BULLETIN DE LA S. M. F.

EDGAR R. LORCH

L'intégration dans les espaces généraux

Bulletin de la S. M. F., tome 88 (1960), p. 469-497
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1960__88__469_0>

Bull. Soc. math. France,
88, 1960, p. 469 à 497.

L'INTÉGRATION DANS LES ESPACES GÉNÉRAUX;

PAR

EDGAR R. LORCH

(New York) (¹).

1. Introduction.

Esquissons rapidement quelques aspects de la théorie de l'intégration de nos jours, de manière que nous puissions indiquer la direction du travail qui suit. D'abord fut fondée la notion de mesure, puis de fonction mesurable, puis finalement de fonction intégrable. Il s'agissait naturellement de fonctions d'une variable réelle (définies sur R), et un but principal était d'étendre le domaine des fonctions intégrables, en débutant par celles qui étaient continues.

Vu de nos jours, un premier travail de haute importance pour « l'axiomatisation » future de la théorie est le résultat classique de F. RIESZ [12] sur la représentation par une intégrale de Stieltjes de chaque fonctionnelle linéaire sur l'espace des fonctions continues sur l'intervalle fermé $[0, 1]$. Ce travail met en lumière toute une multitude de facettes de la situation, chacune desquelles est indispensable à une discussion de l'intégration. Il y a le fait que l'espace de base $[0, 1]$ est compact; que les fonctions à intégrer constituent un espace de Banach; qu'il ne s'agit pas d'une seule intégrale mais de la classe de *toutes* les intégrales. Puis il y a l'introduction d'un nouveau point de vue : les notions d'intégrale et de fonctionnelle linéaire sont équivalentes (l'idée est aussi fertile qu'elle est inexacte). Ceci donne lieu à deux nouvelles interprétations du résultat de Riesz, chacune desquelles sera donnée dans la suite, et bien qu'elles semblent contradictoires au premier

(¹) Ce travail a été subventionné par le National Science Foundation NSF-G 1981 et NSF-G 4225. Les résultats qui s'y trouvent ont formé le sujet d'une série de conférences prononcées au Collège de France au début de 1958 (*voir* aussi [10]).

aperçu elles seront toutes deux développées en complète harmonie. La première est que dans un espace « général », les intégrales constituent une sous-variété propre de la variété des fonctionnelles linéaires et qu'il y a une projection de la dernière sur la première. Pour le théorème de Riesz, la projection est l'identité. Nous énoncerons ce résultat d'une manière précise dans le chapitre 4 (*voir* le théorème 3). La deuxième interprétation du résultat de Riesz propose une définition plus flexible de l'intégration qui permettra à chaque fonctionnelle sans exception d'être une telle intégrale. Ce point de vue nous porte à introduire les $\mathfrak{A}$-intégrales définies par une famille d'ensembles $\mathfrak{A}$ (chapitre 4). En variant $\mathfrak{A}$, nous obtenons tout un « spectre » d'intégrales entre les deux limites : à un bout, les intégrales classiques, à l'autre, l'ensemble de toutes les fonctionnelles.

La seconde étape nécessaire à l'axiomatisation de la théorie se trouve dans le travail de DANIELL [4]. (Bien que nous parlions d'axiomatisation, nous n'avons aucune intention de rendre l'intégration strictement formelle; il s'agit plutôt de démêler les divers fils qui en forment le tissu.) Cet auteur définit l'intégrale comme une fonctionnelle linéaire positive F qui jouit de la propriété de continuité : si $f_n(x) \downarrow 0$ pour chaque x, alors $Ff_n \downarrow 0$. Dans son travail on aperçoit nettement l'importance du caractère réticulé de l'espace des fonctions par lequel on débute pour la construction de l'extension de l'intégrale. La définition des $\mathfrak{A}$-intégrales que nous donnerons est une généralisation de celle de Daniell.

Résumons brièvement les propriétés essentielles de l'intégrale classique. La théorie est attachée à la notion de compacité de l'espace de base. Tout au plus s'agira-t-il de traiter des espaces localement compacts, ce qui se fait en considérant une réunion d'espaces compacts. Les concepts de mesure, d'intégrale, de fonctionnelle linéaire, ou de fonctionnelle continue dans le sens de Daniell sont équivalents. Commençant par l'un d'eux on arrive à tous les autres ([2], [3], [7], chap. 3). On soupçonne même parfois dans la littérature un désir de ne pas quitter le cercle charmé de ces propriétés.

Un but essentiel de notre travail est de construire une théorie de l'intégration dans les espaces généraux, c'est-à-dire pour lesquels l'hypothèse de compacité n'est pas valable. Ceci implique naturellement une redéfinition de nos idées et une disposition à renoncer à certaines de nos prédilections. En particulier les rapports entre mesure et intégration tomberont en défaut. En effet dans la famille des fonctions $\mathfrak{A}$-intégrables, il y aura un nombre très limité de fonctions caractéristiques d'ensembles; et la fonction intégrable la plus générale ne sera pas la limite de fonctions en escalier formés sur des ensembles mesurables. Ceci veut dire qu'aucune mesure ne correspondra à nos intégrales. La base des fonctions en escalier est fort commode, mais elle est forcément exclue de certaines situations, par exemple dans l'étude des fonctions continues. Elle le sera pour nous aussi. Pour les $\mathfrak{A}$-intégrales qui satisfont à une certaine condition, nous démontrerons la possibilité de l'extension du champ de fonctions intégrables. De même qu'il est possible de prolonger l'intégrale de Lebesgue des fonctions continues aux fonctions de Baire, nous étendrons le domaine donné **B** de fonctions à la classe des $\mathfrak{A}$-fonctions de Baire définies par **B**. Pour les fonctions de Baire, nous démontrerons le théorème de Lebesgue sur le passage à la limite (chap. 5).

Au premier abord, les problèmes que nous discutons semblent pouvoir être résolus d'une manière très nette et bien connue. Le procédé serait plus ou moins le suivant : les données comprennent un ensemble $\mathcal{E}$ de points et une algèbre de Banach **B** de fonctions réelles et bornées définies sur $\mathcal{E}$. Nous avons aussi F, une fonctionnelle linéaire et continue sur **B**. Mais alors, il y a une méthode classique d'immersion de $\mathcal{E}$ dans un espace compact $\hat{\mathcal{E}}$ de manière que les fonctions de **B** « deviennent » celles de l'ensemble $C(\hat{\mathcal{E}})$ de toutes les fonctions continues sur $\hat{\mathcal{E}}$. Dans une telle situation, F agissant sur un ensemble compact, peut être représentée par une mesure μ complètement additive $Ff = \int f(x)\, d\mu(x)$, définie, bien entendu, sur $\hat{\mathcal{E}}$.

Cet ordre d'idées est loin de résoudre nos problèmes (mais ajoutons qu'il guidera nos premiers pas). L'immersion précédente de $\mathcal{E}$ dans $\hat{\mathcal{E}}$ n'est pas constructive et se base sur l'axiome du choix. Pour les applications à envisager elle ne vaudra rien à moins qu'il soit possible en quelque manière de décrire $\hat{\mathcal{E}}$. Dans presque tous les cas, la construction de $\hat{\mathcal{E}}$ est ou triviale ou absolument inabordable. L'idéal que nous voudrions atteindre dans la présentation de nos résultats exige que les constructions soient explicites et faisables dans un sens honnête. (Par contre, dans les démonstrations, nous emploierons librement l'existence de $\hat{\mathcal{E}}$, etc.) Un examen rapide des énoncés indiquera que nous sommes arrivés à notre but sans invoquer des opérations au-delà du dénombrable. Notre travail est facilité par la circonstance frappante que la structure de la totalité des points de $\hat{\mathcal{E}}$ est plus simple que celle d'un seul point (*voir* théorème 5, par exemple).

Soulevons rapidement une autre considération que nous avons eue dans ce travail et qui touche en certains points les problèmes noueux du paragraphe précédent. Étant donné un espace **B** de fonctions, nous avons vu que l'espace $\mathbf{B}^*$ des fonctionnelles linéaires sur **B** consiste seulement en partie d'intégrales ordinaires. La question peut se poser : quelle est la structure du résidu de $\mathbf{B}^*$ consistant de fonctionnelles qui ne sont pas des intégrales? Presque sans exception, ces fonctionnelles, plus que nombreuses, ont été considérées jusqu'à présent comme les habitants mystérieux d'une forêt impénétrable. En formulant la notion de $\mathfrak{A}$-intégrale, nous avons voulu ajouter à nos maigres connaissances de ce monde étranger. Le lecteur intéressé pourra noter entre autres le théorème de la projection, et les relations de commutativité du chapitre 4 aussi bien que la caractérisation d'une fonctionnelle dont le support de sa mesure dans $\hat{\mathcal{E}}$ est un ensemble fermé donné (propositions 7 et 8).

Les fonctions de Baire jouent un grand rôle dans notre théorie. Au moins cinq différents espaces de telles fonctions paraissent dans notre discussion. Nous avons réuni certains résultats sur ces fonctions dans le chapitre 3. En particulier on y trouvera la construction comme fonction de la topologie « canonique » de l'espace $\hat{\mathcal{E}}$, de la topologie la moins fine rendant continues toutes les fonctions de Baire (théorème 2). Cette topologie est le prototype de toute une série d'autres qui jouent un rôle dans la théorie de l'intégration. Pour les espaces naïfs, elle est discrète. Beaucoup de démonstrations sur les fonctions de Baire, surtout celles du chapitre 5, se font par induction transfinie par rapport à l'ordre ordinal de la fonction. Nous pensons que le lecteur n'aura pas de difficulté à suivre les arguments bien que l'ordre d'une fonction ne soit jamais formellement défini! Ajoutons que les espaces intéressants semblent être ceux qui ne satisfont pas en chaque point au premier axiome de dénombrabilité. Il paraît opportun de suggérer ici que la classification des difficultés au moyen de cet axiome semble un peu mécanique et ne correspond que d'une manière grossière aux types de phénomènes topologiques qui se présentent.

Le travail même se divise en quatre chapitres. Dans le chapitre 2 nous donnons les définitions préliminaires et aussi la démonstration d'un théorème de caractère topologique. Dans le chapitre 3 se trouve une discussion relative aux fonctions de Baire engendrées par l'anneau complet des fonctions continues sur un compact. Le chapitre 4 contient la définition des $\mathfrak{A}$-intégrales, le théorème de la projection, et le rapport entre la $\mathfrak{A}$-convergence et la convergence uniforme. Dans le chapitre 5 est développée l'extension de l'intégrale, la définition des diverses familles de $\mathfrak{A}$-fonctions de Baire de leurs homomorphismes, ainsi que le théorème de Lebesgue. Une dernière section contient des exemples.

2. Préliminaires.

Nous considérons un espace $\mathcal{E}$ de points x, y, ... En général, $\mathcal{E}$ sera un ensemble sans structure, mais dans des cas particuliers, il pourra être muni d'une structure d'espace topologique. Si, par exemple, $\mathcal{E}$ est muni d'une topologie d'espace compact la théorie que nous exposons ci-dessous redonne la situation classique.

Considérons maintenant un ensemble $\mathbf{B}$ de fonctions réelles : f, g, ..., définies sur $\mathcal{E}$. Nous avons donc $f(x) \in R$ pour tout $x \in \mathcal{E}$. (Nous notons en passant que si $\mathcal{E}$ est un espace topologique, les fonctions f, g, ... seront des fonctions continues.) Nous supposerons que les fonctions de B séparent les points de $\mathcal{E}$; c'est-à-dire que si $x \in \mathcal{E}$, $y \in \mathcal{E}$, et $x \neq y$, il existe $f \in \mathbf{B}$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Supposons de plus que ces fonctions soient bornées et que $\mathbf{B}$ possède la structure d'un espace de Banach sur lequel la norme est définie par $\|f\| = \sup\limits_{x \in \mathcal{E}} |f(x)|$. Nous supposerons aussi que $\mathbf{B}$ est un anneau dans le sens algébrique, et, par conséquent, une algèbre de Banach. De plus, **B** contiendra toutes les fonctions constantes. Il est connu qu'une telle algèbre de Banach est un espace réticulé, c'est-à-dire, que **B** contient avec chaque paire f, g les fonctions $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$. Nous les noterons souvent par $f \vee g$ et $f \wedge g$ respectivement. Par exemple,

$$(f \vee g)(x) = \sup(f(x), g(x)).$$

Nous écrirons $f^+ = f \vee 0$ et $f^- = (-f) \vee 0$; donc $f = f^+ - f^-$. Comme d'habitude, $f \geqq 0$ implique que $f(x) \geqq 0$ pour chaque $x \in \mathcal{E}$. L'espace **B** est donc un espace de Riesz.

Nous désignerons l'espace des fonctionnelles réelles, linéaires, et continues sur **B** par $\mathbf{B}^\star$. Les fonctionnelles de $\mathbf{B}^\star$ seront F, G, H, ... Si $F \in \mathbf{B}^\star$, alors F est relativement bornée. Il s'ensuit que F est la différence de deux fonctionnelles positives. Une fonctionnelle $F \in \mathbf{B}^\star$ est positive, $F \geqq 0$, si $Ff \geqq 0$ pour chaque $f \geqq 0$. Si $F \in \mathbf{B}^\star$, soit, pour $f \geqq 0$, $F^+ f = \sup\limits_{0 \leqq g \leqq f} Fg$. Il est connu que le domaine de définition de F^+ peut être étendu à **B** et donne lieu à un fonctionnelle dans $\mathbf{B}^\star$. La définition de F^- est maintenant évidente. Nous avons, $F = F^+ - F^-$, $F^+ \geqq 0$, $F^- \geqq 0$. Pour plusieurs situations de la suite, il est suffisant dans nos arguments de considérer seulement les fonctionnelles positives. Nous le ferons souvent sans mention explicite.

Étant donné l'espace de points $\mathcal{E}$ et l'ensemble **B** de fonctions définies sur $\mathcal{E}$, il est possible, selon un procédé bien connu, d'immerger $\mathcal{E}$ dans un espace compact $\hat{\mathcal{E}}$ avec les résultats suivants : Le sous-espace $\mathcal{E}$ est dense dans $\hat{\mathcal{E}}$; chaque fonction f de **B** peut être prolongée d'une manière unique en une fonction $\hat{f}$ définie sur $\hat{\mathcal{E}}$, cette dernière fonction étant continue pour la topologie de $\hat{\mathcal{E}}$. L'ensemble de ces fonctions $\hat{f}$ est précisément la famille, $C(\hat{\mathcal{E}})$, de toutes les fonctions continues sur $\hat{\mathcal{E}}$. En général, nous représenterons par « f » la fonction définie sur $\hat{\mathcal{E}}$, aussi bien que sa restriction à $\mathcal{E}$. Remarquons en passant, par exemple, que $\|f\| = \|\hat{f}\|$, $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$, etc. De manière analogue nous noterons par « x », « y », ..., des points de $\mathcal{E}$ et de $\hat{\mathcal{E}}$. Par contre, la distinction entre $\mathcal{E}$ et $\hat{\mathcal{E}}$ sera toujours mise en évidence.

Nous rappelons la construction de $\hat{\mathcal{E}}$ et de sa topologie. Les points x, y, de $\hat{\mathcal{E}}$ sont précisément les idéaux maximaux de l'algèbre **B**. La topologie est définie par l'ensemble des voisinages suivants. Si $x_0 \in \hat{\mathcal{E}}$, si $f_1, \ldots, f_n \in C(\hat{\mathcal{E}})$, et si $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont positifs, alors l'ensemble

$$U(x_0) = \{ x : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon_i, \ i = 1, \ldots, n \}$$

est un voisinage de x_0. Il est évident que cette topologie est la moins fine de celles qui rendent continues les fonctions f. Dans la suite nous introduirons dans $\hat{\mathcal{E}}$ plusieurs autres topologies. Cela étant, la topologie précédente sera appelée la β-topologie. Nous parlerons sans explications ultérieures d'ensembles β-ouverts, β-fermés et de fonctions β-continues.

Les fonctionnelles $F \in \mathbf{B}^*$ peuvent être étendues à l'ensemble $C(\hat{\mathcal{E}})$ d'une manière évidente. Nous définissons simplement $F\hat{f} = Ff$ (mieux encore serait $\hat{F}\hat{f} = Ff$). Vu l'extension canonique de $\mathbf{B}$ à $C(\hat{\mathcal{E}})$, ceci ne donnera lieu à aucun malentendu. Nous voyons donc que, bien que l'expression Ff soit ambiguë, les calculs avec cette expression ne le sont jamais.

Dans la suite, nous aurons l'occasion de classer les phénomènes selon que les espaces topologiques que nous traitons satisfont ou non au premier axiome de dénombrabilité. Un espace est dit satisfaire à cet axiome en un point x si le système de voisinages de x a une base dénombrable. Une grande partie des difficultés que nous aurons à surmonter provient du fait que cet axiome n'est pas vérifié. En effet, à titre d'applications de cette théorie, nous envisagerons des espaces suffisamment « compliqués » pour ne pas se soumettre facilement à un examen d'énumération.

Il y a un rapport important entre la structure de l'espace vectoriel $\mathbf{B}$ et celle de l'espace topologique $\hat{\mathcal{E}}$. Il est énoncé dans le théorème suivant, d'ailleurs bien connu sous une forme plus forte :

THÉORÈME 1. — *Si l'espace vectoriel* $\mathbf{B}$ *est séparable, alors l'espace topologique* $\hat{\mathcal{E}}$ *satisfait au premier axiome de dénombrabilité en chaque point* x_0.

Soit $x_0 \in \hat{\mathcal{E}}$. Alors une base des β-voisinnges de x_0 est la famille des ensembles

$$U(x_0) = \{ x : | f_i(x) - f_i(x_0) | < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n \},$$

où $\varepsilon > 0$, n, $f_1, \ldots, f_n$ sont arbitraires. Soit maintenant $\{g_1, g_2, \ldots\}$ un ensemble dénombrable de fonctions dense dans $\mathbf{B}$. Soit r un nombre rationnel, $0 < r < \varepsilon/3$; choisissons les fonctions $g_{j_1}, \ldots, g_{j_n}$ (pour simplifier, écrivons g_s au lieu de g_{j_s}) telles que $\| f_i - g_i \| < r$, $i = 1, \ldots, n$. Soit

$$V(x_0) = \{ x : | g_i(x) - g_i(x_0) | < r,\ i = 1, \ldots, n \}.$$

alors il est évident que $V(x_0) \subset U(x_0)$. Pour compléter la démonstration il suffit de noter que la famille des ensembles $V(x_0)$ est dénombrable.

3. Fonctions de Baire.

1. Propriétés générales. — Une des tâches les plus importantes de la théorie de l'intégration est d'étendre la définition d'une intégrale donnée à un ensemble de fonctions plus large que celui avec lequel on a débuté. Inutile de souligner que telle extension sera assujettie à d'importants critères donnés par la théorie même de l'intégration. Puisque nous ne nous intéressons pas à une seule intégrale, mais plutôt à toute une famille d'intégrales, la classe étendue de fonctions qui nous intéressera est celle des fonctions de Baire. C'est celle-ci que nous allons définir.

Étant donné un ensemble de fonctions réelles, la famille des fonctions de Baire définie par l'ensemble sera la plus petite famille contenant les fonctions données et fermée par rapport à la formation des limites de suites monotones. Considérons le cas qui nous intéresse actuellement : les fonctions de Baire définies par l'ensemble $C(\hat{\mathcal{E}})$. Nous aurons : Si $\{f_n\}$ est une suite monotone croissante (ou décroissante) de fonctions de Baire et si f est une fonction définie sur $\hat{\mathcal{E}}$ telle que $f_n(x)\uparrow f(x)$ [ou $f_n(x)\downarrow f(x)$] pour chaque $x\in\hat{\mathcal{E}}$, alors f est une fonction de Baire.

Il y a trois familles de fonctions de Baire dignes d'intérêt. Dans la première, nous n'admettrons que des fonctions bornées. Cette famille sera désignée par $\mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$. La deuxième famille, $\mathfrak{B}_n(\hat{\mathcal{E}})$, consiste en fonctions de Baire non bornées, mais finies en chaque point. En définissant la troisième, notons que si nous permettons les valeurs « numériques » $\pm\infty$, chaque suite monotone est convergente. La famille $\mathfrak{B}_i(\hat{\mathcal{E}})$ est formée des fonctions limites de suites monotones et prenant en chaque point des valeurs α, $-\infty\leqq\alpha\leqq+\infty$.

Les fonctions de Baire peuvent être définies par un procédé transfini bien connu. Ce procédé nous permet de répartir les fonctions en classes dénotées par des nombres ordinaux; ainsi, d'une manière générale, nous pouvons dire que f est une fonction de la classe η si f est limite d'une suite monotone de fonctions de classes inférieures à η. Étant donné que les fonctions sont définies au moyen de suites, il est évident que à partir du nombre ordinal Ω (le premier ordinal dont la cardinalité ne soit pas dénombrable) le procédé ne produit aucune fonction nouvelle. (En certains cas, ce phénomène peut se présenter bien avant d'arriver à Ω.)

Il résulte évidemment du procédé de construction des diverses « classes de Baire » que si f et g sont fonctions de Baire, alors $f\vee g$ et $f\wedge g$ le sont aussi. Il en est de même pour $f+g$ dans le cas des familles $\mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$ et $\mathfrak{B}_n(\hat{\mathcal{E}})$. Dans le cas de $\mathfrak{B}_i(\hat{\mathcal{E}})$, il est possible que l'opération d'addition donne lieu au dilemme : $\infty+(-\infty)$. Ceci démontre que la famille $\mathfrak{B}_i(\hat{\mathcal{E}})$ n'est pas un espace vectoriel. Toutefois, pour la théorie de l'intégration, cette difficulté peut être surmontée, car une fonction intégrable est infinie sur un ensemble négligeable. Les méthodes permettant d'éviter la difficulté sont bien connues, et, naturellement, remplacent la famille $\mathfrak{B}_i(\hat{\mathcal{E}})$ par une autre famille. Il ne s'agit donc plus de fonctions de Baire. Notons encore un fait. Si f est une fonction de Baire, il est évident que $-f$ l'est aussi. De cela, il s'ensuit que les familles $\mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$ et $\mathfrak{B}_n(\hat{\mathcal{E}})$ forment des espaces vectoriels (et donc, de Riesz). Si f et g sont des fonctions de Baire positives, il est facile de démontrer par induction transfinie que $f.g$ l'est aussi. Dans le cas général, nous avons

$f = f^+ - f^-$ et $g = g^+ - g^-$ d'où découle immédiatement que $f.g$ est une fonction de Baire. Nous voyons donc que la famille $\mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$ devient une algèbre de Banach si nous définissons $\|f\| = \sup_{x \in \hat{\mathcal{E}}} |f(x)|$.

2. Les topologies associées. — Nous introduisons maintenant une topologie très étroitement liée à la famille des fonctions de Baire. Soit $f \in \mathbf{B}$; nous savons donc que $f(=\hat{f})$ est continue dans la β-topologie. Soit $M_f = \{ x : f(x) = 0,\ x \in \hat{\mathcal{E}} \}$. Désignons par N l'intersection d'une suite $\{ M_{f_n} \}$, $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{f_n}$. Finalement, soit $\mathfrak{J}$ la famille de toutes les réunions arbitraires d'ensembles N. Alors la famille $\mathfrak{J}$ définit une topologie sur $\hat{\mathcal{E}}$ que nous appellerons la ι-topologie. La démonstration est immédiate : $\emptyset \in \mathfrak{J}$ et $\hat{\mathcal{E}} \in \mathfrak{J}$; une réunion arbitraire d'ensembles de $\mathfrak{J}$ est dans $\mathfrak{J}$; finalement, une intersection dénombrable d'ensembles de $\mathfrak{J}$ est dans $\mathfrak{J}$ (en particulier, une intersection finie d'ensembles de $\mathfrak{J}$ est dans $\mathfrak{J}$). Ce dernier fait est une conséquence immédiate des lois de distributivité de la théorie des ensembles. Nous déduisons immédiatement de ceci qu'une réunion dénombrable d'ensembles ι-fermés est un ensemble ι-fermé.

Nous allons démontrer que la ι-topologie est plus fine que la β-topologie. Soit $U \subset \hat{\mathcal{E}}$ un ensemble β-ouvert, $U \neq \emptyset$. Soit $x \in U$. Puisque $\hat{\mathcal{E}}$ est compact, $\hat{\mathcal{E}}$ est normal. Soit V un ensemble β-ouvert tel que $x \in V$ et que pour la β-adhérence de V nous ayons $\overline{V}_\beta \subset U$. Il existe alors une fonction $f = f_x$ continue telle que $f(z) = 0$, $z \in \overline{V}_\beta$ et $f(z) = 1$ pour x dans le complémentaire de U. Puisque f est continue sur $\hat{\mathcal{E}}$, $f \in C(\hat{\mathcal{E}})$, ou, si nous préférons, $f \in \mathbf{B}$. Si $M_x = \{ y : f(y) = 0 \}$, nous avons $x \in M_x$ et $M_x \subset U$. De ceci, il s'ensuit que U est la réunion des ensembles M_x, $x \in U$. Ceci implique que U est ι-ouvert. La ι-topologie est donc plus fine que la β-topologie.

Soit maintenant f une fonction arbitraire de $C(\hat{\mathcal{E}})$ et pour un nombre fixe γ, soit $M_\gamma = \{ x : f(x) \geq \gamma \}$. M est donc β-fermé et *a fortiori* ι-fermé. De même, l'ensemble $N_\delta = \{ x : f(x) > \delta \}$ est ι-ouvert. Or, il est possible de représenter M_γ comme intersection dénombrable des ensembles N_δ où $\delta = \gamma - 1/2^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Puisque une intersection dénombrable d'ensembles ι-ouverts est un ensemble ι-ouvert, nous voyons que M_γ est en même temps ι-ouvert et ι-fermé. Nous pouvons démontrer de même façon que l'ensemble N_δ est simultanément ι-ouvert et ι-fermé.

Nous voyons de cette manière que pour chaque α, les ensembles

$$\{ x : f(x) < \alpha \}, \quad \{ x : f(x) \leq \alpha \},$$
$$\{ x : f(x) > \alpha \}, \quad \{ x : f(x) \geq \alpha \} \quad \text{et} \quad \{ x : f(x) = \alpha \}$$

sont à la fois ι-ouverts et ι-fermés. Nous appellerons ces ensembles les ensembles *déterminants* de la fonction de f. Démontrons maintenant le

Lemme 1. — *Soit $\{f_n\}$ une suite monotone, que nous supposerons croissante, et supposons que la suite converge vers une fonction f : $f_n \uparrow f$. Alors si les ensembles déterminants des fonctions f_n sont simultanément ι-ouverts et ι-fermés, il en est de même des ensembles déterminants de f.*

Nous avons les relations suivantes :

$$\{x : f(x) > \alpha\} = \bigcup_n \{x : f_n(x) > \alpha\}, \tag{1}$$

$$\{x : f(x) \geqq \alpha\} = \bigcap_n \{x : f(x) > \alpha - 1/2^n\}, \tag{2}$$

$$\{x : f(x) \leqq \beta\} = \bigcap_n \{x : f_n(x) \leqq \beta\}, \tag{3}$$

$$\{x : f(x) < \beta\} = \bigcup_n \{x : f(x) \leqq \beta - 1/2^n\}. \tag{4}$$

L'ensemble dans (1) étant réunion d'ensembles ι-ouverts est ι-ouvert. Mais en même temps, (1) est réunion dénombrable d'ensembles ι-fermés, donc il est lui-même ι-fermé. L'ensemble (2) est intersection dénombrable d'ensembles ι-ouverts et ι-fermés et jouit des mêmes propriétés. Il en est de même avec (3) et (4). Ceci démontre le lemme.

Dans la démonstration précédente, α et β représente des nombres finis. Le cas $\alpha = \pm\infty$ ne présente aucune difficulté particulière. Nous pouvons donc énoncer :

Proposition 1. — *Les fonctions de Baire sont ι-continues.*

Nous avons vu que les ensembles déterminants d'une fonction $f \in C(\hat{\mathcal{E}})$ sont à la fois ι-ouverts et ι-fermés. Selon le lemme 1 il en est de même pour toutes les fonctions de la « première classe » de Baire. Ceci revient à dire que ces fonctions sont ι-continues. Un raisonnement basé sur l'induction transfinie et s'appuyant de nouveau sur le lemme 1 démontre la proposition. Nous notons en passant que la démonstration est aussi applicable au cas des fonctions qui appartiennent à $\mathfrak{B}_i(\hat{\mathcal{E}})$. La topologie dans l'espace $-\infty \leqq \alpha \leqq \infty$ est évidente.

Il est facile de se rendre compte que si $f \in \mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$, alors il existe une fonction $g \in \mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$ telle que la totalité des ensembles déterminants de f soit la même que pour g. De ceci découle le fait que la topologie la moins fine qui rende continues toutes les fonctions de $\mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$ rend aussi continues celles de $\mathfrak{B}_i(\hat{\mathcal{E}})$... et *vice versa. Nous appellerons cette topologie la $\varkappa$-topologie.*

La proposition 1 démontre donc que la ι-topologie est plus fine que la $\varkappa$-topologie. Nous prouvons maintenant la proposition réciproque.

Proposition 2. — *La $\varkappa$-topologie est plus fine que la ι-topologie.*

Soit $f \in C(\hat{\mathcal{E}})$ et soit $M = \{ x : f(x) = 0 \}$. Nous allons montrer que M est $\varkappa$-ouvert. Nous supposerons premièrement (remplaçant f par $|f|$) que $f \geqq 0$. Nous supposerons de plus (remplaçant f par $f \wedge 1$) que $f \leqq 1$. Soit $g_n = (nf) \wedge 1$. Alors $g_n \uparrow h$ où $h \in \mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$ et h est la fonction caractéristique de $\hat{\mathcal{E}} - M$. La fonction $k = 1 - h$ est donc la fonction caractéristique de M et $k \in \mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$. Nous avons donc $M = \{ x : k(x) > 0 \}$. Puisque k est $\varkappa$-continue par définition, M est $\varkappa$-ouvert.

Soient maitenant $\{ M_n \}$ une suite d'ensembles définis par

$$M_n = \{ x : f_n(x) = 0 \}, \qquad f_n \in C(\hat{\mathcal{E}});$$

et soit k_n la fonction caractéristique de M_n, $n = 1, 2, \ldots$. Posons $l_n = k_1 \wedge \ldots \wedge k_n$; alors l_n est la fonction caractéristique de $\bigcap_1^n M_i$. Nous avons $l_n \downarrow l$ où $l \in \mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$ et l est la fonction caractéristique de l'ensemble $\bigcap_n M_n$. Puisque l est $\varkappa$-continue, $\bigcap_n M_n$ est $\varkappa$-ouvert De ceci et de la définition de la ι-topologie, nous voyons que la $\varkappa$-topologie contient donc chaque ensemble ι-ouvert. Ceci démontre la proposition. Nous réunissons les deux propositions précédentes dans le

Théorème 2. — *Soit $C(\hat{\mathcal{E}})$ l'espace de toutes les fonctions β-continues sur l'espace compact $\hat{\mathcal{E}}$. Soit la ι-topologie sur $\hat{\mathcal{E}}$ celle qui a comme base toutes les intersections dénombrables d'ensembles du type $M = \{ x : f(x) = 0 \}$, $f \in C(\hat{\mathcal{E}})$. Alors, la ι-topologie est la topologie la moins fine qui rende continues toutes les fonctions de Baire définies à partir de $C(\hat{\mathcal{E}})$.*

En général, il existera des fonctions ι-continues qui ne sont pas des fonctions de Baire. Par exemple, si $\hat{\mathcal{E}}$ est un espace métrique compact, la ι-topologie est la topologie discrète. Plus généralement, si un espace satisfait en chaque point au premier axiome de dénombrabilité, la ι-topologie est discrète. Un exemple d'une fonction ι-continue mais non fonction de Baire sur $\hat{\mathcal{E}} = [0, 1]$ est donné par la fonction caractéristique d'un ensemble non-mesurable au sens de Borel.

Une topologie sur $\hat{\mathcal{E}}$ qui semble jouer un rôle dans ces études est la λ-topologie, définie de la manière suivante. Soit S un ensemble arbitraire de $\mathcal{E}$ et soit T sa β-adhérence dans $\hat{\mathcal{E}}$. Alors la λ-topologie est la moins fine de celles qui contiennent les intersections dénombrables d'ensembles du type T.

Nous allons démontrer que la λ-topologie est plus fine que la ι-topologie. Soit $f \in C(\hat{\mathcal{E}})$ et soit $M = \{x : f(x) = 0\}$. Alors

$$M = \bigcap_n \{x : |f(x)| < 1/2^n\} = \bigcap_n \{x : |f(x) \leq 1/2^n\}.$$

Écrivons : $T_n =$ la β-adhérence de $\{x : f(x)| < 1/2^n\}$ et $S_n = \mathcal{E} \cap T_n$. Alors la β-adhérence de S_n est T_n (puisque chaque voisinage d'un point de T_n contient un point de S_n) et nous avons

$$\{x : |f(x)| < 1/2^n\} \subset T_n \subset \{x : |f(x)| \leq 1/2^n\}.$$

Donc $M = \bigcap_n T_n$. En outre, chaque intersection dénombrable d'ensembles de types M peut être représentée comme une intersection dénombrable d'ensembles de type T (c'est-à-dire, d'ensembles qui sont la β-adhérence d'un ensemble de $\mathcal{E}$). Il s'ensuit que la λ-topologie est plus fine que la ι-topologie.

La topologie induite sur $\mathcal{E}$ par la λ-topologie est la topologie discrète. De plus, si $x \in \hat{\mathcal{E}} - \mathcal{E}$ et $\hat{\mathcal{E}}$ satisfait au premier axiome de dénombrabilité au point x, alors l'ensemble $\{x\}$ est λ-ouvert. Il y a des exemples d'espaces qui ne satisfont pas à ce premier axiome et pour lesquels $\{x\}$ est λ-ouvert et d'autres où $\{x\}$ n'est pas λ-ouvert. Il en découle que la caractérisation de l'ensemble $\{x\}$ comme λ-ouvert ou non λ-ouvert est plus fine que la caractérisation de $\hat{\mathcal{E}}$ au point x au moyen du premier axiome.

Donnons un exemple. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres ordinaux $\leq \Omega$ (le premier ordinal de cardinalité non dénombrable). Introduisons dans $\mathcal{E}$ la topologie définie par l'ordre, c'est-à-dire, ayant comme base d'ensembles ouverts les intervalles $\{\xi : \alpha < \xi < \beta\}$ où α, β sont des ordinaux arbitraires. Nous ajoutons des voisinages de zéro et de Ω qui sont les semi-intervalles à droite et à gauche respectivement. Il est facile de démontrer que $\mathcal{E}$ est compact dans la topologie de l'ordre : $\mathcal{E} = \hat{\mathcal{E}}$ (démonstration par induction transfinie sur les ordinaux $\leq \Omega$). Considérons maintenant l'espace $\mathbf{B} = C(\mathcal{E})$ des fonctions continues sur $\mathcal{E}$. On démontre aisément que $\mathcal{E}$ ne satisfait pas au premier axiome au point Ω. Chaque fonction continue sur $\mathcal{E}$ est constante dans un β-voisinage de Ω puisque une intersection dénombrable de β-voisinages de Ω contient un voisinage de Ω. De même, chaque fonction de Baire définie par $C(\mathcal{E})$ est constante dans un β-voisinage de Ω. L'ensemble $\{\Omega\}$ n'est donc pas ouvert dans la ι-topologie, mais il est ouvert pour la λ-topologie qui est la topologie discrète.

4. Les $\mathfrak{A}$-intégrales.

1. Définition. — Nous allons développer dans ce chapitre une théorie de l'intégration plus générale que celle de DANIELL. Nous donnerons la définition des $\mathfrak{A}$-intégrales. Le théorème général de la projection sera énoncé. Les relations de commutativité seront démontrées. Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonctionnelle multiplicative soit une $\mathfrak{A}$-intégrale seront données. Nous soulignons d'avance la différence fondamentale séparant les espaces $\mathcal{E}$ (qui sera considéré comme « connu ») et $\hat{\mathcal{E}}$ (où la partie $\hat{\mathcal{E}} - \mathcal{E}$ constituera « l'inconnu »).

Soit $\mathfrak{A}$ une famille de sous-ensembles A de $\mathcal{E}$. Écrivons $\mathfrak{A} = \{A\}$; autrement dit $\mathfrak{A}$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{P}(\mathcal{E})$, l'ensemble de toutes les parties de $\mathcal{E}$. Considérons une suite $\{f_n\}$ de fonctions dans $\mathbf{B}$ ayant les propriétés :

$$(1) \qquad f_1 \geqq f_2 \geqq \ldots \geqq 0,$$

$$(2) \qquad f_n(x) \to 0 \quad \text{uniformément dans chaque ensemble } A \in \mathfrak{A},$$

c'est-à-dire que les fonctions f_n sont positives, forment une suite décroissante, et convergent vers zéro sur l'ensemble $C_0 = \bigcup A$, $A \in \mathfrak{A}$, la convergence étant uniforme sur chaque A. L'ensemble des telles suites sera désigné par $\Sigma(\mathfrak{A})$. Notons que quel que soit $x \in \mathcal{E}$, la suite $\{f_n(x)\}$ est convergente. Nous écrirons $f_n \downarrow_{\mathfrak{A}} 0$ pour indiquer que $\{f_n\} \in \Sigma(\mathfrak{A})$.

Considérons maintenant une fonctionnelle F positive, $F \geqq 0$, telle que pour chaque $\{f_n\} \in \Sigma(\mathfrak{A})$, nous ayons $Ff_n \to 0$. (Puisque $\{f_n\}$ est une suite décroissante, il en est de même de la suite $\{Ff_n\}$ qui est donc convergente dans tous les cas.) Une telle fonctionnelle F sera appelée une $\mathfrak{A}$-intégrale positive. Résumons-nous donc avec la

DÉFINITION 1. — *Une $\mathfrak{A}$-intégrale positive est une fonctionnelle positive $F \in \mathbf{B}^*$ telle que $f_n \downarrow_{\mathfrak{A}} 0$ implique $Ff_n \downarrow 0$. Une $\mathfrak{A}$-intégrale est la différence de deux intégrales positives.*

Citons immédiatement des exemples élémentaires.

1° Soit $\mathfrak{A}$ la famille de tous les ensembles A de $\mathcal{E}$ qui consistent en un seul point : $A = \{x\}$. Alors les $\mathfrak{A}$-intégrales sont précisément les intégrales au sens de Daniell.

2° Soit $\mathfrak{A}$ la famille de tous les sous-ensembles de $\mathcal{E}$: $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\mathcal{E})$. Alors chaque fonctionnelle dans $\mathbf{B}^*$ est une $\mathfrak{A}$-intégrale.

3° Soit x_0 un point de $\mathcal{E}$ et soit $\mathfrak{A}$ la famille formée du seul ensemble $\{x_0\}$.

Alors F est une $\mathfrak{A}$-intégrale si et seulement si $Ff = \alpha f(x_0)$ où α est un nombre qui dépend de F.

Nous donnerons plus loin des exemples non élémentaires.

Indiquons tout de suite certains fait évidents mais de grande importance pour nous. En premier lieu, une suite $\{f_n\}$, $f_n \in \mathbf{B}$, est monotone sur $\mathcal{E}$ si et seulement si la suite associée $\{\hat{f}_n\}$ est monotone sur $\hat{\mathcal{E}}$. Ceci est une conséquence du fait que $\mathcal{E}$ est β-dense dans $\hat{\mathcal{E}}$ et que les fonctions considérées sont β-continues dans $\hat{\mathcal{E}}$. Deuxièmement, la convergence uniforme sur chacun des ensembles $A_1, \ldots, A_m$ implique la convergence uniforme sur leur réunion. Il s'ensuit que nous pouvons, si nous le désirons, remplacer chaque famille $\mathfrak{A}$ par l'idéal qu'elle détermine dans l'algèbre de toutes les parties de $\mathcal{E}$. [Une famille $\mathfrak{A}$ est un idéal si : (i) elle contient toute réunion finie de ses membres; (ii) elle contient avec un ensemble A tous les sous-ensembles de A.] Par exemple, les intégrales de Daniell sont définies par l'idéal de toutes les parties finies de $\mathcal{E}$. En troisième lieu, il est de la plus haute importance de noter que chaque fonctionnelle $F \in \mathbf{B}^*$ est une intégrale de Daniell dans $\hat{\mathcal{E}}$ bien qu'elle ne le soit pas dans $\mathcal{E}$. En effet, $\hat{\mathcal{E}}$ étant compact, la convergence $f_n(x) \downarrow 0$ en chaque point $x \in \hat{\mathcal{E}}$ implique la convergence uniforme sur $\hat{\mathcal{E}}$. Nous avons donc $f_n \downarrow 0$ implique $\|f_n\| \downarrow 0$ et de cela découle comme conséquence $Ff_n \downarrow 0$ pour chaque F positif. Il existe donc dans $\hat{\mathcal{E}}$ une mesure μ, complètement additive par rapport à laquelle, la fonctionnelle peut être considérée comme une intégrale : $Ff = \int_{\hat{\mathcal{E}}} f(x)\, d\mu(x)$.

Les $\mathfrak{A}$-intégrales forment une variété linéaire dans $\mathbf{B}^*$. Cette variété est fermée pour la topologie forte de $\mathbf{B}^*$. Démontrons ce fait peu surprenant. Soit $\{F_n\}$ une suite de $\mathfrak{A}$-intégrales et supposons que $F_n \to F$ selon la norme, c'est-à-dire, $\|F - F_n\| \to 0$. Écrivons $F_m = G_m - H_m$ où G_m et H_m sont des $\mathfrak{A}$-intégrales positives. Soit $\{f_n\}$ dans $\Sigma(\mathfrak{A})$; soit $\varepsilon > 0$. Nous avons (tenant compte de la définition même de F^+) :

$$F^+ f_n = (F - F_m + G_m - H_m)^+ f_n \leqq (F - F_m + G_m - H_m) g_n + 1/2^n,$$

où g_n est choisi convenablement avec $0 \leqq g_n \leqq f_n$. Donc

$$\begin{aligned} F^+ f_n &\leqq \|F - F_m\| \cdot \|g_n\| + G_m g_n + H_m g_n + 1/2^n \\ &\leqq \|F - F_m\| \cdot \|f_1\| + G_m f_n + H_m f_n + 1/2^n. \end{aligned}$$

Choisissant m tel que $\|F - F_m\| \cdot \|f_1\| < \varepsilon/4$, puis n_0 tel que pour $n > n_0$, $G_m f_n < \varepsilon/4$, $H_m f_n < \varepsilon/4$, $1/2^n < \varepsilon/4$, nous avons $F^+ f_n < \varepsilon$. Ceci démontre que F^+ est une $\mathfrak{A}$-intégrale. Il en est de même de F^-. Donc F est une $\mathfrak{A}$-intégrale. Notons en passant que nous avons démontré que si F est une $\mathfrak{A}$-intégrale, F^+ et F^- le sont aussi (puisque $\{F = F_n\}$ est une suite convergente vers F). Nous avons donc démontré

PROPOSITION 3. — *La totalité des $\mathfrak{A}$-intégrales est une variété fermée pour la topologie de la norme de* $\mathbf{B}^\star$. *Si F est une $\mathfrak{A}$-intégrale il en est de même de F^+ et F^-.*

Par contre, nous allons rappeler au lecteur que la topologie faible étoilée de $\mathbf{B}^\star$ (weak star topology) est tellement faible qu'elle n'est d'aucune valeur pour l'étude de l'intégration. Car l'espace $\mathbf{B}^\star$ tout entier est l'adhérence pour cette topologie de l'ensemble des combinaisons linéaires de fonctionnelles multiplicatives du type le plus élémentaire : $Gf=f(x_0)$, où x_0 est un point fixe de $\mathcal{E}$. En effet si F_0 est une fonctionnelle arbitraire, chaque voisinage faible étoilé de F_0 contient un ensemble $\{F : |Ff_i - F_0 f_i| < \varepsilon, i=1, ., ., n\}$, où, $f_1, \ldots, f_n \in \mathbf{B}$ et $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer qu'il existe une fonctionnelle F de la forme $Ff=\alpha_1 f(x_1)+\ldots+\alpha_n f(x_n)$ telle que $Ff_i - F_0 f_i = 0$, $i=1, \ldots, n$. Nous considérons seulement le cas où les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont linéairement indépendantes. Ceci revient à dire qu'il existe dans $\mathcal{E}$ des points $x_1, \ldots, x_n$ tels que le déterminant $|f_i(x_j)| \neq 0$, $i, j=1, \ldots, n$. Si nous posons $F_0 f_i = \beta_i$, nous pouvons trouver des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $\Sigma_j \alpha_j f_i(x_j) = \beta_i$, $i=1, \ldots, n$. Ainsi, si $Ff=\Sigma_j \alpha_j f(x_j)$, nous avons $Ff_i - F_0 f_i = 0$, $i=1, \ldots, n$. Ceci démontre notre assertion.

2. La projection fondamentale. — Nous avons vu plus haut que les $\mathfrak{A}$-intégrales forment une variété fermée dans la topologie de la norme de $\mathbf{B}^\star$. Ce fait découle d'un résultat beaucoup plus profond déclarant qu'il existe une projection $T_{\mathfrak{A}}$ de $\mathbf{B}^\star$ (une projection P est une transformation linéaire bornée pour laquelle $P^2=P$) telle que $T_{\mathfrak{A}}F=F$ si et seulement si F est une $\mathfrak{A}$-intégrale. Nous rappelons au lecteur qu'une transformation P sur $\mathbf{B}^\star$ est positive si $F \geqq 0$ implique $PF \geqq 0$. L'énoncé précis du théorème est le suivant :

THÉORÈME 3. — *Soit $\mathfrak{A}$ une famille de sous-ensembles de $\mathcal{E}$. Sur* $\mathbf{B}^\star$ *il existe une projection $T_{\mathfrak{A}}$ et une seule qui jouisse des propriétés :*

(*a*) *$T_{\mathfrak{A}}F=F$ si et seulement si F est une $\mathfrak{A}$-intégrale.*

(*b*) *Les transformations $T_{\mathfrak{A}}$ et $I - T_{\mathfrak{A}}$ sont positives.*

Pour la démonstration de ce théorème nous renvoyons le lecteur au travail de GORDON et LORCH qui se rapporte au cas spécial des intégrales de Daniell mais dont les raisonnements peuvent être immédiatement étendus au cas actuel [6], [8]. Dans ce travail se trouveront les formules pour le calcul de $T_{\mathfrak{A}}F$. Ces mêmes résultats peuvent être déduits de la théorie de F. RIESZ sur les bandes dans les espaces complètement réticulés [13]. Le fait principal est que les $\mathfrak{A}$-intégrales forment une bande dans $\mathbf{B}^\star$. Il est évident que la définition même des $\mathfrak{A}$-intégrales introduit une notion de continuité, définie par rapport à la structure d'ordre de l'espace $\mathbf{B}$. Une fonctionnelle

$F \geqq 0$ peut être nommée $\mathfrak{A}$-continue si $f_n \downarrow_{\mathfrak{A}} 0$ entraîne $Ff_n \downarrow 0$. Le théorème de la projection déclare alors que chaque fonctionnelle est la somme unique de deux fonctionnelles, l'une continue et l'autre purement discontinue. Ce phénomène de continuité dans les espaces complètement réticulés a été étudié en détail par BAUER [1] qui a obtenu des résultats d'une grande portée dont le nôtre ci-dessus n'est qu'un cas particulier. Il est à signaler que nos travaux ont été étendus récemment par H. GORDON dans sa thèse [5]. Ce dernier considère dans un espace de Riesz deux topologies compatibles avec l'ordre et obtient des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe dans l'espace des fonctionnelles linéaires et continues dans une topologie une projection sur le sous-espace des fonctionnelles continues simultanément pour les deux topologies.

3. Relations de commutativité. — Nous développons dans cette section plusieurs propriétés de la projection $T_{\mathfrak{A}}$ qui se rattachent principalement à la commutativité. Commençons par un lemme bien connu :

Soit F arbitraire dans $\mathbf{B}^*$ et soit $F = G - H$ où $G \geqq 0$ et $H \geqq 0$. Alors pour que $G = F^+$ et $H = F^-$, il faut et il suffit que pour chaque $f \geqq 0$ dans $\mathbf{B}$, il existe deux suites $\{g_n\}$ et $\{h_n\}$, $g_n \geqq 0$, $h_n \geqq 0$, *telles que* $f = g_n + h_n$ et $\lim G h_n = 0$, $\lim H g_n = 0$.

La démonstration est immédiate à partir de la définition de F^+, F^-, et du caractère monotone des fonctionnelles positives (*voir* [3], p. 36). Nous sommes maintenant à même de démontrer la

PROPOSITION 4. — *Soit F une fonctionnelle quelconque et soit $F = F^+ - F^-$ la décomposition canonique de F dans sa partie positive et négative. Alors la décomposition canonique de $T_{\mathfrak{A}} F$ est $T_{\mathfrak{A}} F = T_{\mathfrak{A}} F^+ - T_{\mathfrak{A}} F^-$, c'est-à-dire,*

$$(T_{\mathfrak{A}} F)^+ = T_{\mathfrak{A}} F^+ \quad \text{et} \quad (T_{\mathfrak{A}} F)^- = T_{\mathfrak{A}} F^-.$$

DÉMONSTRATION. — Selon le lemme ci-dessus, il existe pour $f \geqq 0$ deux suites $\{g_n\}$ et $\{h_n\}$, $g_n \geqq 0$, $h_n \geqq 0$, telles que $f = g_n + h_n$ et que $F^+ h_n \to 0$, $F^- g_n \to 0$. Puisque d'après le théorème 3, $0 \leqq T_{\mathfrak{A}} F^+ \leqq F^+$ et $0 \leqq T_{\mathfrak{A}} F^- \leqq F^-$, nous avons donc que $T_{\mathfrak{A}} F^+ h_n \to 0$ et $T_{\mathfrak{A}} F^- g_n \to 0$. Appliquant de nouveau le lemme, nous voyons immédiatement que

$$(T_{\mathfrak{A}} F)^+ = T_{\mathfrak{A}} F^+ \quad \text{et} \quad (T_{\mathfrak{A}} F)^- = T_{\mathfrak{A}} F^-.$$

[*Démonstration alternative :* Nous avons $0 \leqq T_{\mathfrak{A}} F^+ \wedge T_{\mathfrak{A}} F^- \leqq F^+ \wedge F^- = 0$ puisque $T_{\mathfrak{A}} \geqq 0$, $I - T_{\mathfrak{A}} \geqq 0$ et $F^+, F^- \geqq 0$. Il s'ensuit que $T_{\mathfrak{A}} F^+ \wedge T_{\mathfrak{A}} F^- = 0$. Puisque $T_{\mathfrak{A}} F = T_{\mathfrak{A}} F^+ - T_{\mathfrak{A}} F^-$, nous déduisons $(T_{\mathfrak{A}} F)^+ = T_{\mathfrak{A}} F^+$ et $(T_{\mathfrak{A}} F)^- = T_{\mathfrak{A}} F^-$ (*voir* [3], p. 19).]

Nous avons déjà démontré (proposition 3) que si F est une $\mathfrak{A}$-intégrale, il en est de même de F^+ et de F^- [ceci découle immédiatement de la proposition précédente; car $F = T_{\mathfrak{A}} F$ implique $F^+ = (T_{\mathfrak{A}} F)^+ = T_{\mathfrak{A}} F^+$ et de même pour F^-]. Notons aussi que si $T_{\mathfrak{A}} F = 0$, nous avons aussi $T_{\mathfrak{A}} F^+ = 0$ et $T_{\mathfrak{A}} F^- = 0$ [car de $0 = T_{\mathfrak{A}} F$ nous tirons $0 = 0^+ = (T_{\mathfrak{A}} F)^+ = T_{\mathfrak{A}} F^+$].

Une conséquence importante du théorème 3, est la suivante. Si $F \geqq 0$ est une $\mathfrak{A}$-intégrale et si G satisfait à $0 \leqq G \leqq F$, alors G est une $\mathfrak{A}$-intégrale. Ceci provient du fait que la transformation $I - T_{\mathfrak{A}}$ est positive et donc monotone. Nous avons en effet : $0 \leqq (I - T_{\mathfrak{A}}) G \leqq (I - T_{\mathfrak{A}}) F = 0$, ce qui montre que $T_{\mathfrak{A}} G = G$. Nous nous appuyerons sur cette propriété dans la démonstration de la

Proposition 5. — *Soient $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ deux familles d'ensembles de $\mathcal{E}$ et soient $T_{\mathfrak{A}_1}$ et $T_{\mathfrak{A}_2}$ leurs projections associées. Alors $T_{\mathfrak{A}_1} T_{\mathfrak{A}_2} = T_{\mathfrak{A}_2} T_{\mathfrak{A}_1}$. Le contre-domaine de cette dernière projection est précisément l'intersection des contre-domaines de $T_{\mathfrak{A}_1}$* et *$T_{\mathfrak{A}_2}$.*

Pour une fonctionnelle $F \geqq 0$, posons $F = G + H$ où $G = T_{\mathfrak{A}_1} F$ et $H = (I - T_{\mathfrak{A}_1}) F$. Or, $T_{\mathfrak{A}_2} T_{\mathfrak{A}_1} G = T_{\mathfrak{A}_2} G$. Et puisque $T_{\mathfrak{A}_2} G$ est une $\mathfrak{A}_1$-intégrale, il s'ensuit que $T_{\mathfrak{A}_1} T_{\mathfrak{A}_2} G = T_{\mathfrak{A}_2} G$. Nous avons donc

$$T_{\mathfrak{A}_2} T_{\mathfrak{A}_1} G = T_{\mathfrak{A}_1} T_{\mathfrak{A}_2} G.$$

Ensuite, $T_{\mathfrak{A}_2} T_{\mathfrak{A}_1} H = 0$. Et puisque $0 \leqq T_{\mathfrak{A}_1} T_{\mathfrak{A}_2} H \leqq H$, nous trouvons en opérant avec $T_{\mathfrak{A}_1}$ que $T_{\mathfrak{A}_1} T_{\mathfrak{A}_2} H = 0$; donc, en particulier,

$$T_{\mathfrak{A}_2} T_{\mathfrak{A}_1} H = T_{\mathfrak{A}_1} T_{\mathfrak{A}_2} H.$$

Cette relation avec la précédente démontre que $T_{\mathfrak{A}_2} T_{\mathfrak{A}_1} F = T_{\mathfrak{A}_1} T_{\mathfrak{A}_2} F$. Ceci démontre la commutativité.

Le fait que le contre-domaine de la projection $T_{\mathfrak{A}_1} T_{\mathfrak{A}_2}$ est l'intersection des contre-domaines de $T_{\mathfrak{A}_1}$ et $T_{\mathfrak{A}_2}$ est une conséquence immédiate de la commutativité.

4. Les fonctionnelles multiplicatives. — Si x_0 est un point de $\hat{\mathcal{E}}$, la fonctionnelle $Ff = f(x_0)$, $f \in C(\hat{\mathcal{E}})$, est multiplicative : $F(f.g) = Ff.Fg$. Si, d'autre part, F est une fonctionnelle multiplicative non nulle, l'ensemble des fonctions $f \in \mathbf{B}$ telles que $Ff = 0$ est un idéal maximal et correspond donc à un point dans l'espace $\hat{\mathcal{E}}$. Nous voyons donc que les fonctionnelles multiplicatives F sont précisément en correspondance avec les points x_0 de $\hat{\mathcal{E}}$ à travers la relation $Ff = f(x_0)$. Par abus de langage nous dirons que x_0 est une

$\mathfrak{A}$-intégrale pour exprimer le fait que la fonctionnelle F définie par $Ff = f(x_0)$ est une $\mathfrak{A}$-intégrale. De la même manière, nous parlerons des β-voisinages du point F dans $\hat{\mathcal{E}}$.

Un problème important à résoudre au prochain chapitre est le suivant : Soit $\mathfrak{A}$ une famille donnée d'ensembles de $\mathcal{E}$ et soit x_0 un point de $\hat{\mathcal{E}}$. Déterminer si x_0 est ou non une $\mathfrak{A}$-intégrale. Le résultat suivant donne une réponse complète.

THÉORÈME 4. — *Pour qu'une fonctionnelle multiplicative* $F : Ff = f(x_0)$, $x_0 \in \hat{\mathcal{E}}$, *soit une* $\mathfrak{A}$-*intégrale, il faut et il suffit que la condition suivante soit remplie : Pour chaque suite* $\{U_n\}$ *de* β-*voisinages de* x_0 *il existe un* $A \in \mathfrak{A}$ *tel que pour chaque* n, $U_n \cap A \neq \emptyset$.

Nous avons indiqué ailleurs la démonstration de ce théorème dans le cas particulier d'une intégrale de Daniell [9]. Avant de considérer le cas général, faisons certaines observations. Supposons que l'espace $\hat{\mathcal{E}}$ satisfasse au premier axiome au point x_0. Soit $\{U_n\}$ une base de voisinages de x_0. Alors appliquant le théorème à cette suite, nous voyons que x_0 est une $\mathfrak{A}$-intégrale [F définie par $Ff = f(x_0)$ est une $\mathfrak{A}$-intégrale] si et seulement s'il existe un $A \in \mathfrak{A}$ tel que x_0 appartient à la β-adhérence de A. Notons que dans tous les cas, chaque point de la β-adhérence de A est une $\mathfrak{A}$-intégrale. Mais il est possible que x_0 soit une $\mathfrak{A}$-intégrale sans que x_0 soit dans la β-adhérence d'aucun $A \in \mathfrak{A}$. Dans l'exemple à la fin du chapitre 3, (§ 2), si $\mathfrak{A}$ est formé des sous-ensembles finis de nombres ordinaux $< \Omega$, Ω n'est adhérent à aucun $A \in \mathfrak{A}$, mais Ω est une $\mathfrak{A}$-intégrale.

Procédons maintenant à la démonstration. Supposons premièrement que la condition du théorème ne soit pas satisfaite. C'est-à-dire, supposons qu'il existe une suite $\{U_n\}$ telle que pour chaque A il existe un n tel que $U_n \cap A = \emptyset$. Nous allons construire une suite de fonctions $\{f_n\}$, $f_n \in \mathbf{B}$, telle que $f_n \downarrow_{\mathfrak{A}} 0$ et telle que $Ff_n = 1$ pour chaque n et donc Ff_n ne tend pas vers zéro, — où $Ff = f(x_0)$, bien entendu —. Ceci démontrera que F n'est pas une $\mathfrak{A}$-intégrale.

A cette fin, soit g_r une fonction continue [et donc dans $C(\hat{\mathcal{E}})$] telle que $g_r(x_0) = 1$ et $g_r(x) = 0$ en dehors de U_r appliquer le lemme de Urysohn). Posons $f_n = g_1 \wedge \ldots \wedge g_n$. Alors $\{f_n\}$ est une suite monotone décroissante. Pour un A donné, supposons que $A \cap U_r = \emptyset$. Alors $f_r(x) = 0$, $x \in A$. Donc $f_n \downarrow_{\mathfrak{A}} 0$. De plus $Ff_n = 1$; F n'est donc pas une $\mathfrak{A}$-intégrale.

Supposons remplie maintenant la condition du théorème. Nous allons montrer que F est une $\mathfrak{A}$-intégrale. Supposons que $\{f_n\}$ soit une suite telle que $f_n \downarrow_{\mathfrak{A}} 0$. Supposons que $Ff_n \to \alpha > 0$. Posons $\alpha = 2\varepsilon$. Définissons les ensembles U_n dans $\hat{\mathcal{E}}$ par $U_n = \{x : f_n(x) > \varepsilon\}$. Notons que $x_0 \in U_n$ puisque $f_n(x_0) \geq \alpha = 2\varepsilon$. Notons de plus que U_n est un ensemble β-ouvert.

Selon l'hypothèse, il existe un $A \in \mathfrak{A}$ tel que $A \cap U_n \neq \emptyset$ pour chaque n. Pour cet A, trouvons un N tel que $f_n(x) < \varepsilon$ pour $n > N$ et $x \in A$ [puisque $f_n(x) \downarrow 0$ uniformément sur A]. Alors, pour $n > N$, $x \in A$ et $x \in U_n$ nous avons en même temps, $f_n(x) > \varepsilon$ et $f_n(x) < \varepsilon$. La contradiction établit que $Ff_n \to 0$ et donc que F est une $\mathfrak{A}$-intégrale.

Nous désirons faire maintenant une étude plus approfondie de certaines questions soulevées par le théorème précédent. En particulier, nous allons examiner la structure des suites de β-voisinages d'un point $x_0 \in \hat{\mathcal{E}}$. En premier lieu, nous pourrons dans l'énoncé du théorème substituer à chaque suite $\{U_n\}$, une suite plus fine $\{V_n\}$. Par exemple, si nous posons

$$V_n = U_1 \cap \ldots \cap U_n,$$

la suite $\{V_n\}$ sera non seulement plus fine, mais monotone.

La définition des β-voisinages d'un point x_0 montre qu'il s'agit de la famille des ensembles de la forme

$$U = \{ x : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n \}$$

où $f_i \in C(\hat{\mathcal{E}})$. En remplaçant f_i par $g_i = f_i - f_i(x_0)$, nous avons

$$U = \{ x : |g_i(x)| < \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n \}.$$

Il est évident que si $h = |g_1| \vee \ldots \vee |g_n|$ et $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ nous aurons $V = \{ x : h(x) < \varepsilon \} \subset U$. Nous voyons donc que la famille des β-voisinages V où h est une fonction positive telle que $h(x_0) = 0$ forme une base de β-voisinages de x_0.

Soit $\{U_n\}$ une suite quelconque. Remplaçons chaque U_n par un

$$V_n = \{ x : h_n(x) < \varepsilon_n \}$$

qui satisfait à $V_n \subset U_n$. Posons $k_n = h_1 \vee \ldots \vee h_n$ et soit $\{\delta_n\}$ une suite monotone de nombres strictement positifs, convergente vers zéro, telle que $\delta_n \leq \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Finalement, posons $W_n = \{ x : k_n(x) < \delta_n \}$. Alors $W_n \subset V_n$ et la suite $\{W_n\}$ est monotone. Nous avons démontré que les suites $\{W_n\}$ forment une base des suites de β-voisinages de x_0. La suite $\{W_n\}$ est complètement déterminée par une suite monotone croissante de fonctions positives $\{k_n\}$ telles que $k_n(x_0) = 0$ et par une suite monotone décroissante de nombres positis $\{\delta_n\}$ convergente vers zéro :

$$0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \ldots, \qquad k_n(x_0) = 0, \qquad \delta_n > 0, \qquad \delta_n \downarrow 0.$$

Changeons légèrement de point de vue. Soit maintenant $\{k_n\}$ une suite qui satisfait à $k_n \in \mathbf{B}$, $k_n \geq 0$, $k_1 \leq k_2 \leq \ldots$, k_n est une fonction singulière (c'est-à-dire k_n^{-1} n'existe pas dans $\mathbf{B}$). Alors les fonctions k_n appartiennent toutes à un idéal, par exemple, à l'idéal des fonctions $g \in \mathbf{B}$ de la forme : il existe un n tel que $-nk_n \leq g \leq nk_n$. Les fonctions k_n appartiennent donc à un idéal maximal c'est-à-dire, à un point $x_0 \in \hat{\mathcal{E}}$; on a $k_n(x_0) = 0$. Posons maintenant la question : Étant donnée une famille $\mathfrak{A}$, à quelle condition doit-elle satisfaire pour que chaque fonctionnelle multiplicative sur **B** (c'est-à-dire, chaque point $x_0 \in \hat{\mathcal{E}}$) soit une $\mathfrak{A}$-intégrale ? La réponse est immédiate. Nous la donnons dans le théorème prochain dont la démonstration se base sur le théorème 4 et sur la discussion précédente.

Théorème 5. — *Soit $\mathfrak{A}$ une famille de sous-ensembles de $\mathcal{E}$. Alors chaque fonctionnelle multiplicative sur* **B** *est une $\mathfrak{A}$-intégrale si et seulement si la condition suivante est satisfaite :*

Pour chaque suite $\{k_n\}$ de fonctions : $k_n \in \mathbf{B}$, $0 \leqq k_1 \leqq k_2 \leqq \ldots$, k_n singulière (k_n^{-1} n'existe pas dans **B**), *et pour chaque suite $\{\delta_n\}$ de nombres : $\delta_n > 0$, $\delta_n \downarrow 0$, il existe un $A \in \mathfrak{A}$ tel que $A \cap W_n \neq \emptyset$, $n = 1, 2, \ldots$, où $W_n = \{x : k_n(x) < \delta_n\}$.*

Dans la proposition suivante, nous donnons une autre forme aux conditions du théorème 5.

Proposition 6. — *Soit $\mathfrak{A}$ une famille de sous-ensembles de $\mathcal{E}$ et soit $\Sigma(\mathfrak{A})$ l'ensemble de toutes les suites $\{f_n\}$, qui sont $\mathfrak{A}$-convergentes vers zéro : $f_n \downarrow_{\mathfrak{A}} 0$. Alors, pour que chaque fonctionnelle multiplicative sur* **B** *soit une $\mathfrak{A}$-intégrale il faut et il suffit que pour chaque $\{f_n\} \in \Sigma(\mathfrak{A})$, $f_n(x) \downarrow 0$ uniformément sur $\mathcal{E}$.*

Démonstration. — Si pour chaque $\{f_n\} \in \Sigma(\mathfrak{A})$ la convergence $f_n \downarrow 0$, est uniforme sur $\mathcal{E}$, elle l'est aussi sur $\hat{\mathcal{E}}$ puisque $\mathcal{E}$ est dense dans $\hat{\mathcal{E}}$. Si F est une fonctionnelle multiplicative : $Ff = f(x_0)$, $x_0 \in \hat{\mathcal{E}}$, nous avons donc $Ff_n \downarrow 0$; c'est-à-dire que F est une $\mathfrak{A}$-intégrale.

Supposons maintenant que chaque fonctionnelle multiplicative soit une $\mathfrak{A}$-intégrale : pour F définie par $Ff = f(x_0)$ et pour chaque $\{f_n\} \in \Sigma(\mathfrak{A})$, $Ff_n = f_n(x_0) \downarrow 0$. Nous voyons donc que pour chaque $x_0 \in \hat{\mathcal{E}}$, $f_n(x_0) \downarrow 0$. Puisque $\hat{\mathcal{E}}$ est β-compact, il est facile de déduire que la convergence $f_n \downarrow 0$ est uniforme sur $\hat{\mathcal{E}}$, donc aussi sur le sous-ensemble $\mathcal{E}$.

5. Extension des intégrales.

1. Le problème. — Dans ce chapitre, nous allons considérer l'extension des $\mathfrak{A}$-intégrales. Puisque nous traitons, non une seule, mais toute une classe d'intégrales, pour chacune desquelles l'extension doit être valable, le domaine naturel de cette extension sera la famille des fonctions de Baire. Dans le domaine étendu, nous démontrerons le théorème de Lebesgue sur le passage à la limite. Nous donnerons des applications et discuterons certains exemples.

Notons premièrement que chaque fonctionnelle sur **B**, c'est-à-dire aussi sur $C(\hat{\mathcal{E}})$, détermine une mesure complètement additive sur $\hat{\mathcal{E}}$, et que les fonctions de Baire que nous avons introduites dans le chapitre 2 sont toutes mesurables. Il en résulte que les fonctions qui appartiennent à $\mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$ sont intégrables pour chaque F. De plus, le théorème de Lebesgue est valable sous la forme suivante : Supposons que $g_n \in \mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$, $|g_n| < \alpha$, α un nombre positif, et que $g_n(x) \to g(x)$ pour chaque $x \in \hat{\mathcal{E}}$. Alors $g \in \mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$ et pour chaque $F \in \mathbf{B}^\star$, $Fg_n \to Fg$. Le problème auquel nous devons faire face est le suivant. Les considérations précédentes ne sont pas de grande valeur, car de la structure de $\hat{\mathcal{E}}$, nous ne savons essentiellement rien sauf qu'elle existe. Il est évident que chaque fonction de Baire dans $\mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$ donne lieu par restriction à $\mathcal{E}$ à une fonction que nous pouvons appeler « de Baire » sur $\mathcal{E}$. Puisque plusieurs fonctions sur $\hat{\mathcal{E}}$ qui ont la même restriction à $\mathcal{E}$ peuvent avoir des intégrales différentes (pour un F donné), il est impossible d'employer naïvement ce procédé pour étendre la classe des fonctions intégrables. Pourtant, une étude approfondie de la situation permet une variation plus raffinée de cette méthode que nous allons décrire maintenant.

2. Ensembles associés à $\mathfrak{A}$. — Soit $\mathfrak{A}$ une famille non vide de sous-ensembles A de $\mathcal{E}$: $\mathfrak{A} = \{A\}$. Posons $C_0 = \bigcup A$, $A \in \mathfrak{A}$. Soit C le sous-ensemble de $\hat{\mathcal{E}}$ défini de la manière suivante : Un point $x \in C$ si et seulement si pour chaque suite $\{f_n\} \in \Sigma(\mathfrak{A})$ nous avons $f_n(x) \downarrow 0$. Il est évident que $C_0 \subset C$. Écrivons $\overline{C}_0$ et $\overline{C}$ pour les β-adhérences de C_0 et C resp. Démontrons le

Lemme. — *Nous avons la relation* $\overline{C}_0 = \overline{C}$.

Il suffit de démontrer que $C \subset \overline{C}_0$ puisque nous avons déjà $C_0 \subset C$. Soit x_0 dans le complémentaire de $\overline{C}_0$. Alors, selon le lemme d'Urysohn, il existe une fonction $f \geqq 0$, $f \in C(\hat{\mathcal{E}})$, telle que $f(x_0) = 1$, $f(x) = 0$ pour $x \in \overline{C}_0$. En posant $f_n = f$, $n = 1, 2, \ldots$, nous avons $f_n \downarrow_{\mathfrak{A}} 0$ et $f_n(x_0) = 1$. Donc $x_0 \notin C$. Il s'ensuit que $C \subset \overline{C}_0$.

Introduisons une définition commode. Si D est un sous-ensemble de $\hat{\mathcal{E}}$, nous dirons qu'une fonctionnelle positive F est une D-intégrale positive si $Ff_n \downarrow 0$ pour chaque suite $\{f_n\}$ telle que $f_n \geqq 0$, $f_1 \geqq f_2 \geqq \ldots$, et que $f_n(x) \downarrow 0$ *ponctuellement* pour chaque $x \in D$. Démontrons maintenant le

Lemme 3. — *Considérons une famille $\mathfrak{A}$ et les sous-ensembles de $\hat{\mathcal{E}}$ associés : C_0, C et $\overline{C}$. Alors chaque C-intégrale est une $\mathfrak{A}$-intégrale. Chaque $\mathfrak{A}$-intégrale est une $\overline{C}$-intégrale.*

Indiquons par $\Sigma(D)$ l'ensemble des suites $\{f_n\}$ de fonctions positives, monotones, convergentes ponctuellement vers zéro sur les points de D. Notons que si une suite $\{f_n\} \in \Sigma(\overline{C})$, vu que $\overline{C}$ est un ensemble fermé dans un espace compact, $\overline{C}$ est compact et la convergence ponctuelle sur $\overline{C}$ implique la convergence uniforme. Puisque $C_0 \subset \overline{C}$, il en découle que $\Sigma(\overline{C}) \subset \Sigma(\mathfrak{A})$. La relation $\Sigma(\mathfrak{A}) \subset \Sigma(C)$ est évidente à partir de la définition de C. Le lemme est une conséquence immédiate de ces inclusions.

Donnons maintenant une condition pour que $C = \overline{C}$.

Proposition 7. — *Étant donnée une famille $\mathfrak{A}$ de sous-ensembles de $\mathcal{E}$ et les sous-ensembles de $\hat{\mathcal{E}}$ associés : C_0, C, $\overline{C}$, nous avons $C = \overline{C}$ si et seulement si la $\mathfrak{A}$-convergence d'une suite $\{f_n\} \in \Sigma(\mathfrak{A})$ est équivalente à la convergence uniforme sur C_0.*

Supposons que pour toute suite $\{f_n\} \in \Sigma(\mathfrak{A})$ la convergence vers zéro soit uniforme sur C_0. Ceci implique que $C \supset \overline{C}_0$. Puisque $\overline{C_0} = \overline{C}$, nous avons donc que $C = \overline{C}_0 = \overline{C}$.

Supposons maintenant que $C = \overline{C}$. Soit $\{f_n\}$ une suite dans $\Sigma(\mathfrak{A})$. Cette suite converge ponctuellement sur C. Puisque C est fermé, donc compact, la convergence est uniforme sur C, donc aussi sur C_0.

Remarquons que la proposition 7 nous donne un résultat sur la structure β-topologique d'un sous-ensemble de $\hat{\mathcal{E}}$ qui peut être vérifié sans connaissance de $\hat{\mathcal{E}}$. Nous donnerons des exemples plus tard où il est facile de démontrer que $C = \overline{C}$ bien que la structure de $\hat{\mathcal{E}}$ soit complètement au-delà de notre pouvoir de conception.

Nous donnons maintenant une autre caractérisation de la convergence uniforme.

Proposition 8. — *La $\mathfrak{A}$-convergence des suites $\{f_n\} \in \Sigma(\mathfrak{A})$ est équivalente à la convergence uniforme de $\{f_n\}$ sur C_0 si et seulement si la condi- suivante est remplie :*

Pour chaque suite $\{k_n\}$, $k_n \in \mathbf{B}$, $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \ldots$, telle que, pour tout n $\inf\limits_{x \in C_0} k_n(x) = 0$, et pour chaque suite $\{\delta_n\}$, $\delta_n > 0$, $\delta_n \downarrow 0$, il existe un $A \in \mathfrak{A}$ tel que $A \cap W_n \neq \emptyset$ où $W_n = \{x : k_n(x) < \delta_n\}$.

La proposition est un raffinement du théorème 5. Notons que pour une suite $\{k_n\}$ du type indiqué dans l'énoncé, nous avons $\inf\limits_{x \in C_0} k_n(x) = 0$ si et seulement s'il existe un point $x_0 \in C_0$ tel que $k_n(x_0) = 0$. Le reste de la démonstration se base sur les théorèmes 4 et 5 et la proposition 7.

C'est pour les $\mathfrak{A}$-intégrales satisfaisant à $C = \overline{C}$ que nous pourrons définir un procédé d'extension.

Nous démontrons une proposition valable dans le cas où l'espace $\hat{\mathcal{E}}$ satisfait en chaque point au premier axiome.

PROPOSITION 9. — *Si $\hat{\mathcal{E}}$ satisfait en chaque point au premier axiome de dénombrabilité, alors l'ensemble C est de la forme $C = \bigcup \bar{A}$, $A \in \mathfrak{A}$, où $\bar{A}$ est la β-adhérence de A.*

Il est évident que C contient $\bar{A}$ pour chaque $A \in \mathfrak{A}$. D'autre part, si $x_0 \notin \bigcup \bar{A}$ et si $\hat{\mathcal{E}}$ satisfait au premier axiome au point x_0, $x_0 \notin C$. Ceci découle du fait qu'il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions dans $\Sigma(\mathfrak{A})$ telle que $f_n(x_0) = 1$ et que pour chaque A, $f_n(x) = 0$, $x \in A$, à partir d'un entier $n = n(A)$.

3. Les fonctions de Baire associées à $\mathfrak{A}$. — Dans cette section nous allons définir plusieurs classes de fonctions de Baire associées à $\mathfrak{A}$. Nous avons dejà indiqué que chaque $F \in \mathbf{B}^*$ donne lieu à une mesure complètement additive sur $\hat{\mathcal{E}}$ et que chaque fonction $f \in \mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$ est intégrable par rapport à cette mesure. Supposons que nous ayons une famille $\mathfrak{A}$ et ses ensembles associés : C_0, C et $\bar{C}$. Supposons de plus que $C = \bar{C}$. Alors chaque $\mathfrak{A}$-intégrale est une C-intégrale (lemme 3). Si F est une telle $\mathfrak{A}$-intégrale, puisque C est β-fermé, il est facile de voir que le support de la mesure μ engendrée par F est dans C. Donc le complémentaire de C est un ensemble (β-ouvert) qui est μ-négligeable. Soient maintenant f et g deux fonctions de $\mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$ identiques sur C : $f(x) = g(x)$, $x \in C$. Alors $Ff = Fg$.

Introduisons maintenant une définition importante.

DÉFINITION 2. — *Nous désignerons par $\mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$ la plus petite famille de fonctions appartenant à $\mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$ jouissant des propriétés :*

(i) *$\mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$ contient $C(\hat{\mathcal{E}})$;*

(ii) *Si $\{f_n\}$ est une suite monotone dans $\mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$ et si $\{f_n\}$ converge ponctuellement vers une fonction $f \in \mathfrak{B}_b(\hat{\mathcal{E}})$, la convergence étant uniforme sur chaque $A \in \mathfrak{A}$, alors $f \in \mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$.*

La convergence de $\{f_n\}$ vers f sera indiquée par $f_n \Uparrow_{\mathfrak{A}} f$ (ou $f_n \Downarrow_{\mathfrak{A}} f$). Il est évident que la famille $\mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$ peut être construite par un procédé transfini. Pour chaque nombre ordinal $\eta < \Omega$ nous aurons la classe de $\mathfrak{A}$-fonctions de Baire d'ordre η. Nous n'entrerons pas dans les détails de cette construction.

Nous démontrons maintenant une proposition indispensable au développement de la théorie.

Proposition 10. — *Soit f une fonction appartenant à $\mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$ et soit $f(x) = 0$ pour tout $x \in C_0$. Soit $x_0 \in C$. Alors $f(x_0) = 0$.*

La démonstration de la proposition sera morcelée en plusieurs lemmes. Introduisons d'abord une

Définition 3. — *Si $f \in \mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$, un ensemble $\Xi(f)$ de fonctions appartenant à $\mathbf{B}$ sera dit un ensemble ancestral de f si le plus petit ensemble de fonctions de Baire qui peuvent être définies à partir des éléments de $\Xi(f)$ contient f.*

Par exemple, $\mathbf{B}$ est un ensemble ancestral de chaque $f \in \mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$. Nous avons premièrement le

Lemme 4. — *Pour chaque $f \in \mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$, il existe un ensemble ancestral $\Xi(f)$ qui est dénombrable.*

Démonstration par induction transfinie. Si f est de classe 0 (f est continue) le lemme est évident. Supposons la démonstration vérifiée pour chaque g de classe inférieure à η. Supposons que f soit de classe η et soit $\{f_n\}$ une suite monotone (disons croissante) telle que $f_n \updownarrow_{\mathfrak{A}} f$, avec f_n de classe inférieure à η. Soit $\Xi(f_n)$ un ensemble ancestral de f_n qui soit dénombrable $n = 1, 2, \ldots$. Pour $\Xi(f)$ nous prenons alors la réunion des $\Xi(f_n)$.

Lemme 5. — *Soit $\Xi(f)$ un ensemble ancestral de $f \in \mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$. Soit $A \in \mathfrak{A}$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe un $g \in \Xi(f)$ tel que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, $x \in A$.*

Démonstration par induction transfinie sur l'ordre des fonctions de Baire définies par $\Xi(f)$. Pour les fonctions d'ordre 0, tout est clair. Supposons la proposition démontrée pour chaque fonction de Baire de classe inférieure à ξ qui peut être définie à partir de $\Xi(f)$. Soit k une fonction d'ordre ξ et supposons que $k_n \updownarrow_{\mathfrak{A}} k$ où l'hypothèse d'induction est valable pour k_n. Alors il existe un entier n tel que

$$|k(x) - k_n(x)| < \varepsilon/2 \qquad \text{pour} \quad x \in A.$$

Par l'hypothèse, il existe un $g \in \Xi(f)$ tel que

$$|k_n(x) - g(x)| < \varepsilon/2,$$

et donc nous avons

$$|k(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Ceci complète la démonstration puisque f étant de classe η sera prise dans le filet tôt ou tard.

Lemme 6. — *Donnés $f \in \mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$, $x_0 \in C$, et $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble ancestral dénombrable, $\Xi(f)$, tel que $g \in \Xi(f)$ implique $|f(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon$.*

Démonstration par induction transfinie sur l'ordre d'une fonction de $\mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$. Le cas $\eta = 0$ est évident. Supposons que pour chaque ordinal $\xi < \eta$, la conclusion du lemme soit valable pour chaque g de classe ξ. Soit $f_n \updownarrow_{\mathfrak{A}} f$ où les f_n sont de classe $\xi_n < \eta$ et f est de classe η. Choisissons les f_n de sorte que pour tout n, $|f(x_0 - f_n(x_0)| < \varepsilon/2$. Pour chaque f_n selon l'hypothèse d'induction il existe un ensemble ancestral dénombrable $\Xi(f_n)$, tel que $g_n \in \Xi(f_n)$ implique $|f_n(x_0) - g_n(x_0)| < \varepsilon/2$. Prenant pour $\Xi(f)$ la réunion des $\Xi(f_n)$, la démonstration est terminée.

Nous sommes maintenant à même de donner la démonstration de la proposition **10**. Pour un f donné, supposons que $f(x_0) = \alpha > 0$. Posons $2\varepsilon = \alpha$ et choisissons un ensemble ancestral dénombrable $\Xi(f)$ satisfaisant au lemme **6**. Soient $h_1, h_2, \ldots$ les membres de cet ensemble. Écrivons $k_n = |h_1| \wedge \ldots \wedge |h_n|$. Alors $\{k_n\}$ est une suite décroissante. Il est facile de voir, puisque $f(x) = 0$ pour $x \in C_0$, que $k_n \downarrow_{\mathfrak{A}} 0$ (lemme **5**). Selon la définition même de C, $k_n(x_0) \downarrow 0$. Puisque $|f(x_0) - h_n(x_0)| < \varepsilon$, alors $h_n(x_0) = |h_n|(x_0)$. Donc $|f(x_0) - k_n(x_0)| < \varepsilon$, ou $k_n(x_0) > \varepsilon$ puisque $f(x_0) = 2\varepsilon$. Cette contradiction complète la démonstration.

Un corollaire immédiat est le suivant. Si f et $g \in \mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$ et $f(x) = g(x)$, $x \in C_0$, alors $f(x) = g(x)$, $x \in C$. [Notons que $\mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$ est un anneau de Banach.]

Si $f \in \mathbf{B}$, soit f^0 la restriction de f à C_0. Soit $\mathbf{B}^0$ l'espace vectoriel des f^0, $f \in \mathbf{B}$. Soit $\mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$ la famille de fonctions définies sur C_0 qui sont engendrées par la $\mathfrak{A}$-convergence à partir des fonctions de $\mathbf{B}^0$. Soit Φ l'application de $\mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$ dans $\mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$ donnée par $\Phi(f) = f^0$. Démontrons alors la

Proposition **11**. — *L'application Φ définie ci-dessus est un homomorphisme d'ordre de $\mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$ sur $\mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$. Le noyau de l'homomorphisme est l'ensemble des fonctions $f \in \mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$ telles que $f(x) = 0$, $x \in C_0$.*

Les fonctions de $\mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$ sont réparties en classes d'ordre η, où η est un nombre ordinal $< \Omega$. Nous supposons vérifiée l'hypothèse suivante (le cas $\eta = 0$ sera évident) pour $\xi < \eta$: Pour $\{k_n\}$ une suite monotone, $k \in \mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$, k_n de classe ξ, il existe une suite monotone $\{f_n\}$, $f_n \in \mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$, avec $\Phi(f_n) = k_n$. Vérifions alors l'hypothèse pour η. Soit $k \in \mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$ de classe η et supposons que $k_n \uparrow_{\mathfrak{A}} k$, k_n de classe $< \eta$ par rapport à $\mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$. Nous avons vu qu'il existe $f_n \in \mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$ telles que $f_n^0 = k_n$ et que $\{f_n\}$ est une suite monotone. Puisque $\{k_n\{$ est une suite bornée, nous pouvons supposer de même pour $\{f_n\}$. Nous avons avons donc $f_n \updownarrow_{\mathfrak{A}} f$, $f \in \mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$ et $f^0 = k$. Le reste est maintenant évident et la proposition est démontrée.

Soit, comme auparavant $C = \overline{C}$. Soit F une $\mathfrak{A}$-intégrale. Alors, F est définie pour chaque $f \in \mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$. Nous avons $Ff = 0$ si $f(x) = 0$, $x \in C_0$. Si $\{f_n\}$ est une suite monotone dans $\mathfrak{B}_b(C_0, \mathfrak{A})$ et $f_n \updownarrow_{\mathfrak{A}} f$, alors $Ff_n \uparrow Ff$. En définissant $Ff^0 = Ff$ nous avons, $f_n^0 \uparrow_{\mathfrak{A}} f^0$ implique $Ff_n^0 \uparrow Ff^0$. La proposition inverse est aussi évidente d'après la proposition 11. De plus il est évident que la valeur Ff^0 où $f^0 \in \mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$ peut être obtenue à partir des fonctions de $\mathbf{B}^0$ par le moyen des suites de fonctions $\mathfrak{A}$-convergentes. Si f^0 est de première classe de Baire en $\mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$ et que $f_n^0 \uparrow_{\mathfrak{A}} f^0$ où $f_n^0 \in \mathbf{B}^0$, alors nous avons $Ff_n^0 \uparrow Ff^0$, ce qui nous donne la valeur de Ff^0. De cette manière, nous pouvons par le moyen des limites obtenir la valeur de Ff^0 pour chaque $f^0 \in \mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$. Ceci résulte de la proposition 11 et de la discussion précédente.

Soit maintenant $\{f_n^0\}$ une suite de $\mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$ et soit pour une constante $\alpha > 0$, $|f_n^0| \leqq \alpha$.

Supposons que $f_n^0 \to_{\mathfrak{A}} f^0$ ($\mathfrak{A}$-convergence, mais non monotone). Alors nous avons $Ff_n^0 \to Ff^0$. Ceci est le théorème de Lebesgue pour les $\mathfrak{A}$-intégrales. Esquissons la démonstration. Nous notons entre parenthèses, que l'ensemble $\mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$ est fermé par rapport aux opérations « $\bigvee$ » et « $\bigwedge$ ». Posons $g_{nr}^0 = f_{1+r}^0 \wedge \ldots \wedge f_{n+r}^0$. Alors, il existe pour chaque r entier positif une $g_r^0 \in \mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$ telle que $g_{nr}^0 \uparrow_{\mathfrak{A}} g_r^0$. Évidemment, nous avons $g_r^0 \downarrow_{\mathfrak{A}} f^0$. Ceci démontre que $f^0 \in \mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$. Selon la proposition 11, nous trouvons les fonctions g_{nr}, g_r, f_n et f dont la définition est évidente. Soit $x_0 \in C$. Alors nous avons $g_{nr}(x_0) \uparrow g_r(x_0)$ et $g_r(x_0) \downarrow f(x_0)$, d'après le corollaire de la proposition 10. Notons de plus que $f(x_0) = \overline{\lim} f_n(x_0)$. D'une manière analogue, nous avons $f(x_0) = \underline{\lim} f_n(x_0)$. Ceci démontre que pour chaque $x_0 \in C$, $f_n(x_0) \to f(x_0)$. Or, pour une $\mathfrak{A}$-intégrale, F, le complément dans $\hat{\mathcal{E}}$ de C est un ensemble négligeable. Il s'ensuit que par le théorème de Lebesgue classique $Ff_n \to Ff$. Puisque par définition nous avons $Ff_n^0 = Ff_n$ et $Ff^0 = Ff$, nous avons donc : si $f_n^0 \to_{\mathfrak{A}} f^0$ et $|f_n^0| < \alpha$, alors $Ff_n^0 \to Ff^0$. C'est le théorème de Lebesgue pour les $\mathfrak{A}$-intégrales. Résumons nos résultats (nous appliquons aussi la proposition 7) :

Théorème 6. — *Soit* $\mathbf{B}$ *une algèbre de Banach de fonctions bornées définies sur un espace* $\mathcal{E}$. *Soit* $\mathfrak{A}$ *une famille de sous-ensembles de* $\mathcal{E}$. *Supposons que pour chaque suite* $\{f_n\}$, $f_n \in \mathbf{B}$, *telle que* $f_n \downarrow_{\mathfrak{A}} 0$, *la convergence vers zéro de* $\{f_n\}$ *soit uniforme sur* $C_0 = \bigcup A$, $A \in \mathfrak{A}$.

Soit F *une* $\mathfrak{A}$-*intégrale. Alors il est possible d'étendre le champ de définition de* F, *et d'une façon unique, à la famille des* $\mathfrak{A}$-*fonctions de Baire*, $\mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$, *définies à partir des fonctions de* $\mathbf{B}$ *par la* $\mathfrak{A}$-*convergence des suites monotones. Dans le domaine étendu des fonctions de Baire est valable le théorème de Lebesgue du passage à la limite : Si* $f_n \to_{\mathfrak{A}} f$ *et si la suite* $\{f_n\}$ *est bornée, alors* $Ff_n \to Ff$.

Notons que dans l'énoncé du théorème, aucune construction ne repose sur une connaissance de la structure de $\hat{\mathcal{E}}$. (Bien entendu, cette structure est l'essieu même de la démonstration.)

4. Exemples. — Les exemples abondent. Nous en donnerons trois ou quatre. Nous mentionnons seulement en passant la théorie classique des intégrales de Daniell et aussi le cas d'un espace $\mathcal{E}$ compact. Il sera aisé au lecteur de voir comment ces cas se rangent dans le développement tracé ci-dessus. Nous citons un fait plus ou moins évident. Jusqu'à nos jours, les discussions sur l'intégration se sont essentiellement restreintes à ces deux cas. A part des exemples particuliers, d'habitude rédigés en qualité de « Gegenbeispiel », les fonctionnelles linéaires générales, celles qui ne donnent pas lieu à des mesures, n'ont guère reçu d'attention. Pour cette raison, nos exemples ne se rattachent pas directement à des situations soulevées par d'autres travaux.

Dans les exemples à suivre nous considérerons toujours le cas d'une famille $\mathfrak{A}$ telle que $C_0 = \mathcal{E}$. Puisque nous supposons que $C = \overline{C}$, alors $C = \hat{\mathcal{E}}$ et « être une $\mathfrak{A}$-intégrale » est équivalent à « être une fonctionnelle dans $\mathbf{B}^\star$ ».

a. — Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique séparé et soit $\mathbf{B}$ l'algèbre de toutes les fonctions continues et bornées sur $\mathcal{E}$. Soit $\mathfrak{A}$ la famille de tous les sous-ensembles A de $\mathcal{E}$ qui sont dénombrables ou finis, fermés et discrets (pour chaque point $x \in A$ il existe un voisinage de x qui ne contient aucun autre point de A). Alors chaque fonctionnelle de $F \in \mathbf{B}^\star$ est une A-intégrale.

Nous allons démontrer que si $\{f_n\} \in \Sigma(\mathfrak{A})$, alors la convergence de $\{f_n\}$ vers zéro est uniforme sur $\mathcal{E}$. Supposons que pour une telle $\{f_n\}$, la convergence ne soit pas uniforme. Alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour chaque N entier il existe un couple (n, x) tel que $n > N$ et $f_n(x) > \varepsilon$. Nous choisissons $N_1 = 1$ et (n_1, x_1) satisfaisant à cette inégalité. Prenons $N_2 > n_1$ et un voisinage U_1 de x_1 tel que dans $U_1, f_{N_2}(x) < \varepsilon$. Choisissons (n_2, x_2), $n_2 > N_2$, tel que $f_{n_2}(x_2) > \varepsilon$. Nous obtenons d'une manière maintenant évidente une suite croissante d'entiers $\{n_r\}$, une suite de points $A = \{x_r\}$, et une suite de voisinages non empiétants $\{U_r\}$, $x_r \in U_r$ dont les propriétés sont évidentes. Il est facile de voir que A est aussi fermé donc $A \in \mathfrak{A}$. Ce fait contredit la convergence non uniforme de $\{f_n\}$ vers zéro. Pour la démonstration de la proposition précédente nous aurions également pu nous appuyer sur le théorème 5.

b. — Un cas particulier de l'exemple précédent est le suivant. Considérons les fonctions réelles, continues, et bornées définies sur la droite R. Dans ce cas, vu la compacité locale de R, il sera suffisant de choisir pour $\mathfrak{A}$ la famille de toutes les suites $A = \{x_r\}$ jouissant de la propriété suivante : Soit $\{m_r\}$ une suite croissante positive, donnée d'avance. Alors nous choisissons $\{x_r\}$ telle que $|x_r| > |x_{r-1}|$ et $|x_r| - |x_{r-1}| > m_r$. Nous pouvons donc faire les ensembles A aussi clairsemés que nous le désirons. Notons que parmi les fonctions de Baire dans $\mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$ pour lesquelles donc chaque fonctionnelle $F \in \mathbf{B}^\star$ est définie, nous trouvons toutes les fonctions de Baire ordinaires qui sont nulles en dehors d'un compact.

c. Si au lieu de considérer toutes les fonctions continues sur R, nous envisageons l'ensemble des fonctions uniformément continues et bornées, nous voyons facilement que cet ensemble est une algèbre de Banach. Nous pouvons choisir pour $\mathfrak{A}$ la famille des ensembles « périodiques » $A_c = \{ c + n\alpha \}$ où $\alpha > 0$ est donné une fois pour toutes et c varie, $0 \leqq c \leqq \alpha$. Il est facile de vérifier, faisant appel à la compacité de $[0, \alpha]$, que si $f_n \downarrow_{\mathfrak{A}} 0$ alors, la convergence est uniforme. Ceci démontre qu'une des suites A_c pénètre chaque suite de voisinages $\{ U_n \}$ d'un point idéal de $\hat{\mathcal{E}}$.

d. — Soit $\mathcal{E}$ la sphère de rayon 1 dans un espace de Hilbert séparable $\mathfrak{H}$: $\mathcal{E} = \{ x : x \in \mathfrak{H}, \| x \| = 1 \}$. Soit $\mathbf{B}$ l'algèbre de Banach de fonctions bornées définies sur $\mathcal{E}$ qui est engendrée par le fonctions constantes et par les fonctions du type $f_y : f_y(x) = (x, y)$, où $y \in \mathfrak{H}$. La topologie la moins fine pour laquelle ces fonctions sont continues est précisément la topologie faible sur $\mathcal{E}$. Donc la topologie engendrée par l'algèbre de Banach $\mathbf{B}$ est la topologie faible sur $\mathcal{E}$. Le cas présent est un des rares dans lequel la structure de $\hat{\mathcal{E}}$ est connue. En effet, $\hat{\mathcal{E}}$ consiste en la boule $\{ x : \| x \| \leqq 1, x \in \mathfrak{H} \}$. Nous passons sur les détails de démonstration de ce fait sauf pour noter que puisque $\mathfrak{H}$ est auto-adjoint cette boule est compacte pour la topologie faible. Deuxièmement, chaque voisinage de x, $\| x \| < 1$, contient des points de $\mathcal{E}$.

Considérons plusieurs choix pour $\mathfrak{A}$. Si $\mathfrak{A}_1$ est la famille des ensembles finis de $\mathcal{E}$, les $\mathfrak{A}$-intégrales sont les intégrales de Daniell sur $\mathcal{E}$. Puisque dans ce cas $C \neq \overline{C}$, il existe des fonctionnelles qui ne sont pas des intégrales de Daniell. Formons une nouvelle famille $\mathfrak{A}_2$ en ajoutant à $\mathfrak{A}_1$ un ensemble orthonormal complet Γ. L'algèbre $\mathbf{B}$ est séparable, donc chaque point $x \in \hat{\mathcal{E}}$ satisfait au premier axiome. Donc pour $\mathfrak{A}_2$, $C \overset{'}{=} \bigcup \overline{A}$, $A \in \mathfrak{A}_2$. Cette réunion consiste de $\mathcal{E}$ et de l'adhérence de Γ. L'adhérence de Γ consiste de Γ et du point $x = 0$. Donc pour $\mathfrak{A}_2$, $C = \mathcal{E} \cup \{ 0 \}$. De nouveau, $C \neq \overline{C}$.

Si au lieu d'ajouter à $\mathfrak{A}_1$ une seule suite orthonormale, nous les ajoutons toutes, la famille $\mathfrak{A}_3$ ainsi obtenue est invariante par toutes les rotations de $\mathfrak{H}$, mais encore, $C = \mathcal{E} \cup \{ 0 \}$ (*voir* [11]). Pour avoir $C = \overline{C}$, il suffit d'ajouter à $\mathfrak{A}_1$ un ensemble A_x pour chaque point x, $\| x \| < 1$, tel que l'adhérence faible de A_x contienne x — par exemple, une suite de $\mathcal{E}$ convergeant faiblement vers x.

Nous voyons, que pour obtenir l'égalité $C = \overline{C}$, il suffit d'enrichir la famille $\mathfrak{A}$ en y ajoutant d'autres ensembles. Malheureusement, à mesure que $\mathfrak{A}$ s'agrandit, la famille des fonctions intégrables $\mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A})$ se restreint. Si par exemple, nous ajoutons l'ensemble $\mathcal{E}$ à $\mathfrak{A}$, alors $\mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A}) = \mathbf{B}$; les fonctions de Baire sont les fonctions continues.

Une famille $\mathfrak{A}$ sera dite *triviale* si l'espace $\mathcal{E}$ est la réunion d'un nombre fini d'ensembles de $\mathfrak{A}$. Nous allons démontrer qu'il existe toujours des familles non-triviales si $\mathcal{E}$ a une infinité de points.

La classe de toutes les familles non triviales peut être ordonnée d'une manière évidente par inclusion. Chaque ensemble complètement ordonné de cette classe possède une limite supérieure dans la classe (la réunion des membres de l'ensemble). Appliquant le lemme de Zorn, nous voyons qu'il existe des familles non triviales qui sont maximales. Il est facile de voir que chaque telle famille est un idéal maximal dans l'algèbre de Boole des parties de $\mathcal{E}$. La réciproque est aussi vraie. Démontrons maintenant la

Proposition 12. — *Si $\mathfrak{A}$ est une famille maximale et non triviale d'un espace infini $\mathcal{E}$, alors la $\mathfrak{A}$-convergence vers zéro équivaut à la convergence uniforme vers zéro sur $\mathcal{E}$.*

Soit $\mathfrak{A}$ une famille maximale non triviale. Supposons qu'il existe une suite de voisinages $\{W_n\}$ du type envisagé dans le théorème 5 telle qu'aucun $A \in \mathfrak{A}$ pénètre les W_n. Nous avons $W_1 \supset W_2 \supset \ldots$ et $W_n \neq \emptyset$. Puisque $\mathfrak{A}$ contient tous les ensembles finis, chaque W_n est infini. Choisissons une suite de points distincts, $D = \{x_n\}$, $x_n \in W_n$, $x_n \in \mathcal{E}$. Considérons une partition : $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, et telle que D_i soit un ensemble infini, $i = 1, 2$. D n'est pas dans $\mathfrak{A}$ et il en est de même de D_1 et D_2 puisque chacun de ces derniers pénètre $\{W_n\}$. Agrandissons $\mathfrak{A}$ en y ajoutant D_1 : $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cup \{D_1\}$. Si $\mathfrak{A}'$ était trivial, alors D_2 serait dans $\mathfrak{A}$. Donc $\mathfrak{A}'$ est non trivial et strictement plus grand que $\mathfrak{A}$. Cette contradiction du caractère maximal de $\mathfrak{A}$ montre que chaque suite $\{W_n\}$ est pénétrée par un $A \in \mathfrak{A}$ et donc la $\mathfrak{A}$-convergence équivaut à la convergence uniforme sur $\mathcal{E}$.

e. — Considérons l'algèbre de Banach $\mathbf{m}$ de toutes les suites bornées $\{x_n\}$. Ici $\mathbf{B} = \mathbf{m}$, $\mathcal{E} = N$, les nombres naturels. La topologie sur $\mathcal{E}$ induite par la β-topologie de $\hat{\mathcal{E}}$ est la topologie discrète. Puisque $\mathbf{m}$ consiste en toutes les fonctions bornées sur N, quelle que soit la famille $\mathfrak{A}$ telle que $C = \overline{C}$, nous avons $\mathfrak{B}_b^0(\mathfrak{A}) = \mathbf{B} = \mathbf{m}$. Une extension propre du domaine des fonctions intégrables est impossible.

La proposition 12 indique qu'il existe pour $\mathbf{m}$ des familles non triviales $\mathfrak{A}$ pour lesquelles la $\mathfrak{A}$-convergence équivaut à la convergence uniforme. Les familles envisagées par la proposition sont d'une structure très compliquée et plus ou moins inaccessibles à l'intuition. Démontrons maintenant que *si $\mathfrak{A}$ est une famille non triviale pour $\mathbf{m}$ pour laquelle la $\mathfrak{A}$-convergence à zéro équivaut à la convergence uniforme, alors $\mathfrak{A}$ contient une infinité non dénombrable d'ensembles :* Ceci implique que chaque telle famille a une structure profondément compliquée — fait peu surprenant, vu le mystère profond qui entoure cet espace.

Soit donc $\mathfrak{A}$ du type indiqué. Il est facile de voir que $\mathfrak{A}$ doit contenir des éléments A qui ne sont pas finis, donc qui contiennent une infinité dénombrable de points de N. De plus, si le nombre des suites dénombrables était fini, $A_1, \ldots A_m$, alors $N - (A_1 \cup \ldots A_m)$ serait infini et il est facile de voir que la $\mathfrak{A}$-convergence n'équivaudrait pas à la convergence uniforme. Supposons donc que $\mathfrak{A}$ consiste en une suite dénombrable $A_1, A_2, \ldots$ d'ensembles infinis. Nous pouvons supposer que la suite $\{ A'_n \}$ où $A'_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ est strictement croissante. Choisissons un entier e_n dans $A'_{n+1} - A'_n$ et soit $D_n = \{ e_n, e_{n+1}, \ldots \}$. Il est facile de construire les suites $\{ k_n \}$ et $\{ \delta_n \}$ du théorème 5 telles que pour la suite d'ensembles associée $\{ W_n \}$, nous ayons $W_n = D_n$. Si cette suite de voisinages était pénétrée par un $A \in \mathfrak{A}$, cet A devrait contenir un sous-ensemble infini de D_1. D'après notre construction. aucun tel ensemble n'appartient à $\mathfrak{A}$. Cette contradiction montre que la classe $\mathfrak{A}$ de la proposition contient une infinité non dénombrable d'ensembles. (Notons que dans le cas particulier où $\mathfrak{A}$ est un idéal, le fait même de contenir un ensemble infini A implique que $\mathfrak{A}$ en contient une infinité non dénombrable — tous les sous-ensembles de A. La discussion ci-dessus se rapporte plutôt au cas général.)

(Ajouté sur épreuves : Le résultat du lemme 1 est en relation avec le travail de N. Onuchic. *On two properties of* P-*spaces*, *Portugal. Math.*, 16, 1957, p. 37-39. Cette relation est que la ι-topologie rend $\hat{\mathcal{E}}$ un « P-space ». En effet, la ι-topologie est l'extension la moins fine de la β-topologie qui possède cette propriété.)

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BAUER (Heinz). — Eine Rieszsche Bandzerlegung im Raume der Bewertungen eines Verbandes, *Sitz. Bayer Akad. Wiss. München*, *Math.-naturw. Kl.*, 1953 p. 89-117.

[2] BAUER (Heinz). — Sur l'équivalence des théories de l'intégration selon N. Bourbaki et selon M. H. Stone, *Bull. Soc. math. France*, t. 85, 1957, p. 51-75.

[3] BOURBAKI (Nicolas). — *Intégration*, Chap. 1-4. — Paris, Hermann, 1952 (*Act. scient. et ind.*, 1175; *Éléments de mathématiques*, 13).

[4] DANIELL (P. J.). — A general form of integral, *Annals of Math.*, Series 2, t. 19, 1917-1918, p. 279-294.

[5] GORDON (H.). — Topologies and projections on Riesz spaces. *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 94, 1960, p. 529-551.

[6] GORDON (H.) and LORCH. (E. R.). — The projection of a linear functional on the manifold of integrals, *Canadian J. Math.*, t. 9, 1957, p. 465-474.

[7] LOOMIS (L. H.). — *An introduction to abstract harmonic analysis.* — Toronto, New York, London, D. Van Nostrand and C. O. 1953.

[8] LORCH (E. R.). — L'integrazione ed i funzionali lineari, *Rend. Sem. mat. fis. Milano*, t. 25, 1953-1954, p. 310.

[9] LORCH (E. R.). — L'integrazione e gli ideali massimi, *Rend. Sem. mat. Torino*, t. 13, 1953-1954, p. 33-38.

[10] LORCH (E. R.). — On integration theory, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 63, 1957, p. 377, Abstract 717.

[11] LORCH (E. R.). — Sugli integrali invarianti in spazi generali, *Rènd. Sem. mat. fis. Milano*, (à paraître).

[12] RIESZ (F.). — Sur les opérations fonctionnelles linéaires, *C. R. Acad. Sc.*, t 149, 1909, p. 974-977.

[13] RIESZ (F.). — Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, *Annals of Math.*, Series 2, t. 44, 1940, p. 174-206.

(Manuscrit reçu le 25 décembre 1959.)

Edgar R. LORCH,
Barnard College,
Columbia University,
New York 27, N. Y.