BULLETIN DE LA S. M. F.

M.A. KERVAIRE

Sur le fibré normal à une variété plongée dans l'espace euclidien

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 397-401
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__397_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89. 1959. Lille].
Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 397 à 401.

SUR LE FIBRÉ NORMAL A UNE VARIÉTÉ PLONGÉE DANS L'ESPACE EUCLIDIEN;

PAR

MICHEL A. KERVAIRE.

Soit M^d une variété fermée, orientée, de classe C^2. Un plongement f : $M^d \to R^{d+n}$ de M^d dans l'espace euclidien R^{d+n} est une application de classe C^2, de rang maximum, injective. En associant à tout $x \in M^d$ le n-plan orienté N_x de R^{d+n}, passant par l'origine et orthogonal au plan tangent à M^d en $f(x)$, on définit sur M^d un fibré de fibre R^n et de groupe structural $SO(n)$. Le fibré en $(n-1)$-sphères associé ν^n est appelé *fibré normal* induit par le plongement f.

Le problème qui nous occupe est la dépendance du fibré normal en fonction du plongement f dans R^{d+n} d'une variété donnée M^d. Les quelques résultats connus sur cette question ont été groupés dans l'introduction d'un article à paraître de W. S. MASSEY [6].

D'après un théorème de H. WHITNEY ([10], théorem 6), deux immersions de M^d dans R^{d+n}, avec $n \geqq d+2$, sont régulièrement homotopes. Par suite, le fibré normal ν^n est indépendant du plongement pour $n \geqq d+2$. On étend facilement cette affirmation au cas $n = d+1$. En effet, si $f_1, f_2 : M^d \to R^{2d+1}$ sont des immersions, on a des applications induites f'_1, f'_2 : $M^d \to G_{2d+1,\,d+1}$ dans la grasmanienne des $(d+1)$-plans orientés, passant par l'origine, de R^{2d+1}. Ces applications deviennent homotopes par composition avec

$$i : G_{2d+1,\,d+1} \to G_{2d+2,\,d+2}$$

et l'homotopie peut être compressée dans $G_{2d+1,\,d+1}$ car les groupes d'homotopie relatifs $\pi_k(G_{2d+2,\,d+2}, G_{2d+1,\,d+1})$ sont nuls pour $k \leqq d$.

D'autre part, pour $n \leqq 2$, ν^n est trivial, donc également indépendant du plongement. On peut donc supposer $3 \leqq n \leqq d$. Dans ces conditions le complémentaire de $f(M^d)$ dans R^{d+n} est simplement connexe.

Il faut remarquer qu'on ne connaît aucun exemple de plongements d'une variété dans un espace euclidien induisant des fibrés normaux non équivalents.

On va étudier le fibré normal d'une π-variété M^d plongée dans R^{2d}.

DÉFINITION (J. H. C. WHITEHEAD). — On dira que M^d est une π-variété, si le fibré normal induit par un plongement $f : M^d \to R^{d+n}$ avec $n \geqq d+1$ est trivial.

On a le

THÉORÈME. — *Tout plongement dans R^{2d} d'une π-variété M^d de dimension d induit sur M^d un fibré normal trivial.*

En effet, soit $f : M^d \to R^{2d}$ un plongement arbitraire et ν^d le fibré normal induit. Si l'on regarde R^{2d} comme sous espace linéaire de R^{2d+1}, le plongement obtenu $F : M^d \to R^{2d+1}$ induit sur M^d un fibré normal ν^{d+1} trivial. Les composantes de la normale à R^{2d} dans R^{2d+1} relativement à un champ de $(d+1)$-repères orthogonal à M^d dans R^{2d+1} fournissent une application $N : M^d \to S^d$, et ν^d est trivial, si et seulement si l'on peut relever N en une application $\overline{N} : M^d \to SO(d+1)$.

[Relèvement dans la fibration $SO(d+1)/SO(d) = S^d$.] La seule obstruction α à ce relèvement est dans $H^d(M^d; \pi_{d-1}(SO(d)))$ qu'on identifie avec $\pi_{d-1}(SO(d))$, et l'image de α par l'homomorphisme $i_* : \pi_{d-1}(SO(d)) \to \pi_{d-1}(SO(d+1))$ induit par l'inclusion i de $SO(d)$ dans $SO(d+1)$ est nulle.

Il existe donc $\beta \in \pi_d(S^d)$, tel que $\alpha = \partial\beta$, où $\partial : \pi_d(S^d) \to \pi_{d-1}(SO(d))$ est l'homomorphisme bord de la suite exacte d'homotopie de $SO(d+1)/SO(d)$.

D'après l'interprétation de l'homomorphisme

$$J : \pi_{d-1}(SO(d)) \to \pi_{2d-1}(S^d)$$

de Hopf-Whitehead donnée dans [4], § 1.8, on a $J\alpha = 0$. G. W. WHITEHEAD a démontré que l'homomorphisme $P : \pi_d(S^n) \to \pi_{d+n-1}(S^n)$ défini par $P\gamma = [\gamma, i_n]$ satisfait $P = J\partial$ (*cf.* [9]). On a donc $P\beta = 0$.

Il suit des résultats connus sur l'invariant de Hopf (y compris le résultat de J. F. ADAMS [1]), que les sous-groupes Ker∂ et Ker$P$ de $\pi_d(S^d)$ sont égaux. Il s'ensuit $\alpha = 0$. Autrement dit, le fibré ν^d est trivial.

D'après M. HIRSCH, deux plongements dans R^{2d} d'une variété M^d induisent des fibrés normaux équivalents.

Pour étendre le théorème ci-dessus concernant les π-variétés au cas des plongements d'une π-variété M^d dans R^{d+n} avec $n < d$, il se présente essentiellement deux difficultés :

(1) On a des obstructions dans $H^n(M^d; \pi_{n-1}(SO(n)))$, puis si celle-ci est nulle, dans $H^{n+1}(M^d; \pi_n(SO(n)))$, etc., dont on ne sait pas si elles prennent leurs valeurs dans le noyau de J.

Si l'on se restreint à des plongements dans R^{d+n} de π-variétés acycliques jusqu'en dimension $(d-n)$, ce qui supprime la difficulté (1), il reste :

(2) On ne sait pas pour quelles dimensions $n < d$, on a

$$\operatorname{Ker}\partial = \operatorname{Ker}P \text{ dans } \pi_d(S^n).$$

Pour $d=7$, $n=4$, on a

$$\pi_7(S^4) \cong Z + Z_{12}$$

et

$$\pi_6(SO(4)) \cong Z_{12} + Z_{12}, \qquad \pi_6(SO(5)) = 0.$$

Donc

$$\partial : \quad \pi_7(S^4) \to \pi_6(SO(4)) \quad \text{est surjectif.}$$

Or,

$$J : \quad \pi_6(SO(4)) \to \pi_{10}(S^4) \quad \text{ne peut pas être injectif}$$

car

$$\pi_{10}(S^4) \cong Z_3 + Z_{24}.$$

Donc, pour ces dimensions $\operatorname{Ker}\partial \neq \operatorname{Ker}P$. Il semble raisonnable d'exprimer la conjecture : pour $d < 2n-1$, les noyaux de

$$\partial : \quad \pi_d(S^n) \to \pi_{d-1}(SO(n))$$
$$P : \pi_d(S^n) \to \pi_{d+n-1}(S^n) \quad \text{seraient égaux.}$$

(On a évidemment toujours $\operatorname{Ker}\partial \subset \operatorname{Ker}P$.) Les calculs de H. Toda [8], révisés (comme me l'a fait remarquer W. S. Massey) par T. Yamanoshita [11], montrent que cette conjecture est vraie en petites dimensions.

W. S. Massey a eu l'idée de s'intéresser au type d'homotopie fibré du fibré normal induit par un plongement.

D'après R. Thom [7], deux fibrés $p_1 : E_1 \to X$ et $p_2 : E_2 \to X$ ont le même type d'homothopie fibré, s'il existe des équivalences d'homotopie $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to E_1$ préservant les fibres, telles que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes aux identités par des homotopies h_1, h_2 satisfaisant $p_i h_i(z_i, t) = p_i(z_i)$ pour tout t $(i = 1, 2)$.

Si $p : E \to X$ a le type d'homothopie fibré du produit

$$\pi_2 : \quad Y \times X \to X \qquad [\pi_2(y, x) = x],$$

on a une application

$$\pi_1 \circ p : \quad E \to Y,$$

où $\pi_1 : Y \times X \to Y$ est donnée par $\pi_1(y, x) = y$ dont la restriction à chaque fibre est une homotopie éqnivalence.

Inversement, l'existence d'une application $f : E \to Y$, dont la restriction aux fibres est une équivalence d'homotopie implique la trivialité du type d'homotopie fibré de $p : E \to X$ (*cf.* A. Dold [2]).

Lemme. — *Si un fibré $p : E \to X$, de fibre Y, a le type d'homotopie fibré du produit $\pi_2 : Y \times X \to X$, il admet une section.*

En effet, il existe alors une application $g : Y \times X \to E$ qui préserve les fibres, c'est-à-dire telle que $pf(y, x) = x$. On obtient une section $s : X \to E$, en posant $s(x) = g(y_0, x)$.

Théorème de W. S. Massey. — *Tout plongement $f : M^d \to R^{d+n}$ d'une sphère d'homologie M^d dans un espace euclidien induit sur M^d un fibré normal dont le type d'homotopie fibré est trivial.*

Remarque. — On sait, d'après [4], theorem 8.2, que, pour $M^d = S^d$ et $d < 2n - 1$, le fibré normal induit est trivial (le théorème de W. S. Massey est valable sans restrictions de dimensions).

D'après le lemme ci-dessus, on a le

Corollaire. — *Le fibré normal en $(n-1)$-sphères induit sur S^d par un plongement $f : S^d \to R^{d+n}$ admet toujours une section.*

D'après [5], théorème 6.1, on a le

Corollaire. — *Tout plongement $f : S^d \to R^{d+n}$ peut être compressé en une immersion $g : S^d \to R^{d+n-1}$.*

(C'est-à-dire : il existe une immersion $g : S^d \to R^{d+n-1}$ telle que $i \circ g$ avec $i : R^{d+n-1} \to R^{d+n}$ évident, soit régulièrement homotope à f.)

Démonstration du théorème de W. S. Massey. — Soient T un voisinage tubulaire de $f(S^d)$ dans R^{d+n} et A la fermeture du complément de T dans le compactifié S^{d+n} de R^{d+n}. L'intersection $A \cap T = E$ est fibrée en $(n-1)$-sphères sur S^d. Cette fibration est isomorphe au fibré en sphères ν^n. Pour $n \geq 3$, A est simplement connexe et l'injection $j : S^{n-1} \to A$ d'une fibre de E induit un isomorphisme des groupes d'homologie (dualité d'Alexander). D'après J. H. C. Whitehead, j est une équivalence d'homotopie (A est triangulable). Soient k une inverse d'homotopie de j, et $k_0 : E \to S^{n-1}$ sa restriction à $E = A \cap T$. La restriction de k_0 aux fibres de E est une équivalence d'homotopie.

Problème. — Soit $F : M^d \to R^{d+n}$ un plongement d'une variété fermée arbitraire dans R^{d+n}. Supposons que le fibré normal induit ν^n soit presque trivial, (il existe un champ de n-repères normaux sur $M - x_0$), ν^n a-t-il alors toujours un type d'homotopie fibré trivial?

Pour $d \leq 2n - 4$, la réponse est affirmative. L'obstruction pour l'extension sur M^d du champ de n-repères normaux (existant sur $M - x_0$) est dans le noyau de l'homomorphisme de Hopf-Whitehead $J : \pi_{d-1}(SO(n)) \to \pi_{d+n-1}(S^n)$. Pour $d \leq 2n - 4$, d'après I. James [3], corollary (2.2), cette obstruction se trouve dans le noyau de $j_*: \pi_{d-1}(SO(n)) \to \pi_{d-1}(G_{n-1})$, induit par l'inclusion $j: SO(n) \to G_{n-1}$, où G_{n-1} est l'espace des applications $S^{n-1} \to S^{n-1}$ de dégré 1, muni de la topologie de la convergence compacte. Comme ν^n, presque trivial, est induit d'un fibré $SO(n)$ sur S^d, et comme l'opération de prendre un fibré induit préserve la trivialité du type d'homotopie fibré, on peut appliquer le Satz 4 de A. DOLD [2] pour conclure que ν^n est de type d'homotopie fibré trivial.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ADAMS (J. F.). — *On the nonexistence of elements of Hopf invariant one* (*Bull. Amer. math. Soc.*, t. 64, 1958, *p.* 279-282).

[2] DOLD (A.). — *Über fasernweise Homotopieaquivalenz von Faserraumen* (*Math. Z.*, t. 62, 1955, p. 111-136).

[3] JAMES (I.). — *On the iterated suspension* (*Quart. J. Math.*, t. 5, 1954, p. 1-10).

[4] KERVAIRE (M. A.). — *An interpretation of G. Whitehead's generalization of H. Hopf's invariant* (*Ann. Math.*, t. 69, 1959, p. 345-365).

[5] KERVAIRE (M. A.). — *Sur le fibré normal à une sphère immergée dans un espace euclidien* (*Comment. Math. Helv.*, t. 33, 1959, p. 121-131).

[6] MASSEY (W. S.). — *On the normal bundle of a sphere imbedded in Euclidean space* (à paraître).

[7] THOM (R.). — *Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod* (*Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* t. 69, 1952, p. 109-182).

[8] TODA (H.). *Sur les groupes d'homotopie des sphères* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 42-44).

[9] WHITEHEAD (G. W.). — *On products in homotopy groups* (*Ann. Math.*, t. 47, 1946, p. 460-475).

[10] WHITNEY (H.). — *Differentiable manifolds* (*Ann. Math.*, t. 37, 1936, p. 645-680).

[11] YAMANOSHITA (T.). — *On the homotopy of spheres* (*Japan. J. Math.*, t. 27, 1957, p. 1-53).

Michel A. KERVAIRE,
Institute of mathematical Sciences,
25, Waverly Place,
New-York 3, N. Y. (Etats-Unis).