_0}}} + \left(\int_0^{T_0} (|\mathbf{f}(t)|_2)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} T_0^{\frac{1}{2}} + |\mathbf{u}^0|_2$$

quelle que soit $0 \leq t \leq T_0$, $t \notin N(\mathbf{u})$, d'où

$$|\mathbf{u}(t)|_2 \leq C_{12} \left(\int_0^T (\|\mathbf{u}(t)\|_2)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T (|u(t)|_{p_0})^{q_0} dt \right)^{\frac{1}{q_0}} T_0^{\frac{p_0 - n}{2p_0} - \frac{1}{q_0}} + C_{13} T_0^{\frac{1}{2}} + C_{14},$$

donc $|\mathbf{u}(t)|_2 \leq C(T_0)$ presque partout dans (o, T_0) , C. Q. F. D.

(Manuscrit reçu le 30 mai 1960.)