BULLETIN DE LA S. M. F.

MARIE-HÉLÈNE SCHWARTZ

# Espaces pseudo-fibrés et systèmes obstructeurs

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 88 (1960), p. 1-55

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1960__88__1_0>

*Bull. Soc. math. France*,
88, 1960, p. 1 à 55.

# ESPACES PSEUDO-FIBRÉS ET SYSTÈMES OBSTRUCTEURS

PAR

Mme MARIE-HÉLÈNE SCHWARTZ
(Reims).

INTRODUCTION. — L'espace des vecteurs tangents à une variété différentiable admet classiquement une structure d'espace fibré; si, au contraire, étant donnée une partition d'une variété $X$ en sous-variétés différentiables $X_i$, on considère seulement l'ensemble des vecteurs tangents aux $X_i$, il n'admet plus une structure d'espace fibré mais, sous certaines conditions, une structure d'espace que nous avons appelé pseudo-fibré. Nous avons choisi ce terme car ces espaces sont réunion d'espaces fibrés de type classique et en conservent certaines propriétés; mais ce ne sont plus des espaces fibrés, par exemple la dimension des fibres est variable, on ne peut pas relever les homotopies. Notre but est principalement la construction de sections et, pour certains espaces pseudo-fibrés, la détermination d'un système de classes de cohomologie dans la base, qui jouerait le même rôle qu'une classe de Chern de degré donné pour un espace fibré.

Le paragraphe 1 est consacré aux définitions. La base d'un espace pseudo-fibré se compose d'une variété topologique $X$ munie d'une partition en sous-variétés sans bords $X_i$ et de deux complexes $(K)$ et $(D)$ (moyennant certaines conditions, ceux-ci pourront disparaître des données). A la famille des $X_i$ correspond une famille de fibres-type munie d'un ensemble d'injections des fibres les unes dans les autres. L'espace pseudo-fibré lui-même est défini par des cartes, chaque carte fait intervenir une sous-famille des fibres-type, et est définie, non pas au-dessus d'un ouvert de $X$, mais au-dessus d'un simplexe fermé $\overline{K}^h$ privé d'une face de dimension $h-1$.

Dans le paragraphe 2 nous étudions d'abord la formations des sections au-dessus des squelettes successifs du complexe $(D)$ [le complexe $(K)$ triangule tous les $\overline{X}_i$, au contraire, chaque cellule ouverte $D^n$ coupe canoniquement chaque sous-variété $X_i$]. Nous définissons ensuite l'homologie sur $X$ dont les chaînes de base sont les $D^n$ orientés, la cohomologie correspondante à valeurs entières, et des cohomologies sur les $\overline{X}_i$. Puis nous introduisons certaines applications $f$ d'une base dans une autre et l'image réciproque d'un espace pseudo-fibré par une application $f$.

Dans le paragraphe 3 nous considérons une partition d'une variété $X$ en sous-variétés différentiables $X_i$, et nous cherchons à quelles conditions l'espace formé par tous les vecteurs tangents à tous les $X_i$ possède une structure d'espace pseudo-fibré $\mathcal{E}$. Dans ce dernier cas, nous associons à $\mathcal{E}$ l'espace pseudo-fibré ${}^r\mathcal{E}$ dont la fibre en un point $x$ de $X$ est la variété des $r$-repères (réels ou complexes) de la fibre vectorielle $\mathcal{E}(x)$ (un $r$-repère étant une suite ordonnée de $r$ vecteurs linéairement indépendants). Les deux derniers paragraphes sont principalement consacrés à ces espaces ${}^r\mathcal{E}$ de type complexe (la dimension d'obstruction est alors $N-2r+2$, $N$ étant la dimension réelle de $X$).

Le paragraphe 4 est consacré à l'étude des propriétés locales de ${}^r\mathcal{E}$ qui seront nécessaires pour établir au paragraphe 5 les systèmes de classes obstructrices. Ce paragraphe 4 est le point noir du présent travail : il s'agissait d'établir que certaines sous-variétés peuvent avoir entre elles des intersections canoniques puis que les constructions faites étaient suffisamment intrinsèques ; cela nous a amenée à faire de longues démonstrations, et à imposer une condition $((\varphi)_3)$ qui est bien vérifiée dans les cas simples, mais dont l'énoncé est pénible. Nous espérons vivement que d'autres méthodes permettront de supprimer tout cela.

Dans le paragraphe 5 nous considérons une section $s$ de ${}^r\mathcal{E}$ au-dessus du squelette $(D)^{N-2r+1}$ (assujettie seulement à une condition au voisinage des sous-variétés $X_i$ de dimension $2r-2$), et nous lui associons un système de cocycles obstructeurs $\hat{c}_r(X_i, s)$ sur $X$, de degrés $N-2r+2$. Notre méthode est celle qui est employée, pour les espace fibrés par STEENROD ([1]) : nous définissons simultanément les cocycles obstructeurs et les « cochaînes différence » une telle cochaîne ayant pour cobord la différence de deux cocycles obstructeurs. Pour passer aux classes de cohomologie il est plus intéressant, $k(i)$ étant la dimension de $X_i$, de remplacer $\hat{c}_r(X_i, s)$ par un cocycle $c_r(X_i, s)$ de degré $k(i)-2r+2$ dans $\overline{X}_i$ dont la classe $c_r(X_i)$ est encore indépendante de $s$. Les classes $c_r(X_i)$ vérifient les deux propriétés suivantes :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une section de ${}^r\mathcal{E}$ au-dessus du squelette $(D)^{N-2r+2}$ est que toutes les classes $c_r(X_i)$ soient nulles.

Si $f$ est l'une des applications définies aux paragraphes 2 et 4, d'une

([1]) STEENROD (Norman). — *The topology of fibre bundles*. — Princeton, Princeton University Press, 1951.

base $\tilde{\mathcal{X}}$ dans une base $\mathcal{X}$, si ${}^r\mathcal{E}$ est un espace pseudo-fibré de base $\mathcal{X}$ et ${}^r\tilde{\mathcal{E}}$ son image réciproque par $f$, si $f_i$ est la restriction de $f$ à une sous-variété $\tilde{\mathcal{X}}_i$ de $\tilde{\mathcal{X}}$ telle que $f(\tilde{\mathcal{X}}_i) = \mathcal{X}_j$, on a, avec des notations évidentes

$$\tilde{c}_r(\tilde{\mathcal{X}}) = f_i^{\star} c_r(\mathcal{X}_j).$$

Le problème se pose de savoir si cette dernière relation subsiste pour des application $f$ plus générales que celles que nous considérons et surtout si les deux propriétés énoncées permettent une définition axiomatique des systèmes obstructeurs.

Sommaire.



## 1. Définition d'un espace pseudo-fibré.

**Base de l'espace pseudo-fibré.** — Soit $\mathcal{X}$ une variété topologique ([2]); soit $(\mathcal{X})$ une partition de $\mathcal{X}$, chaque partie $\mathcal{X}_i$ étant une sous-variété topologique sans bords de $\mathcal{X}$ dont l'adhérence $\overline{\mathcal{X}}_j$ est la réunion d'une sous-famille de $(\mathcal{X})$; soit $(K)$ un complexe simplicial dont le support est $\mathcal{X}$ et tel que chaque $\overline{\mathcal{X}}_i$ soit le support d'un sous-complexe de $(K)$. $\mathcal{X}$ muni de la partition $(\mathcal{X})$ et du complexe $(K)$ est une base d'espace pseudo-fibré.

Nous désignerons par $K^h$ (resp. $\overline{K}^h$) un simplexe ouvert (resp. fermé) de $(K)$, par $N$ la dimension de $\mathcal{X}$, et nous ferons souvent figurer la dimension d'une variété $\mathcal{X}_i$ en indice supérieur, l'indice inférieur pouvant alors être supprimé s'il n'y a pas ambiguïté. Le complémentaire de $\mathcal{X}_i$ dans $\overline{\mathcal{X}}_i$ sera désigné par $\dot{\mathcal{X}}_i$ ($\dot{\mathcal{X}}_i$ sera appelé « bord » de $\mathcal{X}_i$).

**Hypothèse de finesse sur le complexe $(K)$.** — Tout simplexe $K^h$ étant contenu dans une partie $\mathcal{X}_i$, $\overline{K}^h \cap \dot{\mathcal{X}}_i$ se réduit à un seul simplexe fermé (vide ou non).

Proposition 1.1. — *Les $\mathcal{X}_i$ qui rencontrent un même simplexe fermé $\overline{K}$ sont tels que leurs adhérences forment une suite finie d'ensembles emboîtés de dimensions $q$ strictement croissantes.*

---

([2]) Cette hypothèse ne sera utilisée qu'au paragraphe 2 lorsque nous définirons le complexe $(D)$.

Soient, en effet, $X^q$ et $X^{q'}(q \geqq q')$ deux sous-variétés $X_i$ rencontrant $\overline{K}$, $K \subset X^k$. Si $q = k$,

$$\overline{X^{q'}} \cap \overline{K} \subset \overline{X^q} \cap \overline{K}, \qquad \text{donc} \quad \overline{X^{q'}} \subset \overline{X^q}.$$

Si $q \leqq k-1$, $X^q \subset \dot{X}^k$ et $X^{q'} \subset \dot{X}^k$; d'après l'hypothèse de finesse, il existe $K' \subset X^{k'}$, avec $k' \leqq k-1$ tel que $\overline{K} \cap \dot{X}_k = \overline{K'}$. $X^q$ et $X^{q'}$ rencontrent donc $\overline{K'}$, et l'on est ramené à un problème analogue, la dimension $k$ étant remplacée par $k' < k$. Au bout d'un nombre fini d'opérations on obtiendra un simplexe situé dans une sous-variété $X_i$ de dimension $q$ et l'on en déduira comme précédemment que $\overline{X^{q'}} \subset \overline{X^q}$, d'où la proposition.

**Parties $L$.** — Une telle partie sera définie par

$$(1.1) \qquad L = \overline{K} \cap \mathring{\text{et}}\,(K^0),$$

$\overline{K}$ étant un simplexe fermé, $K^0$ l'un des sommets, et $\mathring{\text{et}}\,(K^0)$ l'étoile ouverte de $K^0$ dans $(K)$. Soit $K^0 \in X^p$ et $K \subset X^k$, d'après la propriété 1.1 on peut écrire

$$(1.2) \qquad L = \bigcup_{q=p}^{q=k} L \cap X^q,$$

les $\overline{X^q}$ étant emboîtés.

**Fibres types de l'espace pseudo-fibré.** — Une même fibre type $F_k$ correspond à tous les $X_i$ de même dimension $k$. $F_k$ est un espace topologique localement compact, et la famille des $F_k$ est munie d'une famille de monomorphismes ainsi formée : pour tout couple de dimensions $k$, $k'$, avec $k' \leqq k$, sera défini un ensemble d'injections continues de $F_{k'}$ dans $F_k$ qui seront appelées monomorphismes (cet ensemble est non vide si $F_k$ et $F_{k'}$ sont non vides). On suppose, en outre que, si $k'' \leqq k' \leqq k$, le composé d'un monomorphisme de $F_{k''}$ dans $F_{k'}$ et d'un monomorphisme de $F_{k'}$ dans $F_k$ est un monomorphisme de $F_{k''}$ dans $F_{k}$.

**Cartes de l'espace pseudo-fibré.** — Un espace pseudo-fibré $\mathcal{E}$ de base $X$ et dont les fibres types sont les $F_k$ est un ensemble muni d'une projection $\varpi$ sur $X$ et tel que pour toute partie $L$ de $X$ il existe une famille de cartes sur $\mathcal{E}(L) = \varpi^{-1}(L)$, une carte étant définie par un espace $\mathcal{L}$ et une bijection $g$ de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{E}(L)$ de la manière suivante :

$L$ étant défini par la formule (1.1), considérons toutes les dimensions $q$ qui figurent dans la formule (1.2). On peut former une famille de monomorphismes $\mu_q$ des $F_q$ dans $F_k$, soit $\alpha_q = \mu_q(F_q)$, telle que si $q' \leqq q$ on ait $\alpha_{q'} \subset \alpha_q \subset \alpha_k = F_k$ et que $\mu_{q'}$ coïncide avec l'application composée d'un monomorphisme de $F_{q'}$ dans $F_q$ et de $\mu_q$. Formons alors l'espace $\mathcal{L}$ suivant

$$(1.3) \qquad \mathcal{L} = \bigcup_{q=p}^{q=k} (L \cap X^q) \times \alpha_q;$$

on a

$$(1.4) \qquad L \times \alpha_p \subset \mathcal{L} \subset L \times F_k,$$

$\mathcal{L}$ est muni de la topologie induite par celle du produit $L \times F_k$.

Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ définis par les familles de monomorphismes $\mu_{1,q}$ et $\mu_{2,q}$. Un isomorphisme de $\mathcal{L}_1$ sur $\mathcal{L}_2$ est une bijection telle que, quel que soit $x \in L \cap X^q$, sa restriction à $\mathcal{L}_1(x) = \{x\} \times \alpha_{1,q}$ soit un monomorphisme sur $\mathcal{L}_2(x) = \{x\} \times \alpha_{2,q}$ (en appelant ainsi l'application définie par un monomorphisme de $\alpha_{1,q}$ sur $\alpha_{2,q}$).

Une carte sera définie par $\mathcal{L}$ et par une bijection $g$ de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{E}(L)$ telle que

$$(1.5) \qquad \varpi . g = \pi_L$$

où $\pi_L$ est la projection sur $L$ dans le produit $L \times F_k$.

La famille de toutes les cartes devra satisfaire aux deux *conditions de compatibilité* suivantes :

(i) Si deux cartes sont définies sur $\mathcal{E}(L)$ par $\mathcal{L}_1$ et $g_1$ d'une part, $\mathcal{L}_2$ et $g_2$ d'autre part, l'application $\sigma_{1,2} = g_1^{-1} g_2$ doit être un isomorphisme de $\mathcal{L}_2$ sur $\mathcal{L}_1$ au sens ci-dessus défini.

(ii) Si l'on a $L' \subset L$ et une carte sur $\mathcal{E}(L)$ définie par $\mathcal{L}$ et $g$, alors la restriction de $g^{-1}$ à $\mathcal{E}(L') = \pi_L^{-1}(L')$ définit une carte sur $\mathcal{E}(L')$.

Si l'on suppose, en outre, que toute carte vérifiant les conditions (i) et (ii) est une carte de l'espace pseudo-fibré, on obtient un espace pseudo-fibré à structure uniquement topologique :

**Topologie de $\mathcal{E}$.** — Les ouverts de $\mathcal{E}$ seront les ensembles $\mathcal{O}$ tels que :

1° $\varpi(\mathcal{O})$ soit un ouvert de $X$;

2° pour toute carte sur un $\mathcal{E}(L)$ définie par $\mathcal{L}$ et $g$, l'ensemble $g^{-1}(\mathcal{E}(L) \cap \mathcal{O})$ soit un ouvert de $\mathcal{L}$.

Remarquons qu'il suffit qu'il en soit ainsi pour une carte sur chacun des $\mathcal{E}(L)$, $L$ ayant la dimension maximale $N$, ceci en vertu des conditions de compatibilité. Avant de justifier la définition de la topologie, démontrons un lemme.

LEMME 1.1. — *La projection $\pi_L$ d'un ouvert $A$ de $\mathcal{L}$ est un ouvert de $L$ pour la topologie induite par celle de $X$.*

Soit, en effet, $z \in A$, avec $\pi_L(z) \in X_q$; il existe un voisinage $w$ de $z$ dans $L \times F_k$ tel que $w \cap \mathcal{L} \subset A$; nous pouvons choisir pour $w$ le produit d'un voisinage $w_L$ de $\pi_L(z)$ dans $L$ par un voisinage $w_F$ de $\pi_F(z)$ dans $F_k$ ($\pi_F$ étant la projection de $L \times F_k$ sur $F_k$). Donc

$$A \supset w \cap \mathcal{L} = \bigcup_q w_L \times w_F \cap [(L \cap X_q) \times \alpha_q]$$
$$= \bigcup_q (w_L \cap X_q) \times (w_F \cap \alpha_q),$$

mais, pour $q' \geqq q$ on sait que $w_F \cap \alpha_q \neq \emptyset$, donc

$$\pi_L(A) \supset \bigcup_{q' \geqq q} w_L \cap X_{q'} = w_L \cap \bigcup_{q' \geqq q} X_{q'}$$

ce dernier ensemble, intersection finie de voisinages de $\pi_L(z)$ en est un voisinage, donc $\pi_L(A)$ est bien ouvert.

C. Q. F. D.

On verrait de même que $\pi_F(A)$ est un ouvert de $F_k$.

Montrons maintenant que les parties $\mathcal{O}$ de $\mathcal{E}$ qui vérifient les conditions 1° et 2° satisfont bien aux axiomes des ouverts. Il est immédiat que toute réunion de parties $\mathcal{O}$ est une partie $\mathcal{O}$, que la partie vide de $\mathcal{E}$, et $\mathcal{E}$ lui-même, vérifient bien 1° et 2°. Soient enfin $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ deux parties vérifiant ces conditions, leur intersection vérifient le 2° puisque $g^{-1}(\mathcal{E}(L) \cap \mathcal{O} \cap \mathcal{O}')$ est l'intersection de deux ouverts de $\mathcal{L}$. Pour montrer qu'il vérifie 1°, considérons une partie $L$ quelconque, et une carte sur $\mathcal{E}(L)$ : d'après la formule (1.5),

$$L \cap \varpi(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}') = \pi_L g^{-1}(\mathcal{E}(L) \cap \mathcal{O} \cap \mathcal{O}'),$$

c'est donc la projection $\pi_L$ d'un ouvert ce $\mathcal{L}$, c'est donc un ouvert de $L$ en vertu du lemme précédent. Soit alors $x \in \varpi(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}')$, son étoile ouverte dans $(K)$, soit $U$, est recouverte par un nombre fini de parties $L_i$ contenant $x$ lui-même; à chacune d'elles correspond donc un voisinage $w_i$ de $x$ dans $X$ tel que $w_i \cap L_i \subset \varpi(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}')$; l'ensemble $U \cap \bigcap_i w_i$ est un voisinage de $x$ situé dans $\varpi(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}')$; cet ensemble est donc bien un ouvert de $X$.

C.Q. F. D.

Remarque 1.1 :

*a*. $\mathcal{E}$ n'est pas nécessairement localement compact même si tous les $F_k$ le sont.

*b*. La condition de relèvement des homotopies n'est pas nécessairement vérifiée pour $\mathcal{E}$.

*c*. La condition de relèvement des homotopies est vérifiée pour les sous-espaces $\mathcal{E}(X_i)$.

Considérons l'exemple simple suivant : $X$ est la sphère de Riemann, la partition $(X)$ est formée d'un grand cercle et des deux hémisphères ouvertes $X_2$ et $X_3$; les fibres sont les sphères unité de dimensions 0 et 1, $F_1 = S^0$ et $F_2 = S^1$; la famille des monomorphismes est formée de l'application identique sur $S^0$, des rotations de $S^1$ et des injections de $S^0$ sur deux points diamétralement opposés de $S^1$. Soit $E$ l'espace fibré des vecteurs unitaires tangents à $X$, le groupe structural étant celui des rotations; en supprimant de $E$ les vecteurs issus de $X_1$, et non tangents à $X_1$, on obtient un espace pseudo-fibré $\mathcal{E}$ dont les cartes, pour une triangulation $(K)$ donnée s'obtiennent ainsi : $U$ étant un ouvert contenant $L$ on prend une carte sur $E(U)$ et on la restreint à $\mathcal{E}(L) \subset E(U)$; les conditions de compatibilité sont vérifiées et la topologie de l'espace pseudo-fibré $\mathcal{E}$ coïncide avec la topologie induite par la métrique de $E$.

Si $z$ est un vecteur unitaire tangent à $X_1$ une boule, dans $E$, de centre $z$ et de rayon $r$ quelconque est compacte, mais sa restriction à $\mathcal{E}$ ne l'est pas (elle contient, par exemple, une suite de vecteurs dont les origines tendent vers celle de $z$ mais dont les composantes perpendiculaires au plan de $X_1$ restent supérieures à $r/2$). Ce qui démontre le point *a* de la remarque.

Pour le point *b* on considère deux points diamétralement opposés, $c$ et $c'$ de $X$ un des arcs, $d_1$ qui les joint dans $X_1$ et l'arc de cercle $d_2$, orthogonal a $d_1$, qui les joint dans $X_2$; $d_1$ et $d_2$ forment le bord d'un quart de sphère D. Soient le carré $I^2$, et $h$ une bijection de $I^2$ sur $D$ telle que l'image du côté $I \times \{0\}$ soit $d_2$. On relève $d_2$ en une section de vecteurs tous équipollents à l'un des vecteurs unitaires perpendiculaires au plan de $d_2$. Ce relèvement n'est pas prolongeable dans $\mathcal{E}(d_1)$ et *a fortiori* dans $\mathcal{E}(D)$.

**Espace pseudo-fibré à fibres vectorielles.** — Nous appellerons ainsi un espace pseudo-fibré $\mathcal{E}$ dont les fibres $F_k$ seront des espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$, les monomorphismes étant des applications linéaires injectives. Dans les deux cas, les dimensions que nous indiquerons seront prises par rapport à $\mathbf{R}$ (sauf dans l'expression abrégée $h$-plan-complexe).

**Espaces $\Gamma$ et espaces pseudo-fibrés de type tangentiel.** — Soit une base d'espace pseudo-fibré définie par $X$, la partition $(X)$ et le complexe $(K)$. Supposons que tous les $X_i$ soient des variétés et sous-variétés différentiables (resp. presque complexes). Nous appellerons espace $\Gamma$ de type tangentiel, l'espace de tous les vecteurs, nuls ou non, tangents à toutes les sous-variétés $X_i$; $\Gamma$ est muni de la projection de chaque vecteur sur son origine; la fibre d'un point $x \in X^k$ est isomorphe à $\mathbf{R}^k$ (resp. $\mathbf{C}^{k/2}$). De plus, $\Gamma$ étant une partie de l'espace fibré $E$ de tous les vecteurs tangents à $X$, sera muni de la topologie induite par celle de X. Lorsque $\Gamma$ possédera une structure unique d'espace pseudo-fibré à fibres vectorielles, nous dirons que c'est un espace pseudo-fibré de type tangentiel (réel ou complexe). Nous établirons au paragraphe 3 des conditions pour qu'il en soit ainsi.

**Espaces $^r\mathcal{E}$ associés à un espace $\mathcal{E}$ à fibres vectorielles.** — Appelons $r$-repère réel (resp. complexe) une suite ordonnée de $r$ vecteurs linéairement indépendants dans un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$). L'espace $^r\mathcal{E}(x)$ des $r$-repères de la fibre $\mathcal{E}(x)$ engendre, lorsque $x$ décrit $X$ un espace $^r\mathcal{E}$.

$^r\mathcal{E}(X^k)$ est vide, dans le cas réel pour $k < r$ et, dans le cas complexe, pour $k < 2r$. La structure d'espace pseudo-fibré de $^r\mathcal{E}$ est définie par des cartes qui se définissent à partir de celles de $\mathcal{E}$ de la manière suivante : si une carte sur $\mathcal{E}(L)$ est définie par $\mathcal{L}$ et $g$, on appellera $^r\alpha_q$ l'espace des $r$-repères de l'espace vectoriel $\alpha_q$ et l'on posera

$$^r\mathcal{L} = \bigcup_q (L \cap X^q) \times {}^r\alpha_q.$$

Soit $x \in L \cap X^q$; la restriction de $g$ à $\mathcal{L}(x) = \{x\} \times \alpha_k$ est une application linéaire bijective sur $\mathcal{E}(x)$, donc elle conserve l'indépendance des vecteurs et définit une application linéaire bijective de $^r\mathcal{L}(x)$ sur $^r\mathcal{E}(x)$; d'où l'application $g_r$ de $^r\mathcal{L}$ sur $^r\mathcal{E}(L)$, les conditions de compatibilité sont vérifiées, les monomorphismes de $^rF_{q'}$ dans $^rF_q$ se déduisant de manière évidente des monomorphismes de $F_{q'}$ dans $F_q$.

Au cas ou $\mathcal{E}$ est de type tangentiel, nous dirons pour abréger que $^r\mathcal{E}$ est un *espace pseudo-fibré de r-repères de type tangentiel* (réel ou complexe). Dans ce cas la fibre $^rF_k$ a pour rétract la variété de Stiefel-Whitney réelle (resp. complexe) des $r$-repères orthonormaux de $\mathbf{R}^k$ (resp. $\mathbf{C}^{k/2}$), son homologie est donc triviale jusqu'à la dimension $k-r$ (resp. $k-2r+1$) exclue.

## 2. Sections dans les espaces pseudo-fibrés : homologie et cohomologie sur la base.

**Complexe cellulaire $(D)$ dual de $(K)$ dans $X$.** — On choisira une fois pour toutes un tel complexe; rappelons que les complexes $(D)$ et $(K)$ sont dits duals dans $X$, si deux cellules « ouvertes » quelconques, $D^m$ et $K^h$, se coupent canoniquement ([3]) suivant une cellule « ouverte » $T^{m+h-N} = D^m \cap K^h$,

([3]) Deux sous-variétés $A^p$ et $B^q$ d'une variété $C^n$ se coupent canoniquement dans $C^n$ si chaque point de leur intersection admet un voisinage dans $C^m$ qu'un homéomorphisme convenable applique sur $\mathbf{R}^n$, les traces des sous-variétés étant respectivement appliquées sur le $p$-plan des $p$ premiers axes et le $q$-plan des $q$ derniers.

chaque $K^h$ rencontrant un $D^{N-h}$ et un seul. Les cellules $T^n$ définissent le *complexe cellulaire* $(T)$ « *intersection* » *des complexes* $(D)$ *et* $(K)$.

LEMME 2.1. — *Chaque $T^n$ étant dans un $K^h$ est dans un seul $X_i$. Chaque $\overline{T^n}$ est contenu dans un $L$.* Considérons en effet, un $D^N$ tel que $D^m \subset \overline{D^N}$, on a $K^0 \in D^N \cap \overline{K^h}$, avec $\overline{D^N} \subset \mathring{\text{et}}\,(K^0)$, donc

$$\overline{D^m} \cap \overline{K^h} = \overline{T^n} \subset \mathring{\text{et}}\,(K^0) \cap \overline{K^h} = L.$$

On cherchera à construire des sections (étant sous-entendu que ces sections sont continues) au-dessus des squelettes $(D)^m$ de dimensions $m$ croissantes de $(D)$. Si $\mathcal{E}$ n'est pas vide, la fibre $F_N$ ne l'est pas, et il existe des sections au-dessus de $(D)^0$.

**Dimension d'obstruction.** — Nous la noterons $N - \rho + 1$.

DÉFINITION DE $\rho$. — Soit $\nu(k)$ la dimension du premier groupe d'homotopie non nul de $F_k$; considérons la relation suivante relative à un entier $\rho'$ :

$$k \geqq \rho' + 1 \qquad \text{entraîne} \quad F_k \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \nu(k) \geqq k - \rho';$$

elle est trivialement vérifiée pour $\rho' = N$; si elle est vérifiée pour $\rho'$, elle l'est *a fortiori* pour $\rho'' \geqq \rho'$. $\rho$ sera la borne inférieure des entiers positifs ou nuls vérifiant cette relation.

*Hypothèse.* — On suppose que $k = \rho$ entraîne encore $F_k \neq \emptyset$ (cette hypothèse est trivialement vérifiée pour les ${}^r\mathcal{E}$ à structure complexe, $k$ étant paire et $\rho$ impaire). On peut alors caractériser $\rho$ par les relations

$$(2.1) \qquad \begin{cases} k \geqq \rho + 1 & \text{entraîne} \quad \nu(k) \geqq k - \rho, \\ \text{il existe } k \geqq \rho & \text{tel que} \quad \nu(k) < k - \rho + 1. \end{cases}$$

**Existence d'une section de $\mathcal{E}$ au-dessus de $(D)^{N-\rho}$.** — Nous désignerons une telle section par $s \mid (D)^{N-\rho}$. Soit

$$T^n = D^{N-h+n} \cap K^h, \qquad K^h \subset X^k, \qquad \text{avec} \quad N - h + n \leqq N - \rho,$$

donc

$$0 \leqq n \leqq h - \rho \leqq k - \rho;$$

or $k \geqq \rho$ entraîne $F_k \neq \emptyset$. On peut donc définir $s$ au-dessus des points $T^0 \in (D)^{N-\rho}$. Raisonnons alors par récurrence suivant les dimensions $n$ croissantes. Soit $\mathring{T}$ le bord de $\overline{T^n}$ $(n \geqq 1)$; supposons $s \mid \mathring{T}$ déterminé; on a : $\overline{T^n} \subset L \subset \overline{K^h}$; considérons une carte sur $\mathcal{E}(L)$ définie par $\mathcal{L}$ et $g$; $g^{-1}s$ définit une section au-dessus de $\mathring{T}$ dans $\mathcal{L}$ et *a fortiori* dans $L \times F_k$; comme $n \geqq 1$ et $k - \rho \geqq n$, on a $k \geqq \rho + 1$, donc, d'après la première des formules (2.1), $\nu(k) \geqq k - \rho \geqq n$; par conséquent, $g^{-1}s$ est prolongeable en une section de $L \times F_k$ au-dessus de l'intérieur $T^n$ de $\overline{T^n}$; mais $T^n \times F_k \subset K^h \times F_k \subset \mathcal{L}$, donc la section prolongée a, par $g$, une image qui définit le prolongement de $s$ au-dessus de $\overline{T^n}$. Par récurrence sur $n$, on peut donc démontrer l'existence d'une section $s \mid (D)^{N-\rho}$.

D'après la deuxième des formules (2.1), nous pouvons choisir $X^k$ et $K^k \subset X^k$, avec $k \geqq \rho$ et $\nu(k) < k - \rho + 1$; soit $T^{k-\rho+1} = D^{N-\rho+1} \cap K^k$ la dimension d'obstruction dans $L \times F_k$ étant $\nu(k) + 1$, il y a des sections $g^{-1}s$ au-dessus du bord de $T^{k-\rho+1}$ qui ne sont pas prolongeables à l'intérieur. D'où :

Proposition 2.1. — *La dimension d'obstruction à la construction des sections de $\mathcal{E}$ au-dessus des squelettes de dimensions croissantes de $(D)$ est $N - \rho + 1$, $\rho$ étant défini par les relations (2.1). Toute section $s \mid (D)^{N-\rho+1}$ peut être prolongée en une section $s \mid (D)^{N-\rho}$.*

**Homotopie de deux sections.** — Posons

$$I = [0, 1], \qquad \hat{X} = X \times I, \qquad \hat{X}_i = X_i \times I.$$

Soit $(\hat{K})$ une triangulation de $\hat{X}$ dont les cellules fermées sont les produits $\overline{K^h} \times \{0\}$, $\overline{K^h} \times \{1\}$, $\overline{K^h} \times I$ pour tous les simplexes $\overline{K^h}$ de $(K)$.

Posons $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \times I$, et munissons cet espace de la projection $\hat{\varpi}$ sur $\hat{X}$, produit de la projection $\varpi$ de $\mathcal{E}$ sur $X$ et de l'identité sur $I$. Posons $\hat{L} = L \times I$ et établissons des cartes sur $\hat{\mathcal{E}}(\hat{L}) = \hat{\varpi}^{-1}(\hat{L})$ de la manière suivante : $\mathcal{L}$ et $g$ définissant une carte sur $\mathcal{E}(L)$, nous poserons $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \times I$ et nous appellerons $\hat{g}$ la bijection de $\hat{\mathcal{L}}$ sur $\hat{\mathcal{E}}(\hat{L})$ produit de $g$ par l'identité sur $I$. Si

$$L = \overset{\circ}{\text{et}}\,(K^0) \cap \overline{K^h}, \qquad \text{avec} \quad K^h \subset X^k,$$

on a

$$K^h \times I \times F_k \subset \hat{\mathcal{L}} \subset \hat{L} \times F_k.$$

(On remarquera que la structure de $\hat{\mathcal{E}}$ est celle d'un pseudo-fibré dont les fibres et leurs monomorphismes sont les mêmes que pour $\mathcal{E}$, à cela près que $\hat{X}$ et les $\hat{X}_i$ sont des variétés à bords et que le complexe $(\hat{K})$ n'est pas simplicial.)

Deux sections $s \mid (D)^{N-\rho}$ et $s' \mid (D)^{N-\rho}$ étant données, on identifiera de manière évidente $s$ (resp. $s'$) à une section de $\hat{\mathcal{E}}$ au-dessus de $(D)^{N-\rho} \times \{0\}$ (resp. $(D)^{N-\rho} \times \{1\}$). Dire que $s \mid T^n$ et $s' \mid T^n$ sont homotopes, c'est dire que les sections de $\hat{\mathcal{E}}$, qu'elles définissent sur une partie du bord de $T^n \times I$, sont prolongeables en une seule section $\psi$ au-dessus de $T^n \times I$.

**Proposition** 2.2. — *Deux sections $s \mid (D)^{N-\rho}$ et $s' \mid (D)^{N-\rho}$ sont toujours homotopes au-dessus de $(D)^{N-\rho-1}$ par une homotopie $\psi \mid (D)^{N-\rho-1}$. Une homotopie définie au-dessus de $(D)^{N-\rho-2}$ peut toujours être prolongée au-dessus de $(D)^{N-\rho-1}$.*

$$T^n \subset (D)^{N-\rho-1} \cap X^k \qquad \text{entraîne} \quad 0 \leqq n \leqq k-\rho-1,$$

donc $k \geqq \rho+1$ et, d'après (2.1),

$$\nu(k) \geqq k-\rho \geqq n+1 \geqq 1;$$

donc $F_k$ est connexe, il s'ensuit que pour $T^0 \in (D)^{N-\rho-1}$, $s \mid T^0$ et $s' \mid T^0$ sont homotopes par une section $\psi \mid T^0 \times I$ de $\hat{\mathcal{E}}$. Raisonnons par récurrence et supposons que $\psi \mid T^{n'} \times I$ soit définie pour tout $n' < n$ et $T^{n'} \subset (D)^{N-\rho-1}$. Sur le bord d'un prisme $T^n \times I$, pour $T^n \subset (D)^{N-\rho-1} \cap X^k$ il existe alors une section définie par $s \mid T^n \times \{0\}$, $s' \mid T^n \times \{1\}$ et $\psi \mid \mathring{T}^n \times I$. On peut prendre $L$ tel que $\overline{T}^n \subset L \subset \overline{X}^k$ et une carte définie par $\hat{\mathcal{L}}$ et $\hat{g}$ sur $\hat{\mathcal{E}}(\hat{L})$; comme $\nu(k) \geqq n+1$, la section de $\hat{\mathcal{L}}$ au-dessus du bord de $T^n \times L$ image par $\hat{g}^{-1}$ de la précédente est prolongeable dans $\hat{L} \cap F_k$, la partie prolongée étant dans $T^n \times I \times F_k \subset \hat{\mathcal{L}}$, donc son image par $\hat{g}$ définit le prolongement cherché de la section de $\hat{\mathcal{E}}$ au-dessus de $T^n \times I$. D'où l'homotopie $\psi \mid (D)^{N-\rho-1} \times I$ que nous noterons aussi $\psi \mid (D)^{N-\rho-1}$.

Par contre, on peut trouver $X^k$, $T^n \subset X^k \cap (D)^{N-\rho}$ et une section de $\hat{\mathcal{E}}$ au-dessus du bord de $T^n \times I$ qui ne soit pas prolongeable à l'intérieur.

**Exemples**. — Si $\mathcal{E}$ est à fibres vectorielles $\rho = 0$, $N-\rho+1 = N+1$, il n'y a évidemment pas obstruction. Pour les espaces ${}^1\mathcal{E}$ de types tangentiels $F_k$ est isomorphe à $\mathbf{R}^k$ ou $\mathbf{C}^{k/2}$ privés de leur origine, donc $\rho = 1$ et la dimension d'obstruction est $N$. Pour un espace ${}^r\mathcal{E}$ de type tangentiel réel (resp. complexe), on a $\rho = r$ (resp. $\rho = 2r-1$) et la dimension d'obstruction est $N-r+1$ (resp. $N-2r+2$). Si la partition de $X$ se réduit à une seule partie $X_i = X$ on retrouve des résultats classiques.

**Proposition** 2.3 — *a. Si $K^0 \in X^p$ avec $F_p \neq \emptyset$, $\mathcal{E}$ possède une section $s$ au-dessus de l'étoile ouverte $U$ de $K^0$ dans $(K)$.*

*b. Si $K^0 \in X^p$ et que $F_p$ est connexe, deux sections $s \mid U$ et $s' \mid U$ sont toujours homotopes.*

Nous construirons $s$ au-dessus des simplexes $K^h \subset U$ de dimensions croissantes. $s \mid K^0$ existe puisque $F_p \neq \emptyset$. Supposons $s \mid K^{h'}$ déterminée pour tout $h' < h$; soient alors $K^h \subset U \cap X^k$, $L = U \cap \overline{K}^h$ et une carte sur $\mathcal{E}(L)$ définie par $g$ et $\mathcal{L} \subset L \times F_k$; $g^{-1}s$ définit une section au-dessus de $\dot{L} \cap L$ dans $\mathcal{L}$ et *a fortiori* dans l'espace fibré trivial $\overline{L} \times F_k$; cette section définie au-dessus de l'hémisphère $\dot{L} \cap L$ de la boule $\bar{L}$ est prolongeable au-dessus de $L$ en vertu du théorème du relèvement des homotopies; mais la partie prolongée est dans $\mathring{L} \times F_k \subset \mathfrak{L}$, donc on peut prendre son image par $g$, laquelle définit le prolongement de $s$ au-dessus de $L$; après un nombre fini d'opérations, on obtient donc $s \mid U$.

Pour démontrer $b$, reprenons les notations introduites dans la démonstration de la proposition 2.3 : l'existence d'une telle homotopie équivaut à l'existence d'une section $\psi$ de $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \times I$ au-dessus de $U \times I$ qui, sur $U \times \{0\}$ (resp. $U \times \{1\}$), coïncide avec $s$ (resp. $s'$). Construisons $\psi$ par cellules $K^k \times I \subset U \times I$ de dimensions croissantes. Comme $F_p$ est connexe, $\psi$ existe au-dessus de $K^0 \times I$; supposons $\psi \mid K^{h'} \times I$ déterminée pour tout $h' < h$; soient alors $K^h \in U \cap X^k$, $L = \overline{K^h} \cap U$ et une carte de $\hat{\mathcal{E}}(L \times I)$ définie par $\hat{g}$ et $\hat{\mathfrak{L}} \subset L \times I \times F_k$. $\hat{g}^{-1}\psi$ détermine une section de $\mathfrak{L}$ et *a fortiori* du fibré trivial $(L \times I) \times F_k$ au-dessus de $L \times \{0\}$, $L \times \{1\}$ et $(\dot{L} \cap L) \times I$; la réunion de ces parties est un hémisphère de la boule $\bar{L} \times I$ (parce que $h \geqq 1$), donc la section est prolongeable au-dessus de $L \times I$; mais la partie prolongée est dans $\mathring{L} \times I \times F_k \subset \mathfrak{L} \times I = \hat{\mathfrak{L}}$, donc elle a une image par $\hat{g}$ qui détermine $\psi \mid L$, d'où la proposition.

Remarque 2.1. — Des démonstrations faites, il résulte qu'on peut appliquer les propositions 2.1, 2.2, 2.3 à des espaces $\mathcal{E}$ pour lesquels les relations de compatibilité (i) et (ii) entre les cartes n'ont pas été vérifiées.

**Homologie et cohomologie sur $X$ et les $X_i$.** — Nous utiliserons l'homologie simpliciale à coefficients entiers dont les chaînes de base sont les cellules $D^m$ orientées que nous désignerons par $D^m_\star$ et la cohomologie correspondante à valeurs entières. Ce dernier point implique que nous nous restreindrons à l'étude de certains espaces pseudo-fibrés; en effet, la valeur d'une cochaîne sur $D^m$ ($D^m \cap K^{N-m} = T^0 \in X^k$) sera souvent définie par un élément du groupe d'homologie $H_{\nu(k)}(\mathcal{E}(T^0), Z)$. Tous ces groupes ne forment un faisceau de coefficients que moyennant certaines hypothèses sur les monomorphismes des $F_k$. Pratiquement nous nous restreindrons aux cas suivants où il n'y a pas de nouvelles hypothèses à faire :

1° ${}^r\mathcal{E}$ est un espace de $r$-repères associé à un espace $\mathcal{E}$ à fibres vectorielles complexes, la variété $X$ étant elle-même presque complexe;

2° Pour $r = 1$, ${}^1\mathcal{E}$ est associé à un espace $\mathcal{E}$ à fibres vectorielles réelles, les $X_i$ étant orientés et la variété $X$ différentiable.

Dans ces cas, chaque $H_{\nu(k)}(\mathcal{E}(T^0), Z)$ est bien canoniquement isomorphe à $Z$.

Sur une partie $X_i$ nous considérerons l'homologie dont les chaînes de base pour la dimension $k - \rho$ seront les $D^{N-\rho}_\star \cap X^k_i$ dont l'orientation est bien déterminée puisque $X_i$ est supposé maintenant orienté. Les coefficients seront pris dans $\mathbf{Z}$ ainsi que les valeurs des cochaînes correspondantes.

Nous désignerons les espaces de chaînes et cochaînes ainsi définis par $\mathcal{C}_*(X)$, $\mathcal{C}_*(X_i)$, $\mathcal{C}^*(X)$, $\mathcal{C}^*(X_i)$ et les algèbres de cohomologie par $\mathcal{H}^*(X)$ et $\mathcal{H}^*(X_i)$.

Définissons les homomorphismes suivants :

$\lambda_{i*}$ : $\mathcal{C}_*(X_i) \to \mathcal{C}_*(X)$ est l'homomorphisme injectif défini par

$$\lambda_{i*}(D_*^{N-h} \cap X_i) = D_*^{N-h};$$

$\mu_{i*}$ : $\mathcal{C}_*(X) \to \mathcal{C}_*(X_i)$ est l'homomorphisme surjectif défini par

$$\mu_{i*}(D_*^{N-h}) \begin{cases} = D_*^{N-h} \cap X_i & \text{si } D^{N-h} \cap X_i \neq \emptyset, \\ = 0 & \text{si } D^{N-h} \cap X_i = \emptyset; \end{cases}$$

$\lambda_i^*$ : $\mathcal{C}^*(X) \to \mathcal{C}^*(X_i)$ est l'homomorphisme transposé de $\lambda_{i*}$ ;
$\mu_i^*$ : $\mathcal{C}^*(X_i) \to \mathcal{C}^*(X)$ est l'homomorphisme transposé de $\mu_{i*}$.

$\mu_{i*}\lambda_{i*}$ et $\lambda_i^*\mu_i^*$ sont les opérateurs identiques sur $\mathcal{C}_*(X_i)$ et $\mathcal{C}^*(X_i)$. $\mu_{i*}$ conserve les bords et $\mu_i^*$ commute avec l'opérateur cobord $d$, d'où l'homomorphisme $\overline{\mu}_i^*$ de $\mathcal{H}^*(X_i)$ dans $\mathcal{H}^*(X)$.

$k$ étant la dimension de $X_i$, $\lambda_i^*$ diminue les degrés de $N-k$, $\mu_i^*$ les augmente de $N-k$.

Soit $c \in \mathcal{C}^{k-h}(X_i)$, on a

$$(2.1\ bis) \qquad \langle \mu_i^* c . D_*^{N-k} \rangle = \langle c . (D_*^{N-k} \cap X_i) \rangle$$

ou zéro si $D^{N-k} \cap X_i = \emptyset$. Il y a isomorphisme entre $\mathcal{C}^*(X_i)$ et le sous-module différentiel $\mathcal{C}_i^*(X)$ de $\mathcal{C}^*(X)$ formé de toutes les cochaînes s'annulant sur toute chaîne dont le support ne rencontre pas $X_i$; cet isomorphisme augmente des degrés de $N-k$. On posera

$$(2.2) \qquad \mu_i^* c = \hat{c}.$$

**Espaces pseudo-fibrés images réciproques par certaines applications. Applications $f$.** — Soient $\tilde{X}$ et $X$ deux variétés orientées de même dimension $N$ munies respectivement des partitions $(\tilde{X}_i)$ et $(X_i)$ en sous-variétés orientées et des complexes $(\tilde{K})$ et $(K)$ vérifiant les hypothèses de finesse.

*Condition* ($f$). — $f$ est une application simpliciale de $(\tilde{K})$ dans $(K)$ telle que sa restriction à chaque sous-variété $\tilde{X}_i$ soit une application sur une sous-variété $X_j$ qui est localement un homéomorphisme conservant l'orientation. De plus, $(\tilde{K})$ est supposé assez fin pour que si $\tilde{U}$ est l'étoile ouverte dans $(\tilde{K})$ d'un point de $\tilde{X}_i$, la restriction de $f$ à $\tilde{X}_i \cap \tilde{U}$ soit un homéomorphisme.

PROPOSITION 2.4. — *Le degré topologiques local $m(\tilde{x})$ de $f$ au voisinage* *d'un point quelconque $\tilde{x}$ de $\tilde{X}_i$ de dépend que de $\tilde{X}_i$, on le notera $m(\tilde{X}_i)$.*

Soient, en effet, $x \in \tilde{X}_i$, $x = f(\tilde{x}) \in X_j$, $\tilde{U}$ et $U$ les étoiles ouvertes de $\tilde{x}$ et de $x$ respectivement dans $(\tilde{K})$ et $(K)$, $\tilde{x}' \in \tilde{U} \cap \tilde{X}_i$ et $x' = f(\tilde{x}')$. Soit alors $\tilde{x}'' \in f^{-1}(x') \cap \tilde{U}$; si l'on avait $\tilde{x}'' \in \tilde{X}_l$, la dimension de $\tilde{X}_l$ serait strictement supérieure à celle de $\tilde{X}_i$ et de $X_j$ et $x' = f(\tilde{x}'')$ étant dans une partie de même dimension que $\tilde{X}_l$ ne pourrait être dans $X_j$; on a donc démontré par l'absurde que $\tilde{x}'' \in \tilde{X}_i \cap U$; mais la restriction de $f$ à $\tilde{X}_i \cap U$ étant injective par hypothèse, on a nécessairement $\tilde{x}'' = \tilde{x}'$. Le degré topologique global de la restriction de $f$ à $\tilde{U}$ est donc égal à $m(x')$; $m(x')$ est donc constant dans $\tilde{X}_i \cap \tilde{U}$ et, comme lorsque $U$ varie, les $\tilde{X}_i \cap U$ forment un recouvrement ouvert de $\tilde{X}_i$, $m(\tilde{x}')$ est constant sur $\tilde{X}_i$, on peut poser $m(\tilde{x}') = m(\tilde{X}_i)$.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2.5. — *Si $(D)$ est un complexe dual de $(K)$ dans $(X)$, son image réciproque par l'application $f$ définit un complexe $(\tilde{D})$ dual de $(\tilde{K})$ dans $\tilde{X}$.*

$(T)$ étant un sous-complexe de $(K)$, son image réciproque définit un sous-complexe $(\tilde{T})$ de $(\tilde{K})$, les dimensions des cellules étant conservées.

Soit $D^m$ une cellule ouverte de $(D)$ avec $T^0 = D^m \cap K^l (l = N - m)$; soit $\tilde{T}^0$ un des points de $f^{-1}(T^0)$ et $\tilde{U}$ son étoile ouverte dans $(\tilde{K})$, $U$ étant celle de $T^0$ dans $(K)$. $\bar{\tilde{D}}^m = f^{-1}(\bar{D}^m) \cap \tilde{U}$ est un sous-complexe de dimension $m$ de $(\tilde{T})$ rétractible à $\tilde{T}^0$ comme $\bar{D}^m$ l'est à $T^0$; nous allons montrer que c'est une cellule fermée. Le problème étant purement topologique, nous pouvons supposer que $(K) \cap \bar{U}$ est un complexe géométrique situé dans un espace euclidien $\mathbf{R}^M$ de dimension M assez grande, les $T^n$ étant des polyèdres géométriques. Soient $H_0$ le $l$-plan de $K^l$, $a$ un point de $U \cap K^h$ et $H_a$ le $l$-plan parallèle à $H_0$ dans $\mathbf{R}^M$ et passant par $a$; $H_a$ est dans le $h$-plan de $K^h$. Il existe un voisinage fermé $\bar{D}'^m$ de $T^0$ dans $D^m$ tel que, pour tout $a \in \bar{D}'^m \cap K^h$, $H_a$ coupe canoniquement $D^m$ dans $U$ et $D^m \cap K^h$ dans $K^h$. $H_a \cap K^h$ est une $l$-cellule et la distance, dans $\mathbf{R}^M$, de $a$ au bord de cette cellule étant bornée inférieurement par $r > 0$ fixe indépendant de $a \in \bar{D}'^m$, la cellule contient une $l$-boule fermée de centre $a$ et de rayon fixe $r$ qui correspond biunivoquement à sa projection $b^l$ sur $H_0$ parallèlement à $\bar{D}'^m \cap K^h$. Lorsque $a$ décrit $\bar{D}'^m$, cette boule, qui coupe canoniquement $\bar{D}'^m$ au seul point $a$, engendre un voisinage $v$ de $T^0$ dans $X$; $v$ admet donc un isomorphisme $u^{-1}$ sur le produit $b^l \times \bar{D}'^m$.

$\tilde{v} = f^{-1}(v) \cap \tilde{U}$ est un voisinage de $\tilde{T}^0$ dans $\tilde{X}$. Définissons l'application suivante $\tilde{u}$ de $b^l \times \bar{\tilde{D}}^m$ sur $\tilde{v}$; soient $\beta \in b^l$, $\tilde{\delta} \in \bar{\tilde{D}}^m \cap \tilde{K}^h$, on posera

$$\tilde{u}(\beta, \tilde{\delta}) = f^{-1} u(\beta, f(\tilde{\delta})) \cap \tilde{K}^h;$$

$\tilde{u}$ est une application continue car si $f'$ est la restriction de $f$ à $\bar{\tilde{K}}^h$, $f'^{-1}$ est continue dans $\bar{K}^h = f(\bar{\tilde{K}}^h)$; $\tilde{u}$ est bijective : soit, en effet, $\tilde{x} \in \bar{\tilde{K}}^h \cap \tilde{v}$, alors $f(\tilde{x}) = u(\beta, \delta)$ et $\tilde{\delta} = f^{-1}(\delta) \cap \bar{\tilde{K}}^h$ est un point en vertu de l'isomorphisme entre $\bar{\tilde{K}}^h$ et son image; on a alors $\tilde{u}(\beta, \tilde{\delta}) = \tilde{x}$.

Si aucun voisinage de $\tilde{T}^0$ dans $\bar{\tilde{D}}^m$ n'était homéomorphe à une $m$-boule, le produit $b^l \times \bar{\tilde{D}}^m = \tilde{u}^{-1}(\tilde{v})$ ne serait pas une variété au voisinage de $(\tilde{T}^0, T^0)$ ce qui est absurbe, donc il existe un voisinage de $\tilde{T}^0$ dans $\tilde{v}$, donc dans $\bar{\tilde{D}}^m$, qui est une $m$-boule; il en est de même du complexe $\bar{\tilde{D}}^m$ qui est rétractible à $\tilde{T}^0$. Cela démontre la propriété.

COROLLAIRE. — *L'ensemble des points de $\tilde{X}$ où le degré topologique local de $f$ est strictement supérieur à* 1, *s'il n'est pas vide, est un sous-complexe de $(K)$ dont la dimension est $N-2$* [4].

Ce sous-complexe admet une partition en sous-variétés $X_i$ de dimension $N-2$, cela résulte de la proposition 2.4. Il suffira donc de montrer que si $m(X^k) > 1$, avec $k < N-2$, il existe $\overline{X}_j \supset X^k$ tel que $m(X_j) > 1$ ou encore de montrer qu'on a nécessairement $k = N-2$ si l'on fait les hypothèses $m(X^k) > 1$ et $m(X_j) = 1$ pour tout $\overline{X}_j \supset X^k$. Faisons donc ces hypothèses; soit $\tilde{T}^0 \in \tilde{X}^k \cap \tilde{D}^{N-k}$; d'après la propriété 2.5, l'image par $f$ de la sphère topologique $\dot{\tilde{D}}^{N-k}$ est une sphère topologique $\dot{D}^{N-k}$ mais en tout point $\tilde{x}$ de $\dot{\tilde{D}}^{N-k}$, $\tilde{x} \in \tilde{X}_j$, le degré topologique local de $f$ est $m(\tilde{X}_j) = 1$, donc la restriction de $f$ à $\dot{\tilde{D}}^{N-k}$ est localement un homéomorphisme, il ne l'est pas globalement puisque son degré topologique local est $m(X^k) > 1$, cela n'est possible que pour une sphère topologique de dimension 1, donc $N-k-1 = 1$, $k = N-2$.

C. Q. F. D.

La restriction de $f$ à une cellule $\tilde{D}^n$, qui est une application conservant le bord et les ouverts, a pour degré topologique $m(X_i)$ si $D^n \cap X_i = T^0$, nous le noterons aussi $\overline{m}(\tilde{D}^n)$, d'où

$$\overline{m}(\tilde{D}^n) = m(X_i) = m(T^0). \tag{2.3}$$

Cette formule est un cas particulier d'une autre : si $\bar{\tilde{D}}^n \cap \tilde{X}_i \neq \varnothing$, la

---

[4] La proposition 2.4 et le corollaire de la proposition 2.5 sont valables dans des conditions plus générales, *cf.* SCHWARTZ (Marie-Hélène) : formules apparentées à la formule de Gauss-Bonnet pour certaines applications d'une variété à $n$ dimensions dans une autre, *Acta Mathematatica*, t. 91, 1954, p. 189-244, en particulier les propriétés 13.1, 17.1 et 17.2 et remarque 13.1.

restriction de $f$ à cette partie est une application sur une partie $\overline{D}^n \cap X_i$ qui conserve les bords et les ouverts, et dont nous désignerons le degré topologique par $\overline{m}(\tilde{D}^n \cap \tilde{X}_i)$, on a alors

$$\overline{m}(\tilde{D}^n) = \sum_i \overline{m}(\tilde{D}^n \cap \tilde{X}_i).m(\tilde{X}_i), \tag{2.4}$$

la somme étant étendue à tous les $X_i$ ayant une même image $X_j$ par $f$ et rencontrant $\tilde{D}^n$.

Soit, en effet, $T^0 \in \overline{D}^m \cap X_j$ ; le nombre de ses images réciproques dans $\tilde{\overline{D}}^m \cap \tilde{X}_i$ est $\overline{m}(\tilde{D}^m \cap \tilde{X}_i)$ ; soit $\tilde{T}^0_{ik}$ l'une d'elles, la restriction de $f$ à $\tilde{\overline{D}} \cap \tilde{X}_i$ est un homéomorphisme au voisinage de $\tilde{T}^0_{ik}$, et le degré topologique local de $f$ au voisinage de $\tilde{T}^0_{ik}$ est, nous l'avons vu, $m(\tilde{X}_i)$, donc, si $x$ est un point de $\overline{D}^m$ et de l'étoile de $T^0$ dans $(T)$ qui, de plus, est dans un $K^N$, et a donc toutes ses images réciproques distinctes, le nombre de celles-ci, comptées dans les étoiles, dans $(\tilde{T})$ des $\tilde{T}^0_{ik}$, est bien $\sum_i \overline{m}(\tilde{D}^m \cap \tilde{X}_i) \times m(\tilde{X}_i)$.

**Image réciproque d'un espace pseudo-fibré par $f$.** — Soit $\mathcal{E}$ un espace pseudo-fibré dont la base est $X$, munie de la partition $(X_j)$ et des complexes $(K)$ et $(D)$ ; son image réciproque $\tilde{\mathcal{E}}$ de base $\tilde{X}$ muni de la partition $(\tilde{X}_i)$ et des complexes $(\tilde{K})$ et $(\tilde{D})$ sera ainsi définie : l'ensemble de ses points sera la partie de produit $\tilde{X} \times \mathcal{E}$ formé des couples $(\tilde{x}, z)$ tels que

$$f(\tilde{x}) = \varpi(z) \tag{2.5}$$

la projection $\tilde{\varpi}$ du point $\tilde{z}$ défini par le couple $(\tilde{x}, z)$ sera $\tilde{x}$ ; d'où l'isomorphisme canonique de la fibre $\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{x}) = \tilde{\varpi}^{-1}(\tilde{x})$ sur la fibre $\mathcal{E}(x)$ pour $x = f(\tilde{x})$ qui, à $\tilde{z}$ défini par $(\tilde{x}, z)$, fait correspondre $z$. Quand $\tilde{x}$ décrit $x$, on obtient une application $\check{f}$ de $\tilde{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{E}$.

*Cartes sur* $\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{L})$. — La restriction de $f$ à $\tilde{L}$ est un homéomorphisme sur une partie $L$ de même dimension ; en la composant avec l'identité sur $\mathrm{F}_k$ on obtient un homéomorphisme $h$ de

$$\tilde{\mathcal{L}} = \bigcup_{q=p}^{q=k} (\tilde{L} \times \tilde{X}^q) \times \alpha_q$$

sur $\mathcal{L}$ défini par la formule (1.3). Par ailleurs, la restriction $\check{f}'$ de $f$ à $\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{L})$ étant une bijection, a un inverse $\check{f}'^{-1}$. Si une carte sur $\mathcal{E}(L)$ est définie par $\mathcal{L}$

et $g$, on définira la carte correspondante par l'application $\tilde{g} = \check{f}'^{-1}gh$ de $\tilde{\mathcal{E}}$ sur $\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{L})$.

PROPOSITIONS 2.6. — *a. La topologie de l'espace pseudo-fibré* $\tilde{\mathcal{E}}$ *coïncide avec la topologie induite par celle de* $\check{X} \times \mathcal{E}$.

*b.* $\check{f}$ *conserve les ouverts.*

Soit $\tilde{O}$ un ouvert élémentaire pour cette topologie induite, trace sur $\tilde{\mathcal{E}}$ du produit d'un ouvert $\tilde{o}$ de $\check{X}$ par un ouvert $O$ de $\mathcal{E}$, sa projection $\tilde{o}$ sur $\check{X}$ est évidemment un ouvert; donnons-nous une partie $\tilde{L}$, $\tilde{O} \cap \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{L})$ est l'ensemble des couples $(\tilde{x}, z)$ tels que $x \in \tilde{o}$ et $z \in O \cap \mathcal{E}(L \cap f(\tilde{o}))$, donc

$$\check{f}(\tilde{O} \cap \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{L}) = O \cap \mathcal{E}(L \cap f(\tilde{o}));$$

comme $f$ conserve la dimension des simplexes et l'orientation, l'image $f(\tilde{o})$ est un ouvert de $X$ donc $O \cap \mathcal{E}(L \cap f(\tilde{o}))$ est un ouvert de $\mathcal{E}(L)$. Or, d'après la définition de $\tilde{g}$,

$$g^{-1}(\tilde{O} \cap \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{L})) = h^{-1}g^{-1}[O \cap \mathcal{E}(L \cap f(\tilde{o}))],$$

c'est donc un ouvert de $\tilde{\mathcal{E}}$, et $\tilde{O}$ est bien un ouvert pour la topologie d'espace pseudo-fibré.

Réciproquement soit $\tilde{\Omega}$ un ouvert pour la topologie d'espace pseudo-fibré de $\tilde{\mathcal{E}}$; montrons d'abord que $\Omega = \check{f}(\tilde{\Omega})$ est un ouvert de $\mathcal{E}$ : d'après (2.5), on a $\varpi(\Omega) = f\tilde{\varpi}(\tilde{\Omega})$, c'est l'image par $f$ d'un ouvert de $\check{X}$, donc un ouvert de $X$; par ailleurs, si $\Omega \cap \mathcal{E}(L) \neq \emptyset$, on a

$$\Omega \cap \mathcal{E}(L) = \bigcup_i \check{f}(\tilde{\Omega} \cap \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{L}_i)) \qquad \text{pour} \quad \tilde{L}_i \subset f^{-1}(L),$$

comme la restriction de $\check{f}$ à $\mathcal{E}(\tilde{L}_i)$ est un isomorphisme sur $\mathcal{E}(L)$ chacun des $f(\tilde{\Omega} \cap \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{L}_i))$ et leur réunion sont des ouverts de $\mathcal{E}(L)$. $\Omega$ vérifie bien les axiomes des ouverts.

Soient maintenant $\tilde{z} \in \tilde{\Omega}$, $\tilde{\varpi}(\tilde{z}) = \tilde{x}$, $x = f(\tilde{x})$, soit $L_j$ une partie $L$ contenant $x$, donc située dans son étoile ouverte $U$ dans $(K)$; $\tilde{U}$ étant l'étoile ouverte de $\tilde{x}$ dans $(\tilde{K})$, posons

$$\Omega_j = \bigcap_i \check{f}(\tilde{\Omega} \cap \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{L}_{ij}))$$

pour tous les $\tilde{L}_{ij}$ de $U$ dont l'image par $f$ est $L_j$, posons ensuite

$$\Omega' = \bigcup \Omega_j; \qquad \text{on a} \quad f(\tilde{z}) = z \in \Omega' \subset U.$$

Soit $o = \varpi(\Omega')$; les

$$\varpi\check{f}(\tilde{\Omega} \cap \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{L}_{ij})) = f\tilde{\varpi}(\tilde{\Omega} \cap \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{L}_{ij}))$$

sont des ouverts de $L_j$ pour la topologie induite ainsi que leur intersection; donc la réunion $o$ de ces intersections, quand $L_j$ décrit $U$, est un voisinage ouvert de $x$ dans $\mathcal{X}$; par ailleurs, comme les restrictions de $\check{f}$ aux $\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{L}_{ij})$ sont des isomorphismes, chaque $\Omega_j$ est un ouvert de $\mathcal{E}(L_j)$; donc $\Omega'$ est un ouvert de $\mathcal{E}$. $\tilde{o} = f^{-1}(o) \cap \tilde{U}$ est un ouvert de $\tilde{\mathcal{X}}$. Soit $\tilde{z}'(\tilde{x}', z)$ un élément de $(\tilde{o} \times \Omega') \cap \tilde{\mathcal{E}}$; on a alors $f(\tilde{x}') = \varpi(z) = x \in L_j$, donc

$$\tilde{z}' = f^{-1}(z') \cap \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{x}') \in \tilde{O} \cap \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{L}_{ij}) \subset \tilde{\Omega}.$$

Donc $\tilde{\Omega}$ qui contient la trace d'un ouvert élémentaire autour de chacun de ses points est un ouvert pour la topologie induite.

L'application $\check{f}$ est donc la projection sur $\mathcal{E}$ dans $\tilde{\mathcal{X}} \times \mathcal{E}$; elle est continue et, comme nous l'avons vu, l'image directe d'un ouvert par $\check{f}$ est un ouvert. La propriété est donc démontrée.

**Image réciproque d'une section.** — Soient $s$ une section de $\mathcal{E}$ au-dessus de $A$, $\tilde{A} = f^{-1}(A)$ et $\tilde{x} \in \tilde{A}$, l'isomorphisme entre les fibre $\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{x})$ et $\mathcal{E}(f(\tilde{x}))$ permet de définir une section $\tilde{s} \mid \tilde{A}$ par

$$\tilde{s}(\tilde{x}) = \check{f}^{-1}(s(f(\tilde{x}))) \cap \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{x}). \tag{2.6}$$

**Image directe d'une chaîne.** — Nous désignerons par $f_*$ l'homomorphisme de $\mathcal{C}_*(\tilde{\mathcal{X}})$ dans $\mathcal{C}_*(\tilde{\mathcal{X}})$ défini par

$$f(\tilde{D}_{i*}) = \overline{m}(\tilde{D}_i) f(\tilde{D}_i), \tag{2.7}$$

où $D_{i*}$ est une chaîne élémentaire de support $D_i$; la chaîne élémentaire image ainsi définie coïncide avec la chaîne singulière définie par l'application $f$ de la cellule orientée $D_{i*}$ dans $\mathcal{X}$. On vérifie que $f$ commute avec l'opérateur bord; en effet, l'orientation d'une cellule $D^n$ induisant celle de son bord, on a

$$f_*(\dot{\tilde{D}}^n_*) = \sum_i f(\tilde{D}^{n-1}_{i*}) = \sum_i \overline{m}(\tilde{D}^{n-1}_i) f(\tilde{D}^{n-1}_i).$$

Groupons tous les $\tilde{D}^{n-1}_i$ qui ont même image $D^{n-1}_j$, la somme partielle correspondante des $\overline{m}(\tilde{D}^{n-1}_i)$ sera égale au degré topologique global $\overline{m}(\tilde{D}_n)$ de la restriction de $f$ à $\tilde{D}^n$; on a donc, compte tenu des orientations canoniques des bords,

$$f_*(\dot{D}^n) = \sum_i \overline{m}(\tilde{D}^n) D^{n-1}_i = \overline{m}(\tilde{D}^n) \dot{D}^n = \text{bord de } f_*(\tilde{D}_n).$$

**Image réciproque d'une cochaîne.** — Nous désignerons par $f^*$ l'homomorphisme de $\mathcal{C}^*(X)$ dans $\mathcal{C}^*(\tilde{X})$ transposé de $f_*$; il conserve donc les degrés, commute avec l'opérateur cobord $(\tilde{d}f^* = f^*d)$ et induit un homomorphisme $\bar{f}^*$ de $\mathcal{H}^*(X)$ dans $\mathcal{H}^*(\tilde{X})$. On a, si $c \in \mathcal{C}^n(X)$,

$$\langle f^*(c).\tilde{D}^n\rangle = \overline{m}(\tilde{D}^n)\langle c.f(\tilde{D}^n)\rangle. \tag{2.8}$$

**Homomorphisme $f_{i*}$ de $\mathcal{C}_*(\tilde{X}_i)$ dans $\mathcal{C}_*(X_i)$, avec $X_i = f(\tilde{X}_i)$.** — Il est défini par la relation

$$f_{i*}(\tilde{D}^n_* \cap \tilde{X}_i) = \overline{m}(\tilde{D}^n \cap X_i)f(\tilde{D}^n \cap \tilde{X}_i) \in \mathcal{C}_*(X_i).$$

**Homomorphisme $\tilde{f}_i^*$ de $\mathcal{C}^*(X_i)$ dans $\mathcal{C}^*(\tilde{X}_i)$.** — C'est le transposé du précédent; si $k$ est la dimension de $X_i$, il est donc défini, pour $c \in \mathcal{C}^{k+n-N}(X_i)$ par

$$\langle f_i^*(c).\tilde{D}^n_* \cap \tilde{X}_i\rangle = \overline{m}(\tilde{D}^n \cap \tilde{X}_i)\langle c.f(\tilde{D}^n_* \cap \tilde{X}_i)\rangle. \tag{2.9}$$

En vertu des définitions de $f^*$ et de $\mu_j^*$ [form. (2.1 *bis*)], on a

$$\langle f^*\mu_j^*(c).D^n\rangle = \overline{m}(\tilde{D}^n)\langle \mu_j^*(c).D^n\rangle = \overline{m}(\tilde{D}^n)\langle c.D^n \cap X_j\rangle,$$

ceci en posant $D^n = f(\tilde{D}^n)$ et en supposant $X_j \cap D^n \neq \emptyset$. Ces expressions sont encore égales, en vertu de la formule (2.4) et des définitions de $f_i^*$ et de $\tilde{\mu}_i^*$ à l'expression suivante relative à tous les $\tilde{X}_i$ d'image $X_j$ :

$$\begin{aligned}\sum_i m(\tilde{X}_i)\overline{m}(\tilde{D}^n \cap \tilde{X}_i)\langle c.D^n \cap X_j\rangle &= \sum_i m(\tilde{X}_i)\langle f_i^*(c).\tilde{D}^n \cap \tilde{X}_i\rangle \\ &= \sum_i m(\tilde{X}_i)\langle \tilde{\mu}_i^* f_i^*(c).\tilde{D}^n\rangle,\end{aligned}$$

d'où, finalement, la formule

$$f^*\mu_i^* = \sum_i m(\tilde{X}_i)\,\tilde{\mu}_i^* f_i^* \quad \text{pour les } X_i \text{ tels que } f(X_i) = X_j. \tag{2.10}$$

## 3. Étude locale des espaces pseudo-fibrés à fibres vectorielles.

**Espaces Γ.** — Soit une base formée par la variété $X$ munie de la partition $(X_i)$ et du complexe $(K)$; un espace Γ est un espace topologique muni d'une projection $\varpi$ sur $X$ et tel que, si $x \in X^k$, $\Gamma(x) = \varpi^{-1}(x)$ soit un espace vectoriel réel (resp. complexe) dont la dimension $\mu(k)$ ne dépend que de $k$.

Tous les espaces pseudo-fibrés à fibres vectorielles sont donc des espaces Γ de même que les espaces $\Gamma$ de type tangentiel déjà définis au paragraphe 1; pour ce dernier type on a $\mu(k)=k$ dans le cas réel et, dans le cas complexe $\mu(k)=k/2$.

**Applications $\varphi$ dans un espace $\Gamma$.** — Une famille d'applications $\varphi$, si elle existe, se compose, relativement à chaque simplexe $K^h$ d'un ensemble d'applications $\varphi_h$ vérifiant les *conditions* $(\varphi)_1$ *et* $(\varphi)_2$ suivantes ($U_l$ est l'étoile ouverte du simplexe $K^l$ dans $(K)$ et $K^l \subset X^p$) :

$(\varphi)_1$ $\varphi_l$ est une application injective continue de $U_l \times F_p$ dans $\Gamma(U_l)$ dont la restriction à $\{x\} \times F_p$ est une application linéaire injective dans $\Gamma(x)$.

$(\varphi)_2$ Soit $K^h \subset U_l \cap X^m$ et $U_h$ l'étoile ouverte de $K^h (U_h \subset U_l)$, alors, à une application $\varphi_l$ donnée, on peut associer une application $\varphi_h$ de $U_h \times F_m$ dans $\Gamma(U_h)$ telle que, pour $x \in U_h$, $\varphi_h(\{x\} \times F_m)$ admette pour sous-espace vectoriel $\varphi_l(\{x\} \times F_p)$.

Proposition 3.1. — *Tout espace pseudo-fibré à fibres vectorielles possède une famille d'application $\varphi$. De plus, si toutes les fibres et fibres types sont munies d'une orientation et que les $\varphi$ conservent ces orientations, une telle famille vérifie la* condition $(\varphi)'_1$ *suivante :*

$(\varphi)'_1$ Si $\varphi_h$ et $\varphi'_h$ sont deux applications de $U_h \times F_m$ dans $\mathcal{E}(U)$ définies par la condition $(\varphi)_1$, elles sont strictement homotopes, c'est-à-dire qu'il existe une application continue de $U \times F_m \times [0, 1]$ dans $\mathcal{E}(U)$ telle que, pour $t \in [0, 1]$, sa restriction à $U \times F_m \times \{t\}$ soit une des applications, soit $\varphi_h(t)$, définies par $(\varphi)_1$, avec $\varphi_h(0)=\varphi_h$ et $\varphi_h(1)=\varphi'_h$.

*En particulier, tous les espaces pseudo-fibrés à fibres vectorielles complexes vérifieront les trois conditions $(\varphi)_1$, $(\varphi)_2$ et $(\varphi)'_1$.*

1° Vérifions d'abord la condition $(\varphi)_1$. Remarquons que, d'après l'hypothèse de finesse, $\overline{K^l} \cap X^p$ contient un sommet $K^0$ dont l'étoile ouverte $U_0$ contient celle de $K^l$; il suffit donc de vérifier $(\varphi)_1$ pour $l=0$. Soit ${}^r\mathcal{E}$ avec $r=\mu(p)$ l'espace pseudo-fibré des $\mu(p)$-repères associé à $\mathcal{E}$; d'après la proposition 2.3, il possède une section $s \mid U_0$. Soit $Z_r$ un $\mu(p)$-repère fixe de $F_p$ formé des vecteurs $\varepsilon_i$ $(1 \leq i \leq r)$; l'application de $Z_r$ sur le $\mu(p)$-repère $s(x)$, $x \in U_0$ définit une application linéaire injective de $F_p$ ou de $\{x\} \times F_p$ dans $\mathcal{E}(x)$; lorsque $x$ décrit $U_0$ on obtient une injection de $U_0 \times F_p$ dans $\mathcal{E}(U_0)$ qui vérifie bien la condition $(\varphi)_1$.

2° Pour vérifier la condition $(\varphi)_2$ supposons

$$K^0 \subset \overline{K^h} \subset \overline{K^n}, \qquad K^0 \subset X^p, \qquad K^h \subset X^m, \qquad K^n \subset X^k,$$

soit $U_h$ l'étoile ouverte de $K^h$, $U_h \subset U_0$. Supposons donnée l'application $\varphi_0$ de $U_0 \times F_p$ dans $\mathcal{E}(U_0)$ et soit $x \in U_h \subset U_0$, donc $x \in X^k$ avec $k \geq m$ et soit $W(x)$ l'espace des $\mu(m)$-repères de $\mathcal{E}(x)$ dont les $\mu(p)$ premiers vecteurs forment le $\mu(p)$-repère $\varphi_0(x, Z_r)$ obtenu en prenant l'image $\varphi_0(x, \varepsilon_i)$ de chacun des vecteurs formant $Z_r$; lorsque $x$ décrit $U_h$, $W(x)$ engendre un espace $W(U)$ muni d'une projection sur $U_h$; pour vérifier la condition $(\varphi)_2$ il suffira évidemment de construire une section $s$ de $W(U)$; nous le ferons en opérant au-dessus des parties $L \cap U_h$ de dimensions $n$ croissantes et, comme il existe $K'^0 \in \overline{K}^h \cap X^m$ nous pourrons prendre $L = K^n \cap \overset{\circ}{\text{et}}\ K'^0$. Supposons la section $s$ déterminée au-dessus de tous les $L \cap U_h$ de dimensions $n' < n$ ($n \geq h$ et la condition disparaît pour $n = h$); soient alors

$$L = \overline{K}^m \cap \overset{\circ}{\text{et}}\ K'^0, \qquad \mathcal{L} = \bigcup_{q=m}^{q=k} (L \cap X^q) \times \alpha_q \subset L \times F_k$$

et $g$ une application de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{E}(L)$ qui définit une carte de $\mathcal{E}$. Soit $x \in L$, considérons la variété des $\mu(m)$-repères de $\{x\} \times F_k$ dont les $\mu(p)$ premiers vecteurs sont les $g^{-1}\varphi_0(x, \varepsilon_i)$; lorsque $x$ décrit $L$ elle engendre un espace fibré. Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a une section $\check{g}^{-1}s$ de cet espace au-dessus de $\dot{L} \cap U_h$ (l'image par $\check{g}^{-1}$ d'un $r$-repère étant obtenu en prenant les images par $g^{-1}$ de ses vecteurs). $\dot{L} \cap U_h$ est, topologiquement, une $(n-1)$-boule fermée privée d'une partie de son bord donc, d'après le théorème de relèvement des homotopies, la section $\check{g}^{-1}s$ est prolongeable au-dessus de $L \cap U_h$; la partie prolongée étant dans $\overset{\circ}{L} \cap U_h \subset \mathcal{L}$ admet une image réciproque par $\check{g}$ qui définit le prolongement de $s$ au-dessus de $L \cap U_h$; on obtient bien une section de $W(U)$.

C. Q. F. D.

3° Pour vérifier la condition $(\varphi)'_1$ il suffit encore de la vérifier pour les applications $\varphi_0$. Reportons-nous à la première partie de la démonstration : les applications $\varphi_0$ et $\varphi'_0$ seront strictement homotopes si et seulement si les sections correspondantes, soient $s$ et $s'$, de ${}^r\mathcal{E}\,[r = \mu(p)]$ sont homotopes au-dessus de $U_0$. Or, d'après la proposition 2.3, elles le sont si la fibre type ${}^rF_p$ est connexe : il en est toujours ainsi dans le cas complexe où cette fibre est ${}^{p/2}\mathbf{C}^{p/2} = GL(\mathbf{C}, p/2)$; dans le cas réel cette fibre est $GL(\mathbf{R}, p)$ qui n'est pas connexe mais si les fibres sont orientées et que les $\varphi$ conservent ces orientations, la fibre type qui interviendra sera la composante connexe de l'unité dans $GL(\mathbf{R}, p)$.

Proposition 3.2. — *Si un espace* $\Gamma$ *possède une famille d'application* $\varphi$ *vérifiant* $(\varphi)_1$ *et* $(\varphi)_2$ *il possède une structure d'espace pseudo-fibré qui est unique si l'on se restreint aux structures topologiques.*

Soit $L = \overset{\circ}{\text{et}}\ K^0 \cap \overline{K}^m$, avec $K^0 \in X^p$ et $K^m \in X^k$ : nous allons former une carte sur $\Gamma(L)$ : on peut encore définir

$$\mathcal{L} = \bigcup_{q=p}^{q=k} (L \cap X^q) \times \alpha_q \subset L \times F_k;$$

on pourra choisir un $\mu(k)$-repère fixe de $F_k$ telle que, pour tout $q$, les $q$ premiers vecteurs soient dans $\alpha_q$, soient $e_i$ ses vecteurs. Soit $\pi_F$ la projection sur $F_k$ dans $\mathcal{L} \subset L \times F_k$; soit $K^h \subset L \cap X^q \subset \overline{K}^h$, $U_h$ étant l'étoile ouverte de $K^h$, $(\zeta, x) \in \pi_F^{-1}(\alpha_q)$ entraîne $(\zeta, x) \in (L \cap X^{k'}) \times \alpha_{k'}$ avec $k' \geqq q$, donc $x \in U_h \cap L$, d'où

$$(3.1) \qquad \pi_L \pi_F^{-1}(\alpha_q) \subset U_h \cap L.$$

Nous allons définir l'application $g$ de $\mathcal{L}$ sur $\Gamma(L)$ en construisant ses restrictions aux parties emboîtées $\pi_F^{-1}(\alpha_q)$ pour $q$ croissant. Pour $q = p$, $\pi_F^{-1}(\alpha_p) = L \times \alpha_p$ et nous pourrons prendre pour restriction de $g$ à $L \times \alpha_p$ la restriction au même ensemble d'une application $\varphi_0$ définie par $(\varphi)_1$. Supposons la restriction de $g$ déterminée dans $\pi_F^{-1}(\alpha_{q'})$, et supposons de plus que cette restriction coïncide avec la restriction d'une application $\varphi_{h'}$ à $U_{h'} \cap L \times \alpha_{q'}$ ($U_{h'}$ est l'étoile de $K^{h'}$ avec $K^{h'} \subset L \cap X^{q'} \subset \overline{K}^{h'}$). Soit alors $q$ l'entier de la suite des dimensions des $X_i$ coupant $L$ qui suit immédiatement $q'$; $U_h$ étant défini comme $U_{h'}$, il existe, d'après $(\varphi)_2$, une application $\varphi'$ telle qu'on ait, pour

$$x \in U_h \subset U_{h'}, \qquad \varphi_{h'}(\{x\} \times \alpha_{q'}) \subset \varphi'_h(\{x\} \times \alpha_q);$$

donc $\varphi_h'^{-1}\varphi_{h'}$ définit une injection linéaire de $\{x\} \times \alpha_{q'}$ dans $\{x\} \times \alpha_q$; soit $e_j(x)\,[j \leqq \mu(q')]$ l'image par cette injection, de $(x, e_j)$, $e_j$ étant un vecteur fixe de la base de $\alpha_{q'}$ contenue dans celle de $F_x$. Les $e_j(x)$ forment un $\mu(q')$-repère de $\{x\} \times \alpha_{q'}$, soit $V(x)$ la variété des $\mu(q)$-repères de cet espace vectoriel dont les $\mu(q')$ premiers sont les $e_j(x)$. Lorsque $x$ décrit la boule $U_h$, $V(x)$ engendre un espace fibré qui admet une section $s$; celle-ci détermine donc en tout point $x \in U$ un $\mu(q)$-repère $s(x)$ de $\{x\} \times \alpha_q$. Soit $\gamma$ l'automorphisme de $U \times \alpha_q$ dont la restriction à $\{x\} \times \alpha_q$ est l'application linéaire bijective pour laquelle les vecteurs de $s(x)$, pris dans leur ordre, sont les images respectives des $(x, e_i)\,[i \leqq \mu(q)]$, les $e_i$ formant le $\mu(q)$-repère fixe de $\alpha_q$. Donc $\varphi_h = \varphi'_h\gamma$ appartient à l'ensemble des $\varphi$ relatifs à $K^h$. Par ailleurs, la considération des vecteurs $e_i\,[i \leqq \mu(q')]$ qui forment la base fixe de $\alpha_{q'}$ montre que la restriction de $\varphi_h$ à $U_h \times \alpha_{q'}$ coïncide avec $\varphi'_h \varphi_h'^{-1} \varphi_{h'} = \varphi_{h'}$. Nous pourrons donc prendre pour $g$ sur $(U_h \cap L) \times \alpha_q$ la restriction de $\varphi_h$ à ce même ensemble et continuer pour $q'' > q$. L'application $g$ de $\mathcal{L}$ dans $\Gamma(L)$ sera ainsi déterminée.

Les cartes ainsi déterminées vérifient évidemment la condition de compatibilité (ii), pour vérifier la condition (i) il suffit de remarquer que, pour $x \in L$, la structure linéaire de $\Gamma(x)$, donnée avec $\Gamma$, a pour image par $g_1$ (resp. $g_2$) la structure linéaire de $\mathcal{L}_1(x)$ [resp. $\mathcal{L}_2(x)$]; la restriction à $\mathcal{L}_2(x)$ de $g_1^{-1} g_2$ est donc bien une application linéaire (bijective) sur $\mathcal{L}_2(x)$.

Remarque 3.1. — Les $\varphi_h$ ont été choisis tels que si $K^h \subset X^x \cap L$; on a

$$(3.2) \qquad g^{-1}\varphi_h(x, \varepsilon_i) = (x, e_i) \qquad \text{pour} \quad i \leqq q \quad \text{et} \quad x \in U_h,$$

Mais $\varphi_0$ a été pris arbitrairement; on peut donc énoncer : Si, un dans un espace pseudo-fibré $\mathcal{E}$, on se donne une application $\varphi$ de $U \times F_p$ dans $\mathcal{E}(U)$ vérifiant la condition $(\varphi)_1$, un $\mu(p)$-repère fixe de $F_p$ formé de vecteurs $\varepsilon_i$ et $L \subset U$, il existe une carte définie par une application $g$ de $\mathcal{L} \subset L \times F_k$ sur $\mathcal{E}(U)$ et un $(p)$-repère fixe de $F_k$ tels que

$$(3.3) \qquad g^{-1}\varphi(x, \varepsilon_i) = (x, e_i) \qquad \text{pour} \quad i \leqq \mu(p) \quad \text{et} \quad x \in L.$$

Remarque 3.2. — Si $\Gamma$ est de type tangentiel réel (resp. complexe), la propriété précédente peut s'énoncer ainsi, moyennant l'hypothèse supplémentaire que la variété $X$ elle-même est différentiable (resp. presque complexe) :

Soit comme précédemment une base formée de $X$ muni de sa partition $(X_i)$ et du complexe $(K)$, les $X_i$ étant supposés differentiables (resp. presque complexes), de même que $X$. On suppose que si $K^0 \in X^p$ il existe, dans l'étoile ouverte $U_0$ de $K^0$ un champ continu d'éléments de contact de $X$ réels (resp. complexes), de dimension réelle $p$ qui, en chaque point de $U \cap X^q$ est tangent à $X^q$; on suppose aussi que, pour $K^h \subset U_0 \cap X^k$ il existe dans son étoile ouverte $U_h$ un champ continu d'éléments de contact de $X$ réels (resp. complexes) de dimension réelle $z$ qui en chaque point de $U_h \cap X^q$ est tangent à $X^q$ et contient l'élément de dimension réelle $p$ déjà déterminé. La base est alors celle d'un espace pseudo-fibré de type tangentiel $\mathcal{E}$ déterminé de façon unique.

Les classes de cohomologie qui seront déterminées plus loin sur les $X_i$ par l'intermédiaire des espaces ${}^r\mathcal{E}$ seront alors des caractéristiques de la structure différentiable (resp. presque complexe) de la partition $(X_i)$ et aussi, *a priori*, des complexes $(K)$ et $(D)$.

**Un exemple.** — Si tous les $\overline{X}_i$ sont des variétés différentiables, l'espace $\Gamma$ des vecteurs tangents aux $X_i$ possède une structure d'espace pseudo-fibré.

D'après la proposition 3.2, il suffit, en effet, pour le démontrer, de vérifier les conditions $(\varphi_1)$ et $(\varphi_2)$. Soient $K_0 \subset X^p$ et $U = \mathring{\text{et}}\, K^0$. Construisons une application $\varphi$ de $U \times F_p$ dans $\mathcal{E}(U)$; fixons un $p$-repère de $F_p$ formé de vecteurs $e_j (1 \leqq j \leqq p)$, ordonnons les $\overline{X}_i$ qui contiennent $K^0$ par dimensions croissantes et supposons la restriction de $\varphi$ à $\overline{X}_j \cap U$ déterminée pour $j < i$ (hypothèse triviale pour $X_i = X^p$). Soit ${}^pE(\overline{X}_i)$ l'espace fibré des $p$-repères tangents à $\overline{X}_i$. $\varphi$ détermine donc une section de ${}^pE(\overline{X}_i)$ au-dessus de $\dot{X}_i \cap U$. $\overline{X}_i \cap U$ est une boule ouverte et l'on pourra y prolonger la section au-dessus des $\overline{K} \cap U$ de dimensions croissantes par relèvement des homotopies; la partie prolongée étant dans ${}^pE(X_i) = {}^p\mathcal{E}(X_i)$ définit bien le prolongement de $U \cap \overline{X}_j$.

Pour vérifier $(\varphi)_2$ considérons $K^h \subset U \cap X^m$ et $U_h = \mathring{\text{et}}\, K_h \subset U$; supposons l'application $\varphi_h$ qui doit être associée à $\varphi$ construite dans $(X_j \cap U_h) \times F_m$ pour $j < i$; elle détermine une section au-dessus de $\dot{X}_i \cap U$ dans l'espace fibré $B(\overline{X}_i)$ des $m$-repères tangents à $\overline{X}_i$ dont les $p$ premiers vecteurs sont, au-dessus de $x$, les $\varphi(\{x\} \times e_j)$, cette section est encore prolongeable par relèvement des homotopies au-dessus de $\overline{X}_i \cap U$ déterminant ainsi le prolongement de $\varphi$. Les conditions $(\varphi)_1$ et $(\varphi)_2$ sont donc vérifiées.

## 4. Étude locale des espaces ${}^r\mathcal{E}$ de type complexe.

**Sous-espaces $\mathcal{C}$, ${}^1\mathcal{A}$, ${}^1\mathcal{B}$, de $\mathcal{E}(U)$, sous-espace de ${}^r\mathcal{B}$ de ${}^r\mathcal{E}$.** — Soit $U$ l'étoile ouverte du sommet $K^0$, $K^0 \in X^p$, avec $p \geqq \rho - 1$. Fixons un $p/2$ repère fixe du $p/2$-plan complexe $F_p$, soit $\varepsilon_i$ ses vecteurs. Considérons les $(\rho - 1)/2 = r - 1$ premiers parmi ces vecteurs et désignons par $F_{\rho-1}$ leur $(r-1)$-plan complexe et par $Z_{n-1}$ le $(r-1)$-repère qu'ils forment. Soit $\varphi_0 = \varphi$ l'une des applications, arbitrairement choisie, de $U \times F_p$ dans $\mathcal{E}(U)$.

$\mathcal{C}$ sera l'espace fibré trivial image par $\varphi$ de $U \times F_{\rho-1}$.

${}^1\mathcal{A}$ sera l'espace fibré trivial image par $\varphi$ de $U \times F'_p$ en désignant par $F'_p$ (ou $F_p - F_{\rho-1}$) l'ensemble des vecteurs de $F_p$ non situés dans $F_{\rho-1}$, donc, en particulier, non nuls.

${}^1\mathcal{B}$ sera l'espace engendré, lorsque $x$ décrit $U$, par la variété des vecteurs de $\mathcal{E}(x)$ non situés dans $\varphi(\{x\} \times F_{\rho-1})$.

${}^r\mathcal{B}$ sera l'espace engendré, lorsque $x$ décrit $U$, par la variété des $r$-repères de $\mathcal{E}(x)$, dont les $r-1$ premiers vecteurs sont les $\varphi(x, \varepsilon_i)$ pour $i = 1, \ldots, r-1$. Nous appellerons $\check{\varphi}(x, Z_{r-1})$ le $(r-1)$-repère qu'ils forment.

Soit $L \subset U$, on peut établir des cartes sur ${}^1\mathcal{B}(L)$ et ${}^r\mathcal{B}(L)$. Nous avons, en effet, vu [form. (3.3)] qu'on peut former une carte, application $g$ de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{E}(L)$ telle que

$$\pi_F g^{-1} \varphi(x, \varepsilon_i) = e_i \in F_k \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, p/2.$$

On appellera $\alpha_{\rho-1}$ le $(r-1)$-plan complexe défini par $e_1, \ldots, e_{r-1}$, on a

$$(4.1) \qquad \alpha_{\rho-1} \subset \alpha_p \subset \alpha_q \subset \alpha_k = F_k.$$

Appelons $\alpha'_q$ (ou $\alpha_q - \alpha_{\rho-1}$) la variété des vecteurs de $\alpha_q$ non situés dans $\alpha_{\rho-1}$ et ${}^r\beta_q$ la variété des $r$-repères de $\alpha_q$ dont les $(r-1)$ premiers sont $e_1, \ldots, e_{r-1}$. L'application $g$ définit de manière évidente une application $g'$ de

$$\mathcal{L}' = \bigcup_{q=p}^{q=k} (L \cap X^q) \times \alpha'_q \quad \text{dans } {}^1\mathcal{B}(L)$$

et une application $g'_r$ de

$${}^r\mathcal{L}' = \bigcup_{q=p}^{q=k} (L \cap X^q) \times {}^r\beta_q \quad \text{dans } {}^r\mathcal{B}(L).$$

Les conditions de compatibilité sont vérifiées. La carte définie par ${}^r\mathcal{L}'$ et $g'_r$ sera la restriction à ${}^r\mathcal{L}'$ de la carte sur ${}^r\mathcal{E}(L)$ définie au paragraphe 1 par ${}^r\mathcal{L}$ et $g_r$ à condition de former cette dernière avec la même carte $(\mathcal{L}, g)$ sur $\mathcal{E}(L)$; rappelons que ${}^r\alpha_q$ est la variété de tous les $r$-repères de $\alpha_q$,

Appelons $D^N$ la $N$-cellule située dans $U$.

Proposition 4.1. *a. Si* $s \mid (D)^{N-\rho} \cap \overline{D}^N$ *est une section de* ${}^r\mathcal{E}$ *il existe une section* $s' \mid (D)^{N-\rho} \cap \overline{D}^N$ *de* ${}^r\mathcal{B}$, *homotope à* $s$ *en tant que section de* ${}^r\mathcal{E}$; *si* $s$ *est prolongeable dans* ${}^r\mathcal{E}$ *au-dessus de* $(D)^{N-\rho+1} \cap \overline{D}^N$, $s'$ *l'est dans* ${}^r\mathcal{B}$ *au-dessus du même complexe.*

*b. Si deux sections de* ${}^r\mathcal{B}$ *au-dessus de* $(D)^{N-\rho} \cap \overline{D}^N$ *sont homotopes dans* ${}^r\mathcal{E}$, *elles sont aussi homotopes dans* ${}^r\mathcal{B}$.

Remarquons d'abord que la variété ${}^r\beta_k$ étant rétractible à une $(k-\rho)$-sphère, son premier groupe d'homotopie non nul est de dimension $k-\rho$; l'injection canonique de ${}^r\beta_k$ dans ${}^r\alpha_k$ définit un isomorphisme $i$ de $H_{k-\rho}({}^r\beta_k)$ sur $H_{k-\rho}({}^r\alpha_k)$.

Formons $s'$ au-dessus des cellules de dimensions croissantes

$$T^n \subset (D)^{N-\rho} \cap \overline{D}^N \qquad \text{et} \qquad T^n \subset (D)^{N-\rho+1} \cap \overline{D}^N$$

(ceci lorsque $s \mid T^n$ est défini); cela implique que $T^n \subset X^k$ avec $k \geqq \rho + 1$ et ${}^r\mathcal{B}(T^n) \neq \emptyset$. Nous choisirons arbitrairement chaque $s'(T^0)$ dans ${}^r\mathcal{B}(T^0)$ qui est non vide, il sera homotope à $s(T^0)$ en vertu de la connexité des variétés de Stiefel complexes, donc de ${}^r\mathcal{E}(T^0)$. Supposons $s'$ et l'homotopie entre $s$ et $s'$ déterminées au-dessus de tous les $T^{n'}$ pour $n' < n$ et considérons la cellule $T^n = D^{N-h+n} \cap K^h$, avec $K^h \subset X^k$, nous avons vu, en démontrant la proposition 2.1 que $n \leqq k - \rho$.

Soit $L = \overline{K}^h \cap U \supset \overline{T}^n$; prenons sur $\mathcal{E}(L)$ une carte définie par ${}^r\mathcal{L}$ et $g_r$, telle que sa restriction à ${}^r\mathcal{L}'$ soit une carte sur ${}^r\mathcal{B}(L)$, l'existence d'une telle carte a été démontrée ci-dessus : $g_r^{-1} s'$ est une section, au-dessus de $\dot{T}^n$ de ${}^r\mathcal{L}' \subset L \times {}^r\beta_k$, elle peut être prolongée au-dessus de $L$, car $n$ est strictement inférieur à la dimension d'obstruction $k - \rho + 1$ de $L \times {}^r\beta_q$.

Considérons maintenant, comme dans la démonstration de la proposition 2.2, la carte, application $\hat{g}_r$ de ${}^r\hat{\mathcal{L}} = {}^r\mathcal{L} \times \mathrm{I}$ sur ${}^r\mathcal{E}(L) \times \mathrm{I}$; identifions encore $g_r^{-1} s$ (resp. $g_r^{-1} s'$) à une section au-dessus de $L \times \{0\}$ (resp. $L \times \{1\}$), l'homotopie au-dessus de $\dot{T}^n$ définit une section au-dessus de $\dot{T}^n \times I$, donc on a une section de ${}^r\hat{\mathcal{L}} \subset L \times I \times {}^r\alpha_k$ au-dessus du bord du prisme $\overline{T}^n \times I$; si $n + 1 < k - \rho + 1$, dimension d'obstruction, la section est prolongeable au-dessus de $\overline{T}^n \times I$; pour $s'$ comme pour cette dernière section, la partie prolongée est dans $\dot{L} \times I \times {}^r\alpha_k \subset {}^r\hat{\mathcal{L}}$, elle a donc une image par $\hat{g}_r$, laquelle définit $s' \mid T^n$ et l'homotopie entre $s$ et $s'$ au-dessus de $T^n$.

Examinons le cas où $n = k - \rho$. Commençons, comme précédemment, à choisir un prolongement de $s'$ dans ${}^r\mathcal{B}(T)$, nous le désignerons, cette fois-ci, par $s'' \mid T$. On a, comme précédemment, une section de ${}^r\hat{\mathcal{L}} \subset L \times I \times {}^r\alpha_k$ au-dessus du bord de $\overline{T}^n \times I$ qui, si l'on oriente $\overline{T}^n$, définit un $n$-cycle.

Soit $c \in H_{k-\rho}({}^r\alpha_k)$ la classe d'homologie de sa projection sur ${}^r\alpha_k$ et $i^{-1}(c) \in H_{k-\rho}({}^r\beta_k)$. Appelons $\gamma''$ la chaîne singulière définie sur ${}^r\beta_k$ par l'application $\pi_F g_r^{-1}\, s''$ de la boule $\overline{T}^n$ on sait ([5]) qu'il existe une chaîne $\gamma'$ application de $\overline{T}^n$ dans ${}^r\beta_k$ dont la restriction à $\dot{T}^n$ coïncide avec celle de $\gamma''$ et telle le cycle $\gamma' - \gamma''$ appartienne à la classe d'homologie donnée $i^{-1}(c)$ ; il définit, par l'injection canonique de ${}^r\beta_k$ dans ${}^r\alpha_k$, un cycle de classe $c$. Nous définirons alors $s' \mid \overline{T}$ par la relation suivante :

$$g_r^{-1}\, s'(x) = (x,\, \gamma'(x)) \in {}^r\hat{\mathcal{L}}'(x) \quad \text{pour tout } x \in \overline{T}^n,$$

la dernière inclusion résultant toujours de ce que la partie prolongée est dans $\mathring{L} \times {}^r\beta_k \subset {}^r\mathcal{L}'$.

$s$, $s'$ et l'homotopie de $s$ et $s'$ au-dessus de $\dot{T}^n$ définissent alors un cycle de ${}^r\hat{\mathcal{L}}$ dont la projection $\pi_F$ sur ${}^r\alpha_k$ a pour classe d'homologie o comme on le voit en ajoutant et retranchant la $(k-\rho)$-chaîne $\gamma''$ ; l'application dans ${}^r\alpha_k$ du bord de $\overline{T}^n \times I$ qui définit ce $(k-\rho)$-cycle peut donc être prolongée en une application $\delta$ de $\overline{T}^n \times I$ dans ${}^r\alpha_k$. L'homotopie entre $s$ et $s'$ au-dessus de $\overline{T}^n$ sera alors définie par la section $\psi$ de ${}^r\mathcal{E} \times I$ au-dessus de $\overline{T}^n \times I$ telle que

$$\hat{g}_r^{-1}\, \psi(y) = (y,\, \delta(y)) \in {}^r\hat{\mathcal{L}} \quad \text{pour tout } y \in \overline{T}^n \times I$$

la dernière inclusion résultant encore du prolongement dans $\mathring{L} \times I \times {}^r\alpha_k \in {}^r\hat{\mathcal{L}}$. D'où finalement la construction de $s'$ et de l'homologie au-dessus de tout $(D)^{N-\rho} \cap U$.

Il reste à examiner le cas où $n = k - \rho + 1$. On a à prolonger $g_r^{-1}\, s' \mid \dot{T}^n$ dans ${}^r\mathcal{L}' \subset L \times {}^r\beta_k$, Orientons $\overline{T}^n$, donc $\dot{T}^n$ et cherchons la classe, dans le groupe d'homotopie $H_{k-\rho}({}^r\beta_k)$, du cycle singulier $\gamma$ défini par l'application $\pi_F g_r^{-1}\, s'$ de $\dot{T}^n$ dans ${}^r\beta_k$. Soit $\check{j}\gamma$ le cycle de ${}^r\alpha_k$ défini par $\gamma$ et l'injection canonique de ${}^r\beta_k$ dans ${}^r\alpha_k$ ; il coïncide avec le cycle obtenu en prenant l'image par $\check{\hat{g}}_r^{-1}\, s'$ de $\dot{T}^n \times \{1\}$ dans ${}^r\hat{\mathcal{L}} \subset L \times I \times {}^r\alpha_k$, puis en projetant sur ${}^r\alpha_k$. Comme, par hypothèse $s \mid \overline{T}^n$ existe, $\check{j}\gamma$ est le bord de la chaîne, somme de la chaîne définie par l'application $\pi_F g_r^{-1}\, s$ de $\overline{T} \times \{0\}$ et de la chaîne définie par l'application de $\dot{T}^n \times \{1\}$ dans ${}^r\hat{\mathcal{L}} \subset L \times I \times {}^r\alpha_k$ résultant de l'homotopie entre $s$ et $s'$ suivie de l'application $\pi^F$. Donc la classe de $\check{j}\gamma$ est nulle dans $H_{k-\rho}({}^r\alpha_k)$ et celle de $\gamma$ est nulle dans $H({}^r\beta_k)$. En conséquence, $g_r^{-1}\, s'$ est prolongeable au-dessus de $T^n$,

---

([5]) LEFSCHETZ (Solomon). — *Topology*. — New-York, American mathematical Society, 1930 (American mathematical Society. Colloquium Publications, 12), p. 84.

la partie prolongée restant dans $\mathring{L} \times {}^r\beta_k \subset {}^r\mathcal{L}'$, on peut prendre son image par $g_r$ ce qui achève la construction de $s' \mid (D)^{N-\rho} \cap \overline{D}^N$ homotope à $s$ au-dessus de $(D)^{N-\rho} \cap \overline{D}^N$ et de $s' \mid (D)^{N-\rho+1} \cap \overline{D}^N$ au cas où $s \mid (D)^{N-\rho+1} \cap D^N$ existe.

Le point $b$ de l'énoncé revient à ceci : On a une section $s \mid [(D)^{N-\rho} \cap \overline{D}^N] \times J$ (avec $J = [0, 1]$, $\dot{J} = \{0\} \cup \{1\}$) de l'espace ${}^r\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \times J$ déjà étudié à propos de la propriété 2.2; cette section est telle que

$$s \mid \left[(D)^{N-\rho} \cap \overline{D}^N\right] \times J \subset {}^r\hat{\mathcal{B}} = {}^r\mathcal{B} \times J;$$

on se propose de trouver une section $s'$ de ${}^r\hat{\mathcal{B}}$ au-dessus de $\left[(D)^{N-\rho} \cap \overline{D}^N\right] \times J$, identique à $s$ au-dessus de $\left[(D)^{N-\rho} \cup \overline{D}^N\right] \times \dot{J}$. On imposera de plus à cette section d'être homotope à $s$ dans ${}^r\hat{\mathcal{E}}$ au-dessus de $\left[(D)^{N-\rho-1} \cap \overline{D}^N\right] \times J$ et l'on fera la même construction que précédemment, les cellules $\overline{T}^n$ étant remplacées par les cellules $\overline{T}^n \times \{0\}$ et $\overline{T}^n \times \{1\}$ sur lesquelles on a déjà $s' = s$ et l'homotopie identique et les cellules $\overline{T}^m \times J$ (on envisagera donc successivement les cas $m + 1 < k - \rho$, $m + 1 = k - \rho$, $m + 1 = k - \rho + 1$).

**Sections $\sigma \mid (D)^{N-\rho} \cap \overline{D}^N$ de ${}^1\mathcal{B}$ associées à la section $s$ $(D)^{N-\rho} \cap \overline{D}^N$ de ${}^r\mathcal{E}$.** — L'application $j$ qui, à chaque $r$-repère élément de ${}^r\mathcal{B}$ fait correspondre son dernier vecteur est un isomorphisme de ${}^r\mathcal{B}$ sur ${}^1\mathcal{B}$ : la section $\sigma = j(s')$, qui dépend du choix de $s'$, est dite associée à $s$.

REMARQUE 4.1. — *Deux sections $\sigma_1$ et $\sigma_2$ associées à une même section $s$ ou à deux sections $s_1$ et $s_2$ homotopes dans ${}^r\mathcal{E}$ sont homotopes dans ${}^1\mathcal{B}$ au-dessus de $(D)^{N-\rho} \cap \overline{D}^N$.*

En effet, $s'_1 = j^{-1}(\sigma_1)$ et $s_2 = j^{-1}(\sigma_2)$ sont respectivement homotopes dans ${}^r\mathcal{E}$ à $s_1$ et $s_2$ qui sont identiques ou homotopes; $s'_1$ et $s'_2$ sont donc des sections de ${}^r\mathcal{B}$ homotopes au-dessus de $(D)^{N-\rho} \cap \overline{D}^N$ dans ${}^r\mathcal{E}$, donc aussi d'après la proposition 3.3 ($b$) dans ${}^r\mathcal{B}$. Par l'isomorphisme $j$ on a le résultat annoncé.

Nous traitons maintenant, dans toute la fin de ce paragraphe, un problème d'intersection canonique pour lequel la méthode que nous proposons gagnerait fort à être changée.

LEMME 4.1. — *Soit $\mathcal{E}$ un espace fibré de base $X$ différentiable à fibre vectorielle $F_k$ de dimension réelle $k$ et $\mathfrak{A}$ un sous-espace fibré dont la fibre $\mathfrak{A}(x)$ est un sous-espace vectoriel de dimension $p$ de $\mathcal{E}(x)$. Soit $\Xi$ une sous-variété de dimension $q$ de $X$ différentiable par morceaux et $s \mid \Xi$ une section différentiable par morceaux de $\mathcal{E}$ au-dessus de $\Xi$, il existe alors une section $s'$ homotope à $s$ dans $\mathcal{E}$ et telle que la $q$-variété $s'(\Xi)$ coupe canoni-*

*quement $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$. Si, de plus, $\ddot{\Xi}$ est une partie du bord $\dot{\Xi}$ de $\Xi$ telle que $s(\ddot{\Xi})$ soit une sous-variété différentiable par morceaux qui coupe canoniquement $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$, on peut choisir la section $s'$ de façon qu'elle coïncide avec $s$ au-dessus de $\ddot{\Xi}$. La proposition subsiste pour les espaces fibrés ${}^1\mathcal{B}$ et ${}^1\mathcal{A}$ respectivement complémentaires, dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$, d'un sous-espace fibré $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ à fibres vectorielles.*

Supposons d'abord que $\mathcal{E} = X \times F_k$, $\mathcal{A} = X \times F_p$, $F_p \subset F_k$ et soit $\pi_F$ la projection sur $F_k$. Pour que $s'(\Xi)$ coupe canoniquement $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$ il suffira que $\pi_F s'(\Xi)$ coupe canoniquement $F_p$ dans $F_k$. Référons-nous au théorème classique sur les approximations simpliciales (5) et construisons une triangulation $\Delta$ arbitrairement fine de $F_k$ dont tous les simplexes ouverts coupent canoniquement $F_p$, puis une application simpliciale $\sigma'$ de $\Xi$ dans $\Delta$ homotope à $\pi_F s(\Xi)$ dans $F_k$, chaque point restant dans un simplexe fermé de $(\Delta)$.

Soit $\psi_t$, $t \in [0, 1]$ l'application variable de $\Xi$ dans $F_k$ qui définit l'homotopie entre $\pi_F s = \psi_0$ et $\sigma' = \psi_1$. On posera, pour tout $x \in \Xi$ :

$$\Psi_t(x) = (x, \psi_t(x)) \qquad \text{et} \qquad s'(x) = \Psi_1(x).$$

La section $s'$ est bien homotope à $s$ et $s'(\Xi)$ est une variété qui coupe canoniquement $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$.

Si, maintenant $s(\ddot{\Xi})$ coupe canoniquement $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$, moyennant les conditions de différentiabilité de $\Xi$ et de $s$, on pourra déterminer la triangulation $(\Delta)$ de façon que $\pi_F s(\Xi)$ en soit un sous-complexe; on sait, d'après la démonstration déjà citée de Lefschetz, qu'on peut choisir $\sigma'$ coïncidant avec $\pi_F s$, donc $s'$ avec $s$ sur $\ddot{\Xi}$.

Dans le cas général nous choisirons une triangulation différentiable $(k)$ de $X$ assez fine pour que chaque simplexe fermé $\bar{k}$ soit dans le domaine de définition $U_i$ d'une carte définie par un homéomorphisme $h$ de $U_i \times F_k$ sur $\mathcal{E}(U_i)$ dont la restriction à $U_i \times F_p$ soit une carte sur $\mathcal{A}(U_i)$ et, si $\mathcal{C}$ est défini, dont la restriction à $X_i \times F_h (F_h \subset F_p \subset F_k)$ soit une carte sur $\mathcal{C}(U_i)$. Nous pourrons de plus, vu les conditions de différentiabilité, choisir $(k)$ tel que $\Xi$, $\dot{\Xi}$, et $\ddot{\Xi}$ en soient des sous-complexes. Nous pourrons alors déterminer $s'$ successivement au-dessus des simplexes fermés $\bar{k}_i$ de dimensions croissantes en utilisant l'homéomorphisme $h$ et le résultat obtenu dans le cas d'un produit pour $\Xi = \bar{k}_i$ et $\ddot{\Xi} = \dot{k}_i$.

Enfin, si $s$ est une section de ${}^1\mathcal{B}$ (complémentaire de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}$), il sera possible, après s'être ramené au produit, de prendre la triangulation $(\Delta)$ de $F_k$ assez fine pour que, tout point de $\pi_F s(\Xi)$ étant hors de $F_h$, son étoile fermée dans $(\Delta)$ ne coupe pas $F_h$, on obtiendra une section $s'$ homotope à $s$ dans ${}^1\mathcal{B}$ et coupant canoniquement ${}^1\mathcal{A}$ dans ${}^1\mathcal{B}$.

Nous nous restreindrons, à partir de maintenant, aux espaces pseudo-fibrés de type tangentiel complexe et nous énoncerons les conditions locales $(\varphi)_3$ suivantes :

$(\varphi)_3$ *a* contient une restriction de nature topologique que nous n'avons pas pu lever dans le cadre des méthodes indiquées;

$(\varphi)_3$ *b* est une condition destinée à simplifier les démonstrations mais qui pourra en général être levée si l'on dispose du choix des triangulations $(K)$ et $(D)$;

**Conditions** $(\varphi)_3$. — Soit $\mathcal{E}$ un espace fibré à fibres vectorielles de type tangentiel complexe; soient $U = \overset{\circ}{\text{et}}\, K^0$, $K^0 \in D^N \subset U$ et $X^k$ tel que $X^k \cap U \neq \emptyset$, soit $K^0 \in X^p$.

*a*. A tout compact $\Xi$ de $X^k \cap U$ on peut associer un homomorphisme $h$ du produit de $\Xi$ par une $(N-k)$-boule $\beta$ de centre O sur une partie $\Theta$ de $U$ de façon que $h(x, 0) = x$ et que, si $]0, a]$ est un rayon de $\beta$ privé de son origine, $h(\Xi \times ]0, a])$ soit situé dans un seul $X^h$, $h > k$; de plus, les restrictions de $h^{-1}$ à tout $X^h \cap \Theta (h \geq k)$ et de $h$ à $h^{-1}(X^h \cap \Theta)$ sont différentiables; $\check{h}^{-1}$ et $\check{h}$ étant les applications linéaires tangentes ainsi définies et $x$ un point de $\Xi$, $h(\mathcal{E}(x) \times [0, a])$ doit être une application continue dans $\mathcal{E}(h(\{x\} \times [0, a]))$; $\varphi$ étant une application de $U \times F_p$ dans $\mathcal{E}(U)$ définie par la condition $(\varphi)_1$, l'application $\check{h}^{-1}\varphi$ définie sur $\Theta \times F_p$ doit être continue.

*b*. Toute cellule fermée $\overline{D}^m$ est différentiable dans le sens suivant : elle peut être prolongée en une variété différentiable de même dimension.

Remarque 4.2. — Nous dirons qu'une base d'espace pseudo-fibré dont les $X_i$ sont presque complexes vérifie $(\varphi)_1$, $(\varphi)_2$ et $(\varphi)_3$ si l'espace pseudo-fibré de type tangentiel complexe qu'elle détermine en vertu de la proposition 3.2, vérifie $(\varphi)_3$.

Tous les raisonnements qui suivent supposent vérifiées les trois conditions $(\varphi)$ [6].

---

[6] 1° Signalons un cas où la vérification de $(\varphi)_3$ est immédiate : on suppose que toutes les $\overline{X}_j$ sont des variétés différentiables et en chaque point $x \in X$ qu'il existe un système de coordonnées locales (dans un ouvert $U'$ contenant l'étoile du point dans $(K)$ et défini par une application $g$ de $\mathbf{R}^N$ dans $U'$ dont la restriction à chaque $\overline{X}_j$ $(x \in \overline{X}_j)$ en est un système de coordonnées locales. On prendra alors pour $\beta$ une boule dans l'espace défini par les $N-p$ axes de coordonnées dont l'image par $g$ ne sont pas dans $\overline{X^p}$; pour $x \in \Xi$ et $\zeta \in \beta$ on posera $h(x, \zeta) = g(g^{-1}(x), \zeta)$.

2° Pour vérifier que $(\varphi)_3$ est réalisé lorsque tous les $\overline{X}_j$ sont presque complexes on peut suivre le schéma suivant : on vérifie d'abord $(\varphi)_3(a)$ pour $X_i = X^p$ en déterminant d'abord la restriction de $h^{-1}$ à un voisinage de $K^0$ dans une $(N-k)$-variété différentiable qui coupe canoniquement $X^p$ en $K^0$ et en prolongeant convenablement; ensuite, pour $X_i$ quelconque on se ramène au cas précédent en « supprimant » les $\overline{X}_j$ qui ne rencontrent

PROPOSITION 4.2. — *Si $\sigma$ est une section de ${}^1\mathcal{B}$ au-dessus de $(D)^{N-\rho} \cap \dot{D}^N$ il existe une section $\tau$ qui lui est homotope dans ${}^1\mathcal{B}$ et telle que, pour tout $X^k$ coupant $D^N$, le $(k-\rho)$-complexe $\tau\ [(D)^{N-\rho} \cap X^k \cap \dot{D}^N]$ coupe canoniquement la $(k+p)$-variété ${}^1\mathcal{A}(X^k \cap U)$ dans la $2k$-variété ${}^1\mathcal{B}(X^k \cap U)$; si $D_i^{N-\rho} \subset D^N$, $\tau(D_i^{N-\rho}) \cap {}^1\mathcal{A}$ est une $(p-\rho)$-variété compacte et sans bords.*

Rappelons qu'un complexe coupe canoniquement une variété dans une autre, s'il en est ainsi pour tous ses simplexes ouverts.

Nous allons déterminer la section $\tau$ à l'aide d'une suite finie d'homotopies $\psi_i$ dont chacune n'apporte de modifications que dans un certain ensemble $\Theta'_i$.

A. LES ENSEMBLES $\Theta'_i$. — Ordonnons les $X_i$ qui coupent $U$ par dimensions croissantes, donc $X_0 = X^p$. Supposons donné un voisinage $V_{i-1}$ de $\bigcup_j (X_j \cap \dot{D}^N)$ pour $j < i$, ce qui n'implique rien pour $i = 0$ et déterminons les éléments suivants : $\Xi'$ et $\Xi$ seront des compacts de $X_i \cap \dot{D}^N$ dont les complémentaires dans $\overline{X}_i \cap \dot{D}^N$ seront dans $V_{i-1}$, $\Xi'$ étant un voisinage de $\Xi$; ils seront pris différentiables par morceaux et tels que le compact $\Xi' - \mathring{\Xi}$ admette une partition en rayons différentiables $(x, x')$. Soient $\beta'$ une $(N-k)$-sphère de centre O et de rayon 2, $\beta$ la $(N-k)$-sphère concentrique de rayon 1 et $h$ un homéomorphisme de $\Xi' \times \beta'$ sur $\Theta' \subset \dot{D}^N$ tel qu'il est défini par la condition $(\varphi)_3$, soit enfin $\Theta = h(\Xi \times \beta)$. $\Theta'$ est un voisinage de $\Theta$ dans $\dot{D}^N$.

Nous allons déterminer des rayons dans $\Xi' \times \beta'$ et, par image par $h$, dans $\Theta'$. Chaque rayon, noté $(x, y_1, y')$ sera bien déterminé par son extrémité $y' \in \dot{\Theta}'$; son origine $x$ sera dans $\Xi$, $y_1$ dans $\dot{\Theta}$, la partie $(x, y_1)$ sera dans $\Theta$ et la partie complémentaire notée $)y_1, y')$ sera dans $\Theta' - \Theta$. Nous définirons ainsi ces rayons : pour $h^{-1}(y') = (x, \zeta) \in \Xi \times \dot{\beta}'$ le rayon de $\Xi \times \beta$ sera le segment $\{x\} \times [0, \zeta]$ et celui de $\Theta'$ son image par $h$.

Pour $y' = h(x', \zeta) \in \dot{\Xi}' \times \beta$, soient $(x_1, x')$ celui des chemins formant partition de $\Xi' - \mathring{\Xi}$ d'extrémité $x'$ et $y_1 = h(x_1, \zeta)$. Le rayon d'extrémité $y'$ sera $(x_1, y_1, y)$, avec

$$(x_1, y_1) = h(\{x_1\} \times [0, \zeta]) \qquad \text{et} \qquad (y_1, y') = h((x_1, x') \times \{\zeta\}).$$

---

pas $\Xi \cap X_i$, puis en diminuant, au besoin l'ensemble obtenu de manière à ce qu'il ne coupe pas ces $\overline{X}_j$ si on les rétablit. Les cellules $\overline{D}^m$ étant prises différentiables dans le sens indiqué, on prend pour $\Xi$ un voisinage à bords différentiables de $\dot{D}^N \cap X_i$ dans $X_i$ et pour $D^m \cap D^N$ on établit un homéomorphisme différentiable de $h((\Xi \cap \overline{D}^m) \times \beta)$ sur une $m$-boule de $D^m$, on opère par dimensions croissantes et l'on prolonge convenablement en une application $g$ telle que $gh$ réalise les conditions de $(\varphi)_3$ ($a$ et $b$).

Pour tout autre $y' = h(x, \zeta) \in \dot{\Theta}'$, $x$ sera sur un chemin $(x_1, x')$ de la partition de $\Xi' - \mathring{\Xi}$ et $\zeta$ sera sur un rayon $[a, a']$ de la couronne $\beta' - \mathring{\beta}$. On prendra $y_1 = h(x_1, a)$. Dans le rectangle curviligne $[x_1, x] \times [a, a']$ privé du point $h(y_1)$ on aura pris une partition en chemins différentiables privés de leur origine commune $h(y_1)$ qui comprendra les chemins $\{x_1\} \times [a, a']$ et $(x_1 x) \times \{a\}$ et qui variera continûment avec le point $(x_1, a) \in \mathring{\Xi} \times \mathring{\beta}$ (on utilisera par exemple une métrique auxiliaire fixe sur $\Xi'$). La partie $h^{-1}((y_1, y'))$ qui restait à déterminer sera celui des chemins qui aboutit à $y'$.

En vertu de la condition $(\varphi)_3$,

$$h(\Xi' \times ]0, a']) \subset X_{i'} \qquad (i' > i),$$

donc chacun des rayons privé de son origine est dans un seul $X_{i'}$.

Définissons un *transport parallèle* des vecteurs de $\mathcal{E}(\Theta')$ le long de ces rayons; ils ont tous des images par $\check{h}^{-1}$; définissons donc un transport parallèle des vecteurs tangents à $\Xi \times [0, a']$ le long des rayons qu'il contient; pour assurer la continuité par rapport à $a' \in \dot{\beta}'$ on prendra une métrique riemannienne fixe sur une sous-variété différentiable de $X^k$ dont la trace sur $\dot{D}^N$ contient $\Xi$ et l'on en déduira des métriques riemanniennes, donc des transports parallèles dans les produits de cette variété par les $[0, a']$.

Remarquons que si deux points de $\Xi' \times \beta'$ ont même projection $x$ sur $\Xi$, le transport parallèle conserve les projections des vecteurs sur le $k$-plan tangent à $X^k$ en $x$ et sur $\beta'$. Par image par $\check{h}$ on obtiendra un transport parallèle le long des rayons de $\Theta'$; si $y$ et $y''$ sont deux points d'un même rayon et $W(y) \in \mathcal{E}(y)$, le vecteur de $\mathcal{E}(y'')$ obtenu par transport parallèle sera noté

$$\lambda(y, y'')\ W(y).$$

Définissons enfin une *longueur sur les rayons* qui sera conservée par $h$; il suffit de la définir sur les rayons de $\Xi' \times \beta'$; sur la partie d'un rayon qui se projette en un seul point $x \in \Xi$, la longueur sera celle de la projection sur $\beta'$. Pour un rayon $(x, y_1, y')$ on connaîtra donc la longueur $\rho(y_1)$ de $(x, y_1)$; on supposera prise une métrique provisoire sur $\Xi' \times \beta'$ et l'on opérera une contraction des longueurs sur chaque chemin $(y_1, y')$ de façon que sa longueur totale soit $2 - \rho(y_1)$. La longueur de chaque rayon sera donc 2. Comme tous les rayons qui passent par un point $y \in \Theta'$ coïncident entre leur origine $x$ et $y$ on pourra désigner par $\rho(y)$ la distance de $x$ à $y$ comptée sur un rayon. $\rho(y)$ est une fonction continue sur $\Theta'$ égale à 2 sur $\dot{\Theta}$, et là seulement, et à 1 sur $h(\Xi \times \dot{\beta})$.

B. Construction de l'homotopie $\psi_i$ et de la section $\tau_i \mid (D)^{N-p} \cap \dot{D}^N$. Posons $S = (D)^{N-p} \cap \dot{D}^N$ et formulons l'hypothèse de récurrence suivante qui disparaît pour $i = 0 (X_0 = X^p)$ : on suppose donnés une section $\tau_{i-1} \mid S$

homotope à $\sigma$ dans ${}^1\mathcal{B}$ telle que pour $j < i$, $\tau_{i-1}(S \cap X_j)$ coupe canoniquement ${}^1\mathfrak{A}(X_j)$ dans ${}^1\mathcal{B}(X_j)$ suivant un compact et un voisinage $V_{i-1}$ de $\dot{D}^N \cap \bigcup_j X_j$ (pour $j < i$), dans $\dot{D}^N$ tel que pour tout $j' \geqq i$ on ait

$$\tau_{i-1}(S \cap X_{j'} \cap V_{i-1}) \cap {}^1\mathfrak{A} = \emptyset;$$

montrons qu'on peut former $\tau_i$ et $V_i$. Posons $X_i = X^k$ et utilisons les ensembles $\Xi$, $\Xi'$, $\Theta$, $\Theta'$ que nous venons de déterminer.

1° *Détermination de $\psi_i$ et $\tau_i$ au-dessus de $S \cap \Xi$.* — Nous utiliserons le lemme 4.1 en remplaçant le $\Xi$ qui figure dans l'énoncé par $S \cap \Xi$ qui est bien un complexe différentiable par morceaux, $s$ par $\tau_{i-1}$, $s'$ par $\tau_i$ et l'homotopie $\Psi$ dans ${}^1\mathcal{B}$ par $\psi_i$; on a : $\dot{\Xi} \subset V_{i-1}$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $\tau_{i-1}(S \cap \dot{\Xi})$ ne coupe pas ${}^1\mathfrak{A}$, nous pourrons prendre les triangulations qui interviennent dans la démonstration du lemme assez fines pour qu'il en soit de même de $\tau_i(S \cap \dot{\Xi})$.

2° *Prolongement de $\tau_i$ au-dessus de $\Theta$* (pour $k < N$ seulement). — Nous allons donner à $\tau_i(y)$ pour $y \in \Theta - \Xi$, une composante non située dans $\varphi(y, F_p)$, donc *a fortiori* non située dans ${}^1\mathfrak{A}(y)$. Pour cela plaçons-nous dans le produit $\Xi \times \beta$, appelons $v(x, \zeta)$ le vecteur d'origine $(x, \zeta)$, ($\zeta \neq 0$ étant sur le rayon $[0, a]$ de $\beta$), équipollent à $\overrightarrow{0a}$ et appelons $\eta(x, \zeta)$ le $(N-k-1)$-plan [dans le $(N-k)$-plan de $\beta$] perpendiculaire à $[0, a]$ en $\zeta$. $\mathcal{E}(x)$ étant le $k$-plan tangent à $X^k$ en $x$, appelons $P(x, \zeta)$ le $(N-1)$-plan tangent à $\Xi \times \beta$ en $(x, \zeta)$ engendré par $\mathcal{E}(x) \times \{\zeta\}$ et $\{x\} \times \eta(x, \zeta)$. Prenons maintenant dans la fibre type $F_p$ une base réelle $(\varepsilon_j)$ $(j < p)$; en vertu de la condition $(\varphi)_3$, chacun des vecteurs $\check{h}^{-1}\varphi(h(x, \zeta), \varepsilon_j)$ varie continûment et, pour $\zeta = 0$ il est dans ${}^1\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{E}(x)$; donc pour $|0, \zeta| < \alpha$ (on peut prendre $\alpha$ indépendant de $x$ dans le compact $\Xi$), aucun d'eux n'est colinéaire à $v(x, \zeta)$ et leurs projections sur $P(x, \zeta)$ parallèlement à $v(x, \zeta)$ sont linéairement indépendantes; on peut donc déduire, par homotopie le long des vecteurs projetants, du $(N-1)$-plan $P(x, \zeta)$, un $(N-1)$-plan $P'(x, \zeta)$ contenant $h^{-1}(h(x, \zeta), F_p)$ et pas $v(x, \zeta)$. Nous appelerons $\mu(y)\, v(x, \zeta)$ la projection de $\tau_i(x) \times \{\zeta\}$ sur $v(x, \zeta)$ parallèlement à $P'(x, \zeta)$ $[y = h(x, \zeta)]$; $\mu(y)$ tend vers 0 avec $\zeta$ et (de même que $P(x, \zeta)$ et $P'(x, \zeta)$), varie continûment pour $\zeta \neq 0$. Nous poserons

$$(4.2) \qquad \tau_i(y) = \lambda(x, y)\, \tau_i(x) + (\rho(y) - \mu(y))\, \check{h}(v(h^{-1}(y))).$$

Le dernier vecteur de la formule n'est pas défini pour $y \in \Xi$, mais comme, compte tenu de son coefficient, il tend vers 0 avec $\rho(y)$, $\tau_i(y)$ tend bien vers $\tau_i(x)$ lorsque $y$ tend vers $x \in \Xi$; de plus, la projection de $\check{h}^{-1}\tau_i(y)$ sur $v(x, \zeta)$ parallèlement à un plan qui contient $h^{-1}\varphi(y, F_p)$ est $\rho(y)\, v(y) \neq 0$ pour $\zeta \neq 0$, donc, dans ce cas, $\tau_i(y) \notin {}^1\mathfrak{A}$. Nous pouvons supposer que $\Theta'$ a été choisi assez mince pour que $\alpha = 1$, la relation (4.2) définit alors le prolongement de $\tau_i$ dans tout $\Theta - \Xi$.

3° *Détermination de* $\tau_i \mid \dot{\Theta}' - \Theta$. — Nous ferons en sorte que $\tau_i$ coïncide avec $\tau_{i-1}$ sur $\dot{\Theta}'$. Soit $(x, y_1, y')$ un rayon tel que nous l'avons défini dans A, $x \in \Xi$, $y_1 \in \dot{\Theta}$, $y' \in \dot{\Theta}'$; partageons $(y_1, y')$ en trois parties de longueurs égales $(y_1, y_2)$, $(y_2, y_3)$, $(y_3, y')$. Soit $f$ une application de $(y_1, y_2)$ sur la partie $(x, y_1)$ du même rayon telle que $f(y_1) = y_1$, $f(y_2) = x$ et que les longueurs varient proportionnellement; on posera

$$(4.3) \qquad \tau_i(y) = \lambda(f(y), y)\,\tau_i(f(y)) \qquad [y \in (y_1, y_2)].$$

La longueur de $(y_2, y_3)$, $(2 - \rho(y_1))/3$, est fonction continue de $y$. Pour $y \in (y_2, y_3)$, si $k(y)$ est le rapport de la longueur de $(y_2, y)$ à celle de $(y_2, y_3)$, nous utiliserons l'homotopie $\psi_i \mid \Xi$ définie au 1° de B et nous poserons

$$(4.4) \qquad \tau_i(y) = \lambda(x, y)\,\psi_i(x, 1 - k(y)) \qquad [y \in (y_2, y_3)].$$

Soit enfin $f'$ l'application de $(y_3, y')$ sur $(x, y_1, y')$ telle que $f'(y_3) = x$, $f'(y') = y'$ et que les longueurs varient proportionnellement; nous poserons

$$(4.5) \qquad \tau_i(y) = \lambda(f'(y), y)\,\tau_{i-1}(f'(y)) \qquad [y \in (y_3, y')].$$

$\tau_i$ est ainsi une section continue de $\mathcal{E}$ au-dessus de $\Theta'$ coïncidant avec $\tau_{i-1}$ au-dessus de $\dot{\Theta}'$. Nous supposerons, en outre, que $\Theta'$ a été pris assez mince pour que si $x \in \Xi$ et $y \in (x, y_1, y')$, on ait $\lambda(x, y)\,\psi_i(x, t) \in {}^1\mathcal{B}(y)$, c'est possible par raison de continuité et parce que la longueur a été fixée après le transport parallèle; $\tau_i$ est alors une section de ${}^1\mathcal{B}$ au-dessus de $S \cap \Theta'$.

4° *Détermination de* $\psi_i$ *au-dessus de* $\Theta' - \Xi$. — Nous ferons en sorte que, au-dessus de $\dot{\Theta}'$, $\psi_i$ soit l'application identique. Considérons encore le rayon $(x, y_1, y')$ : $u_1 = \rho(y_1)$, $u_2 = \rho(y_2)$, $u_3 = \rho(y_3)$ sont des fonctions continues de $y'$. Dans les plans auxiliaires des variables $u$ et $v$ considérons les rectangles $u \in [0, 2]$, $v \in [0, 1]$; définissons-y un chemin $l(u)$ issu du point $(u, 0)$ et variant continûment avec $u$ :

Si $u \in [0, u_1]$, $l(u)$ se compose dans trois segments

$$[(u, 0), (0, 0)], \quad [(0, 0), (0, 1)], \quad [(0, 1), (u, 1)];$$

Si $u \in [u_1, u_2]$ le troisième segment est remplacé par

$$[(0, 1), u_1(u_2 - u)/(u_2 - u_1)];$$

Si $u \in [u_2, u_3]$, $l(u)$ se compose des deux segments

$$[(u, 0), (0, 0)] \text{ et } [(0, 0), (0, u_2(u_3 - u)/(u_3 - u_2))];$$

Si $u \in [u_3, 2]$, $l(u)$ se réduit au segment

$$[(u, 0), ((2u - 2u_3)/(2 - u_3), 0)].$$

Appelons $m(u, t)$ le point de $l(u)$ tel que le rapport de la longueur de $l(u)$ entre son origine $(u, 0)$ et $m(u, t)$ à sa longueur totale soit $t \in [0, 1]$. Le point $m(u, t)$ est fonction continue $u$ et $t$ ainsi que ses coordonnées que nous noterons $a(u, t)$ et $b(u, t)$; si $a(u, t)$ n'est pas nul, c'est que $b(u, t)$ est égal à 0 ou 1. Si $y$ est le point du rayon tel que $\rho(y) = u$ nous pourrons définir $\psi_i(y, t)$ par les formules suivantes :

Si $b(u, t) = 0$, $\hat{y}$ étant le point du rayon tel que $\rho(\hat{y}) = a(u, t)$, on posera

$$\psi_i(y, t) = \lambda(\hat{y}, y)\, \tau_{i-1}(\hat{y}); \tag{4.6}$$

Si $a(u, t) = 0$ on posera, $\psi_i$ étant déjà déterminé en $x \in \Xi$,

$$\psi_i(y, t) = \lambda(x, y)\, \psi_i(x, b(u, t)); \tag{4.7}$$

Si $b(u, t) = 1$, $\hat{y}$ étant le point du rayon tel que $\rho(\hat{y}) = a(u, t)$, on posera

$$\psi_i(y, t) = \lambda(\hat{y}, y)\, \tau_i(\hat{y}). \tag{4.8}$$

En vertu de l'hypothèse de construction faite à la fin du 3° on a toujours $\psi_i(y, t) \in {}^1\mathcal{B}(y)$.

Nous ferons ici une autre hypothèse analogue, possible pour les mêmes raisons; au-dessus de $\dot{\Xi}$, $\psi_i$ ne rencontre pas ${}^1\mathcal{A}$ (d'après le 1°). Nous supposerons $\Xi' - \Xi$ pris assez mince pour que, si $y$ est un point d'un des chemins $(x, x')$ qui en forment une partition, avec $x \in S \cap \Xi$, on ait $\lambda(x, y)\, \psi_i(x) \notin {}^1\mathcal{A}$; on aura alors aussi

$$\psi_i(y, t) \notin {}^1\mathcal{A} \qquad \text{et} \qquad \tau_i(y) \notin {}^1\mathcal{A}.$$

Les relations (4.6) et (4.7) [resp. (4.7) et (4.8)] donnent les mêmes résultats pour $b(u, t) = 0$ et $a(u, t) = 0$ [resp. $a(u, t) = 0$ et $b(u, t) = 1$]. Comme $x$ et $u$ sont fonctions continues de $y$, $\psi_i$ définit bien une application continue de $(S \cap \Theta') \times [0, 1]$ dans ${}^1\mathcal{B}$; on a

$$\psi_i(y, 0) = \tau_{i-1}(y) \qquad \text{et} \qquad \psi_i(y, 1) = \tau_1(y).$$

Pour vérifier cette dernière relation on remarquera que, pour $t = 1$, $m(u, t)$ est l'extrémité de la courbe $l(u)$; on considérera séparément les quatre intervalles déterminés par 0, $u_1$, $u_2$, $u_3$, 2 et l'on définira $\psi_i(y, 1)$ en appliquant respectivement les formules (4.8), (4.8), (4.7) et (4.6); pour le premier intervalle $a(u, 1) = u = \rho(y)$, donc $\hat{y} = y$, d'où le résultat; par raison de proportionnalité, dans les 2e et 4e intervalles les $\hat{y}$ sont respectivement égaux aux $f(y)$ et $f'(y)$ qui interviennent dans les formules (4.3) et (4.5), lesquelles donnent alors le résultat; encore par raison de proportionnalité le $b(u, 1)$ qui intervient pour la définition de $\psi_i(y, 1)$ dans le 3e intervalle est égal au $(1 - k(y))$ de la formule (4.4), d'où le résultat.

Enfin, pour $y = y' \in \dot{\Theta}' \cap S$, on a $u = 2$, $l(u)$ se réduit au point (2.1),

$$\hat{y} = y' \qquad \text{et} \qquad \psi_i(y', t) = \tau_{i-1}(y') = \tau_i(y').$$

5° A l'extérieur de $\Theta'$ on pourra donc prendre $\tau_i = \tau_{i-1}$, $\psi_i$ étant l'application identique, ce qui achève de déterminer $\psi_i$ et $\tau_i$.

Vérifions les hypothèses de récurrence; comme $\tau_i$ ne rencontre pas ${}^1\mathcal{C}$ au-dessus de $\Xi' - \mathring{\Xi}$ on peut trouver une $(N-k)$-boule $\beta''$ concentrique à $\beta$ et de rayon $\leq 2$ telle que $\tau_i$ ne rencontre pas ${}^1\mathcal{C}$ au-dessus de $h((\Xi' - \mathring{\Xi}) \times \beta'')$.

Appelons $V_i$ la réunion du complémentaire de $\Theta'$ dans $V_{i-1}$, de $h((\Xi' - \mathring{\Xi}) \times \beta'')$ et de $\Theta = h(\Xi \times \beta)$; c'est bien un voisinage, dans $\dot{D}^N$ de la trace de $\bigcup_j X_j$ pour $j < i$; quel que soit $j' > i$, $\tau_i(S \cap V_i \cap X_{j'}) \cap {}^1\mathcal{C} = \emptyset$, car cela est vrai, par récurrence ou par construction, pour les trois ensembles dont la réunion est $V_i$. Par construction également, $\tau_i(S \cap V_i \cap X_i)$ (rappelons que $X_i = X^k$) ne coupe ${}^1\mathcal{C}$ qu'au-dessus du compact $\Xi$ et l'intersection avec ${}^1\mathcal{C}(X_i)$ dans ${}^1\mathcal{B}(X_i)$ est canonique d'après 1°; comme tous les $X_j$ $(j < i)$ sont dans le complémentaire de $\Theta'$ dans $V_{i-1}$, l'hypothèse de récurrence subsiste pour eux. Donc $V_i$ et $\tau_i$ vérifient les hypothèses de récurrence.

Au bout d'un nombre fini d'homotopies on arrivera à un indice $i$ tel que $X_i = X^N (\overline{X}_i = X)$, on n'aura à construire $\psi_i$ et $\tau_i$ que dans $\Xi$ et $\Xi' - \Xi$ et à prendre $V_i = \dot{D}^N$. L'existence de la section $\tau = \tau_i$ ainsi obtenue donne la solution de la proposition 4.2.

Corollaire de la proposition 4.2. — *Si $s \mid \dot{D}^{N-\rho+1}$ est prolongeable dans $\overline{D}^{N-\rho+1}$ on peut choisir $\tau \mid \dot{D}^{N-\rho+1}$ de manière qu'il soit prolongeable dans $\overline{D}^{N-\rho+1}$ de telle sorte que $\tau(\overline{D}^{N-\rho+1} \cap X_i)$ coupe canoniquement ${}^1\mathcal{C}(X_i)$ dans ${}^1\mathcal{C}(X_i)$ suivant une $(p - \rho + 1)$-variété compacte et sans bord.*

La proposition 4.1 ($a$) indique, en effet, que $\sigma_r(\dot{D}^{N-\rho+1})$ est le bord d'une section $\sigma_r(\overline{D}^{N-\rho+1})$, il en est donc de même pour $\sigma_1$. Dans la démonstration de la proposition 4.2 nous pouvons alors prendre $S = \overline{D}^{N-\rho+1}$ (l'existence de $\sigma_1 \mid \overline{D}^{N-\rho+1}$ intervient au B, 1°); la section $\tau$ obtenue au-dessus de $\overline{D}^{N-\rho+1}$ vérifie les conditions énoncées par le corollaire.

Remarque. — Soit $D^{N-\rho+1} \subset \dot{D}^N$; son bord $\dot{D}^{N-\rho+1}$ est une $(N-\rho)$-sphère topologique de $(D)^{N-\rho} \cap \dot{D}^N$; si $S$ se réduit à ce bord les propositions 4.1 et 4.2 restent valables et $\tau(\dot{D}^{N-\rho+1} \cap X_i)$ a pour trace sur ${}^1\mathcal{C}$ une $(p-\rho)$-sous-variété compacte.

Supposons alors donné $D^{N-\rho+1}$ qui coupe en un point le simplexe $K^{\rho-1}$ et soient deux sommets de $\overline{K}^{\rho-1}$, $K^0 \in X^p$ et $K'^0 \in X^{p'}$, $U$ et $U'$ leurs étoiles ouvertes dans $(K)$ et $U''$ celle de $K^{\rho-1}$, on suppose $p' \leqq p$; on a

$$D^{N-\rho+1} \subset U'' \subset U \cap U'.$$

D'après l'hypothèse de finesse, il existe $K^h \subset X^p \cap \overline{K}^{\rho-1}$ tel que $K'^0 \in \overline{K}^h$; à une application $\varphi'$ de $U' \times F_{p'}$ dans $\mathcal{E}(U')$ on peut donc faire correspondre, d'après la condition $(\varphi)_2$, une application de $U \times F_p$ dans $\mathcal{E}(U)$ telle que, pour $x \in U'' \subset \overset{\circ}{\text{et}}\, K^h$, $\varphi'(\{x\} \times F_{p'})$ soit un sous-espace vectoriel de $\varphi(\{x\} \times F_p)$. En prenant $F_{\rho-1} \subset F_{p'} \subset F_p$ on a alors, avec les notations évidentes,

$${}^1\mathcal{A}'(U'') \subset {}^1\mathcal{A}(U'') \qquad \text{et} \qquad {}^1\mathcal{B}'(U'') = {}^1\mathcal{B}(U'').$$

Proposition 4.3. — *On peut choisir $\tau \mid \dot{D}^{N-\rho+1}$ tel que $\tau(\dot{D}^{N-\rho+1} \cap X_i)$ coupe canoniquement ${}^1\mathcal{A}(X_i)$ dans ${}^1\mathcal{B}(X_i)$ et ${}^1\mathcal{A}'(X_i)$ dans ${}^1\mathcal{B}'(X_i)$, la seconde variété intersection étant la trace de la première sur ${}^1\mathcal{A}'(X_i)$.*

$$\mathcal{E} = \Xi \times F_k, \qquad \mathcal{A} = \Xi \times F_p, \qquad \mathcal{A}' = \Xi \times F_{p'}, \qquad \text{avec} \quad F_{p'} \subset F_p \subset F_k.$$

On prendra la triangulation $\Delta$ telle que ses simplexes ouverts coupent canoniquement les sous-espaces vectoriels $F_p$ et $F_{p'}$; la section $s'$ obtenue à l'aide de $\Delta$ sera telle que $s'(\Xi)$ coupe canoniquement, dans $\mathcal{E}$, à la fois $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$; les généralisations sont les mêmes que dans le lemme; on les utilise dans la démonstration de la proposition 4.2, au point B, 1°; pour la suite, il suffira d'opérer à l'aide de l'application $\varphi$, car $\tau(x) \notin {}^1\mathcal{A}$ entraîne $\tau(x) \notin {}^1\mathcal{A}'$; d'où la conclusion.

Revenons au cas où $S = (D)^{N-\rho+1} \cap \dot{D}^N$ et considérons deux applications $\varphi$ et $\varphi'$ du même produit $U \times F_p$ dans $\mathcal{E}(U)$; choisissons, comme au début de ce paragraphe, les vecteurs $\varepsilon_i$ (resp. $\varepsilon'_i$) formant une base de $F_p$, ce qui détermine $F_{\rho-1}$, ${}^1\mathcal{A}$ et ${}^1\mathcal{B}$ (resp. $F'_{\rho-1}$, ${}^1\mathcal{A}'$ et ${}^1\mathcal{B}'$). En vertu de la proposition 3.2 il existe une application variable $\overline{\varphi}_t$ vérifiant la condition $(\varphi)_1$ telle que $\overline{\varphi}_0 = \varphi$ et $\overline{\varphi}_1 = \varphi'$; soit, par ailleurs, $u_t$ un automorphisme variable de $F_p$ (pour sa structure complexe) tel que $u_0$ soit l'identité et que $u_1(\varepsilon_i) = \varepsilon'_i$. Pour $x \in U$ et $\zeta \in F_p$ posons

$$\varphi_t(x, \zeta) = \Phi(x, t, \zeta) = \overline{\varphi}_t(x, u_t(\zeta));$$

$\varphi_t$ vérifie encore la condition $(\varphi)_1$ et $\Phi(U \times I \times F_p)$ définit un espace fibré $\hat{\mathcal{A}} \subset \hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \times I$ et $\Phi(U \times I \times F_{\rho-1})$ définit un espace fibré $\hat{\mathcal{C}}$ dont nous désignerons les complémentaires dans $\hat{\mathcal{A}}$ et $\hat{\mathcal{E}}$ par ${}^1\hat{\mathcal{A}}$ et ${}^1\hat{\mathcal{B}}$; on a

$$(4.9) \quad \begin{cases} {}^1\hat{\mathcal{A}}(U \times \{0\}) = {}^1\mathcal{A} \times \{0\} & \text{et} \quad {}^1\hat{\mathcal{A}}(U \times \{1\}) = {}^1\mathcal{A}' \times \{1\}, \\ {}^1\hat{\mathcal{B}}(U \times \{0\}) = {}^1\mathcal{B} \times \{0\} & \text{et} \quad {}^1\hat{\mathcal{B}}(U \times \{1\}) = {}^1\mathcal{B}' \times \{1\}. \end{cases}$$

Soit $s \mid S$ une section de $\mathcal{E}$ associons-lui, en vertu de la proposition 4.1 une section $\sigma$ de ${}^1\mathcal{B}$ (resp. $\sigma'$ de ${}^1\mathcal{B}'$), puis, conformément à la proposition 4.2, une section $\tau$ (resp. $\tau'$). On a alors :

PROPOSITION 4.4 : *a. Il existe une section* $\hat{\sigma} \mid S\times I$ *de* ${}^1\hat{\mathcal{B}}$ *telle que*

$$\hat{\sigma}(S\times\{0\}) = \sigma(S)\times\{0\} \qquad \text{et} \qquad \hat{\sigma}(S\times\{1\}) = \sigma'(S)\times\{1\}.$$

*b. Il existe une section* $\hat{\tau} \mid S\times I$ *de* ${}^1\hat{\mathcal{B}}$ *telle que, pour chaque* $X_i$, $\hat{\tau}((S\cap X_i)\times I)$ *coupe canoniquement* ${}^1\hat{\mathfrak{A}}(X_i\times I)$ *dans* ${}^1\hat{\mathcal{B}}(X_i\times I)$ *et telle que la section de* ${}^1\mathcal{B}$ (resp. ${}^1\mathcal{B}'$) *définie, en vertu des formules* (4.9) *par* $\hat{\tau}\mid S\times\{0\}$ (resp. $\hat{\tau}\mid S\times\{1\}$) *ait même trace sur chaque* ${}^1\mathfrak{A}(X_i)$ [resp. ${}^1\mathfrak{A}'(X_i)$] *que* $\tau(S)$ [resp. $\tau'(S)$] *et coïncide avec* $\tau$ (resp. $\tau'$) *dans un voisinage de la projection de cette trace sur* $X_i$.

La démonstration de $a$ est le même que celle de la proposition 4.1 à cela près que

$$g^{-1}\hat{\mathcal{C}}(L\times I)\subset \hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\times I\subset L\times I\times F_k$$

n'est pas un produit $L\times I\times \alpha_{\rho-1}$ mais on remplacera $L\times I\times {}^r\beta_k$ par le sous-espace fibré $\hat{\mathcal{B}}$ de $L\times I\times F_k$, complémentaire de $g^{-1}\hat{\mathcal{C}}(L\times I)$. $\hat{\mathcal{B}}$ admet un homéomorphisme d'espace fibré $h$ sur $L\times I\times {}^r\beta_k$, les dimensions d'obstructions restent les mêmes et il existe encore un isomorphisme $j$ entre les $(k-\rho)^{\text{ièmes}}$ groupes d'homotopie de $\hat{\mathcal{E}}$ et de $\hat{\beta}$; enfin, au cas où $n=k-\rho$, pour déterminer la section $s'$ à partir de $s''$ et de la classe $j(c)$ on remplacera la projection $\pi_F$ par $\pi_F\circ h$.

La démonstration de $b$ se conduit d'une manière analogue à celle de la proposition 4.2 à l'aide d'homotopies successives $\hat{\psi}_i$, $\hat{\psi}_i$ étant relative à $X_i\times I$ et modifiant une section $\hat{\tau}_{i-1}$ dans un ensemble $\hat{\Theta}_i$ et $\hat{\tau}_0 = \hat{\sigma}$ étant la section définie par $a$) au cas où $\sigma=\tau$ et $\sigma'=\tau'$. Avant de préciser la construction qui va dépendre de celles de $\tau\mid S$ et de $\tau'\mid S$ fixons, pour chaque $X_j$, un voisinage compact $\Lambda_j$ (resp. $\Lambda'_j$) de $\varpi(\tau(S\cap X_j)\cap{}^1\mathfrak{A})$ [resp. $\varpi(\tau'(S\cap X)\cap{}^1\mathfrak{A})$] dans $X_j\cap\dot{D}^N$. Pour le point $A$ de la démonstration on suppose encore donné un voisinage $\hat{V}_{i-1}$ de $\left(\dot{D}^N\cap\bigcup_j X_j\right)\times I$ $(j<i)$ dans $\dot{D}^N\times I$, on opère comme précédemment en prenant toutefois les compacts $\hat{\Xi}$ et $\hat{\Xi}'$ de manière que les traces de leurs bords sur $U\times\{0\}$ et $U\times\{1\}$ soient respectivement dans les ensembles $V_{i-1}\times\{0\}$ et $V'_{i-1}\times\{1\}$ résultant des constructions de $\tau$ et $\tau'$; il n'y aura évidemment pas de chemins $(x, x')$ issus des points intérieurs à la trace du bord de $\hat{\Xi}$ sur $U\times\{0\}$ et $U\times\{1\}$, on vérifie qu'aucun raisonnement ultérieur n'en est modifié. La condition $(\varphi_3)$ entraîne l'existence d'un homéomorphisme $\hat{h}$ de $\hat{\Xi}\times\beta'$ sur une partie $\hat{\Theta}'$ de $\dot{D}^N\times I$; de plus, on prendra $\hat{\Theta}'$ assez mince pour ne rencontrer aucun des compacts $\Lambda_{j'}\times\{0\}$ et $\Lambda'_{j'}\times\{1\}$ pour les $j>i$. Les rayons, transports parallèles et longueurs sont déterminés comme pour la propriété 4.2. Dans la partie $B$ de la démonstration on formera $\hat{\tau}_i$ et $\hat{\psi}_i$ par les mêmes opérations que précédemment, mais dans le 1° on aura soin de choisir la section $\tau_i \mid (S \cap X_i) \times I$ coupant canoniquement $\nu$, dans ${}^1\hat{\mathcal{B}}(X_i \times I)$, le sous-espace fibré ${}^1\hat{\mathcal{A}}(X_i \times I)$ de façon que sa trace sur $U \times \{0\}$ (resp. $U \times \{1\}$) coïncide avec celle de $\tau(S \cap X_i) \times \{0\}$ [resp. $\tau'(S \cap X_i) \times \{1\}$], cela est possible en vertu du lemme 4.1 et de l'intersection canonique de ce complexe avec ${}^1\mathcal{A}(X_i) \times \{0\}$ [resp. ${}^1\mathcal{A}'(X_i) \times \{1\}$] dans ${}^1\mathcal{B}(X_i) \times \{0\}$ [resp. ${}^1\mathcal{B}'(X_i) \times \{1\}$]. Toutes les opérations suivantes seront les mêmes que précédemment. La section $\hat{\tau}$ finalement obtenue sera bien homotope à $\hat{\sigma} = \hat{\tau}_0$ dans ${}^1\hat{\mathcal{B}}$ et $\tau((S \cap X_i) \times I)$ coupera canoniquement ${}^1\hat{\mathcal{A}}(X_i \times I)$ dans ${}^1\hat{\mathcal{B}}(X_i \times I)$, de plus, on aura

$$\hat{\tau}((S \cap \Lambda_j) \times \{0\}) = \hat{\sigma}((S \cap \Lambda_j) \times \{0\}) = \tau(S \cap \Lambda_j) \times \{0\}$$
$$[\text{resp. } \hat{\tau}((S \cap \Lambda_j) \times \{1\}) = \tau'(S \cap \Lambda_j) \times \{1\}];$$

pour démontrer ce dernier point, il suffit de remarquer qu'aucun $\hat{\psi}_j$ ne modifie la section au-dessus de $\Lambda_j \times \{0\}$ et $\Lambda'_j \times \{1\}$, pour $i = j$ cela résulte de la construction B, 1° telle que nous l'avons précisée et pour $i \neq j$ cela résulte du fait que les deux ensembles considérés sont en dehors de $\hat{\Theta}'_i$ par construction, et que $\hat{\psi}_i$ y est, par conséquent, l'identité. La propriété 4.4 est ainsi démontrée.

Remarque 4.3. — *Les propositions* 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 *restent vraies moyennant les mêmes hypothèses, si l'on remplace* $\mathcal{E}$ *par l'espace* $\mathcal{E} \times J$ $(J = [0, 1])$ *et* $(K)$, $U$, $(D)$, $S$, ${}^r\mathcal{B}$, ${}^1\mathcal{B}$, ${}^1\mathcal{A}$, ${}^1\hat{\mathcal{B}}$, ${}^1\hat{\mathcal{A}}$ *par leurs produits respectifs par* $J$.

On vérifierait, en effet, que toutes les démonstrations données restent valables [ainsi qu'on l'a déjà fait à propos des propositions 4.1($b$) et 4.4].

**Section de ${}^r\mathcal{E}$ de type $s$ le long du bord d'une cellule $\bar{D}^{N-\rho+1}$**, $\rho = 2r - 2$. — Nous n'aurons à la définir qu'au cas où

$$T^0 = D^{N-\rho+1} \cap K^{\rho-1} \in X^{\rho-1}$$

Dans les cas simples cette section sera définie par un $r$-repère $s(x)$ tel que son dernier vecteur $X(x)$ soit *sortant* du polyèdre curviligne $\bar{D}^{N-\rho+1}$ le long de son bord et que les $(r-1)$ premiers vecteurs forment un $(r-1)$-repère dont le $(r-1)$-plan complexe coupe canoniquement $\bar{D}^{N-\rho+1}$ de façon que la section de ${}^{r-1}\mathcal{E}$ qu'il définit puisse être prolongée à l'intérieur de $\bar{D}^{N-\rho+1}$, le plan du $(r-1)$-repère coupant toujours canoniquement $\bar{D}^{N-\rho+1}$. Dans le cas qui nous occupe nous donnerons la définition suivante :

Soit $K^0 \in \bar{K}^{\rho-1} \cap X^{\rho-1}$ (un tel sommet existe d'après l'hypothèse de finesse) et $U = \overset{\circ}{\text{et}} K^0$; utilisons la condition $(\varphi)_3$ pour $X_i = X^{\rho-1}$, $\Xi = T^0 \in D^{N-\rho+1}$; il existe un homéomophisme $h$ de la $(N-\rho+1)$-boule $\{T^0\} \times \beta$ sur un voisinage $\Theta$ de $T^0$ dans $D^{N-\rho+1}$; soit

$$y = h(T^0, \zeta) \in \Theta \cap X^k, \qquad \zeta \neq 0$$

$\zeta$ étant sur le rayon $(0, a)$ de $\beta$; comme dans la démonstration de la propriété 4.2 (B, 2°) considérons le vecteur $v(T^0, \zeta)$ ayant pour origine le point $(T^0, \zeta)$ et équipollent au vecteur $\overrightarrow{0, a}$ (il est sortant de $\{T^0\} \times \beta$ pour $\zeta \in \dot{\beta}$). On posera $X(y) = \hat{h}\, v(T^0, \zeta) \in \mathcal{E}(y)$. Par ailleurs $\hat{h}(\mathcal{E}(T^0) \times \zeta)$ est un $(r-1)$-plan complexe qui, au point de vue réel, coupe canoniquement le $(k-\rho+1)$-plan tangent en $y$ à $D^{N-\rho+1} \cap X^k$ dans le $k$-plan tangent à $X^k$. Si $Z_{r-1}(T^0)$ est un $(r-1)$-repère de $\mathcal{E}(T^0)$, $\check{h}(Z_{r-1}(T^0) \times \{\zeta\})$ sera formé de $r-1$ vecteurs de $\mathcal{E}(y)$ qui, par raison de continuité, formeront un $(r-1)$-repère complexe pourvu que $\zeta$ soit assez petit, et formeront avec $X(y)$ un $r$-repère $s(y)$; donc, en diminuant au besoin $\Theta$ on obtiendra une section de ${}^r\mathcal{E}$ au-dessus de $\dot{\Theta}$. Cette section est, d'après la manière même dont elle a été définie, prolongeable au-dessus de $\Theta - T^0$; si elle est prolongeable dans $\bar{D}^{N-\rho+1}$, la restriction à $\dot{D}^{N-\rho+1}$ du prolongement sera, par définition, une section de type $s$.

CONDITION $(\varphi)_4$ [7] :

*a*. Avec les notations de la condition $(\varphi)_3$ on prend

$$X^k = X^p \qquad \text{et} \qquad \Xi = \bar{D}^n \cap X^p \subset \bar{D}^N;$$

toute section de ${}^r\mathcal{E}$ au-dessus de $\dot{\Theta} = h(\Xi \times \dot{\beta})$ est prolongeable au-dessus $\bar{D}^n - h(\Xi \times \beta)$; et si deux sections définies au-dessus de $\bar{D}^n - h(\Xi \times \beta)$ sont homotopes au-dessus de $\dot{\Theta}$ l'homotopie est prolongeable au-dessus de $\bar{D}^n - h(\Xi \times \beta)$.

*b*. Si $p = \rho - 1$, deux sections de type $s$ sont homotopes.

La condition $(\varphi)_4(a)$ entraîne, lorsqu'on prend $\Xi = T^0$, l'existence des sections de type $s$; cette condition se vérifie simplement au cas où, pour tout $K^h$ qui rencontre $D^{N-\rho+1}$, la trace sur $K^h$ de $\bar{D}^{N-\rho+1} - \dot{\Theta}$ est homéomorphe à une boule fermée; on peut alors opérer au-dessus des parties $L$ de dimensions croissantes et former les prolongements des sections ou des homotopies entre sections en utilisant le relèvement des homotopies comme

[7] Cette condition est, en réalité, conséquence de la condition $(\varphi)_3$, mais la démonstration en est longue et fastidieuse (elle reprend par deux fois le schéma, modifié sur plusieurs points de la démonstration de la propriété 4.2).

pour la proposition 2.3. La condition $(\varphi)_4(b)$ est, par exemple, vérifiée au cas où $r=1$ et dans les autres cas, c'est à celui-ci qu'il faut se ramener.

PROPOSITION 4.5. — *Toute section $s \mid \dot{D}^{N-\rho+1}$ homotope à une section $s'$ de type $s$ est elle-même de type $s$ et, d'après $(\varphi)_4$, toutes les sections de type $s$ au-dessus de $\dot{D}^{N-\rho+1}$ sont homotopes entre elles.*

Soit en effet $\sigma_t \mid \dot{D}^{N-\rho+1}$ la section variable qui réalise l'homotopie, $\sigma_0 = s$ et $\sigma_1 = s'$. $s'$ étant définie comme prolongement d'une section $s' \mid \mathring{\Theta}$. Il existe un homéomorphisme $\lambda$ de $\dot{D}^{N-\rho+1} \times [0, 1]$ dans $\bar{D}^{N-\rho+1} - \mathring{\Theta}$ tel que la restriction de $\lambda$ à $\dot{D}^{N-\rho+1} \times \{0\}$ soit l'identité et que $x \in X_i$ entraîne $\lambda(\{x\} \times [0, 1]) \subset X_i$. Posons $\Delta = \lambda(\dot{D}^{N-\rho+1} \times [0, 1])$ et formons une section $s'' \mid \Delta$ telle que $s''$ coïncide avec $s$ au-dessus de $\dot{D}^{N-\rho+1}$ et avec $s'$ au-dessus de $\lambda(\dot{D}^{N-\rho+1} \times \{1\}) = \ddot{\Delta}$. Faisons d'abord la remarque suivante : soient une partie $L$ contenant $T^0$ et une carte définie sur ${}^r\mathcal{E}(L)$ par ${}^r\mathcal{L}$ et $g$; $L \cap \Delta$ est une boule topologique fermée. Définissons une section auxiliaire $s_g \mid L \cap \Delta$ en posant, pour $x = \lambda(\dot{x}, t)$,

$$(4.10) \quad \begin{cases} \text{si } t \in [0, 1/2], & s_g(x) = g[x, \pi_F g^{-1} \sigma_{2t}(\dot{x})]; \\ \text{si } t \in [1/2, 1], & s_g(x) = g[x, \pi_F g^{-1} s'(\lambda(\dot{x}, (2t-1)))]; \end{cases}$$

$s_g$ coïncide avec $s$ au-dessus de $\dot{D}^{N-\rho+1} \cap L$ et avec $s'$ au-dessus de $\ddot{\Delta} \cap L$.

Considérons l'application $s_g\lambda$ de $\dot{D}^{N-\rho+1} \times [0, 1]$ dans $\mathcal{E}(L)$, elle est homotope à l'application $\sigma$ définie par l'homotopie entre $s$ et $s'$; pour le vérifier il suffit de considérer les applications $s_{gu}\lambda_u$ définies comme suit pour $u \in [0, 1]$ : $\lambda_u$ est l'application de $\dot{D}^{N-\rho+1} \times [0, 1]$ sur $\Delta_u \subset \Delta$ telle que $\lambda_u(\dot{x}, t) = \lambda(\dot{x}, ut)$ et $s_{gu}$ est la section de $\mathcal{E}$ au-dessus de $\Delta_u$ qu'on obtient en posant, pour $x = \lambda_u(\dot{x}, t)$,

$$(4.11) \quad \begin{cases} \text{si } t \in \left[0, \dfrac{2-u}{2}\right], & s_{gu}(x) = g[x, \pi_F g^{-1} \sigma_\theta(\dot{x})], \qquad \text{avec } \theta = \dfrac{2t}{2-u}; \\ \text{si } t \in \left[\dfrac{2-u}{2}, 1\right], & s_{gu}(x) = g\left[x, \pi_F g^{-1} s'\left(\lambda_u\left(\dot{x}\left(1 - \dfrac{2-2t}{u}\right)\right)\right)\right], \end{cases}$$

on a bien

$$\lambda_1 = \lambda, \qquad s_{g1} = s_g \qquad \text{et} \qquad s_{g0}\lambda_0(\dot{x}, t) = \sigma_t(\dot{x}).$$

Cette dernière application est indépendante de $g$. Il en résulte une homotopie dans $\mathcal{E}$ de $s_g\lambda$ et d'une application analogue $s_{g'}\lambda$ définie à partir d'une autre carte. Il y a donc, entre $s_g$ et $s_{g'}$ une homotopie au sens large qui conserve les $\mathcal{E}(K^h)$, mais peut-être pas les fibres. Formons maintenant $s''$ en opérant au-dessus de parties $L$ de dimensions croissantes; supposons $s''$ déterminé au-dessus des $L$ de dimensions $\leqq h-1$ de façon que, au-dessus de chaque $L$ il soit homotope aux sections $s_g$ que nous venons de définir (pour la dimension minimale qui est $\rho$ il suffira de prendre $s = s_g$). Considérons alors $K^h$, $\mathcal{X}^k$ et $L = \overset{\circ}{\mathrm{et}}\, K^0 \cap K^h$, une carte définie par $\mathcal{L}$ et $g$ et une section $s_g$ du type précédent. $s''$ et $s_g$ coïncident au-dessus de $L \cap \dot{D}^{N-\rho+1}$ et de $L \cap \ddot{\Delta}$. Pour $h \leqq k-1$ le bord de $L \cap \Delta$ étant de dimension $\leqq k-\rho-1$ les deux sections sont homotopes au-dessus de lui et, $s_g$ étant prolongeable au-dessus de $L \cap \Delta$, on peut prolonger $s''$ en une section qui lui est homotope. Reste à examiner les cas où $h = k$; d'après ce qui précède, sur chaque face $L^{k-1} \cap \Delta$, $s''$ est homotope au sens large, à toutes les sections $s_g$ correspondant donc en particulier à la restriction de la section $s_g$ choisie au-dessus de $L \cap \Lambda$. $s''$ et cette section $s_g$ sont donc homotopes au sens large au-dessus de bord de $L \cap \Lambda$. Cela suffit à prouver que $s''$ est, comme $s_g$, prolongeable au-dessus de $L \cap \Lambda$.

La section $s''$ étant ainsi définie au-dessus de $\Delta$, nous pouvons la prolonger au-dessus du reste de $\overline{D}^{N-\rho+1} - \overset{\circ}{\Theta}$ en la prenant égale à $s'$. L'existence de la section $s''\left(\overline{D}^{N-\rho+1} - \overset{\circ}{\Theta}\right)$ montre que $s$ est obtenu par prolongement de la section sortante $s' \cap \dot{\Theta}$, donc est de type $s$.

C. Q. F. D.

**Proposition 4.6.** — *Soit $\overline{D}^{N-\rho+2}$ une cellule telle que*

$$T^0 = D^{N-\rho+2} \cap K^{\rho-2} \subset \mathcal{X}^{\rho-1}$$

*on a*

$$\dot{D}^{N-\rho+2} \cap \mathcal{X}^{\rho-1} = T_1^0 \cup T_2^0, \qquad \text{avec} \quad T_\iota \in D_\iota^{N-\rho+1} \qquad (\iota = 1, 2)$$

*et il existe une section de ${}^r\mathcal{E}$ au-dessus du complémentaire dans $\dot{D}^{N-\rho+2}$ de $D_1^{N-\rho+1} \cup D_2^{N-\rho+1}$ telle que sa restriction à $\dot{D}_\iota^{N-\rho+1}$ $(\iota = 1,2)$ soit une section de type $s$.*

Soit $K^0 \in D^N$ un sommet de $\overline{K}^{\rho-2} \cap \mathcal{X}^{\rho-1}$ et $U = \overset{\circ}{\mathrm{et}}\, K^0$; appelons $\Xi$ le chemin $(T_1^0, T^0, T_2^0) = \dot{D}^{N-\rho+2} \cap \mathcal{X}^{\rho-1}$, d'après la condition $(\varphi)_3$ il existe une application $h$ de $\Xi \times \beta$ dans un voisinage $\hat{\Theta}$ de $\Xi$ dans $\overline{D}^N$ dont nous désignerons par $\Theta$ la trace sur $\overline{D}^{N-\rho+2}$. Prenons une section quelconque de ${}^{r-1}\mathcal{E}$ au-dessus du chemin $\Xi$ et prolongeons-la par parallélisme en supposant $\Theta$ assez mince pour que le $(r\text{-}1)$-repère obtenu en un point $y = h(x, \zeta)$ et le vecteur « sortant » $\check{h}(v(x, \zeta))$ forment un $r$-repère de $\mathcal{E}(y)$. Il définit une section $s$ de ${}^r\mathcal{E}$ au-dessus de $\dot{\Theta} \cap \Delta$, si l'on pose $\Delta = \overline{D}^{N-\rho+2} - \overset{\circ}{\Theta}$, cette section est prolongeable dans $\Delta$, d'après la condition $(\varphi)_4(a)$; comme d'après la définition même d'une section de type $s$, $s \mid \dot{D}_\iota^{N-\rho+1}$ en est une $(\iota = 1,2)$, la proposition est bien démontrée.

Soit maintenant $f$ une application de $\tilde{\mathcal{X}}$ dans $\mathcal{X}$ qui vérifie la condition $(f)$

du paragraphe 2. Supposons que $X$ vérifie la condition $(\varphi)_3$. Soient

$$\tilde{\bar{D}}^N \subset \tilde{U},\ \bar{D}^N = f\left(\tilde{\bar{D}}^N\right) \subset U, \qquad \Xi \subset \bar{D}^N \cap X^k, \qquad \tilde{\Xi} = f^{-1}(\Xi) \cap \tilde{D}^N \subset \tilde{X}^k,$$
$$\tilde{x} \in \tilde{\Xi} \quad \text{et} \quad x = f(\tilde{x});$$

($\Xi$ est, comme précédemment, un compact). Conformément à la condition $(\varphi)_3$ il existe un homéomorphisme $h$ de $\Xi \times \beta$ sur une partie $\Theta$ de $U$, $\beta$ étant une $(N-k)$-boule; soit $\beta'(\tilde{x})$ la partie connexe contenant $\tilde{x}$ de $f^{-1}(\{x\} \times \beta)$, la proposition 2.5 est de nature topologique donc valable si l'on remplace $D^m$ par $\{x\} \times \beta$ qui coupe aussi canoniquement $X^k$ dans $X$ on en déduit que $\beta'(\tilde{x})$ est une $(N-k)$-boule [l'application $h^{-1}f$ de $\beta'(\tilde{x})$ dans $\{x\} \times \beta$ vérifie la condition $(f)$]. Nous supposerons que $f$ vérifie aussi la condition $(f)'$ suivante :

**Condition** $(f)'$. — La base $X$ vérifie les conditions $(\varphi)_3$ et $(\varphi)_4$ et il existe une application $\chi$ d'une $(N-k)$-boule $\tilde{\beta}$ dans la $(N-k)$-boule $\beta$ telle que l'application $h^{-1}f$ de $\beta'(\tilde{x})$ sur $x \times \beta$ soit la composée d'un homéomorphisme $\tilde{h}^{-1}(\tilde{x})$ de $\beta'(\tilde{x})$ sur $\{\tilde{x}\} \times \tilde{\beta}$, et de l'application $f \times \chi$ de $\tilde{x} \times \tilde{\beta}$ sur $\tilde{x} \times \beta$. $\tilde{\Theta}$ étant la composante connexe ou l'ensemble des composantes connexes de $f^{-1}(\Theta)$ qui contiennent $\tilde{\Xi}$, l'application $\tilde{h}$ de $\tilde{\Xi} \times \tilde{\beta}$ sur $\tilde{\Theta}$ définie par $\tilde{h}(\tilde{x})$ quand $\tilde{x}$ décrit $\tilde{\Xi}$ satisfait aux conditions $(\varphi)_3$. Soient $T^0 = D^{N-\rho+1} \cap \chi^{\rho-1}$ et $s$ une section de type $s$ le long de $\dot{D}^{N-\rho+1} \subset \bar{D}^N$ : elle est obtenue par prolongement d'une section $s \mid \dot{\Theta}$; soit $y \in \dot{\Theta} \cap X^k$, $s(y)$ est formé par un $(r-1)$-repère $Z_{r-1}(y)$ dont le $(\rho-1)$-plan complexe est tangent à $\dot{\Theta} \cap X^k$ et par un vecteur sortant $\check{h}v(y)$. Considérons l'image réciproque $\tilde{s} \mid \dot{\tilde{\Theta}}$, soit $\tilde{y} \in \tilde{\Theta} \cap X^k$ et $y = f(y)$; $\tilde{s}(\tilde{y})$ sera formé d'un $(r-1)$-repère $\tilde{Z}_{r-1}(\tilde{y})$ qui est tangent à $\dot{\tilde{\Theta}} \cap \tilde{X}^k$ et d'un vecteur $\tilde{v}'(\tilde{y})$ qui est sortant de $\dot{\tilde{\Theta}}$. Il y a une section sortante $\tilde{s}'$ telle que $\tilde{s}'(\tilde{y})$ soit formé de $Z'_{r-1}(y)$ et $v'(y)$. Comme $v(y)$ et $v'(y)$ sont sortants ils sont homotopes par une homotopie dont tous les vecteurs sont linéairement indépendants au point de vue complexe de tout $(r-1)$-repère tangent à $\dot{\tilde{\Theta}} \cap X^k$. La section définie par $Z_{r-1}(\tilde{y})$ et $\tilde{v}'(\tilde{y})$ est donc homotope à $s$, il reste à voir qu'elle est homotope à $s'$ ou que les sections de ${}^{r-1}\mathcal{E}$ définies par $Z_{r-1}$ et $Z'_{r-1}$ sont homotopes dans un sous-espace pseudo-fibré qui coïncide avec ${}^{r-1}\mathcal{E}$ au-dessus de $\tilde{T}^0$ et ailleurs avec l'espace des $(r-1)$-repères qui, en $y \in \tilde{\Theta}$, sont linéairement indépendants de $\check{\tilde{h}}\tilde{v}, (\tilde{y})$; l'homotopie existe au-dessus de $\tilde{T}^0 \in \tilde{X}^{-1}$ [connexité de $GL(C, (r-1))$] et est prolongeable au-dessus de $\dot{\tilde{\Theta}}$ en vertu de la proposition 2.3($b$) et de la remarque 2.1. Donc les sections $\tilde{s}$ et $\tilde{s}'$ sont homotopes au-dessus de $\dot{\tilde{\Theta}}$ et l'homotopie se prolonge, en vertu de la condition $(\varphi)_4$ au-dessus de $\tilde{\bar{D}}^{N-\rho+1}$, d'où :

Proposition 4.7. — *Si f vérifie les conditions (f) et (f)', l'image réciproque d'une section de type s au-dessus de* $\dot{D}^{N-\rho+1}=f\left(\dot{\tilde{D}}^{N-\rho+1}\right)$ *est une section de type s au-dessus de* $\dot{\tilde{D}}^{N-\rho+1}$.

## 5. Système obstructeur dans certains espaces pseudo-fibrés ${}^r\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{E}$ un espace pseudo-fibré a fibres vectorielles complexes de type tangentiel qui vérifie $(\varphi)_3$ et $(\varphi)_4$. Sa donnée revient à celle d'une base $X$ vérifiant $(\varphi)_1$, $(\varphi)_2$, $(\varphi)_3$ et $(\varphi)_4$. ${}^r\mathcal{E}$ $(1 \leqq r \leqq (N/2)+1)$ sera un espace de $r$-repères associés à $\mathcal{E}$ ou un espace de $r$-repères complexes de type tangentiel pour lequel on a pu démontrer de façon quelconque toutes les propositions de 4.2 à 4.7 et la remarque 4.3. Nous supposerons, en outre, que *la variété* $X=X^N$ *est elle-même presque complexe.* Nous allons définir un système de classes $c_r(X_i)$ telles que pour la cohomologie définie au paragraphe 2 on ait

(5.1) $$c_r(X_i) \in H^{k-\rho+1}\left(\bar{X}_i\right),$$

$k=k(i)$ étant la dimension de $X_i$.

Nous définirons $c_r(X_i)$ comme la classe commune d'une famille de cocycles obstructeurs $c_r(X_i,\ s)$ les $s$ étant certaines sections au-dessus de $(D)^{N-\rho}$. $s$ et $s'$ étant deux telles sections et $\psi$ une certaine homotopie entre $s$ et $s'$, $\psi$ définie par une section $\psi$ de $\hat{\mathcal{E}}=\mathcal{E}\times I$ au-dessus de $(D)^{N-\rho-1}\times I$, nous définirons en même temps une cochaîne différence $\partial_r(X_i,\ s,\ s',\ \psi) \in \mathcal{C}^{k-\rho}\left(\bar{X}_i\right)$.

**Sections $s$ et homotopies $\psi$.** — Dans ce paragraphe nous ne désignerons, sauf indications contraires par les lettres $s$ ou $\psi$ que les sections et homotopies vérifiant la condition suivante :

Conditions $(s)$. — Appelons toujours $p=p(D^m)$ la dimension de la partie $X_i$ contenant $D^m \cap K^{N-m}$; pour toute cellule $D^{N-\rho+1}$ tel que $p=\rho-1$, $s$ est une section de type $s$ (définie au paragraphe 4) le long de $\dot{D}^{N-\rho+1}$. Pour tout $D_j^{N-\rho} \subset \dot{D}^{N-\rho+1}$ $(p(D^{N-\rho+1})=\rho-1)$, $\psi[(D^{N-\rho}\cap(D)^{N-\rho-1})\times I]$ sera la restriction d'une homotopie entre $s$ et $s'$ définie sur tout $D^{N-\rho}$.

Montrons que de telles sections et homotopies existent; soient, en effet, $D_1^{N-\rho+1}$ et $D_2^{N-\rho+1}$ deux cellules distinctes pour lesquelles $p=\rho-1$. Montrons que $\bar{D}_1^{N-\rho+1}\cap\bar{D}_2^{N-\rho+1}=\emptyset$. S'il n'en était pas ainsi cette intersection contiendrait une cellule $D^m$ $(m \leqq N-\rho)$, celle-ci couperait un $K^{N-m}$ dont l'adhérence contiendrait $T_\iota^0=D_\iota^{N-\rho+1}\cap X_\iota^{\rho-1}$ $(\iota=1,\ 2)$, d'après l'hypothèse de finesse $T_1^0$ et $T_2^0$ seraient dans un même $\bar{K}^h$ avec $K^h \subset \mathcal{X}^{\rho-1}$, donc $h \leqq \rho - 1$, mais $\bar{K}^h$ ayant un point dans $\bar{D}_2^{N-\rho+1}$ et l'autre à l'extérieur devrait couper canoniquement son bord, or cela est impossible puisque $\rho - 1 + N - \rho < N$. Pour construire $s$ on pourra donc d'abord choisir séparément $s$ sur le bord de chaque $D^{N-\rho+1}$ pour lequel $p = \rho - 1$ de façon à avoir une section de type $s$, cela est possible d'après la condition $(\varphi)_4$; ensuite on prolongera $s$ sur le reste de $(D)^{N-\rho}$ par cellules $T^n$ de dimensions croissantes comme au début du paragraphe 2. Les sections $s$ et $s'$ étant données on pourra construire $\psi$ de la manière suivante : d'après la condition $(\varphi)_4$ il existe une section $\hat{\psi}$ de $\hat{\mathcal{E}}$ au-dessus de $D^{N-\rho+1} \times I$ qui définit une homotopie entre $s$ et $s'$ au-dessus de $\dot{D}^{N-\rho+1}$, sa restriction à la trace de $(D)^{N-\rho}$ y définira l'homotopie $\psi$, $\psi$ étant ainsi définie sur des parties disjointes pourra être prolongée au-dessus de tout $(D)^{N-\rho-1}$ par simplexes $T^n$ de dimensions croissantes (comme dans la démonstration de la proposition 2.2).

Remarquons que si $s$ vérifie la condition $(s)$, toute section homotope à $s$ dans $\mathcal{E}$ la vérifie aussi, cela résulte de la proposition 4.6.

Avant de définir les valeurs des cochaînes sur les chaînes élémentaires $D_*^m$, qui seront des entiers, remarquons qu'il existe des isomorphismes canoniques sur $\mathbf{Z}$ de plusieurs groupes d'homologie. $E$ étant l'espace fibré à fibres vectorielles complexes de tous les vecteurs tangents à la variété presque complexe $\mathcal{X}$. $H^{N-\rho}({}^rE(x))$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{Z}$ pour tout $x \in \mathcal{X}$. Si $x \in U = \overset{\circ}{\text{et}}\, K^0$, avec $K^0 \in \mathcal{X}^p$, le vecteur $Z_{r-1}(x) = \varphi(x, Z_{r-1})$ définit classiquement un isomorphisme canonique de $H^{N-\rho}({}^rE(x))$ sur $H^{N-\rho}({}^1E(x))$, ${}^1E(x)$ étant l'espace des vecteurs linéairement indépendants de $Z_{r-1}(x)$. L'injection de $\mathcal{A}(x)$ dans $E(x)$ définit un isomorphisme canonique de $H^{N-\rho}({}^1E(x))$ sur $H^{p-\rho}({}^rE(x))$ : on peut, en effet, déterminer l'élément unité de $H^{N-\rho}({}^1E(x))$ par une sphère orientée située dans un $((N - \rho + 1)/2\text{-})$-plan complexe supplémentaire, dans $E(x)$, du $(r-1)$-plan-complexe de $Z_{r-1}(x)$ et l'élément unité de $H^{p-\rho}({}^1\mathcal{A}(x))$ par la trace de cette sphère sur ${}^1\mathcal{A}(x)$. Les fibres de ${}^1E(x)$ et ${}^1\mathcal{A}(x)$ variant continûment dans $U$ on a des isomorphismes canoniques sur $\mathbf{Z}$ des groupes d'homologie de dimension $p - \rho$ des espaces suivants :

$$(5.2) \qquad {}^1\mathcal{A}(x), \qquad {}^1\mathcal{A}(U) = {}^1\mathcal{A}, \qquad {}^1\mathcal{A}(U) \times I, \qquad {}^r\mathcal{E}(U \cap \mathcal{X}^p).$$

**Indices de certains cycles.** — Soit $\mathcal{U}$ l'un des espaces de la ligne (5.2) et soit $\gamma$ un $(p - \rho)$-cycle singulier de $\mathcal{U}$; l'entier $\mathcal{J}\gamma$, image de sa classe d'homologie par l'isomorphisme canonique de $H^{p-\rho}(\mathcal{U})$ sur $\mathbf{Z}$ sera, par définition, l'indice du cycle $\gamma$. Pour un même espace $\mathcal{U}$ la classe d'homologie d'un $(p - \rho)$-cycle est donc caractérisée par son indice.

REMARQUE 5.1. — Considérons comme dans la proposition 4.3 les deux espaces ${}^1\mathcal{A}(U)$ et ${}^1\mathcal{A}'(U)$ de dimensions respectives $p + N$ et $p' + N$, tels que ${}^1\mathcal{A}'(x) \subset {}^1\mathcal{A}(x)$; l'isomorphisme de $H^{p-\rho}({}^1\mathcal{A}(U))$ sur $H^{p'-\rho}({}^1\mathcal{A}'(U))$

défini par l'intermédiaire de **Z**, peut aussi être défini directement par la considération des cycles et chaînes de ${}^1\mathfrak{A}(U)$ représentés par des sous-variétés orientées coupant canoniquement ${}^1\mathfrak{A}'(U)$ dans ${}^1\mathfrak{A}(U)$. En effet, d'après le lemme du paragraphe 4, à toute chaîne on peut faire correspondre une chaîne homotope qui possède cette propriété, donc il y a dans chaque classe d'homologie un cycle $\gamma$ possédant cette propriété et, si on lui fait correspondre le cycle $\gamma'$ défini, dans ${}^1\mathfrak{A}'(U)$, par la trace orientée de la variété orientée qui définit $\gamma$, on obtient un homomorphisme conservant les bords; il définit donc un homomorphisme de $H^{p-\rho}({}^1\mathfrak{A}(U))$ sur $H^{p'-\rho}({}^1\mathfrak{A}'(U))$ qui est l'isomorphisme précédemment défini puisque les deux classes d'indice 1 se correspondent : en effet, elles peuvent être définies par les traces respectives d'une $(N-\rho)$-sphère de ${}^1E(x)$ sur ${}^1\mathfrak{A}(x)$ et ${}^1\mathfrak{A}'(x)$ et la seconde trace est la trace de la première. Il en résulte que les *cycles* $\gamma$ et $\gamma'$ *ont même indice.*

**Définition des cocycles obstructeurs** $c_r(X_i, s)$. — Nous les définirons d'abord comme cochaînes par leurs valeurs sur les chaînes élémentaires $\bar{D}_\star^{N-\rho+1} \cap X_i$ :

Si $p(D^{N-\rho+1}) = \rho - 1$ (c'est-à-dire $D^{N-\rho+1} \cap K^{\rho-1} \in X^{\rho-1}$) on posera, $s$ étant un champ de type $s$ :

$$(5.3) \qquad \langle c_r(X_i, s).(\bar{D}_\star^{N-\rho+1} \cap X_i)\rangle \begin{cases} = 0 & \text{si } X_i \neq X^{\rho-1}, \\ = \varepsilon & \text{si } X_i = X^{\rho-1}, \end{cases}$$

avec $\varepsilon = +1$ si les orientations positives de $D_\star^{N-\rho+1}$ et de $X^{\rho-1}$ définissent l'orientation positive de $X$ et $\varepsilon = -1$ dans le cas contraire.

Si $p(D^{N-\rho+1}) > \rho - 1)$ (donc $p \geqq \rho + 1$), on peut, par application des propositions 4.1 et 4.2 définir une section, $\tau \mid \dot{D}_\star^{N-\rho+1}$ de ${}^1\mathfrak{B}$ associée à $s$, l'orientation bord de $\dot{D}_\star^{N-\rho+1}$ induit une orientation de $\tau(\dot{D}^{N-\rho+1} \cap X_i)$ et de sa trace sur ${}^1\mathfrak{A}$ laquelle est comme on l'a vu, une $(p-\rho)$-variété compacte et sans bords, elle définit donc un cycle que nous désignerons encore par $\tau(\dot{D}_\star^{N-\rho+1} \cap X_i) \cap {}^1\mathfrak{A}$ et nous poserons

$$(5.4) \qquad \langle c_r(X_i, s).(\dot{D}_\star^{N-\rho+1} \cap X_i)\rangle = \mathcal{J}(\tau(\dot{D}_\star^{N-\rho+1} \cap X_i) \cap {}^1\mathfrak{A}).$$

Montrons que le second membre ne dépend que de $r$, $X_i$, $s$ et $D^{N-\rho+1}$ et non des choix particuliers de ${}^1\mathfrak{A}$ et $\tau$. Considérons d'abord, comme à propos de la proposition 4.4, deux espaces ${}^1\mathfrak{A}$ et ${}^1\mathfrak{A}'$ définis sur le même $U = \overset{\circ}{\text{et}}\, K_0$; l'énoncé de la proposition 4.4, $(b)$ peut être appliqué à

$$\dot{D}^{N-\rho+1} \subset (D)^{N-\rho} \cap \dot{D}^N = S.$$

La section $\hat{\tau}$ de l'espace ${}^1\hat{\mathfrak{B}}$ au-dessus de $\dot{D}^{N-\rho+1} \times I$ coupe canoniquement ${}^1\hat{\mathfrak{A}}$, donc le $(p-\rho)$-cycle différence des cycles

$$\hat{\tau}((\dot{D}_{\star}^{N-\rho+1} \cap X_i) \times \{1\}) \cap {}^1\hat{\mathfrak{A}} \qquad \text{et} \qquad \hat{\tau}((\dot{D}_{\star}^{N-\rho+1} \cap X_i) \times \{0\}) \cap {}^1\hat{\mathfrak{A}}$$

est bord de la chaîne à support compact $\hat{\tau}((\dot{D}_{\star}^{N-\rho+1} \cap X_i) \times I) \cap {}^1\hat{\mathfrak{A}}$, ces deux cycles sont donc homologues dans ${}^1\hat{\mathfrak{A}}$; ${}^1\hat{\mathfrak{A}}$ ici n'est pas défini comme produit mais est homéomorphe à un produit, donc les cycles $\tau'_1$ et $\tau_1$ de ${}^1\mathfrak{A}$ tels que $\tau'_1 \times \{1\}$ et $\tau_1 \times \{0\}$ soient respectivement égaux à ces deux cycles, sont homologue dans ${}^1\mathfrak{A}$; mais, d'après la propriété 4.4, $(b)$ ils coïncident respectivement avec :

$$\tau'(\dot{D}^{N-\rho+1} \cap X_i) \cap {}^1\mathfrak{A} \qquad \text{et} \qquad \tau(\dot{D}_{\star}^{N-\rho+1} \cap X_i) \cap {}^1\mathfrak{A}$$

donc les indices de ces deux cycles sont les mêmes. Il reste à vérifier que le second membre de (5.4) n'est pas changé lorsque ${}^1\mathfrak{A}$ et ${}^1\mathfrak{A}'$ sont définis dans les étoiles $U$ et $U'$ de deux sommets différents $K^0 \in X^p$ et $K'^0 \in X^{p'}$ $(p' \leqq p)$; pour la section $\tau \,|\, \dot{D}^{N-\rho+1}$ définie par la propriété 4.3 la variété $\tau(\dot{D}^{N-\rho+1} \cap X_i) \cap {}^1\mathfrak{A}$ coupe canoniquement ${}^1\mathfrak{A}'$ dans ${}^1\mathfrak{A}$ et sa trace est $\tau(\dot{D}^{N-\rho+1} \cap X_i) \cap {}^1\mathfrak{A}'$, donc les cycles qui leur correspondent après orientation de $\dot{D}^{N-\rho+1}$ ont même indice en vertu de la remarque 5.1. Comme nous avons déjà vu que pour $K^0$ ou $K'^0$ donnés, l'indice $\mathcal{I}$ proposé ne dépendait pas du choix de ${}^1\mathfrak{A}$ et $\tau$, il en résulte qu'il n'en dépend dans aucun cas ce qui justifie la définition des cochaînes $c_r(X_i, s)$ dont nous verrons plus loin qu'elles sont des cocycles.

**Définition des « cochaînes différence »** $\partial_r(X_i, s, s', \psi)$. — Pour tout $D^{N-\rho}$ on a $D^{N-\rho} \cap K^p \in X^p$, avec $p \geqq \rho$, donc, par raison de parité, $p \geqq \rho+1$. En vertu de la remarque 4.3 et des propriétés 4.1 et 4.2 il existe une section $\hat{\sigma}_r$ de ${}^r\hat{\mathcal{B}} = {}^r\mathcal{B} \times J$ homotope dans ${}^r\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \times J$ à la section $\hat{\psi}$ définie sur le bord de $\bar{D}^{N-\rho} \times J$ par $s$, $s'$ et $\psi$ comme précédemment ($\hat{\psi}$ est défini sur $\bar{D}^{N-\rho} \times \{0\}$ par $s$, sur $\bar{D}^{N-\rho} \times \{1\}$ par $s'$ et sur $\dot{D}^{N-\rho} \times I$ par $\psi$) et il existe une section $\hat{\tau}$ homotope à $\hat{\sigma}_1 = j\sigma_r$ dans ${}^1\hat{\mathcal{B}} = {}^1\mathcal{B} \times J$ telle que $\hat{\tau}[\text{bord}\,(D^{N-\rho} \times J) \cap (X_i \times J)]$ soit une variété coupant canoniquement ${}^1\hat{\mathfrak{A}} = {}^1\mathfrak{A} \times J$, dans ${}^1\hat{\mathcal{B}}$ suivant une $(p-\rho)$-sous-variété compacte; après orientation de $\bar{D}^{N-\rho}$, cette sous-variété définit un $(p-\rho)$-cycle de ${}^1\mathfrak{A}$ que nous écrirons par le même symbole, $\bar{D}^{N-\rho}$, étant remplacé par $\bar{D}_{\star}^{N-\rho}$ et nous poserons

$$(5.5) \qquad \begin{aligned} &\langle \partial_r(X_i, s, s', \psi).(\bar{D}^{N-\rho} \cap X_i) \rangle \\ &\quad = \mathcal{I}\left[\hat{\tau}[\text{bord}((\bar{D}_{\star}^{N-\rho} \cap X_i) \times J)] \cap {}^1\hat{\mathfrak{A}}\right] \end{aligned}$$

En vertu de la remarque 4.3 et des propositions 4.1 et 4.2, le même raisonnement que ci-dessus permettra de montrer que le deuxième membre de la formule (5.5) ne dépend pas des choix particuliers de $K^0$, ${}^1\mathfrak{A}$ et $\tau$.

**Cobords des cochaînes** $\delta_r(X_i, s, s', \psi)$. — Déterminons d'abord leurs valeurs pour $\bar{D}_\star^{N-\rho+1}$ tel que $p > \rho - 1$ ; dans ce cas on peut choisir $K^0 \in X^p$ et former, en vertu de la remarque 4.3 et de la proposition 4.2, une même section continue $\hat{\tau}$ de ${}^1\hat{\mathfrak{B}}$ au-dessus de

$$\dot{D}^{N-\rho+1} \times \{0\} \cup \dot{D}^{N-\rho+1} \times \{1\} \cup (\dot{D}^{N-\rho+1} \cap (D)^{N-\rho-1}) \times J;$$

on a, par définition

$$\langle d\delta_r(\mathrm{X}_i, s, s', \psi).(\bar{D}_{\star j}^{N-\rho+1} \cap X_i)\rangle = \sum_j \langle \delta_r(X_i, s, s', \psi).(\bar{D}_{\star j}^{N-\rho} \cap X_i)\rangle$$

avec $\bar{D}_j^{N-\rho} \subset \dot{D}^{N-\rho+1}$; appliquons la formule (5.5) : le cycle qui figure au second membre est, comme on l'a vu, la somme de trois chaînes se projetant respectivement sur $\bar{D}_j^{N-\rho} \times \{0\}$, $\bar{D}_j^N \times \{1\}$ et $\dot{D}_j^{N-\rho} \times J$. Dans chacune des trois catégories sommons par rapport à $j$ : comme

$$\sum_j \dot{D}_{\star j}^{N-\rho} \times J = 0$$

la somme des chaînes correspondantes, qui est l'image de celle-ci par $\hat{\tau}$, disparaît. L'orientation du bord de $\bar{D}_{\star j}^{N-\rho} \times J$, dans sa trace sur $\bar{D}_\star^{N-\rho+1} \times \{0\}$, est celle de $-\bar{D}_{\star j}^{N-\rho} \times \{0\}$; donc en sommant les deux catégories restantes il vient

$$\begin{aligned}&\langle d\delta_r(X_i, s, s', \psi).(\bar{D}_\star^{N-\rho+1} \cap X_i)\rangle \\ &\quad = \mathfrak{I}[\hat{\tau}((\bar{D}_\star^{N-\rho+1} \cap X_i) \times \{1\}) \cap {}^1\hat{\mathfrak{A}}] - \mathfrak{I}[\hat{\tau}((\bar{D}_\star^{N-\rho+1} \cap X_i) \times \{0\}) \cap \hat{\mathfrak{A}}],\end{aligned}$$

mais chaque crochets est le produit par $\{1\}$ ou $\{0\}$ du cycle $\tau'$ ou $\tau$ associé à $s'$ et $s$ donc, compte tenu de la relation (5.4), il vient

$$\begin{aligned}(5.6)\qquad &\langle d\delta_r(X_i, s, s', \psi).(\bar{D}_\star^{N-\rho+1} \cap X_i)\rangle \\ &\quad = \langle [c_r(X_i, s') - c_r(X_i, s)].(\bar{D}_\star^{N-\rho+1} \cap X_i)\rangle.\end{aligned}$$

Cette formule est encore valable au cas où $p(D^{N-\rho+1}) = \rho - 1$ pour tous les $X_i \neq X^{\rho-1}$ : en effet, le second membre est nul en vertu de (5.3) et le premier est nul en vertu du corollaire de la proposition 4.2 puisque $\psi$ est prolongeable au-dessus de chaque $\bar{D}_j^{N-\rho}$ [condition $(s)$]. Donc, on a, lorsque $\delta_r(X_i, s, s', \psi)$ est défini (donc $X_i$ de dimension $\geqq \rho + 1$)

$$(5.7)\qquad d\delta_r(X_i, s, s'_i \psi) = c_r(X_i, s') - c_r(X_i, s).$$

Remarquons que la définition de $\delta_r(X_i, s, s', \psi)$ est aussi valable pour des sections non sortantes et des $\psi$ arbitraires; si $s$ vérifie la condition $(s)$ et si $s'$ est quelconque, la formule (5.7) pourrait servir à définir $c_r(X_i, s')$ si l'on avait démontré que $d\delta_r(X_i, s, s', \psi)$ est indépendant du choix particulier de $\psi$; c'est, en particulier, le cas lorsque tous les $\overline{X}_i$ sont presque complexes.

**Les $c_r(X_i, s)$ sont des cocycles.** — Déterminons, en effet, les valeurs des $dc_r(X_i, s)$ relatives à une chaîne élémentaire $\overline{D}_*^{N-\rho+2}$.

Considérons d'abord les $X_i$ de dimensions $\geqq \rho + 1$ : $s$ et $s'$ étant deux sections la relation (5.7) entraîne : $dc_r(X_i, s') = dc_r(X_i, s)$ ; il suffira donc d'associer à chaque $D^{N-\rho+2}$ une section $s$ particulière telle que

$$\langle dc_r(X_i, s)\,(\overline{D}^{N-\rho+2} \cap X_i)\rangle = 0$$

pour que ce résultat subsiste pour tout $s'$. Si $\overline{D}^{N-\rho+2} \subset \overline{D}^N \subset U$ est tel que $p > \rho - 1$ il n'y a pas à y considérer des sections sortantes; nous avons vu qu'il existe sur $U$ une section $\tilde{s}$ (propriété 2.3), nous prendrons pour $s$ sa restriction à $\overline{D}^{N-\rho+2} \cap (D)^{N-\rho}$ prolongée sur le reste de $(D)^{N-\rho}$; elle est donc prolongeable sur chaque $\overline{D}_j^{N-\rho+1} \subset \dot{D}^{N-\rho+2}$, on aura d'après le corollaire de la propriété 4.2,

$$\langle c_r(X_i, s) . (D^{N-\rho+1} \cap X_i)\rangle = 0.$$

donc

$$\langle dc_r(X_i, s) . (\overline{D}^{N-\rho+2} \cap X_i)\rangle = 0.$$

Si maintenant $D^{N-\rho+2}$ coupe un $X^{\rho-1}$ (donc $p = \rho - 1$) la propriété 4.6 montre l'existence d'une section $s$ qui est sortante sur les bords des deux $(N - \rho + 1)$-cellules de $\dot{D}^{N-\rho+2}$ qui coupent $X^{\rho-1}$ et prolongeable dans toutes les autres, ce qui entraîne, pour ces dernières, d'après le corollaire de la proposition 4.2, que $c_r(X_i, s)$ s'y annule; cette cochaîne s'annule aussi sur les deux cellules qui coupent $X^{\rho-1}$ en vertu des relations (5.3), puisque la dimension de $X_i$ est supérieure à $\rho - 1$. On a donc encore

$$\langle dc_r(X_i, s)\,\overline{D}^{N-\rho+2} \cap X_i)\rangle = 0.$$

Donc pour tout $s$ on a bien $dc_r(X_i, s) = 0$.

Il reste à examiner le cas d'une sous-variété $X^{\rho-1}$, elle ne coupe que des $\overline{D}^{N-\rho+2}$ pour lesquelles $p = \rho - 1$ et ne coupe le bord d'une telle cellule qu'en deux points $T_\iota^0 \in D_\iota^{N-\rho+1}$ $(\iota = 1, 2)$. Pour ces deux $(N - \varphi + 1)$-cellules la section $s$ est de type $s$ et, comme elles sont orientées par le bord de $\overline{D}^{N-\rho+2}$, $c_r(X^{\rho-1}, s)$ prend sur l'un des $T_\iota^0$ la valeur 1 et sur l'autre la valeur $-1$ ; donc $dc_r(X^{\rho-1}, s) = 1 - 1 = 0$.

C. Q. F. D.

La formule (5.7) montre que, *pour $r$ et $X_i$ fixes, et pour toutes les* *sections vérifiant la condition* $(s)$, *les cocycles* $c_r(X_i, s)$ *sont cohomologues, d'où :*

**Définition du système obstructeur de** $\mathcal{E}^r$. — C'est le système formé par les classes $c_r(X_i^k)$, $c_r(X_i^k) \in H^{k-\rho}(\bar{X}_i^k)$ étant la classe commune des cocycles $c^r(X_i^k, s)$.

**Cocycles** $\hat{c}_r(X_i, s)$. — Nous poserons, conformément à la formule (2.2),

$$(5.8) \qquad \hat{c}_r(X_i^k, s) = \mu^\star c(X_i^k, s) \in \mathcal{C}^{N-\rho+1}(X);$$

$\langle \hat{c}_r(X_i, s) . D^{N-\rho+1} \rangle = \langle c_r(X_i, s) . (\dot{D}^{N-\rho+1} \cap X_i) \rangle$ peut donc aussi être défini directement par les formules (5.3) et (5.4).

Théorème 1. — *On a*

$$(5.9) \qquad \sum_i \hat{c}_r(X_i, s) = c_r(X, s),$$

*où* $c_r(X, s)$ *désigne la classe obstructrice de Chern définie sur la variété presque complexe* $X$ *par la section* $s \mid (D)^{N-\rho}$.

Pour le montrer considérons encore $D^{N-\rho+1} \subset U$ (pour $p > \rho - 1$) et une section $Z_{r-1} \mid U$ de ${}^{r-1}\mathcal{E}(U)$ définie par une application $\varphi$ de $U \times F_p$ dans $\mathcal{E}(U)$. Appelons ${}^1A(x)$, $x \in U$, l'espace des vecteurs linéairement indépendants de $Z_{r-1}(x)$ dans le $N/2$-plan complexe $E(x)$ tangent à $X$ en $x$ et ${}^1A$ l'espace fibré engendré par ${}^1A(x)$ quand $x$ décrit $U$; son premier groupe d'homotopie non nul est de dimension $N - \rho = N - 2r + 1$. Si $\tau_r(x)$ est le $r$-repère défini par $Z_{r-1}(x)$ et $\tau(x)$ le cycle $\tau_r(\dot{D}_\star^{N-\rho+1})$ est homotope à $s(\dot{D}_\star^{N-\rho+1})$ dans ${}^r\mathcal{E}$ et *a fortiori* dans ${}^rE$ : $\langle c_r(X, s) . \dot{D}_\star^{N-\rho+1} \rangle$ est donc égal à la classe dans ${}^rE$ du cycle $\tau_r(\dot{D}_\star^{N-\rho+1})$ où à la classe dans ${}^1A$ du cycle $\tau(\dot{D}_\star^{N-\rho+1})$. D'après la propriété 4.2, $\tau(\dot{D}_\star^{N-\rho+1}) \cap X$ coupe canoniquement ${}^1\mathcal{A}(X_i \cap U)$ dans ${}^1\mathcal{B}(X_i \cap U)$ et *a fortiori* dans ${}^1A(X_i \cap U)$; donc le complexe $\tau(\dot{D}_\star^{N-\rho+1})$ coupe canoniquement ${}^1\mathcal{A}$ dans ${}^1A$ suivant une $(p-\rho)$-variété. L'isomorphisme de $H^{N-\rho}({}^1A)$ sur $H^{p-\rho}({}^1\mathcal{A})$ défini par les variétés orientées coupant canoniquement ${}^1\mathcal{A}$ dans ${}^1A$ et par leurs traces sur ${}^1\mathcal{A}$ conserve les indices (cela résulte immédiatement de la remarque 5.1, ${}^1\mathcal{A}$ et ${}^1\mathcal{A}'$ étant remplacés par ${}^1A$ et ${}^1\mathcal{A}$). En décomposant $(\dot{D}_\star^{N-\rho+1})$ en cycles situés chacun dans un $\tau(X_i)$ et en appliquant les formules (5.4) et (5.8), on obtient

$$\langle c_r(X, s) . \bar{D}_\star^{N-\rho+1} \rangle = \text{classe dans } H^{N-\rho}({}^1A) \text{ de } \tau(\dot{D}_\star^{N-\rho+1})$$
$$= \sum_i \langle \hat{c}(X_i, s) . \bar{D}_\star^{N-\rho+1} \rangle$$

Si maintenant $D_{\star}^{N-\rho+1}$ coupe un $X^{\rho-1}(p=\rho-1)$ la formule écrite est évidente, les deux membres étant simultanément égaux à $+1$ ou $-1$ suivant l'orientation de $D^{N-\rho+1}$.

REMARQUE 5.2. — Supposons que l'un des $\bar{X}_i$, soit $\bar{X}^k$, soit presque complexe. Si $\bar{X}^k=\sum_j X_j$ et si $c_s(\bar{X}^k, s)$ est la classe obstructrice déterminée sur $\bar{X}^k$ par $s \mid (D)^{N-\rho} \cap \bar{X}^k$ on démontre, de la même manière, que

$$(5.10) \qquad c_r(\bar{X}^k, s)=\sum_j \lambda_i^{\star} \mu_j^{\star} c_r(X_j, s) \qquad \text{ou} \qquad \hat{c}_r(\bar{X}^k, s)=\sum_j \hat{c}_r(X_j, s).$$

Si tous les $\bar{X}_i$ sont presque complexes, de telles formules permettent par inversion de définir directement les $c_r(X_i, s)$; posons, comme dans un précédent article [8],

$$(5.11) \qquad X_i^k=\sum_j \theta_{ij} \bar{X}_j^q+\sum_{j'} \theta_{ij'} \bar{X}_{j'}^{q'}, \qquad \text{avec} \quad 0 \leqq q' < \rho-1 \leqq q \leqq k,$$

les $\theta_{ij}$ étant des entiers positifs ou négatifs, $\theta_{ii}=1$ et $\bar{X}_j^q \subset \bar{X}^k$, donc toute cochaîne qui s'annule sur les chaînes ne rencontrant pas $X_j^q$ s'annule *a fortiori* sur celles qui ne rencontrent pas $X_i^k$; par conséquent, en reprenant les notations du paragraphe 2, on peut former $\nu_{ij}^{\star}=\mu_i^{\star-1}\mu_j^{\star}$ qui est un homomorphisme de $\mathcal{C}^{\star}(X_j^q)$ dans $\mathcal{C}^{\star}(X_i^k)$ augmentant les degrés de $k-q$ et conservant les cobords; il définit un homomorphisme $\bar{\nu}_{ij}^{\star}$ de $\mathcal{H}^{\star}(X_j^q)$ dans $\mathcal{H}^{\star}(X_i^k)$, on a

$$(5.12) \qquad c(X_i^k)=\sum_j \theta_{ij}\, \bar{\nu}_{ij}^{\star}\, c(\bar{X}_j^q) \in \mathcal{H}^{k-\rho+1}(X_i^k)$$

et des formules analogues pour les cocycles obstructeurs et cochaînes différences (*voir* l'article cité).

REMARQUE 5.3. — *Cas où* $r=1$. — On a $N-\rho+1=N$ : appelons $c(\bar{X}_i)$ la classe de degré $N$ dont la valeur sur chaque composante orientée de $\bar{X}_i$ est égale à sa caractéristique d'Euler-Poincaré; on ne suppose plus que les $\bar{X}_i$ sont presque complexes mais on a encore la formule (5.11), sans termes en $q'$. Le second membre de (5.12) définit une classe $c'_1(X_i^k)$ de degré $k$. Cette classe coïncide-t-elle avec $c_1(X_i^k)$ ? Lorsque les $\bar{X}_j$ sont différentiables, le raisonnement fait lorsqu'ils sont presque complexes subsiste, on retrouve la formule (5.10), donc $c_1(X_i^k)=c'(X_i^k)$. Cette égalité peut se démontrer dans un cas assez général par construction d'une

---

([8]) SCHWARTZ (Marie-Hélène). — Espaces pseudo-fibrés, *Séminaire Ehresmann*, 1958-1959.

section particulière [9]; mais elle sera aussi démontrée si l'on peut donner une définition axiomatique des systèmes obstructeurs qui fasse intervenir comme propriétés caractéristiques les théorèmes numérotées ici 2 et 3 qui se démontrent très simplement dans le cas des $c'_1$ et que nous allons démontrer pour tous les $c_r(X_i)$.

Remarque 5.4. — Dans les deux remarques précédentes on a trouvé des classes obstructrices qui peuvent être définies *a priori* et ne dépendent pas du choix des complexes $(K)$ et $(D)$ [ceci a un sens par le fait que pour un même $X_i$ les $\mathcal{H}^{k-\rho+1}(X_i)$ définis par différents complexes $(D)$ sont canoniquement isomorphes entre eux]. En est-il toujours ainsi et sinon dans quels cas ? Le problème est important pour la présente théorie qui semble surtout intéressante que dans ces cas.

Théorème 2. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une section de* ${}^r\mathcal{E}$ *au-dessus du squelette* $(D)^{N-\rho+1}$ *est que toutes les classes* $c_r(X_i)$ $(2r = \rho - 1)$ *soient nulles.*

La condition est nécessaire : supposons, en effet, qu'il existe une section $s \mid (D)^{N-\rho+1}$, cela implique que $(D)^{N-\rho+1} \cap X_i^{\rho-1} = \emptyset$, ce qui n'est possible que s'il n'y a pas de $X_i^{\rho-1}$. Il n'y aura donc plus de restrictions relatives aux sections sortantes et nous pourrons prendre pour $s \mid (D)^{N-\rho}$ la restriction de $s \mid (D)^{N-\rho+1}$. La section étant donc prolongeable dans tout $\overline{D}^{N-\rho+1}$ on aura, d'après le corollaire de la propriété 4.2,

$$c_r(X_i, s).\overline{D}_j^{N-\rho+1} = 0, \qquad \text{donc} \quad c_r(X_i, s) = 0 \quad \text{et} \quad c_r(X_i) = 0,$$

La condition est suffisante : supposons que, pour tout $X_i$, $c_r(X_i) = 0$; en particulier $c_r(X_i^{\rho-1}) = 0$; $c_r(X_i^{\rho-1}, s)$ est homologue à zéro et de degré 0, donc nul; d'après la relation (5.3), cela implique qu'il n'y ait aucun point $D^{N-\rho+1} \cap X_i^{\rho-1}$. Tous les $X_i$ qui coupent $(D)^{N-\rho+1}$ sont donc de dimension $\geq \rho + 1$, nous construirons la section $s$ en opérant par $X_i$ de

(9) Le procédé pourra être, avec des hypothèses un peu différentes, celui que nous avons utilisé dans l'article cité dans la Note (4) : $(\hat{K})$ étant une première triangulation et $(K)$ une subdivision de $(\hat{K})$ ayant un sommet dans chaque simplexe et $(D)$ un complexe dual de $(K)$ dont les $N$-cellules $D_j^N$ correspondront biunivoquement aux simplexes $\hat{K}_j$ de toutes dimensions. La section $s$ sera déterminée par la restriction à $(D)^N$ d'un champ analogue au champ barycentrique de l'article cité (les complexes $(\hat{K})$ et $(K)$ correspondant aux complexes $(\hat{D})$ et $(\hat{d})$ de cet article). Pour la cellule $D_j^N$ correspondant au simplexe $\hat{K}_j^\nu$ et tel que $K^0 \in D^N \cap X^p$, $\langle c_1(X_i, s).(\overline{D}^N_{\star j} \cap X_i) \rangle$ sera égal à $(-1)^\nu$ si $X_i = X^p$ et nulle si $X_i \neq X^p$. En sommant par rapport à $j$ on obtient $\sum (-1)^\nu$ pour tous les $\hat{K}^\nu \subset X_i$, puis en sommant pour toutes les parties $X_{i'} \subset \overline{X}_i$ on obtient la caractéristique d'Euler-Poincaré de $X_i$.

dimensions croissante, soit $k_0$ la plus petite. Appelons $W_k$ la réunion de tous les $\overline{T^n}$ tels que

$$T^n \subset X^h \cap (D)^{N-\rho+1} \qquad \text{pour} \quad h \geqq k+1$$

et $\dot{T}^n \cap \overline{X}^k \neq \emptyset$, c'est un voisinage dans $(D)^{N-\rho+1}$ de la trace de $\overline{X}^k$; pour $k < k_0$, $W_k = \emptyset$. Appelons ici $X^k$ la réunions des $X_i$ de dimension $k$ et $X^{k'}$ la réunion des $X_i$ de dimension $k'$ immédiatement inférieure. Raisonnons par récurrence et supposons déterminée $s \mid W_{k'}$.

*a. Prolongement de s au-dessus d'une partie* $X^k \cap (D)^{N-\rho+1}$. — Appelons $X'^k$ l'adhérence du complémentaire dans $X^k$ de la trace de $W_{k'}$. Considérons provisoirement une section $s' \mid (D)^{N-\rho}$ dont la restriction à $W_{k-1} \cap (D)^{N-\rho}$ coïncide avec celle de $s$. Pour tout $D^{N-\rho+1} \subset$, on a donc, d'après le corollaire de la proposition 4.2

$$\langle c_r(X_i, s').\overline{D}_\star^{N-\rho+1} \rangle = 0.$$

Du fait que $c_r(X_i^k, s)$ est cohomologue à zéro

$$\sum_j \langle c_r(X^k, s').(\overline{D}_{j\star}^{N-\rho+1} \cap X^k) \rangle = 0$$

pour l'ensemble de tous les $j$; cette égalité subsiste donc si l'on se restreint aux $D_j^{N-\rho+1}$ dont la trace sur $X^k$ est dans $X'^k$. Mais, en vertu de l'égalité (5.4) les valeurs $\langle c_r(X^k, s').(\overline{D}_{j\star}^{N-\rho+1} \cap X'^k) \rangle$ définissent un cocycle obstructeur pour l'espace fibré ${}^r\mathcal{E}(X'^k)$ et la section $s' \mid D^{N-\rho} \cap X'^k$. $X'^k$ ayant un bord $\dot{X}'^k$ on sait que, à chaque section $s' \mid (D)^{N-\rho+1} \cap \dot{X}'^k$ est attachée une classe obstructrice et que, si celle-ci est nulle, la section est prolongeable au-dessus de $(D)^{N-\rho+1} \cap X'^k$, elle est bien nulle ici puisque

$$\langle c_r(X^k, s').(\overline{D}^{N-\rho+1} \cap X'^k) \rangle = 0;$$

de plus la section, au-dessus de $(D)^{N-\rho+1} \cap \dot{X}'^k$ coïncide avec $s$, donc $s$ est prolongeable au-dessus de tout $X^k \cap (D)^{N-\rho+1}$, de même pour tous les $X_i^k$ de même dimension.

*b. Prolongement au-dessus du reste de* $W_k$. — Il suffit, pour chaque $X^k$, de prolonger $s$ le long des simplexes $\overline{T^n}$ tels que $T^n \subset X^h \cap (D)^{N-\rho+1}$ pour $h \geqq k+1$ et $\dot{T}^n \cap X'^k \neq \emptyset$ (lorsque $T^n \subset W_{k'}$ on conserve la section $s$). Opérons par dimensions $n$ croissantes à partir de 1; supposons le prolongement fait pour tous les $n' < n$ et considérons une cellule $T^n \subset X^h \cap (D)^{N-\rho+1}$; raisonnons comme dans la démonstration de la proposition 2.3 : on a $\overline{T^n} \subset L$ et l'on considère une carte, application $g$ de $\mathcal{L} \subset L \times F_h$ sur $\mathcal{E}(L)$, $g^{-1}s$ est défini au-dessus d'une partie du bord rétractible à $\overline{T^q} = \dot{T}^n \cap X'^k$, elle est donc, d'après le prolongement des homotopies dans $L \times F_h$, prolongeable au-dessus de $\overline{T^n}$; la partie prolongée étant dans $\mathring{L} \times F_h$ a une image par $g$ qui définit le prolongement de $s$. On obtient ainsi le prolongement de $s$ dans tout $W_k$. Pour $k = N$ il suffit de faire la construction $(a)$ et la détermination de $s \mid (D)^{N-\rho+1}$ est achevée.

REMARQUE 5.3. — Quand ${}^r\mathcal{E}$ possède-t-il une section au-dessus d'une variété donnée, compacte sans bords $V$ de dimension $N - \rho + 1$ ? Lorsque cette variété coïncide avec un sous-complexe de $(D)$ et qu'elle peut être munie d'une orientation, elle détermine un $(N - \rho + 1)$-cycle $V_*$ et une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une section au-dessus de $V$ est que, pour chaque $X_i$ on ait, avec les notations indiquées,

$$(5.13) \qquad \sum_V \langle c_r(X_i, s) . (\overline{D}_{j*}^{N-\rho+1} \cap X_i) \rangle$$
$$= \langle c_r(X_i) . V_* \cap X_i \rangle = \langle \hat{c}_r(X_i) . V_* \rangle = 0.$$

La condition est évidemment nécessaire, pour voir qu'elle est suffisante il suffit de remplacer $(D)^{N-\rho+1}$ dans le raisonnement précédent; on a, en particulier, $V \cap X_i^{\rho-1} = \emptyset$.

Considérons maintenant une application $f$ de $\tilde{X}$ dans $X$ vérifiant les conditions $(f)$ (§ 2) et $(f)'$ (§ 4); ce qui implique que $\mathcal{E}$ et $\tilde{\mathcal{E}}$ vérifient $(\varphi)_3$ et $(\varphi)_4$. Si l'on a défini $c_r(X_i, s)$ et que $\tilde{s}$ est la section image réciproque de $s$, elle définit un des cocycles obstructeurs $\tilde{c}_r(\tilde{X}_i, s)$.

THÉORÈME 3. — *$s \mid (D)^{N-\rho}$ étant une section de ${}^r\mathcal{E}$ qui vérifie la condition $(s)$, son image réciproque $\tilde{s} \mid (\tilde{D})^{N-\rho}$ est une section de l'espace de ${}^r\mathcal{E}$, image réciproque de ${}^r\mathcal{E}$ qui vérifie la condition $(s)$ et l'on a, pour $X_j = f(\tilde{X}_i)$*

$$(5.14) \qquad c_r(\tilde{X}_i, \tilde{s}) = f_i^* \, c_r(X_j, s),$$

d'où

$$(5.15) \qquad \tilde{c}_r(\tilde{X}_i) = f_i^* \, c_r(X_j).$$

Il ne nous reste, après avoir appliquée la propriété 4.7, qu'à démontrer la formule (5.14). Soit d'abord $\overline{\tilde{D}}_*^{N-\rho+1}$ et $\overline{D}_*^{N-\rho+1} = f(\overline{\tilde{D}}_*^{N-\rho+1})$ tels que $p = \rho - 1$; $\tilde{s}$ et $s$ sont homotopes à des sections sortantes et l'on a

$$(5.16) \qquad \langle \tilde{c}_r(\tilde{X}_i, \tilde{s}) . (\overline{\tilde{D}}_*^{N-\rho+1} \cap \tilde{X}_i) \rangle = \langle c_r(X_i, s) . (\overline{D}_*^{N-\rho+1} \cap X_i) \rangle;$$

si, en effet, la dimension commune $k$ de $\tilde{X}_i$ et $X_j$ est égale à $\rho - 1$, les deux membres de (5.16) sont, d'après la formule (5.3), simultanément égaux à 1 ou à $-1$ suivant l'orientation de $\overline{\tilde{D}}^{N-\rho+1}$, parce que $f$ conserve l'orientation des $\tilde{X}_i$ et $X_j$. Si $k > \rho - 1$, les deux membres de (5.16) sont nuls, d'après (5.3).

Considérons maintenant $\tilde{D}^{N-\rho+1}$ tel que $p \geqq \rho + 1$, il en est de même pour son image $D^{N-\rho+1}$. Soient $T^0 = D^{N-\rho+1} \cap K^{\rho-1}$, $K^0 \in K^{\rho-1} \cap X^i$, $U = \overset{\circ}{\text{et}}\, K^0$, $\varphi$ une application de $U \times F_p$ dans $\mathcal{E}(U)$, $Z_{r-1} \in {}^{r-1}F_p$ et $\check{\varphi}(x, Z_{r-1}) = Z_{r-1}(x)$; ${}^r\mathcal{B}$, ${}^1\mathcal{C}$, ${}^1\mathcal{B}$ les espaces associés à $\varphi$ et $Z_{r-1}$ comme au début du paragraphe 4 et $\sigma_r$, $\sigma_1$, $\tau$ les sections définies par les propriétés 4.1 et 4.2.

Appelons $F'_p$ la variété des vecteurs du $p/2$-plan complexe $F_p$ linéairement indépendants de $Z_{r-1}$; la restriction de $\varphi$ à $U \times F'_p$ est un homéomorphisme sur ${}^1\mathcal{C}$. Prenons des images réciproques de tous ces éléments de la manière suivante :

$$\tilde{T}^0 = \tilde{D}^{N-\rho+1} \cap \tilde{K}^{\rho-1}, \qquad K^0 \in \tilde{K}^{\rho-1} \cap f^{-1}(K^0), \qquad \tilde{U} = \overset{\circ}{\text{et}}\, \tilde{K}^0,$$

$\tilde{\varphi}$ application de $\tilde{U} \times F_p$ dans $\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{U})$ telle que $\check{f}\varphi$ coïncide avec $\varphi(f \times e)$, où $e$ est l'application identique sur $F_p$ [étant donné l'isomorphisme canonique de $\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{x})$ et $\mathcal{E}(f(\tilde{x}))$, $\tilde{\varphi}$ est bien déterminé par $f\tilde{\varphi}(\{x\} \times F_p) = \varphi(\{f(\tilde{x}) \times F_p)\}$]; $Z_{r-1}(\tilde{x}) = \check{\tilde{\varphi}}(\tilde{x}, Z_{r-1})$.

on a

$$\check{f}[Z_{r-1}(\tilde{x})] = Z_{r-1}(f(\tilde{x})), \qquad {}^r\tilde{\mathcal{B}} = \check{f}^{-1}({}^r\mathcal{B}) \cap \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{U});$$
$${}^1\mathcal{B} = \check{f}^{-1}({}^1\mathcal{B}) \cap \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{U}), \qquad {}^1\tilde{\mathcal{C}} = \check{f}^{-1}(\mathcal{C}) \cap \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{U}) = \tilde{\varphi}(\tilde{U} \times F'_p);$$
$$\check{f}[\tilde{\sigma}_r(\tilde{x})] = \sigma_r(f(\tilde{x})), \qquad \check{f}[\tilde{\sigma}_1(\tilde{x})] = \sigma_1(f(\tilde{x})), \qquad \check{f}(\tilde{\tau}(\tilde{x})] = \tau(f(\tilde{x})).$$

$\tilde{s}$ et $\tilde{\sigma}_r$ sont homotopes dans ${}^r\tilde{\mathcal{E}}$. $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\tau}$ sont homotopes dans ${}^1\tilde{\mathcal{B}}$ (on définit ces homotopies par images réciproques de manière évidente à partir des homotopies correspondantes dans ${}^r\mathcal{E}$ et ${}^1\mathcal{B}$). Comme à tout $\tilde{x} \in \tilde{X}_1 \cap \tilde{U}$ on peut associer un voisinage convenable $\tilde{w}$ de $\tilde{x}$ dans $\tilde{X}_i$, tel qu'il y ait isomorphisme entre $\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{w})$ et $\mathcal{E}(f(\tilde{w}))$, on voit, par image réciproque, que $\tau(\overline{\tilde{D}}^{N-\rho+1} \cap X_i)$ coupe canoniquement ${}^1\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{X}_i)$ dans ${}^1\tilde{\mathcal{B}}(\tilde{X}_i)$; on peut donc appliquer la formule (5.4), d'où les deux formules

$$(5.17)\quad \langle \tilde{c}_r(\tilde{X}_i, \tilde{s}).(\overline{\tilde{D}}_*^{N-\rho+1} \cap \tilde{X}_i) \rangle = \mathcal{I}\left[\tilde{\tau}(\dot{\tilde{D}}^{N-\rho+1} \tilde{X}_i) \cap {}^1\tilde{\mathcal{C}}\right] = \mathcal{I}(\tilde{\gamma}_i),$$
$$(5.18)\quad \langle \tilde{c}_r(X_j, s).(\dot{D}^{N-\rho+1} \cap X_j) \rangle = \mathcal{I}[\tau(\dot{D}^{N-\rho+1} \cap X_j) \cap {}^1\mathcal{C}] = \mathcal{I}(\gamma_j),$$

en désignant par $\tilde{\gamma}_i$ et $\gamma_j$ les cycles qui figurent entre crochets. Pour tout couple $\tilde{x}$ et $x = f(\tilde{x})$ il y a homéomorphisme entre ${}^1\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{w})$ et ${}^1\mathcal{C}(f(\tilde{w}))$, entre ${}^1\tilde{\mathcal{B}}(\tilde{w})$ et ${}^1\mathcal{B}(f(w))$; donc, le degré topologique de la restriction de $f$ ou $f_i$ à $\overline{D}^{N-\rho+1} \cap X_i$ étant noté $m(\overline{D}^{N-\rho+1} \cap X_i)$ comme au paragraphe 2, on a

$$(5.19)\qquad f(\tilde{\gamma}_i) = f_i(\tilde{\gamma}_i) = m(\overline{D}^{N-\rho+1} \cap X_i)\gamma_j.$$

Par ailleurs, comme $\tilde{U}$ et $U$ sont homotopiquement triviaux, l'indice du cycle $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\gamma}_i)$ dans $\tilde{U}\times F'_p$ est égal à celui de son image

$$(f\times e).\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\gamma}_i)=\varphi^{-1}.f_*(\tilde{\gamma}_j),$$

$\tilde{\varphi}$ et $\varphi$ étant des homéomorphismes sur ${}^1\tilde{\mathcal{A}}$ et ${}^1\mathcal{A}$ de $\tilde{U}\times F_p$ et $U\times F'_p$, les indices considérés sont respectivement égaux à $\mathcal{J}(\tilde{\gamma}_i)$ et

$$\mathcal{J}(f_*(\tilde{\gamma}_i)=\mathcal{J}\Big[\Big(m\big(\overline{\tilde{D}}^{N-\rho+1}\cap\mathcal{X}_i\big)\gamma_j\Big];$$

donc

$$\mathcal{J}(\tilde{\gamma}_i)=m\big(\overline{\tilde{D}}^{N-\rho+1}\cap\mathcal{X}_i\big)\,\mathcal{J}(\gamma_j);$$

compte tenu des formules (5.17), (5.18) et (2.8) il vient

$$(5.20)\qquad \begin{aligned}&\big\langle c_r(\tilde{\mathcal{X}}_i,\tilde{s}).\big(\overline{\tilde{D}}_*^{N-\rho+1}\cap\tilde{\mathcal{X}}_i\big)\big\rangle\\ &\quad=m\big(\tilde{D}^{N-\rho+1}\cap\tilde{\mathcal{X}}_i\big)\big\langle c_r(\mathcal{X}_j,s).\big(\overline{D}^{N-\rho+1}\cap\mathcal{X}_j\big)\big\rangle\\ &\quad=\big\langle f_i^\star c_r(\mathcal{X}_j,s).\big(\overline{\tilde{D}}_*^{N-\rho+1}\cap\tilde{\mathcal{X}}_i\big)\big\rangle,\end{aligned}$$

cela démontre la formule (5.15).

*Autres formules.* — Pour faire intervenir $f^\star$ au lieu de $f_i^\star$ nous utiliserons la formule (2.10); compte tenu de (2.2) la formule (5.15) donne

$$(5.21)\qquad \begin{cases} f^\star\hat{c}_r(\mathcal{X}_j,s)=\displaystyle\sum_{i'}m(\mathcal{X}_{i'})\,\hat{c}_r(\tilde{\mathcal{X}}_{i'},\tilde{s})\in\mathcal{C}^{N-\rho+1}(\tilde{\mathcal{X}}),\\ \qquad\text{pour les } \mathcal{X}_{i'}\in f^{-1}(\mathcal{X}_j).\end{cases}$$

Sommons le premier membre par rapport à $j$, nous obtenons, en vertu de la formule (5.9), $f^\star c_r(\mathcal{X},s)$; dans le second membre figurera une fois et une seule chaque $\tilde{\mathcal{X}}_i$, donc

$$(5.22)\qquad f^\star c_r(\mathcal{X},s)=\sum_i m(\tilde{\mathcal{X}}_i)\,\hat{c}_r(\tilde{\mathcal{X}}_i,s)\quad\text{pour les } \tilde{\mathcal{X}}_i\in\tilde{\mathcal{X}}.$$

En appliquant aussi (5.9) à l'espace ${}^r\tilde{\mathcal{E}}$, il vient

$$(5.23)\qquad f^\star c_r(\mathcal{X},s)-\tilde{c}_r(\tilde{\mathcal{X}},\tilde{s})=\sum_i\big(m(\tilde{\mathcal{X}}_i)-1\big)\hat{c}_r(\tilde{\mathcal{X}}_i,\tilde{s})\qquad(\mathcal{X}_i\in\mathcal{X}).$$

De telles formules permettent dans certains cas de déterminer les classes obstructrices de $\mathcal{X}$ à partir de celles de $\tilde{\mathcal{X}}$ [10].

(Manuscrit reçu le 5 octobre 1959.)

Mme M.-H. SCHWARTZ,
Maître de Conférences
à l'École supérieure des Sciences de Reims,
37, rue Pierre Nicole, Paris (5e).

[10] SCHWARTZ (Marie-Hélène). — Classes de Chern des quadriques complexes, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 80, 1956, p. 144-155.