P. LIBERMANN

Pseudogroupes infinitésimaux attachés aux pseudogroupes de lie

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 409-425
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__409_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89. 1959. Lille].
Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 409 à 425.

PSEUDOGROUPES INFINITÉSIMAUX ATTACHÉS AUX PSEUDOGROUPES DE LIE;

PAR

M^lle PAULETTE LIBERMANN
(Rennes).

Cet exposé contient le développement d'une partie des résultats concernant les pseudogroupes infinitésimaux (p. i.) publiés dans des Notes aux Comptes-Rendus [11]. Certains théorèmes énoncés dans [11] sont démontrés, et leurs conditions d'application sont précisées. La théorie des p. i. permet notamment de démontrer deux théorèmes dûs à C. EHRESMANN (*voir* [9]) :

1° le groupe de toutes les transformations globales appartenant à un pseudogroupe de type fini est un groupe de Lie;
2° sur une variété complète, simplement connexe, un pseudogroupe de Lie de type fini et vérifiant certaines conditions de connexité est déduit par localisation d'un groupe de Lie.

Les résultats concernant les graduations d'espaces de jets et les connexions affines d'ordre supérieur ne figurent pas dans [11]. Ces connexions sont considérées d'un point de vue moins général que celui de C. EHRESMANN [8], qui définit des connexions d'ordre supérieur pour tout espace fibré à groupe structural de Lie.

On n'abordera pas la question des p. i. attachés à des prolongements holoédriques et mériédriques de pseudogroupes, ce qui conduit à des homomorphismes de faisceaux, et permet l'étude des pseudogroupes, de Lie simples (« groupes infinis simples » au sens de E. CARTAN). Il est à remarquer que les transformations infinitésimales n'ont pas été considérées par E. CARTAN dans sa théorie des « groupes infinis » mais ce point de vue a été celui de VESSIOT.

1. Rappel de définitions et notations relatives aux pseudogroupes de Lie [10]. — Pour toute application f de U sur $f(U)$, U et $f(U)$ sont la source et le but de f. *Un pseudogroupe de transformations* Γ dans un espace topologique E est un ensemble de transformations vérifiant les axiomes :

1° tout $f \in \Gamma$ est une application biunivoque dont la source et le but appartiennent à l'ensemble Φ des ouverts d'une topologie sur E (appelée topologie *sous-jacente* à Γ) ;

2° si $U = \bigcup_i U_i$, pour qu'une application biunivoque f, de source U, de but $f(U) \subset E$ appartienne à Γ, il faut et il suffit que sa restriction à chaque U_i appartienne à Γ;

3° si $f \in \Gamma$, alors $f^{-1} \in \Gamma$; si f, $f' \in \Gamma$, alors l'application composée $ff' \in \Gamma$. (Si f a pour but U, et f' pour source U', l'application $f'f$ est l'application $x \to f'(f(x))$ dont la source (éventuellement vide) est l'image réciproque par f de $U \cap U'$).

4° L'application identique de E appartient à Γ.

Soient E et E' deux espaces topologiques, et soit f une application continue de source $U \subset E$ dans E'. On appelle *jet local* $j_x^\lambda f$, de source x, but $f(x)$, la classe des applications g, dont la source contient x et telles que les restrictions de f et g à un voisinage de x coïncident.

Si E et E' sont des variétés différentiables [1], pour toute application différentiable f de source $U \subset E$ dans E', on désigne par *q-jet infinitésimal* $j_x^q f$, de source x, but $f(x)$, la classe des applications g d'un ouvert $U' \ni x$, telles que $f(x) = g(x)$, et jouissant de la propriété : si f et g s'expriment à l'aide de coordonnées locales admissibles au voisinage de x et $f(x)$ par des fonctions numériques f^i et g^i ($i = 1, \ldots, n = \dim E'$), alors les dérivées partielles des g^i d'ordre $\leq q$ prennent en x les mêmes valeurs numériques que celles de même nature des f^i. Si $q' < q$, on a les applications canoniques ou *projections* :

$$(x, f) \to j_x^\lambda f \to j_x^q f \to j_x^{q'} f.$$

On a, entre jets, les lois de composition, déduites des lois de composition entre applications :

$$j_x^\lambda ff' = (j_{f'(x)}^\lambda f)(j_x^\lambda f'),$$
$$j_x^q ff' = (j_{f'(x)}^q f)(j_x^q f').$$

On en déduit que si Γ est un pseudogroupe opérant sur E, l'ensemble $\mathcal{J}^\lambda(\Gamma)$ des jets locaux définis par tous les $f \in \Gamma$, est un *groupoïde*, sous-groupoïde

(1) Différentiable signifiera : de classe C^∞.

de $\pi^{\lambda}(E)$ (ensemble de tous les jets locaux inversibles de E dans E). On définit de même le groupoïde associé d'ordre q : $\mathfrak{J}^{q}(\Gamma)$ est un sous-groupoïde de $\pi^{q}(E)$.

Si Γ' est un sous-pseudogroupe de Γ, de topologie moins fine et si $\mathfrak{J}^{\lambda}(\Gamma')=\mathfrak{J}^{\lambda}(\Gamma)$, on dit que Γ se *déduit par localisation* de Γ' (Γ' peut être un groupe).

Un pseudogroupe Γ sur une variété est dit *complet* d'ordre q, si Γ est l'ensemble des solutions de $\mathfrak{J}^{q}(\Gamma)$ (il est alors complet pour $s>q$).

Un pseudogroupe de Lie est un pseudogroupe opérant sur une variété V_n et vérifiant les conditions :

1° Γ est complet d'ordre q;

2° pour $s=0, \ldots, q$, $\mathfrak{J}^{s}(\Gamma)$ est une sous-variété analytique de $\mathfrak{J}^{s}(V_n, V_n)$ (ensemble de tous les s-jets de V_n dans V_n). On définit les pseudogroupes de Lie *transitifs* (si $\mathfrak{J}^{0}(\Gamma)$ s'identifie à $V_n\times V_n$) et *intransitifs*.

Un pseudogroupe de Lie est de type fini, de degré r si la projection de $\mathfrak{J}^{r}(\Gamma)$ sur $\mathfrak{J}^{r-1}(\Gamma)$ est localement biunivoque : $\mathfrak{J}^{r}(\Gamma)$ est alors défini localement par un système d'équations aux dérivées partielles de Mayer-Lie, c'est-à-dire tel que les dérivées d'ordre r s'expriment en fonction des dérivées d'ordre $\leqq r-1$. On démontre qu'alors $\mathfrak{J}^{s}(\Gamma)$ est isomorphe à $\mathfrak{J}^{r}(\Gamma)$ pour $s>r$ et par suite $\mathfrak{J}^{\lambda}(\Gamma)$ est isomorphe à $\mathfrak{J}^{r}(\Gamma)$. Un pseudogroupe de Lie qui n'est pas de type fini est dit de *type infini*.

2. Transformations infinitésimales locales. Définitions et notations. — Sur une variété différentiable V_n, on désigne par *champ local* de tenseurs p fois contravariants, q fois covariants un relèvement différentiable d'un ouvert U (source du champ) dans l'espace fibré ${}^{(p,q)}T(V_n)$ de tous les tenseurs de type (p, q) sur V_n; en particulier un champ local de vecteurs sera appelé *transformation infinitésimale locale* (t. i. l.). Si $U=V_n$, on a une transformation infinitésimale (t. i.) au sens usuel.

NOTATIONS. — Dans la suite de cet exposé on notera ${}^{(p,q)}\mathfrak{S}^{s}_{x}(V_n)$ l'ensemble des s-jets de source x des relèvements locaux de V_n dans ${}^{(p,q)}T(V_n)$ et ${}^{(p,q)}\mathfrak{S}^{s}(V_n)=\bigcup\limits_{x\in V_n}{}^{(p,q)}\mathfrak{S}^{s}_{x}(V_n)$. En considérant l'ensemble des jets locaux de ces relèvements, on définit de même ${}^{(p,q)}\mathfrak{S}^{\lambda}_{x}(V_n)$ et ${}^{(p,q)}\mathfrak{S}^{\lambda}(V_n)$. Pour les vecteurs, on notera plus brièvement : $T(V_n)$, $\mathfrak{S}^{s}_{x}(V_n)$, $\mathfrak{S}^{\lambda}_{x}(V_n)$ etc.

Si T est un champ local de tenseurs, le jet local $j^{\lambda}_{x}T$ sera appelé *germe* de champ de tenseurs.

On définit l'opérateur dérivée de Lie comme pour une t. i. globale : si X est une t. i. l. de source U, T un champ local de tenseurs de source U', la dérivée de Lie $\theta(X)T$ a pour source (éventuellement vide) $U\cap U'$. On peut définir l'opérateur dérivée de Lie pour les germes en x de tenseurs; par définition :

$$\theta(j_x^\lambda X) j_x^\lambda T = j_x^\lambda(\theta(X)T).$$

Soit X une t. i. l. de source U et soit $x \in U$; le s-jet $j_x^s X$ du relèvement X de U dans $T(V_n)$ est défini par la suite de nombres :

$$(x^1, \ldots, x^n)_x \qquad \left[\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} X^i}{(\partial x^1)^{\alpha_1}\ldots(\partial x^n)^{\alpha_n}}\right]_x \qquad \text{avec} \quad \alpha_1+\ldots+\alpha_n = l$$
$$(l = 0, 1, \ldots, s), \ (i = 1, \ldots, n),$$

où les x^i sont des coordonnées locales sur V_n au voisinage de x. Il en résulte que l'ensemble $\mathfrak{S}_x^s(V_n)$ des s-jets de source x est *un espace vectoriel de dimension finie* nH_n^s où $H_n^s - 1$ est le nombre de dérivées partielles d'ordre $\leqq s$ d'une fonction numérique de n variables. De même quels que soient p et q, l'espace vectoriel ${}^{(p,q)}\mathfrak{S}_x^s(V_n)$ est de dimension finie.

Soit p la projection de $T(V_n)$ sur V_n. Toute application différentiable d'un ouvert $U \subset V_n$ dans V_n se prolonge en une application f^I (différentielle au sens de C. Chevalley) de $p^{-1}(U)$ dans $T(V_n)$: un vecteur v, d'origine $x \in U$ étant un jet d'ordre 1 de R^n dans V_n, de source O, but x, le vecteur $v' = f^I(v)$ est le jet composé $(j_x^1 f)v$. Il en résulte, si f est biunivoque, que toute t. i. l. X est transformée par f en une t. i. l. $X' = f^I X f^{-1}$. On en déduit que le groupoïde $\Pi^{s+1}(V_n)$ de tous les $(s+1)$-jets inversibles de V_n dans V_n est un groupoïde d'opérateurs sur la variété $\mathfrak{S}^s(V_n)$; en effet si $X' = f^I X f^{-1}$, le jet $j_{f(x)}^s X'$ est déterminé par les jets $j_x^s X$ et $j_x^{s+1} f$: l'espace $\mathfrak{S}^s(V_n)$ est muni d'une structure fibrée généralisée associée à $\Pi^{s+1}(V_n)$ [7]; comme $\Pi^{s+1}(V_n)$ est un espace fibré principal à un groupe stuctural de Lie, la *variété* $\mathfrak{S}^s(V_n)$ *est un espace fibré ordinaire* (*à fibre vectorielle*) *associé à* $\Pi^{s+1}(V_n)$. Il en est de même de toute variété ${}^{(p,q)}\mathfrak{S}^s(V_n)$.

Toute t. i. l. X de source U définit sur U un noyau de groupe de transformations f_t à un paramètre et le germe $j_x^\lambda X$ définit un germe de groupe à un paramètre. La t. i. l. X sur V_n se prolonge en une t. i. l. X^{s+1} sur $\mathcal{J}^s(V_n, V_n)$, variété des s-jets de V_n dans V_n car le noyau de groupe de transformations f_t se prolonge sur $\mathcal{J}^s(V_n, V_n)$ en un noyau de groupe de transformations f_t^{s+1} : $a^s \to a^s(j_x^s f_t)^{-1}$ où $a^s \in \mathcal{J}^s(V_n, V_n)$ a pour source x. Ceci permet de définir *la dérivée de Lie d'un élément différentiel d'ordre supérieur* et l'on rejoint le point de vue de C. Ehresmann (déplacement infinitésimal d'une fibre) [8].

Proposition 1. — *Pour tout* $x \in V_n$, *il existe un isomorphisme canonique* ψ_x *de l'espace vectoriel* $\mathfrak{S}_x^s(V_n)$ *sur l'espace tangent en* j_x^s (*s-jet de l'application identique de* V_n) *à* $\mathcal{J}_x^s(V_n, V_n)$ (*variété des s-jets de but x de* V_n *dans* V_n) *: pour toute t. i. l. X dont la source U contient x, le s-jet* $j_x^s X$ *du relèvement X de U dans* $T(V_n)$ *s'identifie canoniquement au vecteur* $X^{s+1}(j_x^s)$, *d'origine* j_x^s, *relèvement dans* $\mathcal{J}^s(V_n, V_n)$ *du vecteur* $X(x)$.

En effet la transformation f_t s'exprime au voisinage de x par :

$$x_t^i = x^i + X^i(x)t + o(t),$$

d'où :

$$\frac{\partial x_t^i}{\partial x^j} = \delta_j^i + \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x)t + o(t).$$

Le vecteur : $X^2(j_x^1) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[(j_x^1 f_t)^{-1} - j_x^1]$ a pour composantes : $-X_i, -\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$; d'autre part $j_x^1 X$ est le jet : $x^i, X^i, \frac{\partial X^i}{\partial x^j}$. On démontre la proposition par dérivations successives.

Pour tout jet $a^s \in \mathcal{J}^s(V_n, V_n)$, de source x, le vecteur $X^{s+1}(a^s)$ est déterminé par le jet $j_x^s X$.

3. Graduations et dérivations covariantes dans les espaces de jets. — Certaines idées développées dans ce paragraphe sont à rapprocher de [1], [3] et [15].

a. Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension n sur un corps de caractéristique o; $\mathcal{V}_q^1$ désignant l'espace des tenseurs de type (1, q) sur $\mathcal{V}$ qui sont symétriques par rapport aux facteurs covariants, on considérera l'espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathcal{V})$, somme directe des $\mathcal{V}_q^1$ quand q parcourt l'ensemble N des entiers $\geqq 0$: $\mathcal{A}(\mathcal{V})$ est le produit tensoriel $\mathcal{V} \otimes S(\mathcal{V}^*)$ où $S(\mathcal{V}^*)$ est l'algèbre symétrique sur le dual $\mathcal{V}^*$ de $\mathcal{V}$. Définissons dans $\mathcal{A}(\mathcal{V})$ la loi de multiplication suivante (notée.) :

1° l'application $(t, t') \to t.t'$ est bilinéaire,

2° pour $t \in \mathcal{V}_q^1$, $t' \in \mathcal{V}_{q'}^1$, on a :

$$t.t' = \frac{1}{p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{T}} \sigma\gamma(t \otimes t'),$$

où γ désigne la contraction entre le premier facteur contravariant et un facteur covariant de $t \otimes t'$, $\mathfrak{T}$ le groupe des permutations des facteurs covariants de $\gamma(t \otimes t')$ et p le nombre de termes obtenus par permutation. En particulier pour t, $t' \in \mathcal{V}_1^1$, on retrouve la multiplication des matrices. Cette loi de composition définit dans $\mathcal{A}(\mathcal{V})$ une structure d'algèbre unitaire dont l'unité est la matrice de l'application identique de $\mathcal{V}$; cette algèbre unitaire est une *algèbre graduée* au sens de C. Chevalley [4]; son groupe des degrés est l'ensemble Z des entiers muni de la loi de groupe abélien suivante : $(p, q) \to p + q - 1$. Dans $\mathcal{A}(\mathcal{V})$ qui sera désignée par *algèbre contractée symétrique* sur $\mathcal{V}$, les éléments homogènes de degré < 0 sont nuls.

On obtient ainsi en tout point x d'une variété V_n une algèbre contractée symétrique $\mathcal{A}(T_x)$ sur l'espace tangent T_x à V_n; si l'on passe aux germes de champs de tenseurs, on définit en chaque x une structure *d'algèbre contractée symétrique* $\mathcal{S}_x$ dans l'espace de tous les germes de source x des champs locaux de tenseurs une fois contravariants et symétriques par rapport aux facteurs covariants, d'où sur V_n un faisceau d'algèbres contractées symétriques.

On dira que deux systèmes de coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$ et $(y^1, \ldots, y^n)$ définis respectivement dans $U \subset V_n$ et $U' \subset V_n$ appartiennent à la même *classe locale affine* a_x si $x \in U \cap U'$ et si dans $U \cap U'$ les y^j sont des fonctions du premier degré des x^i. Dans chaque classe a_x, il existe des coordonnées qui s'annulent en x; on utilisera désormais de telles coordonnées. A chaque classe a_x correspond une *graduation* de l'espace vectoriel $\mathfrak{S}_x^s(V_n)$ (défini dans le paragraphe 2) : tout jet $j_x^s X$ admet un représentant « polynomial » qui est le jet $\overline{X} = \sum_{k=0}^{s} \overline{X}_{(k)}$ où les $\overline{X}_{(k)}$ sont des t. i. l. dont la source contient x et dont les composantes $\overline{X}_{(k)}^i$ sont des polynomes homogènes de degré k par rapport aux coordonnées x^i. On peut écrire :

$$j_x^s X = (D^0 x)_x + (D^1 X)_x + \frac{1}{2!}(D^2 X)_x + \ldots + \frac{1}{s!}(D^s X)_x$$

où pour $l = 0, \ldots, s$, $D^l X$ est la suite de fonctions : $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} X^i}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x^n)^{\alpha_n}}$ avec $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = l$, ($i$ variant de 1 à n).

Il résulte de cette définition que l'application $X \to (D^l X)_x$ est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathfrak{S}_x^\lambda(V_n)$ des germes de t. i. l. dans l'espace des tenseurs $(T_x)_l^1$ (défini au début de ce paragraphe) et que d'autre part l'opérateur

$$D : D^l X \to D^{l+1} X$$

est une *dérivation* dans l'algèbre contractée symétrique $\mathcal{S}_x$.

Soient X et Y deux t. i. l. dont les sources contiennent x. On a pour le crochet de Jacobi $Z = [X, Y]$:

$$j_x^s Z = (D^0 Z)_x + \ldots + \frac{1}{s!}(D^s Z)_x$$

avec :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} D^0 Z &= D^0 X . D^1 Y - D^0 Y . D^1 X \\ D^1 Z &= D^0 X . D^2 Y + D^1 X . D^1 Y - D^0 Y . D^2 Y - D^1 Y . D^1 X \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D^l Z = D(D^{l-1} Z) &= D^0 X . D^{l+1} Y + C_n^1 D^1 X . D^l Y \\ &\quad + C_n^2 D^2 X . D^{l-1} Y + \ldots + D^l X . D^1 Y \\ &\quad - D^0 Y . D^{l+1} X - C_n^1 D^1 Y . D^l X \\ &\quad - C_n^2 D^2 Y . D^{l-1} X - \ldots - D^l Y . D^1 X \qquad \ldots, \end{aligned} \right.$$

où les C_n^i sont les coefficients du développement du binôme $(a+b)^n$ et où $D^h X . D^k Y$ désigne le produit au sens de l'algèbre contractée symétrique $\mathcal{S}_x$.

Le produit $D^0 X . D^l Y$ peut s'exprimer au moyen de la dérivée de Lie; on a :

$$D^0 X . D^l Y = \theta(X) D^{l-1} Y.$$

On peut alors écrire :

$$(1)' \qquad D^l Z = [DX, DY]^l + \theta(X) D^l Y - \theta(Y) D^l X,$$

où $[DX, DY]_x^l$, qui dépend en général de la classe locale affine a_x, est une fonction bilinéaire antisymétrique de $j_x^l X$ et $j_x^l Y$.

Le crochet de Jacobi définit dans l'espace vectoriel $\mathfrak{S}_x^\lambda(V_n)$ une structure d'algèbre de Lie. Soit $\mathcal{L}_x^h(V_n)$ $(h \geqq 0)$ le sous-espace de $\mathfrak{S}_x^\lambda(V_n)$ formé de tous les germes $j_x^\lambda X$ tels que $j_x^h X = 0$ (quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on désignera $\mathcal{L}_x^h(V_n)$ par $\mathcal{L}_x^h$). Des relations (1), on peut déduire la propriété suivante :

quel que soit $h > 0$, $\mathcal{L}_x^h$ est un idéal de $\mathcal{L}_x^0$, d'où une structure d'algèbre de Lie dans le sous-espace $\mathfrak{S}_x'^h(V_n)$, projection de $\mathcal{L}_x^0$ dans $\mathfrak{S}_x^h(V_n)$ car $\mathfrak{S}_x'^h(V_n)$ s'identifie à l'algèbre de Lie quotient $\mathcal{L}_x^0/\mathcal{L}_x^h$: si $X_x = Y_x = 0$, le jet $j_x^h[X, Y]$ est déterminé par $j_x^h X$ et $j_x^h Y$. On définit alors dans $\mathfrak{S}_x'^h(V_n)$ le crochet par :

$$[j_x^h X, j_x^h Y] = j_x^h[X, Y].$$

Pour $s = 1$, on a la structure d'algèbre de Lie usuelle dans l'espace des $(n \times n)$ matrices.

Si X_x et Y_x ne s'annulent pas simultanément, le jet $j_x^h[X, Y]$ est déterminé par $j_x^{h+1} X$ et $j^{h+1} Y$.

On démontre que :

$$[\mathcal{L}_x^h, \mathcal{L}_x^1] \subset \mathcal{L}_x^{h+1} \qquad \text{pour} \quad h > 0.$$

Comme $\mathcal{L}_x^{h-1} \supset \mathcal{L}_x^h$ et $\bigcup_{h \geqq 0} \mathcal{L}_x^h = \mathcal{L}_x^0$, on a une *filtration décroissante* de $\mathcal{L}_x^0$ par les $\mathcal{L}_x^h$. Considérons l'espace vectoriel gradué associé

$$G(\mathcal{L}_x^0) = \sum_{h \geqq 1} \mathcal{L}_x^{h-1}/\mathcal{L}_x^h.$$

L'espace vectoriel $\mathcal{L}_x^{h-1}/\mathcal{L}_x^h$ s'identifie au noyau de la projection de $\mathfrak{S}_x^h(V_n)$ sur $\mathfrak{S}_x^{h-1}(V_n)$. Chaque classe locale affine a_x de coordonnées définit un isomorphisme de $\mathfrak{S}_x^s(V_n)$ sur $G_s(\mathcal{L}_x^0) = \sum_{h=1}^{s} \mathcal{L}_x^{h-1}/\mathcal{L}_x^h$: chaque élément de $\mathcal{L}_x^{h-1}/\mathcal{L}_x^h$ est représenté par une t. i. l. $X_{(h)}$ dont les composantes sont des polynomes de degré h; on retrouve ainsi la graduation de $\mathfrak{S}_x'^s(V_n)$.

THÉORÈME 1. — *Soit Σ^s un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre s, linéaire, homogène, à coefficients constants, complètement intégrable, définissant en chaque point x d'un ouvert de V_n un sous-espace vectoriel F_x^s de $\mathfrak{S}_x^s(V_n)$; pour que l'ensemble $\mathcal{G}_x$ des germes en x des solutions de Σ^s soit une algèbre de Lie, il faut et il suffit que la projection $F_x'^s$ de $\mathcal{G}_x \cap \mathcal{L}_x^0$ sur $\mathfrak{S}_x^s(V_n)$ soit une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}_x^0/\mathcal{L}_x^s$.*

En effet le système Σ^s peut s'écrire :

$$(2)\qquad \begin{cases} f_{i_0}^0(D^0X) = 0 \\ f_{i_1}^1(D^0X,\, D^1X) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{i_s}^s(D^0X,\, D^1X,\, \dots,\, D^sX) = 0, \end{cases}$$

où pour $l = 0, 1, \dots, s$, les $f_{i_l}^l$ sont des polynomes homogènes de degré 1 à coefficients constants des composantes de $D^0X, D^1X, \dots, D^lX$. Comme Σ^s est complètement intégrable, les s-jets des germes en x des solutions engendrent un espace vectoriel qui coïncide avec F_x^s; le sous-espace $F_x'^s$ de F_x^s formé des jets j_x^sX tels que $j_x^0X = 0$ coïncide alors avec la projection de $\mathcal{G}_x \cap \mathcal{L}_x^0$ sur $\mathfrak{S}_x^s(V_n)$; $F_x'^s$ est défini par les équations .

$$f_{i_l}^l(0,\, D^1X,\, \dots,\, D^lX) = 0 \qquad (l = 0, 1, \dots, s).$$

En raison des équations $(1)'$, si $Z = [X, Y]$, on a :

$$(3)\quad \begin{aligned} f_{i_l}^l(D^0Z, \dots, D^lZ) = {} & \theta(X) f_{i_l}^l(D^0Y, \dots, D^lY) \\ & - \theta(Y) f_{i_l}^l(D^0X, \dots, D^lX) \\ & + f_{i_l}^l(0, [DX, DY]^1, \dots, [DX, DY]^l) = 0; \end{aligned}$$

donc pour que les conditions : $j_x^\lambda X \in \mathcal{G}_x$, $j_x^\lambda Y \in \mathcal{G}_x$ entraînent $j_x^\lambda[X, Y] \in \mathcal{G}_x$, il faut et il suffit que pour $l = 0, \dots, s$, les équations :

$$f_{i_l}^l(0,\, D^1X,\, \dots,\, D^lX) = 0 \qquad f_{i_l}^l(0,\, D^1Y,\, \dots,\, D^lY) = 0$$

entraînent :

$$f_{i_l}^l(0,\, [DX, DY]^1,\, \dots,\, [DX, DY]^l) = 0.$$

Cette condition réalisée nous dirons que F_x^s est un sous-espace vectoriel *stable* de $\mathfrak{S}_x^s(V_n)$.

b. On a vu que chaque classe locale affine de coordonnées a_x définit une application linéaire $t_x^r : X \to (D^rX)_x$ de $\mathfrak{S}_x^\lambda(V_n)$ dans $T_x \otimes \left(\overset{r}{\otimes} T_x^*\right)$ (dont l'image est contenue dans $(T_x)_r^1$); le noyau $\operatorname{Ker}(t_x^r)$ de t_x^r contient $\mathcal{L}_x^r$; soit $t_x'^r$

l'application linéaire associée à une autre classe affine a'_x; il résulte des formules de changements de coordonnées que le noyau $\mathrm{Ker}(t^r_x - t'^r_x)$ contient $\mathcal{L}^{r-1}_x$.

Définition. — On désignera par *élément de connexion affine d'ordre r*, de source x, toute application linéaire τ^r_x de $\mathfrak{S}^\lambda_x(V_n)$ dans $T_x \otimes \left(\overset{r}{\otimes} T^\star_x\right)$ telle que t^r_x étant l'application associée a une classe locale affine, on ait :

$$\mathrm{Ker}(\tau^r_x - t^r_x) \supset \mathcal{L}^{r-1}_x. \tag{4}$$

Il résulte de cette définition que : $\mathrm{Ker}\,\tau^r_x \supset \mathcal{L}^r_x$.

L'espace $\mathcal{C}^r(V_n)$ de tous les τ^r_x sur V_n est un espace fibré dont la fibre est isomorphe à l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathfrak{S}^{r-1}_0(R^n)$ dans $R^n \otimes \left(\overset{r}{\otimes} R^{n\star}\right)$ (où O est l'origine de R^n). Une *section* dans $\mathcal{C}^r(V_n)$ sera une *connexion affine d'ordre r*, ce qui est un cas particulier de connexion infinitésimale d'ordre r définie par C. Ehresmann [8] qui a montré qu'une telle connexion existe toujours, la fibre étant homéomorphe à un espace numérique. On définit les connexions locales d'ordre r (dont la source est un ouvert de V_n) et les germes de telles connexions. On définit de même les s-jets de connexion (en particulier un élément de connexion est un jet d'ordre 0). Pour $r = 1$, on retrouve les connexions affines au sens usuel définies par les symboles de Christoffel.

Une connexion affine d'ordre r définit une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{E}(V_n)$ de tous les champs de vecteurs sur V_n dans l'espace vectoriel ${}^{(1,r)}\mathcal{E}(V_n)$ de tous les champs de tenseurs de type $(1, r)$; comme pour les connexions affines d'ordre 1, on peut montrer (pour r quelconque) que cette application linéaire détermine une application de ${}^{(p,q)}\mathcal{E}(V_n)$ dans ${}^{(p,q+r)}\mathcal{E}(V_n)$, d'où la notion de dérivation covariante d'ordre r. En particulier la dérivation covariante d'une connexion C d'ordre 1 définit les applications linéaires :

$$\mathcal{E}(V_n) \to {}^{(1,1)}\mathcal{E}(V_n) \to \ldots \to {}^{(1,r)}\mathcal{E}(V_n) \to \ldots.$$

Une connexion C^r d'ordre r sera dite le *prolongement d'ordre r* de C si l'application τ^r_x résulte de r dérivations covariantes successives. Le r-jet de source x d'une connexion affine d'ordre 1 détermine un élément de connexion d'ordre r de même source.

Une connexion affine d'ordre r est dite *intégrable* s'il existe au voisinage de chaque x un système de coordonnées locales tel que l'application linéaire τ^r_x soit celle associée à ce système de coordonnées. On sait qu'une connexion affine d'ordre 1 est intégrable si et seulement si la courbure et la torsion de cette connexion sont nulles en tout $x \in V_n$.

On obtient des définitions et propriétés analogues pour les connexions locales et germes de connexions.

Une connexion C d'ordre 1 (locale ou globale) sera dite *k-intégrable* en x si le jet $j_x^k C$ est le jet d'une connexion intégrable c'est-à-dire s'il existe une classe locale affine a_x de coordonnées pour laquelle les symboles de Christoffel Γ^i_{jl} et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k sont nulles en x. La connexion C sera dite *k-holonome* en x si les restrictions à x des champs de tenseurs obtenus par k dérivations covariantes successives d'une t. i. l. quelconque appartiennent à l'algèbre contractée symétrique $\mathcal{A}(T_x)$. Une connexion k-intégrable en x est évidemment k-holonome.

En utilisant l'identité de Ricci [13] :

$$(5)\quad \nabla_h \nabla_j X^i - \nabla_j \nabla_h X^i = \sum_\rho R^i_{\rho,hj} X^\rho + \sum_\rho S^\rho_{hj} \nabla_\rho X^i \qquad (h, j, i = 1, \ldots, n)$$

où ∇ est le symbole de dérivation covariante et $R^i_{\rho,hj}$, S^ρ_{hj} les composantes des tenseurs de courbure et torsion, on démontre que la condition nécessaire et suffisante pour que la connexion soit 2-holonome en x est la nullité en x de la courbure et de la torsion. Il en résulte, en utilisant une remarque antérieure, que *si en tout point d'un voisinage U de x, la connexion est 2-holonome, elle est intégrable dans ce voisinage.*

Étant donnée un connexion C d'ordre 1, le jet $j_x^s X$ d'une t. i. l. X peut être défini par la suite :

$$X^i,\ \nabla_k X^i,\ \nabla_k \nabla_l X^i,\ \ldots,\ \nabla_{k_1} \ldots \nabla_{k_s} X^i$$

mais en général on n'obtient pas une graduation de $\mathfrak{S}_x^s(V_n)$. En effet d'après l'identité de Ricci, étant donnée une t. i. l. X arbitraire pour qu'il existe au voisinage de x une t. i. l. Y telle que $Y_x^j = X_x^j$, $(\nabla_k Y^j)_x = 0$, $(\nabla_k \nabla_l Y^j)_x = 0$ et une t. i. l. Z telle que $Z_x^j = 0$, $(\nabla_k \nabla_l Z^j)_x = 0$ et $(\nabla_k Z^j)_x = (\nabla_k X^j)_x$, il est nécessaire que la courbure (pour Y) et la torsion (pour Z) s'annulent en x. D'où :

THÉORÈME 2. — *Pour que la dérivation covariante associée à une connexion affine C d'ordre 1 (globale ou locale) définisse en tout point x où elle est définie une graduation de l'espace vectoriel $\mathfrak{S}_x^s(V_n)$, il faut et il suffit que C soit intégrable.*

4. Définition des pseudogroupes infinitésimaux. — Φ étant l'ensemble des ouverts d'une topologie $\mathfrak{T}$ sur V_n, on désigne par *pseudogroupe infinitésimal* (ou plus brièvement p. i.), de topologie sous-jacente $\mathfrak{T}$, un ensemble E de t. i. l. vérifiant les axiomes suivants :

1° tout $X \in E$ a pour source $U \in \Phi$;

2° si X et X', de source U et U' appartiennent à E, alors le crochet $[X, X']$ et la t. i. l. $aX + bX'$ (quelles que soient les constantes réelles a et b), de source $U \cap U'$ (éventuellement vide) appartiennent à E;

3° si $U = \bigcup_i U_i$, pour que la t. i. l. X, de source U, appartienne à E, il faut et il suffit que sa restriction à chaque U_i appartienne à E.

Soit $\mathcal{J}^\lambda(E)$ l'ensemble des germes de t. i. l. déterminés par tous les $X \in E$. Il résulte des axiomes précédents que l'ensemble $\mathcal{J}_x^\lambda(E)$ des germes de source x est une *algèbre de Lie* et $\mathcal{J}^\lambda(E)$ est un *faisceau d'algèbres de Lie* que nous désignerons par *faisceau associé* à E. Si tout $X \in E$ est une t. i. globale, E est une algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et $\mathcal{J}^\lambda(E)$ est le faisceau constant $V_n \times \mathfrak{h}$.

De la définition de E, il résulte que l'ensemble de toutes les applications biunivoques différentiables d'ouverts de V_n dans V_n qui laissent invariant E est un pseudogroupe $N(E)$ qui sera appelé le *normalisateur* de E. Le groupoïde des jets locaux $\mathcal{J}^\lambda(N(E))$, associé à $N(E)$ [c'est-à-dire l'ensemble des jets locaux de tous les $f \in N(E)$] est un groupoïde d'opérateurs sur le faisceau $\mathcal{J}^\lambda(E)$ qui est donc muni d'une structure fibrée généralisée associée à $\mathcal{J}^\lambda(N(E))$ [7]; tout $b^\lambda \in \mathcal{J}^\lambda(N(E))$, de source x, but x', définit un isomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathcal{J}_x^\lambda(E)$sur $\mathcal{J}_{x'}^\lambda(E)$; en particulier si $N(E)$ est transitif sur V_n, toutes les algèbres de Lie $\mathcal{J}_x^\lambda(E)$ sont isomorphes à une même algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Le groupe $\mathcal{G}_x^\lambda$ formés des jets locaux de $\mathcal{J}^\lambda(N(E))$ de source et but x est un groupe d'opérateurs de l'algèbre de Lie $\mathcal{J}_x^\lambda(E)$.

L'ensemble des noyaux de groupes à un paramètre correspondant à tous les $X \in E$ engendre par composition et réunion un pseudogroupe noté $P(E)$ et qui sera appelé *pseudogroupe engendré par E*. On a : $P(E) \subset N(E)$.

Soit $\mathcal{J}^s(E)$ l'ensemble des s-jets des relèvements locaux de V_n dans $T(V_n)$ déterminés par tous les $X \in E$. De la définition de E, il résulte que, pour tout $x \in V_n$, l'ensemble $\mathcal{J}_x^s(E)$ de tous les s-jets de source x est un *espace vectoriel*, sous-espace vectoriel de $\mathfrak{S}_x^s(V_n)$ (*cf.* paragraphe 2) et donc de dimension finie : quand x parcourt V_n, dim. $\mathcal{J}_x^s(E)$ est bornée supérieurement par nH_n^s.

L'espace vectoriel $\mathcal{J}_x^s(E)$ qui est un sous-espace vectoriel *stable* (*cf.* paragraphe 3) de $\mathfrak{S}_x^s(V_n)$ n'est pas en général une algèbre de Lie car le crochet définit une application de $\mathcal{J}_x^s(E) \times \mathcal{J}_x^s(E)$ dans $\mathcal{J}_x^{s-1}(E)$.

L'espace $\mathcal{J}^s(E)$ est défini localement par un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre s, linéaire, homogène, complètement intégrable, dont les coefficients sont des fonctions différentiables des coordonnées locales. Le p. i. E sera dit *complet d'ordre* q, si E est l'ensemble des solutions de $\mathcal{J}^q(E)$. Le p. i. E dit *transitif* si $\mathcal{J}_x^0(E)$ s'identifie à l'espace tangent T_x à V_n pour tout $x \in V_n$. Dans ce cas, les germes de t. i. l. engendrant $\mathcal{J}_x^\lambda(E)$ définissent un germe d'orbite qui peut être déterminé par la composante connexe de x dans V_n; le pseudogroupe $P(E)$ engendré par E est transitif et $\mathcal{J}^q(E)$ est défini localement par un système d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

DÉFINITION. — *Un p. i. E est appelé un pseudogroupe infinitésimal de Lie s'il est complet d'ordre q et si pour $s = 0, 1, \ldots, q$, l'espace $\mathcal{J}^s(E)$ est une sous-variété analytique de $\mathfrak{S}^s(V_n)$.*

Pour $s = 0, 1, \ldots, q$, $\mathcal{J}^s(E)$ est alors défini localement par un système d'équations aux dérivées partielles à coefficients *analytiques* tel qu'en chaque point x, $\mathcal{J}^s_x(E)$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{S}^s_x(V_n)$ de *dimension constante* sur V_n.

Tout p. i. transitif, complet d'ordre q, est un p. i. de Lie.

Soit E un p. i. non nécessairement de Lie sur une variété V_n. En chaque $x \in V_n$, $\dim \mathcal{J}^s_x(E)$ est une fonction croissante de s et

$$\dim \mathcal{J}^\lambda_x(E) \geqq \dim \mathcal{J}^s_x(E);$$

si cette fonction est strictement croissante, alors la dimension de $\mathcal{J}^\lambda_x(E)$ est infinie. Dans le cas contraire soit r_x le plus petit entier tel que

$$\dim \mathcal{J}^{r_x}_x(E) = \dim \mathcal{J}^{r_x-1}_x(E);$$

s'il existe un ouvert $U \ni x$ tel que pour tout $x' \in U$, on ait aussi

$$\dim \mathcal{J}^{r_x}_{x'}(E) = \dim \mathcal{J}^{r_x-1}_{x'}(E),$$

alors la restriction à U de $\mathcal{J}^{r_x}(E)$ est définie par un système d'équations aux dérivées partielles dans lequel les dérivées d'ordre r_x s'expriment en fonction de celles d'ordre $\leqq r_x - 1$; par dérivations successives, on démontre alors que pour $s > r_x$, on a : $\dim \mathcal{J}^s_{x'}(E) = \dim \mathcal{J}^{r_x-1}_{x'}(E)$ pour tout $x' \in U$; tout jet $a^{r_x-1} \in \mathcal{J}^{r_x-1}(E)$ détermine un jet local $a^\lambda \in \mathcal{J}^\lambda_x(E)$; par suite $\mathcal{J}^\lambda_x(E)$ est isomorphe à $\mathcal{J}^{r_x-1}_x(E)$. S'il n'existe pas un tel voisinage U, nous dirons que le point x est *singulier* relativement à E; en un point singulier x, il peut se produire le fait suivant :

$$\dim \mathcal{J}^{r_x}_x(E) = \dim \mathcal{J}^{r_x-1}_x(E)$$

et

$$\dim \mathcal{J}^s_x(E) > \dim \mathcal{J}^{r_x}_x(E)$$

pour $s > r_x$; par exemple supposons qu'il existe sur V_n un point x tel que

$$\mathcal{J}^l_x(E) = 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots, s)$$

et

$$\dim \mathcal{J}^{s'}_x(E) \neq 0 \qquad \text{pour} \quad s' > s;$$

ce point x est alors un point fixe pour le pseudogroupe $P(E)$ engendré par E.

Comme pour un p. i. de Lie, on a $\dim \mathcal{J}^q_x(E) = \text{Cte}$, il n'existe pas de points singuliers dans ce cas.

DÉFINITION. — *Un pseudogroupe infinitésimal est dit de type fini, de degré r s'il existe un entier r tel que* $\mathcal{J}^r(E)$ *soit isomorphe à* $\mathcal{J}^{r-1}(E)$ (*et non à* $\mathcal{J}^{r-2}(E)$). Cette définition est équivalente à la suivante : quel que soit $x \in V_n$, on a : $\dim \mathcal{J}_x^r(E) = \dim \mathcal{J}_x^{r-1}(E)$ puisque $\mathcal{J}_x^r(E)$ et $\mathcal{J}_x^{r-1}(E)$ sont des espaces vectoriels réels. Il résulte de l'étude précédente que pour $s > r$, $\mathcal{J}^s(E)$ est isomorphe à $\mathcal{J}^{r-1}(E)$; tout jet $a^{r-1} \in \mathcal{J}^{r-1}(E)$ détermine un seul jet local de même source et par suite $\mathcal{J}^\lambda(E)$ *est isomorphe* à $\mathcal{J}^{r-1}(E)$; comme

$$\dim \mathcal{J}_x^\lambda(E) = \dim \mathcal{J}_x^{r-1}(E),$$

quand x parcourt V_n, $\dim \mathcal{J}_x^\lambda(E)$ est bornée supérieurement.

Inversement, supposons que E possède la propriété suivante : il existe un entier fini A tel que pour tout $x \in V_n$, $\dim \mathcal{J}_x^\lambda(E) \leqq A$. Comme $\dim \mathcal{J}_x^s(E)$ croît avec s et est inférieur ou égal à $\dim \mathcal{J}_x^\lambda(E)$, il existe un entier r_x tel que $\dim \mathcal{J}_x^{s'}(E) = \dim \mathcal{J}_x^{r_x-1}(E)$ pour $s' \geqq r_x$ (on suppose que r_x est le plus petit entier jouissant de cette propriété). Si x n'est pas un point singulier pour E, $\dim \mathcal{J}_x^s(E)$ est une fonction strictement croissante de s pour $s \leqq r_x - 1$. Donc

$$\dim \mathcal{J}_x^{r_x-1}(E) \geqq \dim \mathcal{J}_x^0(E) + r_x - 1;$$

comme $\dim \mathcal{J}_x^{r_x-1}(E) \leqq A$, on a : $r_x - 1 < A$ et quand x parcourt V_n, r_x admet un maximum r; alors pour tout $x \in V_n$, $\mathcal{J}_x^r(E)$ est isomorphe à $\mathcal{J}_x^{r-1}(E)$ et $\mathcal{J}^r(E)$ est isomorphe à $\mathcal{J}^{r-1}(E)$; d'où :

THÉORÈME 3. — *Sur une variété* V_n, *pour qu'un pseudogroupe infinitésimal* E *soit de type fini, il faut et si* V_n *n'admet pas de points singuliers relativement à* E (ce qui a lieu *notamment pour un p. i. de Lie*), *il suffit qu'il existe un entier fini* A *tel que pour tout* $x \in V_n$, *on ait* :

$$\dim \mathcal{J}_x^\lambda(E) \leqq A.$$

5. Pseudogroupes infinitésimaux attachés à un pseudogroupe. — Soit Γ un pseudogroupe de transformations sur V_n. On désignera par *pseudogroupe infinitésimal attaché* à Γ et l'on notera $\mathfrak{A}(\Gamma)$ le plus grand pseudogroupe infinitésimal dont les t. i. l. X engendrent des noyaux de groupe de transformations f_t appartenant à Γ (on prendra pour Γ et $\mathfrak{A}(\Gamma)$ la même topologie sous-jacente).

Supposons que Γ soit un pseudogroupe de Lie d'ordre q (*cf* paragraphe 1); soit E l'ensemble des t. i. l. X définissant des noyaux de groupe de transformations $f_t \in \Gamma$. Pour que $X \in E$, il faut et il suffit que $j_x^q f_t \in \mathcal{J}^q(\Gamma)$, ce qui est équivalent à : X^{q+1} étant le prolongement de X dans $\mathcal{J}^q(V_n, V_n)$, la restriction $\mathfrak{X}^{q+1}$ de X^{q+1} à $\mathcal{J}^q(\Gamma)$ est un champ de vecteurs tangents à $\mathcal{J}^q(\Gamma)$. Comme $\mathcal{J}^q(\Gamma)$ est une sous-variété de $\mathcal{J}^q(V_n, V_n)$, on en déduit que si $X \in E$, $Y \in E$, alors le crochet $[X, Y] \in E$. Donc E est un pseudogroupe infinitésimal : $E = \mathfrak{A}(\Gamma)$.

En utilisant la proposition 1, on démontre que X, de source U, appartient à E si, et seulement si, en chaque $x \in U$, $j_x^q X$ appartient à un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{S}_x^q(V_n)$, dont la dimension est égale à celle de $\mathcal{J}_x^q(\Gamma)$, (ensemble de tous les q-jets de $\mathcal{J}^q(\Gamma)$, de but x). E est donc défini localement comme l'ensemble des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles Σ^q, linéaire, homogène, à coefficients analytiques. Si ce système est complètement intégrable, alors E est un p. i. de Lie. Si Γ est de type fini (de degré r), cette condition de complète intégrabilité est toujours réalisée. En effet, elle est équivalente à la suivante : le pseudogroupe E^q, formé de tous les relèvements $\mathfrak{X}^{q+1}$ dans $\mathcal{J}^q(\Gamma)$ des t. i. l. $X \in E$, est transitif sur $\mathcal{J}^q(\Gamma)$. Soient alors v^r un vecteur tangent à $\mathcal{J}^r(\Gamma)$ (on peut supposer que son origine est un jet j_x^r) et un chemin différentiable sur $\mathcal{J}^r(\Gamma)$, tangent à v^r. Comme chaque $a^r \in \mathcal{J}^r(\Gamma)$ détermine un seul jet local $a^\lambda \in \mathcal{J}^\lambda(\Gamma)$, on obtient sur V_n une famille différentiable à un paramétre de germes d'applications appartenant à Γ, d'où un germe de t. i. l. sur V_n dont le relèvement dans $\mathcal{J}^r(\Gamma)$ contient le vecteur v^r. Comme $q \leqq r$, E^q est transitif sur $\mathcal{J}^q(\Gamma)$. On a $\dim \mathcal{J}^s(\Gamma) = \dim \mathcal{J}^s(E)$ quel que soit s. On en déduit, en particulier, que Γ et E sont de même degré et que, si Γ est transitif (resp. intransitif), E est transitif (resp. intransitif).

Si Γ est de type infini, le système Σ^q n'est peut être pas complètement intégrable, mais dans le cas où Γ est transitif, Σ^q est à coefficients constants; il en est de même du système complètement intégrable Σ'^q, vérifié par l'ensemble des solutions de Σ^q. Donc $\dim \mathcal{J}_x^q(E) =$ constante et E est un p. i. de Lie. D'autre part, si E est de type fini, de degré r, alors Γ est de type fini, (nécessairement de degré r d'après ce qui précède); en effet, tout $f \in \Gamma$ transforme $X \in E$ en $X' = f^1 X f^{-1} \in E$, et d'après le paragraphe 2, le jet $j_{f(x)}^r X'$ est déterminé par les jets $j_x^r X$ et $j_x^{r+1} f$. Si la projection de $\mathcal{J}^{r+1}(\Gamma)$ sur $\mathcal{J}^r(\Gamma)$ n'est pas biunivoque, on peut obtenir des jets distincts $j_{f(x)}^r X'$ et $j_{f(x)}^r X''$ ayant même projection sur $j_{f(x)}^{r-1} X'$, ce qui est contraire à l'hypothèse : E de degré r. De l'étude précédente résulte :

THÉORÈME 4. — *Si Γ est un pseudogroupe de Lie, le pseudogroupe infinitésimal attaché à Γ est de même type. Si Γ est de type infini, et transitif, ou de type fini, alors E est un pseudogroupe infinitésimal de Lie. Lorsque Γ est de type fini, si Γ est transitif (resp. intransitif), E est transitif (resp. intransitif); Γ et E sont de même degré et* $\dim \mathcal{J}^r(E) = \dim \mathcal{J}^r(\Gamma)$.

Soit Γ un pseudogroupe de Lie de type quelconque; on démontre comme dans le paragraphe 2, que pour tout s, $\mathcal{J}^s(\Gamma)$ est un groupoïde d'opérateurs sur $\mathcal{J}^{s-1}(\Gamma)$. Si Γ est transitif, la variété $\mathcal{J}_0^s(\Gamma)$, (où O est un point fixe de V_n), isomorphe à la variété des s-repères, est un espace fibré principal à groupe structural de Lie. Il en résulte que $\mathcal{J}^{s-1}(E)$ est un espace fibré ordinaire associé à $\mathcal{J}_0^s(\Gamma)$. Si Γ est de plus de type fini, de degré r, alors $\mathcal{J}^\lambda(E)$ est isomorphe à $\mathcal{J}^{r-1}(E)$ et $\mathcal{J}^\lambda(\Gamma)$ à $\mathcal{J}^r(\Gamma)$. Donc dans ce cas le faisceau $\mathcal{J}^\lambda(E)$

est *localement constant*. Par suite, si V_n est de plus simplement connexe, le faisceau est constant, d'après H. CARTAN [2] : $\mathcal{J}^\lambda(E)$ s'écrit $V_n \times \mathfrak{h}$, d'où :

THÉORÈME 5. — *Sur une variété V_n, simplement connexe, le p. i. E attaché à un pseudogroupe de Lie Γ transitif, de type fini, est déduit par localisation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{h}$.*

Nous dirons que V_n est complète relativement à Γ si toute t. i. globale $X \in \Gamma$ définit un groupe à un paramètre. Supposons de plus $\mathcal{J}^r(\Gamma)$ connexe : dans ce cas le pseudogroupe engendré par le p. i. E attaché à Γ coïncide avec Γ. On déduit alors du théorème 5 le théorème suivant démontré autrement par C. EHRESMANN [6] :

THÉORÈME 6. — *Un pseudogroupe de Lie Γ, transitif, de type fini, de degré r, tel que $\mathcal{J}^r(\Gamma)$ soit connexe, et opérant sur une variété complète pour Γ, est déduit par localisation d'un groupe de transformations de Lie.*

On appellera pseudogroupe de type fini, de degré r, tout pseudogroupe Γ (non nécessairement de Lie) *tel que le p. i. attaché E soit de type fini, de degré r, ce qui est conforme à la définition du paragraphe* 1, si Γ est de Lie, en raison du théorème 4. Par définition $\dim \Gamma = \dim E$ où $\dim E = \min_{x \in V_n} \dim \mathcal{J}^\lambda_x(E)$, ce qui est conforme à la définition usuelle dans le cas où Γ est un groupe de Lie et E son algèbre de Lie. (On suppose que tout $f \in \Gamma$ est différentiable).

Soit un pseudogroupe Γ, de type fini, et soit $\mathcal{G}$ le plus grand groupe de transformations contenu dans Γ. L'ensemble g de tous les champs de vecteurs sur V_n définissant un groupe à un paramètre, sous-groupe de $\mathcal{G}$, est l'ensemble de toutes les t. i. $X \in E$ définies globalement sur V_n et définissant un groupe à un paramètre. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ des t. i. $X \in E$ définies globalement (dont les germes en x forment une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{J}^\lambda_x(E)$) est de dimension finie $m \leq \dim E$. Or R. PALAIS a montré [14] que si $\mathfrak{h}$ est de dimension finie, g en est une sous-algèbre de Lie et qu'alors $\mathcal{G}$ est un groupe de Lie. D'où le théorème suivant généralisant un théorème dû à C. EHRESMANN [9].

THÉORÈME 7. — *Si un pseudogroupe Γ (non nécessairement de Lie) est de type fini, alors le groupe de toutes les transformations globales appartenant à Γ est un groupe de Lie $\mathcal{G}$ et* $\dim \mathcal{G} \leq \dim \Gamma$.

Si $\dim \mathcal{G} = \dim \Gamma$, Γ est déduit par localisation de $\mathcal{G}$.

Soit G un groupe de Lie, sous-groupe de $GL(n, R)$. Une G-structure sur une variété V_n est une structure fibrée subordonnée à $T(V_n, R^n, GL(n, \mathrm{R}), \mathrm{H})$. On peut donc étendre à toutes les G-structures la notion de champ de Killing et l'on démontre [11], [12] :

THÉORÈME 8. — *Étant donnée sur V_n une G-structure $\mathfrak{s}$, définie dans un voisinage $\mathfrak{U}$ par la forme $\omega = (\omega^1, \ldots, \omega^n)$ pour qu'une t. i. l. X, de source*

$U \subset \mathfrak{U}$ appartienne au p. i. E, ensemble des automorphismes infinitésimaux locaux de $\mathfrak{s}$, il faut et il suffit que les dérivées de Lie $\theta(X)\omega^j$ vérifient :

$$\theta(X)\omega^j = \Sigma u_k^j(x)\omega^k \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

où les u_k^j définissent en chaque point un élément de $L(G)$, algèbre de Lie de G.

COROLLAIRE — *Si la G-structure $\mathfrak{s}$ est intégrable, définie localement par $dx = (dx^1, \ldots, dx^n)$, pour que X (de composantes $X^1, \ldots, X^n$) appartienne à E, il faut et il suffit que la matrice $\dfrac{\partial X^j}{\partial x^k}$ définisse en chaque point un élément de $L(G)$.*

Ce corollaire s'applique notamment aux structures complexes, symplectiques, etc.

On démontre également le théorème suivant (démontré autrement par C. EHRESMANN [9]).

THÉORÈME 9. — *Soit $\mathfrak{s}$ une G-structure telle que le groupe G jouit de la propriété : le choix de la torsion détermine la connexion affine associée à toute G-structure. Alors le pseudogroupe Γ des automorphismes locaux de $\mathfrak{s}$ est de type fini, de degré ≤ 2, et par suite le plus grand groupe $\mathcal{G}$ contenu dans Γ est un groupe de Lie, de dimensions $\leq n + \dim G$.*

Pour que G vérifie les conditions du théorème 9, on démontre [12] qu'il est nécessaire mais non suffisant que $\dim G \leq n(n-1)/2$.

Le théorème 9 qui ne suppose pas la variété V_n compacte ni même complète comprend comme cas particuliers un certain nombre de théorèmes classiques : pour $G = O_n$, on a le théorème de Myers-Steenrod; il s'applique notamment aux structures presque hermitiennes, presque quaternioniennes, etc. Il permet de démontrer que le groupe des automorphismes d'un parallélisme absolu (KOBAYASHI) ou d'une connexien affine (NOMIZU) est un groupe de Lie.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BLANCHARD (André). — *Cours de Géométrie différentielle*, Montpellier, 1959 (multigraphié).

[2] CARTAN (Henri). — *Faisceaux sur un espace topologique*, I., *Séminaire Cartan*, t. 3, 1950-1951 : Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux, n° 14.

[3] CARTIER (Pierre). — *Hyperalgèbres des variétés de groupes*, *Séminaire Sophus Lie*, t. 2, 1955-1956 : Hyperalgèbres et groupes de Lie formels, n° 1.

[4] CHEVALLEY (Claude). — *Théorie des groupes de Lie*, t. 2, Paris, Hermann, 1951 (*Act. scient. et ind.*, 1152).

[5] EHRESMANN (Charles). — *Sur les espaces localement homogènes*, *Ens. math.*, *Genève*, 35, 1936, p. 320-333.

[6] EHRESMANN (Charles). — *Sur les pseudogroupes de transformalions de Lie*, *Proc. intern. Congress Math.* [1954, Amsterdam], vol. 1; Amsterdam, North-Holland publishing, 1957; p. 478-479.

[7] EHRESMANN (Charles). — *Les prolongements d'un espace fibré différentiabte*, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 240, 1955, p. 1755-1757.

[8] EHRESMANN (Charles). — *Sur les connexions d'ordre supérieur*, *Atti del quinto Congresso dell'Unione mat. Ital.* [1955. Pavia-Torino]. Roma Cremonese, 1956; p. 326-328.

[9] EHRESMANN (Charles). — *Sur les pseudogroupes de Lie de type fini*, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 246, 1958, p. 360-362; *Colloques intern. C. N. R. S.* [89, 1959, Lille] (non publié).

[10] LIBERMANN (Paulette). — *Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales*, *Annali di Mat.*, t. 36, 1954, p. 27-120 (Thèse Sc. math. Strasbourg, 1953); *Sur les pseudogroupes de Lie*, *Colloque de Topologie de Strasbourg*, 1954-1955, p. 1-20 (multigraphié).

[11] LIBERMANN (Paulette). — *Pseudogroupes infinitésimaux* ..., *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 246, 1958, p. 41-43, p. 531-534 et p. 1365-1368.

[12] LIBERMANN (Paulette). — *Pseudogroupes infinitésimaux*, Centro Intern. Mat. Estivo. [1958. Sestrière]. — Roma, Istituto di Matematica dell'Università, 1958.

[13] LICHNEROWICZ (André). — *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*. Paris, Dunod, 1955.

[14] PALAIS (Richard S.). — *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*. — *Providence*, *American mathematical Society*, 1957 (*Memoirs Amer. math. Soc.*, 22).

[15] WEIL (André). — *Théorie des points proches sur les variétés différentiables*, *Colloques intern. C. N. R. S.* [52, 1953, Strasbourg]; p. 111-117.

Mlle Paulette LIBERMANN,
Prof. Fac. Sc. Rennes,
2 place Pasteur.
Rennes (Ille-et-Vilaine).