BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES DIXMIER

Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. V

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 65-79
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__65_0>

Bull. Soc. math. France
87, 1959, p. 65 à 79.

SUR LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS. V.

PAR

JACQUES DIXMIER.

(Paris).

Soit Γ un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe. Conformément à une conjecture émise dans [3], nous démontrons dans le présent article que les caractères des représentations unitaires irréductibles de Γ sont des *distributions* sur Γ. On sait qu'un résultat analogue a été établi par HARISH-CHANDRA pour les groupes semi-simples [7]. Ce résultat est par contre en défaut pour les groupes résolubles, même s'ils sont de type I.

En fait, nous verrons que les caractères de Γ sont même des distributions *tempérées*, c'est-à-dire transformées de distributions tempérées sur l'algèbre de Lie de Γ par l'application exponentielle.

Le chapitre I est consacré à des lemmes concernant l'espace localement convexe $\mathcal{S}(\Gamma)$; ces lemmes sont analogues à des propriétés connues pour l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ de L. SCHWARTZ.

NOTATIONS. — On désigne par $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbf{C}$ celui des nombres complexes. Si Γ est un groupe de Lie réel, on désigne par $\mathcal{D}(\Gamma)$ l'espace des fonctions complexes indéfiniment différentiables à support compact sur Γ, par $L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ l'espace des fonctions complexes intégrables sur Γ pour la mesure de Haar $d\gamma$ (on ne considère que des groupes nilpotents, donc unimodulaires), par e l'élément neutre de Γ, par ε_γ la mesure ponctuelle de masse 1 en $\gamma\in\Gamma$, par $\star$ le produit de convolution. Si U est une représentation unitaire de Γ et si $F\in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$, on note $U(F)$ l'opérateur $\int_\Gamma F(\gamma)\,U(\gamma)\,d\gamma$.

Chapitre I. — Fonctions à décroissance rapide sur un groupe de Lie nilpotent simplement connexe.

Soient Γ un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe de dimension n, et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On sait que l'application exponentielle $a \to \exp a$ est un isomorphisme de la variété analytique $\mathfrak{g}$ sur la variété analytique Γ. Une fonction F sur Γ sera dite une fonction *polynôme* (resp. une fonction *indéfiniment différentiable à décroissance rapide*) si la fonction transportée de F sur $\mathfrak{g}$ par l'application exponentielle est une fonction polynôme (resp. une fonction indéfiniment différentiable à décroissance rapide). Nous noterons $\mathcal{S}(\Gamma)$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide sur Γ. L'application exponentielle permet de transporter à $\mathcal{S}(\Gamma)$ la topologie de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, et $\mathcal{S}(\Gamma)$ devient ainsi un espace de Fréchet. Nous appellerons distribution *tempérée* sur Γ un élément du dual de l'espace vectoriel topologique $\mathcal{S}(\Gamma)$, c'est-à-dire une distribution transformée par l'application exponentielle d'une distribution tempérée sur $\mathfrak{g}$.

Dans ce chapitre, nous choisirons une base dans $\mathfrak{g}$, d'où un système de coordonnées dans $\mathfrak{g}$. En transportant ce système par l'application exponentielle, nous obtenons un système de coordonnées dans Γ que nous noterons $x_1, \ldots, x_n$. Quand cela sera commode nous pourrons alors identifier une fonction F sur Γ à une fonction $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \to F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ sur $\mathbf{R}^n$.

Lemme 1. — (*a*) *Tout champ de vecteurs invariant à droite ou à gauche sur* Γ *est de la forme* $\sum_{i=1}^{n} P_i\,(x_1, \ldots, x_n)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, *où les* P_i *sont des polynômes.*

(*b*) *Réciproquement, soit* $(X_1, \ldots, X_n)$ *une base de l'espace des champs de vecteurs invariants à droite* (resp. *à gauche*) *sur* Γ; *les champs de vecteurs* $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ *sont des combinaisons linéaires des* X_i *à coefficients polynomiaux.*

(*c*) *Toute forme différentielle de degré* 1 *invariante à droite ou à gauche sur* Γ *est de la forme* $\sum_{i=1}^{n} Q_i(x_1, \ldots, x_n)\,dx_i$, *où les* Q_i *sont des polynômes.*

(*d*) *La mesure de Haar sur* Γ *est définie par une forme différentielle* $Q(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n$, *où* Q *est un polynôme.*

Démonstration. — On sait (par exemple grâce à la formule de Hausdorff) que, si γ et γ' sont deux points de Γ, les coordonnées de $\gamma\gamma'$ sont des fonctions polynômes de celles de γ et γ'. Soit alors γ_0 un point de Γ de coordonnées $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. La donnée du système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ permet d'identifier l'espace tangent en chaque point de Γ à $\mathbf{R}^n$. La translation à droite R_{γ_0} définie par γ_0 admet pour application tangente en e une application linéaire dont la matrice est fonction polynôme de $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Donc, si $\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ est un vecteur tangent à Γ en e, son transformé par cette application linéaire est de la forme $\sum_{i=1}^{n} P_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$, où les P_i sont des polynômes. Ceci prouve (a) pour les champs de vecteurs invariants à droite, et on raisonne de même pour les champs de vecteurs invariants à gauche. Considérons maintenant l'application tangente en γ_0 à $R_{\gamma_0^{-1}}$; son application transposée transforme l'espace des covecteurs tangents en e à Γ en l'espace des covecteurs tangents en γ_0 à Γ. Comme les coordonnées de γ_0^{-1} sont $(-\xi_1 \ldots, -\xi_n)$, (c) se démontre alors par la même méthode que (a). L'assertion (d) résulte de (c). Prouvons (b). Soit $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ les formes différentielles invariantes à droite (resp. à gauche) sur Γ constituant la base duale de $(X_1, \ldots, X_n)$. Écrivons

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} P_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad \omega_j = \sum_{k=1}^{n} Q_{kj}\, dx_k,$$

où les P_{ki} et les Q_{kj} sont des polynômes. Les matrices (P_{ki}) et (Q_{kj}) sont contragrédientes, donc les $\frac{\partial}{\partial x_k}$ sont des combinaisons linéaires des X_i dont les coefficients sont des polynômes Q_{kj}.

LEMME 2. — *Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de l'espace des champs de vecteurs invariants à gauche (resp. à droite) sur Γ. Pour qu'une fonction F indéfiniment différentiable sur Γ appartienne à $\mathcal{S}(\Gamma)$, il faut et il suffit que, pour tout polynôme P, pour tout système d'indices $i_1, \ldots, i_q \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et pour tout système d'entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \geqq 0$, la fonction $P . X_{i_1}^{\alpha_1} \ldots X_{i_q}^{\alpha_q} F$ soit bornée. Si l'on pose*

$$p_{P, i_1, \ldots, i_q, \alpha_1, \ldots, \alpha_q}(F) = \sup | P . X_{i_1}^{\alpha_1} \ldots X_{i_q}^{\alpha_q} F |,$$

les semi-normes $p_{P, i_1, \ldots, i_q, \alpha_1 \ldots, \alpha_q}$ sur $\mathcal{S}(\Gamma)$ définissent la topologie de $\mathcal{S}(\Gamma)$.

DÉMONSTRATION. — D'après le lemme 1(a), si $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, toute fonction $P . X_{i_1}^{\alpha_1} \ldots X_{i_q}^{\alpha_q} F$ est bornée, et $p_{P, i_1, \ldots, i_q, \alpha_1, \ldots, \alpha_q}$ est majorée par une semi-norme définissant la topologie de $\mathcal{S}(\Gamma)$, donc est continue sur $\mathcal{S}(\Gamma)$. D'après le lemme 1(b), si les fonctions $P . X_{i_1}^{\alpha_1} \ldots X_{i_q}^{\alpha_q} F$ sont bornées, on a $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, et toute semi-norme définissant la topologie de $\mathcal{S}(\Gamma)$ est majorée par une somme de semi-normes $p_{P, i_1, \ldots, i_q, \alpha_1, \ldots, \alpha_q}$, de sorte que ces semi-normes suffisent à définir la topologie de $\mathcal{S}(\Gamma)$.

LEMME 3. — *On a* $\mathcal{S}(\Gamma) \subset L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$, *et l'application identique de* $\mathcal{S}(\Gamma)$ *dans* $L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ *est continue.*

DÉMONSTRATION. — Soit F un élément de $\mathcal{S}(\Gamma)$. Soit Q un polynôme tel que la forme différentielle $Q\,dx_1 \ldots dx_n$ définisse une mesure de Haar sur Γ (lemme 1 (d)). L'intégrale de $|F|$ par rapport à cette mesure de Haar est

$$\int_\Gamma |F|\, Q\, dx_1 \ldots dx_n \leq [\sup |F|\, Q(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)^n] \times \int_{\mathbf{R}^n} (1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{-n}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

La dernière intégrale est une constante finie et le crochet est la valeur en F d'une semi-norme définissant la topologie de $\mathcal{S}(\Gamma)$. D'où les deux assertions du lemme.

LEMME 4. — *Pour toute* $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$ *et tout* $\gamma \in \Gamma$, *notons* $L_\gamma F$ *et* $R_\gamma F$ *les fonctions* $\gamma_1 \to F(\gamma^{-1}\gamma_1)$, $\gamma_1 \to F(\gamma_1 \gamma)$. *Alors* L_γ *et* R_γ *sont des applications linéaires continues de* $\mathcal{S}(\Gamma)$ *dans* $\mathcal{S}(\Gamma)$.

DÉMONSTRATION. — Soient $\gamma_0 \in \Gamma$ et $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Soient $P_1, \ldots, P_n$ les polynômes en n variables réelles tels que

$$x_i(\gamma_0^{-1}\gamma) = P_i(x_1(\gamma), \ldots, x_n(\gamma)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$. La transformée de $F = F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ par L_{γ_0} est la fonction

$$F(P_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, P_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)).$$

Toute dérivée de cette fonction par rapport à certains des ξ_i est une combinaison linéaire à coefficients polynômiaux indépendants de F de fonctions de la forme $G(P_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, P_n(\xi_1, \ldots, \xi_n))$, où G est une dérivée de F par rapport à certains des ξ_i. Soit Q un polynôme en n variables réelles. On a

$$\begin{aligned} &\sup |Q(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, G(P_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, P_n(\xi_1, \ldots, \xi_n))| \\ &= \sup |Q_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, G(\xi_1, \ldots, \xi_n)| \end{aligned}$$

où Q_1 est un nouveau polynôme lié à Q de manière indépendante de F. Une telle expression est de la forme $p(F)$, p étant une semi-norme continue sur $\mathcal{S}(\Gamma)$; ceci prouve que L_{γ_0} est une application continue de $\mathcal{S}(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}(\Gamma)$. On raisonne de même pour R_{γ_0}.

LEMME 5. — *Soit* $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$. *Avec les notations du lemme 4, les applications* $\gamma \to L_\gamma F$, $\gamma \to R_\gamma F$ *de* Γ *dans* $\mathcal{S}(\Gamma)$ *sont indéfiniment différentiables. Soit* $a \in \mathfrak{g}$. *L'application de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathcal{S}(\Gamma)$:

$$t \to L_{\gamma.\exp ta)} F \qquad (\textit{resp. } t \to R_{(\exp ta).\gamma} F)$$

a pour dérivée en 0 *l'élément* $L_\gamma(a \star F)$ (*resp.* $R_\gamma(F \star a)$) *de* $\mathcal{S}(\Gamma)$.

DÉMONSTRATION. — (a) Soit P un polynôme sur Γ. La fonction $(\gamma, \gamma_1) \to (L_\gamma P)(\gamma_1)$ est une fonction polynôme des coordonnées de γ et de γ_1. Donc, quand γ parcourt une partie compacte de Γ, les fonctions $|L_\gamma P|$ sont majorées par un polynôme fixe. Par suite, les nombres $\sup|P(L_\gamma F)| = \sup|(L_{\gamma^{-1}} P)F|$ sont majorés dans $\mathbf{R}$ quand γ parcourt une partie compacte de Γ.

(b) Soient toujours P un polynôme sur Γ, et X un opérateur différentiel invariant à gauche sur Γ. Si K est une partie compacte de Γ, les nombres

$$P(\gamma_1)[1 + x_1^2(\gamma_1) + \ldots + x_n^2(\gamma_1)](L_\gamma(XF))(\gamma_1)$$

où γ parcourt K et γ_1 parcourt Γ, sont majorés dans $\mathbf{R}$ d'après (a). Par suite, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte K_1 de Γ telle que $|P(\gamma_1)(L_\gamma(XF))(\gamma_1)| \leqq \varepsilon$ quels que soient $\gamma \in K$ et $\gamma_1 \notin K_1$. D'autre part, quand $\gamma \to e$, $P.(L_\gamma XF)$ tend vers $P.(XF)$ uniformément sur K_1. Donc, pour γ assez voisin de e, on a

$$\sup|P.(L_\gamma XF) - P.(XF)| \leqq 2\varepsilon$$

ou

$$\sup|P.X(L_\gamma F - F)| \leqq 2\varepsilon.$$

Vu l'arbitraire de P et X, ceci prouve, compte tenu du lemme 2, que l'application $\gamma \to L_\gamma F$ est continue en e, donc continue partout à cause de la relation $L_{\gamma\gamma'} = L_\gamma L_{\gamma'}$.

(c) Soit $a \in \mathfrak{g}$. La fonction $(\xi_1, \ldots, \xi_n, t) \to (L_{\gamma.(\exp ta)}F)(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ a pour dérivée par rapport à t la fonction $(\xi_1, \ldots, \xi_n, t) \to (L_{\gamma.(\exp ta)}(a \bigstar F))(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Donc

$$t^{-1}(L_{\gamma.(\exp ta)}F - L_\gamma F)(\xi_1, \ldots, \xi_n) = t^{-1}\int_0^t L_{\gamma.(\exp ua)}(a \bigstar F)(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, du.$$

Le deuxième membre, en tant que fonction sur Γ, n'est autre que l'intégrale vectorielle $t^{-1}\int_0^t L_{\gamma.(\exp ua)}(a \bigstar F)\, du$. D'après la partie ($b$) de la démonstration, cet élément de $\mathcal{S}(\Gamma)$ tend vers $L_\gamma(a \bigstar F)$ quand $t \to 0$. Donc la fonction $t \to L_{\gamma.(\exp ta)}F$ à valeurs dans $\mathcal{S}(\Gamma)$ est dérivable et de dérivée $L_\gamma(a \bigstar F)$ pour $t = 0$. Comme $a \bigstar F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, on peut recommencer le raisonnement précédent, et, de proche en proche, on voit que l'application $\gamma \to L_\gamma F$ de Γ dans $\mathcal{S}(\Gamma)$ est indéfiniment différentiable. On raisonne de façon analogue pour R_γ.

LEMME 6. — *Soit Γ' un sous-groupe fermé connexe de Γ. Soient $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, et F' la restriction de F à Γ'. Alors, $F' \in \mathcal{S}(\Gamma')$, et $F \to F'$ est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}(\Gamma')$.*

DÉMONSTRATION. — Soit $\mathfrak{g}'$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ correspondant à Γ'. L'application exponentielle de $\mathfrak{g}'$ dans Γ' est la restriction à $\mathfrak{g}'$ de l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans Γ. Pour prouver le lemme, il suffit de prouver l'assertion correspondante pour $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{S}(\mathfrak{g}')$, et cette dernière est immédiate.

LEMME 7. — *Soient Γ' un sous-groupe fermé connexe de Γ. Soit $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Pour δ, $\delta' \in \Gamma$, soit $F_{\delta,\delta'}$ la fonction $\gamma' \to F(\delta^{-1}\gamma'\delta')$ sur Γ'. Alors l'application $(\delta, \delta') \to F_{\delta,\delta'}$ de $\Gamma \times \Gamma$ dans $\mathcal{S}(\Gamma')$ est indéfiniment différentiable.*

DÉMONSTRATION. — Ceci résulte des lemmes 5 et 6.

LEMME 8. — *Soient $\mathfrak{g}'$ un idéal de $\mathfrak{g}$, Γ' le sous-groupe correspondant de Γ, et $\mathfrak{d}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ supplémentaire de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$. Soit $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Pour tout $a \in \mathfrak{d}$, soit F_a la fonction $\gamma' \to F(\exp a.\gamma')$ (resp $\gamma' \to F(\gamma'.\exp a)$) sur Γ', qui appartient à $\mathcal{S}(\Gamma')$ d'après les lemmes 4 et 6. Alors, $a \to F_a$ est une application indéfiniment différentiable à décroissance rapide de $\mathfrak{d}$ dans $\mathcal{S}(\Gamma')$, au sens de* [**8**].

DÉMONSTRATION. — Nous étudierons seulement le cas où $F_a(\gamma') = F(\exp a.\gamma')$. L'application $a \to F_a$ est composée de l'application exponentielle de $\mathfrak{d}$ dans Γ et $\mathfrak{d}$ une application qui est indéfiniment différentiable d'après le lemme 7; elle est donc indéfiniment différentiable. Notons $F^{\sim}$ l'application $\gamma \to L_\gamma F$ de Γ dans $\mathcal{S}(\Gamma)$ (avec les notations du lemme 4); elle est indéfiniment différentiable, et, pour tout champ de vecteurs X invariant à gauche, la dérivée $XF^{\sim}$ est de la forme $G^{\sim}$, où $G \in \mathcal{S}(\Gamma)$ (lemme 5). Donc, d'après le lemme 1 (b), toute dérivée de $F^{\sim}$ par rapport à certains des x_i est combinaison linéaire à coefficients polynômiaux de fonctions $G^{\sim}$, où $G \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Nous pouvons par ailleurs supposer les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ choisies de telle sorte que $\mathfrak{g}'$ soit défini par les équations $x_1 = \ldots = x_p = 0$, et $\mathfrak{d}$ par les équations $x_{p+1} = \ldots = x_n = 0$. Alors, toute dérivée de la fonction $a \to F_a$ est combinaison linéaire à coefficients polynômiaux (en $x_1, \ldots, x_p$) de fonctions $a \to G_a$, où $G \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Pour établir le lemme, il suffit donc de prouver que, étant donné un polynôme Q sur $\mathfrak{d}$ et une fonction $G \in \mathcal{S}(\Gamma)$, l'application $a \to Q(a)\,G_a$ de $\mathfrak{d}$ dans $\mathcal{S}(\Gamma')$ est bornée; autrement dit, il faut montrer que, quels que soient les polynômes $Q(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ et $Q_1(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n)$, les fonctions

$$(\xi_1, \ldots, \xi_p) \to Q(\xi_1, \ldots, \xi_p) \times \sup_{\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n} \left| Q_1(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n) \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \ldots \partial \xi_n^{\alpha_n}} G_{(\xi_1, \ldots, \xi_p)}(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n) \right|$$

sont bornées. Or, soient $(P_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, P_n(\xi_1, \ldots, \xi_n))$ les coordonnées du produit de $\exp((\xi_1, \ldots, \xi_p))$ par le point de coordonnées $(0, \ldots, 0, \xi_{p+1}, \ldots \xi_n)$. Les P_i sont des polynômes, et

$$G_{(\xi_1, \ldots, \xi_p)}(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n) = G(P_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, P_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)).$$

Nous sommes en définitive ramenés à montrer qu'une fonction

$$(1)\quad (\xi_1, \ldots, \xi_n) \to Q_2(\xi_1, \ldots, \xi_n) H(P_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, P_n(\xi_1, \ldots, \xi_n))$$

où Q_2 est un polynôme et où $H \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, est bornée. Comme l'application exponentielle commute aux homomorphismes, l'image d'une classe modulo $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$ par l'application exponentielle est une classe modulo Γ' dans Γ. Donc $P_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \xi_1, \ldots, P_p(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \xi_p$, et $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n$ s'expriment comme polynômes par rapport à $\xi_1, \ldots, \xi_p, P_{p+1}(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, P_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. La fonction (1) a donc même borne supérieure qu'une fonction

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \to Q_3(\xi_1, \ldots, \xi_n) H(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

où Q_3 est un nouveau polynôme, de sorte que cette borne supérieure est finie.

Lemme 9. — *Soient Γ' un sous groupe fermé distingué connexe de Γ, et $\Gamma^0 = \Gamma/\Gamma'$, qui est nilpotent simplement connexe. Soit $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'intégrale de $L_\gamma F$ sur Γ' (intégrale qui converge d'après les lemmes 3 et 6) ne dépend que de la classe γ^0 de γ dans Γ^0; soit $F^0(\gamma^0)$ sa valeur. On a $F^0 \in \mathcal{S}(\Gamma^0)$, et $F \to F^0$ est une application continue de $\mathcal{S}(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}(\Gamma^0)$.*

Démonstration. — Il est clair que $\int_{\Gamma'} (L_\gamma F)(\gamma')\, d\gamma'$ ne dépend que de γ^0. Soient $\mathfrak{g}'$ l'idéal de $\mathfrak{g}$ correspondant à Γ', et $\mathfrak{d}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$. Il s'agit de montrer que la fonction

$$a \to \int_{\Gamma'} (L_{\exp a} F)(\gamma')\, d\gamma'$$

sur $\mathfrak{d}$ est indéfiniment différentiable à décroissance rapide. Or, l'application qui, à l'élément a, fait correspondre la restriction de $L_{\exp a} F$ à Γ', est une application indéfiniment différentiable à décroissance rapide de $\mathfrak{d}$ dans $\mathcal{S}(\Gamma')$ (lemme 8). Il suffit alors d'appliquer le lemme 3. La continuité de l'application $F \to F^0$ résulte du théorème du graphe fermé et du lemme 3.

Lemme 10. — *Soit D une dérivation nilpotente de $\mathfrak{g}$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, soient A_t l'automorphisme de Γ associé à l'automorphisme $\exp tD$ de $\mathfrak{g}$, et B_t l'automorphisme correspondant de $\mathcal{S}(\Gamma)$. Soit p une semi-norme continue sur $\mathcal{S}(\Gamma)$. Il existe un entier $N \geq 0$ et une semi-norme continue p' sur $\mathcal{S}(\Gamma)$ tels que $p(B_t F) \leq (1 + |t|)^N p'(F)$ pour toute $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$ et tout $t \in \mathbf{R}$.*

Démonstration. — Il suffit d'envisager le cas où

$$p(F) = \sup \left| Q \frac{\partial^\alpha F}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \ldots \partial \xi_n^{\alpha_n}} \right|$$

Q étant un polynôme. Puisque D est nilpotente, l'automorphisme $\exp tD$ est une fonction polynôme de t. D'autre part, A_t est transformé de $\exp tD$ par l'application exponentielle. Donc A_t définit une transformation linéaire sur les coordonnées x_i :

$$x_i \to \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t) x_j$$

où les λ_{ij} sont des polynômes en t. Alors,

$$p(B_t F) = \sup \left| Q \frac{\partial^\alpha G}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \ldots \partial \xi_n^{\alpha_n}} \right|,$$

où

$$G(\xi_1, \ldots, \xi_n) = F(\lambda_{11}\xi_1 + \ldots + \lambda_{1n}\xi_n, \ \ldots, \ \lambda_{n1}\xi_1 + \ldots + \lambda_{nn}\xi_n).$$

Donc $\dfrac{\partial^\alpha G}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \ldots \partial \xi_n^{\alpha_n}}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est une combinaison linéaire de fonctions $\dfrac{\partial^\alpha F}{\partial \xi_1^{\beta_1} \ldots \partial \xi_n^{\beta_n}}(\lambda_{11}\xi_1 + \ldots + \lambda_{1n}\xi_n, \ \ldots, \ \lambda_{n1}\xi_1 + \ldots + \lambda_{nn}\xi_n)$, dont les coefficients sont des polynômes en t indépendants de F. Or

$$\sup \left| Q(\xi_1, \ldots, \xi_n) \frac{\partial^\alpha F}{\partial \xi_1^{\beta_1} \ldots \partial \xi_n^{\beta_n}} (\lambda_{11}\xi_1 + \ldots + \lambda_{1n}\xi_n, \ \ldots, \ \lambda_{n1}\xi_1 + \ldots + \lambda_{nn}\xi_n) \right|$$

$$= \sup \left| Q(\mu_{11}\xi_1 + \ldots + \mu_{1n}\xi_n, \ \ldots, \ \mu_{n1}\xi_1 + \ldots + \mu_{nn}\xi_n) \frac{\partial^\alpha F}{\partial \xi_1^{\beta_1} \ldots \partial \xi_n^{\beta_n}} (\xi_1, \ldots, \xi_n) \right|$$

en désignant par (μ_{ij}) la matrice inverse de (λ_{ij}), laquelle est aussi une fonction polynôme de t. Enfin, $Q(\mu_{11}\xi_1 + \ldots + \mu_{1n}\xi_n, \ldots, \mu_{n1}\xi_1 + \ldots + \mu_{nn}\xi_n)$ est une combinaison linéaire à coefficients indépendants de F de monômes par rapport à t et aux ξ_i. D'où le lemme.

Lemme 11. — *Soient $\mathfrak{g}'$ un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension* 1, Γ' *le sous-groupe correspondant de* Γ, $\mathfrak{d}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{g}$ *supplémentaire de* $\mathfrak{g}'$ *dans* $\mathfrak{g}$, Δ *le sous-groupe correspondant de* Γ, *et* a_0 *un élément non nul de* $\mathfrak{d}$. *Pour tout* $\delta \in \Delta$, *définissons* $t(\delta) \in \mathbf{R}$ *par l'égalité* $\delta = \exp(t(\delta)a_0)$. *Soit p une semi-norme sur* $\mathcal{S}(\Gamma')$. *Il existe un entier* $N \geqq 0$ *tel que, pour toute* $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, *les fonctions*

$$(\delta, \delta') \to (1 + |t(\delta)|)^{-N} p(F_{\delta,\delta'})$$
$$(\delta, \delta') \to (1 + |t(\delta')|)^{-N} p(F_{\delta,\delta'})$$

sur $\Delta \times \Delta$ (*où* $F_{\delta,\delta'}$ *est défini comme au lemme* 7) *soient bornées.*

Démonstration. — La restriction à $\mathfrak{g}'$ de $ad_{\mathfrak{g}} a_0$ est une dérivation nilpotente D de $\mathfrak{g}'$, et l'automorphisme de Γ' associé à $\exp tD$ est la restriction à Γ' de l'automorphisme intérieur de Γ défini par $\exp t a_0$. Soit B_t l'automorphisme correspondant de $\mathcal{S}(\Gamma')$. Il existe (lemme 10) un entier $N \geqq 0$ et une semi-norme continue p' sur $\mathcal{S}(\Gamma')$ tels que $p(B_t F') \leqq (1 + |t|)^N p'(F')$ pour toute $F' \in \mathcal{S}(\Gamma')$ et tout $t \in \mathbf{R}$. Soit $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Pour tout $\delta \in \Delta$, notons $S_\delta F$ la restriction à Γ' de $R_\delta F$. Si $\delta \in \Delta$, $\delta' \in \Delta$, et $\gamma' \in \Gamma'$, on a

$$\begin{aligned}(B_{t(\delta)} S_{\delta^{-1}\delta'} F)(\gamma') &= (S_{\delta^{-1}\delta'} F)(\delta^{-1}\gamma'\delta) \\ &= (R_{\delta^{-1}\delta'} F)(\delta^{-1}\gamma'\delta) = F(\delta^{-1}\gamma'\delta') = F_{\delta,\delta'}(\gamma'),\end{aligned}$$

donc

$$p(F_{\delta,\delta'}) \leqq (1 + |t(\delta)|)^N p'(S_{\delta^{-1}\delta'} F)$$

Or, d'après le lemme 8, l'application $\delta \to S_\delta F$ de Δ dans $\mathcal{S}(\Gamma')$ est bornée. Donc la fonction $(\delta, \delta') \to (1 + |t(\delta)|)^{-N} p(F_{\delta,\delta'})$ sur $\Delta \times \Delta$ est bornée. En remplaçant les translations à droite R_δ par les translations à gauche L_δ, on voit de même que la fonction $(\delta, \delta') \to (1 + |t(\delta')|)^{-N} p(F_{\delta,\delta'})$ est bornée.

Chapitre II. — Le théorème principal.

Lemme 12. — *Soient Γ un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe de dimension $\geqq 2$, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, U une représentation unitaire irréductible de Γ. Deux cas sont possibles :*

Premier cas : le noyau de U est de dimension $\geqq 1$.

Deuxième cas : il existe un idéal $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$ de codimension 1, un élément a de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}'$, un élément b du centre de $\mathfrak{g}'$, et une représentation unitaire irréductible U' de Γ' (sous-groupe de Γ correspondant à $\mathfrak{g}'$) tels que :

1° *U est unitairement équivalente à la représentation de Γ induite par U;*

2° *pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'opérateur différentiel $U'((\exp ad\, ta).b)$ est l'opérateur scalaire $it (= \sqrt{-1}\, t)$.*

Démonstration. — Il existe dans $\mathfrak{g}$ un idéal $\mathfrak{k}$ de dimension 2, et $\mathfrak{k}$ est nécessairement abélien. Pour tout $c \in \mathfrak{g}$, soit u_c la restriction de $ad_{\mathfrak{g}} c$ à $\mathfrak{k}$. Par rapport à une base (e_1, e_2) convenablement choisie de $\mathfrak{k}$, la matrice de u_c est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda(c) & 0 \end{pmatrix},$$

où λ est une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ qui s'annule sur $\mathfrak{k}$. On voit que $\mathbf{R}e_2$ est un idéal central de $\mathfrak{g}$. Soient Φ et Φ' les sous-groupes de Γ correspondant à $\mathfrak{k}$ et $\mathbf{R}e_2$. Ce sont des sous-groupes fermés distingués abéliens, et l'application exponentielle de $\mathfrak{k}$ sur Φ est un isomorphisme de groupe de Lie, de sorte qu'on peut identifier Φ à un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbf{R}$. Soient $\gamma_1 = \exp e_1$, $\gamma_2 = \exp e_2$; alors (γ_1, γ_2) est une base de Φ. Soit $\hat{\Phi}$ l'espace vectoriel dual de l'espace vectoriel Φ. Soit (γ_1^*, γ_2^*) la base de $\hat{\Phi}$ duale de (γ_1, γ_2). Pour $c \in \mathfrak{g}$, l'automorphisme de Φ défini par $\exp c$ admet, par rapport à la base (γ_1, γ_2), la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda(c) & 1 \end{pmatrix}.$$

L'automorphisme transposé du précédent admet, par rapport à (γ_1^*, γ_2^*), la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda(c) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons la restriction de U à Φ. Le théorème de Stone généralisé lui associe une mesure sur $\hat{\Phi}$, qui est concentrée sur une orbite O de Γ dans $\hat{\Phi}$ [5]. Soient $\chi \in O$ et Γ' le stabilisateur de χ dans Γ : c'est un sous-groupe fermé dans Γ. Alors [5] U est unitairement équivalente à la représentation de Γ induite par une représentation unitaire irréductible U' de Γ'.

Soient (χ_1, χ_2) les coordonnées de χ par rapport à (γ_1^*, γ_2^*). Le transformé de χ par $\exp c$ a pour coordonnées $(\chi_1 + \lambda(c)\chi_2, \chi_2)$. Donc Γ' est l'ensemble des $\exp c$ $(c \in \mathfrak{g})$ tels que $\lambda(c)\chi_2 = 0$. Si $\chi_2 = 0$, l'orbite O se réduit à $\{\chi\}$, et χ est nul sur Φ' donc U est triviale sur Φ', et l'on est dans le premier cas du lemme. Si $\lambda = 0$, $\mathfrak{f}$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$, donc Φ est contenu dans le centre de Γ et U est scalaire sur Φ; comme $\dim \Phi > 1$, on est encore dans le premier cas du lemme. Supposons désormais $\chi_2 \neq 0$ et $\lambda \neq 0$. Soit $\mathfrak{g}'$ le noyau de λ, qui est en même temps le noyau de la représentation $c \to u_c$ de $\mathfrak{g}$. C'est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$, et le centre de $\mathfrak{g}'$ contient $\mathfrak{f}$. Le sous-groupe Γ' est l'ensemble des $\exp c$, $c \in \mathfrak{g}'$, donc est le sous-groupe de Γ correspondant à $\mathfrak{g}'$. Puisque U' est irréductible, et que $\mathfrak{f}$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}'$, U' est scalaire sur Φ. Supposons d'abord U' triviale sur Φ'. Comme les points de Φ' sont fixes pour les automorphismes intérieurs de Γ, U est triviale sur Φ', ce qui contredit l'hypothèse $\chi_2 \neq 0$. Donc U' est non triviale sur Φ', de sorte que l'opérateur différentiel $U'(e_2)$ (qui est un opérateur scalaire) est non nul. En multipliant e_2 par un nombre réel convenable on peut supposer que $U'(e_2) = i$. Posons par ailleurs $U'(e_1) = \beta i$, où $\beta \in \mathbf{R}$. Soit a un élément de $\mathfrak{g}$ tel que $\lambda(a) = 1$. On a $a \notin \mathfrak{g}'$, et

$$[a, e_1] = \lambda(a) e_2 = e_2 \qquad [a, e_2] = 0$$

donc

$$(\exp ad\, ta).e_1 = e_1 + te_2$$
$$(\exp ad\, ta).e_2 = e_2$$

donc

$$U'((\exp ad\, ta).(e_1 - \beta e_2)) = U'(e_1 + te_2 - \beta e_2) = i\beta + it - i\beta = it.$$

Nous sommes dans le deuxième cas du lemme avec $b = e_1 - \beta e_2$.

THÉORÈME 1. — *Soient Γ un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe, U une représentation unitaire irréductible de Γ dans un espace hilbertien $\mathfrak{H}$. Il existe un entier $p \geqq 0$, un isomorphisme Φ de $\mathfrak{H}$ sur l'espace hilbertien $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p)$, et une application linéaire continue K de $\mathcal{S}(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p})$ tels que, pour toute $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, $\Phi U(F) \Phi^{-1}$ soit l'opérateur dans $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p)$ défini par le noyau $K(F)$.*

DÉMONSTRATION. — Soit n la dimension de Γ. Pour $n = 1$, Γ est abélien. L'espace $\mathfrak{H}$ est de dimension 1 et s'identifie à $\mathbf{C}$, c'est-à-dire à $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p)$ avec $p = 0$. La représentation U s'identifie à une fonction continue χ sur Γ telle que $\chi(\gamma\gamma') = \chi(\gamma)\chi(\gamma')$, $|\chi(\gamma)| = 1$ quels que soient $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Pour $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, $U(F)$ est l'opérateur scalaire $\int_\Gamma F(\gamma)\chi(\gamma)\,d\gamma$; l'application $F \to \int_\Gamma F(\gamma)\chi(\gamma)\,d\gamma$ est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\Gamma)$ dans $\mathbf{C} = \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p})$, d'après le lemme 3. Le théorème est donc vérifié dans ce cas. Raisonnant par récurrence sur n, nous supposerons désormais $n \geqq 2$ et le théorème démontré pour les groupes Γ de dimension $< n$.

Supposons qu'on soit dans le premier cas du lemme 12. Alors U est triviale sur un sous-groupe fermé distingué connexe Δ de dimension $\geqq 1$ de Γ. Le groupe $\Gamma' = \Gamma/\Delta$ est nilpotent simplement connexe. Soit U' la représentation de Γ' déduite de U par passage au quotient. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que U' opère dans un espace $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p)$, et qu'il existe une application linéaire continue K' de $\mathcal{S}(\Gamma')$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p})$ tels que, pour $F' \in \mathcal{S}(\Gamma')$, $U'(F')$ soit l'opérateur dans $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p)$ défini par le noyau $K'(F')$. Pour $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, soit F' la fonction sur Γ' déduite de F par intégration le long des classes modulo Δ. D'après le lemme 9, $F \to F'$ est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}(\Gamma')$. Si l'on pose $K(F) = K'(F')$, $F \to K(F)$ est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p})$. D'autre part, soient $\gamma \in \Gamma$ et γ' sa classe modulo Δ. On a

$$\int_\Delta F(\gamma\delta)\,U(\gamma\delta)\,d\delta = \int_\Delta F(\gamma\delta)\,U'(\gamma')\,d\delta = F'(\gamma')\,U'(\gamma')$$

donc

$$U(F) = \int_\Gamma F(\gamma)\,U(\gamma)\,\partial\gamma = \int_{\Gamma'} F'(\gamma')\,U'(\gamma')\,d\gamma' = U'(F'),$$

de sorte que $U(F)$ est l'opérateur défini par le noyau $K(F)$. Le théorème est donc établi dans ce cas.

Supposons qu'on soit dans le deuxième cas du lemme 12. Nous introduirons les notations correspondantes $\mathfrak{g}'$, Γ', a, b, U'. D'après l'hypothèse de récurrence, U' s'identifie à une représentation unitaire de Γ' dans un espace $\mathfrak{H}' = L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^{p'})$, et, pour toute $F' \in \mathcal{S}(\Gamma')$, $U'(F')$ est l'opérateur défini par un noyau $K'(F') \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p'})$, K' étant une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\Gamma')$

dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p'})$. Soient $\mathfrak{d} = \mathbf{R}a$, et Δ le sous-groupe correspondant de Γ. Pour $\delta \in \Delta$, définissons $t(\delta) \in \mathbf{R}$ par l'égalité $\delta = \exp t(\delta) a$. Le groupe Γ s'identifie au produit semi-direct de Γ' et Δ. La représentation U, étant induite par U', opère dans $L^2_{\mathfrak{H}'}(\Delta) = L^2_{\mathfrak{H}'}(\mathbf{R}) = L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^{p'} \times \mathbf{R}) = L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p)$, avec $p = p' + 1$.

Soit $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Pour $\delta_1 \in \Delta$, $\delta_2 \in \Delta$, $\gamma' \in \Gamma'$, nous poserons

$$F_{\delta_1,\delta_2}(\gamma') = F(\delta_1^{-1} \gamma' \delta_2).$$

On a $F_{\delta_1,\delta_2} \in \mathcal{S}(\Gamma')$ (lemmes 4 et 6). Nous allons d'abord établir l'assertion suivante :

($\bigstar$) L'application $(\delta_1, \delta_2) \to K'(F_{\delta_1,\delta_2})$ de $\Delta \times \Delta$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p'})$ est une application indéfiniment différentiable à décroissance rapide.

L'application $(\delta_1, \delta_2) \to F_{\delta_1,\delta_2}$ est la restriction à $\Delta \times \Delta$ d'une application indéfiniment différentiable de $\Gamma \times \Gamma$ dans $\mathcal{S}(\Gamma')$ (lemme 7). Donc elle est indéfiniment différentiable. Comme K' est linéaire et continue, l'application $(\delta_1, \delta_2) \to K'(F_{\delta_1,\delta_2})$ est indéfiniment différentiable. D'autre part, les dérivées des applications $\delta \to L_\delta F$, $\delta \to R_\delta F$ de Δ dans $\mathcal{S}(\Gamma)$ (avec les notations du lemme 4) sont de la forme $\delta \to L_\delta G$, $\delta \to R_\delta G$, où $G \in \mathcal{S}(\Gamma)$ (lemme 5). Donc les dérivées des applications $(\delta_1, \delta_2) \to F_{\delta_1,\delta_2}$ de $\Delta \times \Delta$ dans $\mathcal{S}(\Gamma')$ sont de la forme $(\delta_1, \delta_2) \to G_{\delta_1,\delta_2}$, où $G \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Pour achever de prouver l'assertion ($\bigstar$), il suffit donc de prouver que, pour tout polynôme $(\delta_1, \delta_2) \to P(\delta_1, \delta_2)$, l'application $(\delta_1, \delta_2) \to P(\delta_1, \delta_2) K'(F_{\delta_1,\delta_2})$ est bornée.

Soit h une semi-norme continue sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p'})$. Il existe une semi-norme continue h' sur $\mathcal{S}(\Gamma')$ telle que $h(K'(F')) \leq h'(F')$ pour toute $F' \in \mathcal{S}(\Gamma')$. D'autre part, il existe un entier $N \geq 0$ tel que, pour tout entier $q \geq 0$, les fonctions

$$(\delta, \delta') \to (1 + |t(\delta)|)^{-N} h'((b^q \bigstar F)_{\delta,\delta'})$$
$$(\delta, \delta') \to (1 + |t(\delta')|)^{-N} h'((F \bigstar b^q)_{\delta,\delta'})$$

sur $\Delta \times \Delta$ soient bornées (lemme 11). Donc les fonctions

$$(\delta, \delta') \to (1 + |t(\delta)|)^{-N} h(K'((b^q \bigstar F)_{\delta,\delta'}))$$
$$(\delta, \delta') \to (1 + |t(\delta')|)^{-N} h(K'((F \bigstar b^q)_{\delta,\delta'}))$$

sont bornées. Or, sur Γ, on a :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\delta^{-1}} \bigstar b^q \bigstar F \bigstar \varepsilon_{\delta'} &= (\varepsilon_{\delta^{-1}} \bigstar b^q \bigstar \varepsilon_\delta) \bigstar (\varepsilon_{\delta^{-1}} \bigstar F \bigstar \varepsilon_{\delta'}) \\ &= (\exp ad\, t(\delta) a . b)^q \bigstar (\varepsilon_{\delta^{-1}} \bigstar F \bigstar \varepsilon_{\delta'})\end{aligned}$$

donc, sur Γ' :

$$(b^q \bigstar F)_{\delta,\delta'} = (\exp ad\, t(\delta) a . b)^q \bigstar F_{\delta,\delta'}.$$

On en déduit

$$U'((b^q \bigstar F)_{\delta,\delta'}) = (U'(\exp ad\, t(\delta) a . b))^q U'(F_{\delta,\delta'}) = i^q t(\delta)^q U'(F_{\delta,\delta'}),$$

donc

$$K'((b^q \bigstar F)_{\delta,\delta'}) = i^q t(\delta)^q K'(F_{\delta,\delta'}).$$

Ainsi, la fonction

$$(\delta, \delta') \to (1 + |t(\delta)|)^{-N}(1 + |t(\delta)|^q) h(K'(F_{\delta,\delta'}))$$

est bornée, et ceci quel que soit l'entier $q \geqq 0$. On en conclut aussitôt que, quel que soit l'entier $q \geqq 0$, la fonction

$$(\delta, \delta') \to |t(\delta)|^q h(K'(F_{\delta,\delta'}))$$

est bornée. On voit de façon analogue que la fonction $(\delta, \delta') \to |t(\delta')|^q h(K'(F_{\delta,\delta'}))$ est bornée, et nous avons donc bien établi l'assertion ($\bigstar$).

Définissons une fonction $K(F)$ sur $\mathbf{R}^{2p} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{p'} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{p'}$ en posant

$$K(F)(t_1, \omega, t_2, \omega_2) = K'(F_{\exp t_2 a, \exp t_1 a})(\omega_1, \omega_2) \qquad (t_1, t_2 \in \mathbf{R}, \ \omega_1, \omega_2 \in \mathbf{R}^{p'}).$$

Il résulte de ($\bigstar$) et de [8], p. 115, que $K(F) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p})$. Identifions comme plus haut $L^2_{\mathfrak{H}'}(\Delta)$ à $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p)$ en posant, pour $f \in L^2_{\mathfrak{H}'}(\Delta)$,

$$(f(\exp ta))(\omega) = f(t, \omega) \qquad (t \in \mathbf{R}, \ \omega \in \mathbf{R}^{p'}).$$

Soient $f \in L^2_{\mathfrak{H}'}(\Delta)$ et $f' \in L^2_{\mathfrak{H}'}(\Delta)$. La fonction $(\delta, \delta') \to (U'(F_{\delta,\delta'}) f(\delta') \mid f'(\delta))$ sur $\Delta \times \Delta$ est intégrable pour la mesure $d\delta\, d\delta'$ et d'intégrale $(U(F) f \mid f')$. (Ceci résulte de la démonstration de [2], lemme 37, dans laquelle l'hypothèse que F est continue à support compact peut être remplacée par l'hypothèse que $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$). Donc

$$\begin{aligned}
&(U(F) f \mid f') \\
&= \iiiint (K'(F_{\delta,\delta'}))(\omega_1, \omega_2) f(\delta')(\omega_1) \overline{f'(\delta)(\omega_2)}\, d\omega_1\, d\omega_2\, d\delta\, d\delta' \\
&= \iiiint K(F)(t_1, \omega_1, t_2, \omega_2) f(\exp t_1 a)(\omega_1) \overline{f'(\exp t_2 a)(\omega_2)}\, d\omega_1\, d\omega_2\, dt_1\, dt_2 \\
&= \iiiint K(F)(t_1, \omega_1, t_2, \omega_2) f(t_1, \omega_1) \overline{f'(t_2, \omega_2)}\, d\omega_1\, d\omega_2\, dt_1\, dt_2.
\end{aligned}$$

Donc $U(F)$ est l'opérateur dans $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^p)$ défini par le noyau $K(F)$.

Soient $F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\Gamma)$. L'opérateur $U(F_1 + F_2) = U(F_1) + U(F_2)$ est défini par le noyau $K(F_1) + K(F_2)$, donc les fonctions $K(F_1 + F_2)$ et $K(F_1) + K(F_2)$ sont égales presque partout et par suite partout. De même, $K(\lambda F) = \lambda K(F)$ pour $\lambda \in \mathbf{C}$. L'application K est donc linéaire. Soit enfin (F_n) une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\Gamma)$ tendant vers F dans $\mathcal{S}(\Gamma)$, et supposons que les $K(F_n)$ aient une limite K dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p})$. Les F_n tendent vers F dans $L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$ (lemme 3), donc $\| U(F_n) - U(F) \| \to 0$. D'autre part, $K(F_n)$ tend vers K dans $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^{2p})$, donc $U(F_n)$ tend au sens d'Hilbert-Schmidt vers l'opérateur U défini par le noyau K. Donc $U = U(F)$, et par suite $K = K(F)$. Appliquant le théorème du graphe fermé aux espaces de Fréchet $\mathcal{S}(\Gamma)$ et

$\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p})$, on voit que l'application linéaire K est continue. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

COROLLAIRE 1. — *Soient* Γ *un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe,* U *une représentation unitaire irréductible de* Γ. *Pour toute* $F \in \mathcal{S}(\Gamma)$, $U(F)$ *est un opérateur à trace, et l'application* $F \to \operatorname{tr}(U(F))$ *est une distribution tempérée sur* Γ.

DÉMONSTRATION. — Utilisons le théorème 1 et ses notations. Puisque $U(F)$ est défini par le noyau $K(F) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p})$, $U(F)$ est un opérateur à trace, et $\operatorname{tr}(U(F)) = \int_{\mathbf{R}^p} K(F)(x, x)\,dx$ (cf. par exemple [3]). Or, l'application $F \to K(F)$ de $\mathcal{S}(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2p})$ est continue. Donc l'application $F \to \int_{\mathbf{R}^p} K(F)(x, x)\,dx$ de $\mathcal{S}(\Gamma)$ dans $\mathbf{C}$ est continue. D'où le corollaire.

REMARQUE. — Rappelons que d'après [3], il peut arriver que la distribution $F \to \operatorname{tr}(U(F))$ ne soit pas une mesure. D'autre part, utilisant la démonstration du théorème 1, il est facile de voir que cette distribution est l'extension à Γ d'une distribution sur un sous-groupe connexe invariant de codimension ≥ 1 (sauf si $\dim U = 1$).

COROLLAIRE 2. — *Soient* Γ *un groupe de Lie réel nilpotent connexe,* U *une représentation unitaire irréductible de* Γ. *Pour toute* $F \in \mathcal{D}(\Gamma)$, $U(F)$ *est un opérateur à trace, et l'application* $F \to \operatorname{tr}(U(F))$ *est une distribution sur* Γ.

DÉMONSTRATION. — Le groupe Γ peut être considéré comme quotient d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe Γ' par un sous-groupe fermé Δ. Pour toute fonction $F' \in \mathcal{D}(\Gamma')$, soit $\pi(F') \in \mathcal{D}(\Gamma)$ la fonction obtenue en intégrant sur les classes modulo Δ. On sait ([1], p, 131) qu'il existe une application linéaire continue π' de $\mathcal{D}(\Gamma)$ dans $\mathcal{D}(\Gamma')$ telle que $\pi(\pi'(F)) = F$ pour toute $F \in \mathcal{D}(\Gamma)$. Ceci posé, U définit une représentation unitaire U' de Γ' triviale sur Δ. Si $F' \in \mathcal{D}(\Gamma')$, on voit comme dans la démonstration du théorème 1 que $U'(F') = U(\pi(F'))$. Donc, si $F \in \mathcal{D}(\Gamma)$, on a

$$U(F) = U(\pi(\pi'(F)) = U'(\pi'(F)).$$

D'après le corollaire 1, $U(F)$ est un opérateur à trace, et

$$\operatorname{tr}(U(F)) = \operatorname{tr}(U'(\pi'(F))) = T(\pi'(F)),$$

où T est une distribution sur Γ'. Comme π' est linéaire continue, $F \to \operatorname{tr}(U(F))$ est une distribution sur Γ.

COROLLAIRE 3. — *Soient* Γ *un groupe de Lie réel nilpotent connexe,*

U une représentation unitaire irréductible de Γ. Pour toute $F \in L^1_{\mathbf{C}}(\Gamma)$, $U(F)$ est un opérateur complètement continu.

DÉMONSTRATION. — Il existe une suite de fonctions $F_n \in \mathcal{D}(\Gamma)$ telles que $\int_\Gamma |F(\gamma) - F_n(\gamma)| d\gamma \to 0$. Alors, $\| U(F) - U(F_n) \| \to 0$, et les $U(F_n)$ sont des opérateurs à trace, donc complètement continus. Donc $U(F)$ est complètement continu.

COROLLAIRE 4. — *Tout groupe de Lie réel nilpotent connexe a un dual lisse (« smooth dual » au sens de* [6]).

DÉMONSTRATION. — Ceci résulte du corollaire 3 et de [4], corollaire du théorème 4.1.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BRUHAT (François). — Sur les représentations induites des groupes de Lie, *Bull. Soc. math. France*, t. 84, 1956, p. 97-205.
[2] DIXMIER (Jacques). — Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, II., *Bull. Soc. math. France*, 85, 1957, p. 325-388.
[3] DIXMIER (Jacques). — Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, IV, *Canadian J. of Math.* (à paraître).
[4] FELL (J. M. G.). — *C*-algebras with smooth dual* (à paraître).
[5] MACKEY (George W.). — Imprimitivity for representations of locally compact groups, *Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 35, 1949, p. 537-545.
[6] MACKEY (George W.). — Borel structure in groups and their duals, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 85, 1957, p. 134-165.
[7] HARISH-CHANDRA. — Representations of semi-simple Lie groups, III., *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 76, 1954, p. 234-253.
[8] SCHWARTZ (Laurent). — Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles *Journal d'Analyse mathématique*, t. 4, 1954-1955, p. 88-148.

(Manuscrit reçu le 24 avril 1959.)

Jacques DIXMIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris,
64, rue Gay-Lussac, Paris (5e).