

BULLETIN DE LA S. M. F.

GUY HIRSCH

Sur la définition d'opérations cohomologiques d'ordre supérieur au moyen d'une suite spectrale

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 361-382

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__361_0

© Bulletin de la S. M. F., 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA DÉFINITION D'OPÉRATIONS COHOMOLOGIQUES D'ORDRE SUPÉRIEUR AU MOYEN D'UNE SUITE SPECTRALE;

PAR

GUY HIRSCH

(Bruxelles).

On donne une construction d'opérations homologiques du second ordre, associées à une relation (homogène du second degré) entre opérations homologiques du premier ordre ⁽¹⁾. Cette construction fait intervenir les cochaînes de l'espace considéré et nécessite dans chaque cas la vérification de certaines hypothèses. Comme elle fait apparaître les opérations d'ordre supérieur comme les opérateurs différentiels successifs de la suite spectrale d'un opérateur différentiel défini dans un certain module filtré, on pourra se passer de la vérification (et de l'introduction explicite des cochaînes), lorsqu'il sera possible d'interpréter la suite spectrale comme celle qui fournit la cohomologie d'un espace fibré convenable; cette interprétation sera effectivement donnée dans certains cas. Il sera indiqué comment une suite de triangles exacts peut être associée à un espace fibré, et comment un procédé par récurrence permet de passer d'un triangle au suivant. Lorsque la fibre est un espace d'Eilenberg-MacLane, les opérateurs différentiels successifs (nécessaires pour le calcul explicite de la cohomologie de l'espace fibré) sont exactement des opérations d'ordre supérieur telles qu'elles sont décrites ici.

Introduction.

Les opérations cohomologiques d'ordre 2 peuvent être associées à des relations entre opérations cohomologiques du premier ordre. Dans la première partie de cet article (paragraphes A et B) je donnerai la description d'une

⁽¹⁾ Une partie des résultats exposés ici ont été obtenus pendant que l'auteur bénéficiait d'un subside de la *National Science Foundation* des États-Unis.

méthode de construction d'opérations d'ordre 2, lorsque les opérations du premier ordre proviennent d'opérations définies sur les cochaines des espaces considérés, et vérifient certaines conditions. Il résultera de cette description que l'opération d'ordre 2 peut être considérée comme l'opérateur différentiel d_3 de la suite spectrale associée à un certain opérateur différentiel Δ défini dans un module convenablement construit (et dépendant de la relation existant entre les opérations du premier ordre). Cette construction sera donnée explicitement dans le cas d'un certain nombre d'opérations classiques d'ordre 2, (cup-produit fonctionnel, opération d'Adem, triple produit de Massey).

Dans la quatrième partie, je montrerai comment cette méthode s'étend sans peine au cas d'opérations d'ordre supérieur à 2.

Cette construction, telle qu'elle est exposée dans la première partie, repose sur la considération des cochaines de l'espace, et exige, dans chaque cas, la vérification de certaine hypothèse. Cette situation, que l'on peut considérer comme peu satisfaisante, est évitée par une méthode décrite dans la troisième partie, et où l'opérateur différentiel Δ est interprété comme l'opérateur cobord dans un espace fibré ayant pour base l'espace donné (et une fibre dépendant des opérations cohomologiques du premier ordre). L'existence de l'opération du second ordre (ici, le triple produit de Massey) résultera de la possibilité de construire un espace fibré convenable, et l'opération d'ordre 2 sera identifiée, par définition, à l'opérateur différentiel d_3 de la suite spectrale qui donne (pour une filtration appropriée de la cohomologie de la fibre) la cohomologie de l'espace fibré.

Cette description de la cohomologie d'un espace fibré fait l'objet de la troisième partie du présent article. Elle résulte de la possibilité de définir un opérateur différentiel dans le produit tensoriel du module des cochaines de la base par le module de cohomologie de la fibre. L'homologie de ce produit tensoriel (pour cet opérateur différentiel) est isomorphe au module de cohomologie de l'espace fibré. On construira une filtration de ce produit tensoriel (au moyen d'une filtration du module de cohomologie de la fibre), et l'on construira une suite croissante de sous-complexes $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_i \subset \dots$ de l'espace fibré; le module de cohomologie de chacun de ces sous-complexes V_i est isomorphe au module de cohomologie de l'espace fibré jusqu'à une certaine dimension, qui est une fonction strictement croissante de l'indice i .

A chacun des sous-complexes V_i est associé un triangle exact, analogue à la « suite exacte de Gysin » (qui coïncide avec le triangle exact du complexe V_i). Une relation simple permet de passer du triangle exact du complexe V_i à celui du complexe V_{i+1} .

Les filtrations décrites ci-dessus et les sous-complexes V_i n'ont en général pas de caractère intrinsèque; il est cependant possible, dans certains cas, de choisir une filtration canonique d'où résultera une suite canonique de sous-complexes V_i . Un premier exemple est celui de la filtration résultant de la graduation (au sens usuel) du module de cohomologie de la fibre; le

complexe V_i a même cohomologie que l'espace fibré jusqu'à la dimension i inclusivement. Un autre exemple, qui sera décrit plus loin (n° 2.4), est celui où la fibre est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\pi, n)$; dans ce cas, le complexe V_i a même cohomologie que l'espace fibré jusqu'à la dimension $(i+1)n-1$ inclusivement. De plus, comme nous le verrons, les opérateurs différentiels successifs de la suite spectrale coïncident exactement avec des opérations d'ordre i telles que nous les définissons ici. Il en résulte, notamment, que la connaissance des opérations de cette espèce dans l'espace de base d'un fibré dont la fibre est un espace d'Eilenberg-MacLane, permet de calculer effectivement le module de cohomologie de l'espace fibré (ou, plus exactement, le module gradué associé à une filtration de la cohomologie de l'espace fibré).

Comme il s'agit seulement ici de l'esquisse d'une théorie dont certaines parties n'ont pas atteint leur forme définitive, je me bornerai, dans cet exposé, à la considération d'opérations additives et d'opérations conservant le même domaine de coefficients; dans tout ce qui va suivre, les coefficients appartiendront à un corps L , supposé commutatif. Ces restrictions, qui ne sont pas essentielles pour une grande partie des résultats, sont introduites ici afin de simplifier l'exposé et les notations.

Nous conviendrons aussi d'attribuer à tous les éléments considérés (cochaînes, opérations, etc.) une *parité* (ou plus généralement, on considérera ces éléments comme sommes directes d'éléments de parité homogène, et les opérations de produits seront supposées distributives par rapport à cette somme directe); cette parité n'est autre, en général, que la parité de la dimension.

1. Construction d'opérations d'ordre 2.

A. CONSTRUCTIONS GÉNÉRALES.

1.1. Préliminaires. — Soient $C = C^*(X)$ et $H = H^*(X)$ les L -algèbres de cochaînes et de cohomologie d'un espace X .

Soit $\bar{T}$ une L -algèbre d'opérateurs $\bar{\tau}_v$ dans C , supposés compatibles avec l'opérateur cobord δ . On en déduit une L -algèbre T d'opérateurs τ_v , opérant dans H . (Par exemple, les τ_v pourront être des puissances de Steenrod, ou des cup-produits (à droite) par des classes de cohomologie données, etc.).

Nous montrerons que l'existence de relations dans l'algèbre T permet de construire un L -module gradué $G = \sum G_i$ et de munir le L -module $\bar{T} \otimes G$ d'un opérateur différentiel Δ . Le L -module $\bar{T} \otimes G$ étant filtré (par la graduation définie dans G), sa Δ -homologie peut être décrite par une suite spectrale; les opérateurs différentiels successifs d_i de cette suite spectrale; donneront, par définition, la description des opérations homologiques d'ordre $i-1$.

1.2. Les opérateurs f_1 et d_2 . — Donnons-nous un L -module gradué $G = \sum G_i$ et une application linéaire $\theta : G \rightarrow \overline{T} \otimes G$, abaissant de 1 le degré dans G . (Nous supposerons toujours $G_i = 0$ pour $i < 0$; si l'on se borne à la construction d'opérations d'ordre 2, on pourra aussi supposer $G_i = 0$ pour $i > 2$). θ définit une application linéaire f_1 du L -module $C \otimes G$ en lui-même, abaissant de 1 le degré en G ; en effet, posons pour $g_i \in G_i$, $\theta(g_i) = \sum_v \bar{\tau}_v \otimes g'_{i-1}$, avec $g'_{i-1} \in G_{i-1}$ et $\bar{\tau}_v \in \overline{T}$, opérant sur C . Alors, pour $c \in C$, on posera, en désignant par γ la parité de c ,

$$f_1(c \otimes g_i) = (-1)^\gamma \sum_v \bar{\tau}_v c \otimes g'_{i-1}.$$

(Remarquons en passant qu'on pourrait généraliser un peu la définition de θ en se bornant à supposer que θ abaisse le degré; dans ce cas, au lieu de f_1 , abaissant de 1 le degré en G , on aura des applications f_k , abaissant de k le degré en G . Bien que cette généralisation présente un intérêt pour certaines applications, elle sera négligée dans ce qui va suivre.) Pour simplifier les notations, nous désignerons encore par δ l'opérateur $\delta \otimes 1$, opérant dans $C \otimes G$. Puisque les $\bar{\tau}_v$ permutent avec le cobord, et puisque c et δc sont de parité différente, on a

$$\delta f_1 + f_1 \delta = 0.$$

Puisque les $\bar{\tau}_v$ sont compatibles avec δ , θ induit, par passage au quotient et restriction aux cocycles de C , une application $\theta^* : G \rightarrow T \otimes G$, et f_1 induit, par passage au quotient, un endomorphisme d_2 du L -module $H \otimes G$, abaissant de 1 le degré en G .

1.3. L'opérateur f_2 . — Supposons maintenant qu'il existe une application f_2 de $C \otimes G$ en lui-même telle que

$$f_1 f_1 + \delta f_2 + f_2 \delta = 0 \quad (2).$$

Cette relation implique (par passage au quotient et restriction aux cocycles de C) que d_2 est de carré nul. On pourra donc considérer d_2 comme un opérateur différentiel dans le L -module $H \otimes G$. Pour appliquer cette méthode à la construction d'opérations d'ordre supérieur, il conviendra de vérifier que l'application f_2 est effectivement définie lorsque des τ_v seront donnés.

(2) Remarquons que, si l'on désire se borner à la construction d'opérations du second ordre (ce qui permettra de supposer $G_i = 0$ pour $i \geq 3$, comme nous le verrons plus loin), il suffira de supposer la validité de cette relation lorsqu'on l'applique à des éléments de $Z \otimes G$ (et pas nécessairement de tout $C \otimes G$); il suffirait donc de vérifier l'existence d'une application f_2 de $Z \otimes G$ en lui-même satisfaisant à la relation ci-dessus.

1.4. L'opérateur d'_3 . — Désignons par E^3 le L -module d'homologie de $E^2 = H \otimes G$ pour l'opérateur différentiel d_2 . E^3 est gradué (par le degré de G) ⁽³⁾.

Chaque élément x (de degré homogène i) de E^3 est, par définition, la classe modulo $d_2(E^2)$ d'un élément $h = \sum h_\nu \otimes g_i^\nu$ de $H \otimes G_i$ qui appartient, par hypothèse, au noyau de d_2 . Désignons par $\bar{h}_\nu$ des cocycles appartenant respectivement aux classes de cohomologie h_ν , et posons $\bar{h} = \sum \bar{h}_\nu \otimes g_i^\nu$. Puisque h appartient au noyau de d_2 , il existe des éléments $a_1 \in C \otimes G_{i-1}$ tels que $f_1 \bar{h} = \delta a_1$.

Lorsque les représentants $\bar{h}$ sont choisis, a_1 est déterminé à $Z \otimes G_{i-1}$ près, où Z désigne le module des cocycles de l'espace X . (Bien entendu, on se bornera en général à considérer des x de dimension homogène, et dans $Z \otimes G_{i-1}$ on ne considérera que des éléments de Z de dimension convenable.)

Nous poserons alors

$$d'_3 \bar{h} = f_2 \bar{h} - f_1 a_1.$$

Un calcul immédiat montre que $\delta d'_3 \bar{h} = -f_3 \delta \bar{h} = 0$ puisque $\delta \bar{h} = 0$. $d'_3 \bar{h}$ définit donc un élément de $H \otimes G$; comme a_1 est connu à $Z \otimes G_{i-1}$ près, $d'_3 \bar{h}$ est connu à $f_1(Z \otimes G_{i-1})$ et sa classe (modulo $\delta C \otimes G_{i-1}$) est déterminée à $d_2(H \otimes G_{i-1})$ près.

En choisissant au lieu des $\bar{h}_\nu$ d'autres représentants de h_ν , on remplacerait $f_1 \bar{h}$ par $f_1(\bar{h} + \delta c)$, avec $c \in C \otimes G_i$, et a_1 serait remplacé par $a_1 - f_1 c$ (en vertu de la relation $f_1 \delta + \delta f_1 = 0$). On trouverait donc pour

$$d'_3(\bar{h} + \delta c) = f_2(\bar{h} + \delta c) - f_1 a_1 + f_1 f_1 c$$

la valeur

$$f_2 \bar{h} - f_1 a_1 + \delta f_2 c$$

(en vertu du paragraphe 1.3), qui diffère de $d'_3 \bar{h}$ par un élément de $\delta C \otimes G_{i-1}$.

1.5. L'opérateur f_3 . — Nous supposons dans ce qui va suivre qu'il existe une application f_3 de $C \otimes G$ en lui-même telle que

$$f_1 f_2 + f_2 f_1 + \delta f_3 + f_3 \delta = 0.$$

⁽³⁾ Il eût été préférable, pour la description de ces opérations, d'appeler d_1 cet opérateur différentiel, qui abaisse de 1 le degré (en G), et qui correspond à une opération cohomologique d'ordre 1. Cependant, pour éviter des confusions avec la notation classique de la suite spectrale d'un espace fibré, j'écrirai ici aussi E^2 (et pas E^1) pour le module $H \otimes G$ (G jouant le rôle de la cohomologie de la fibre). Nous poserons ici $E^1 = C \otimes G$, et pour $c \in C$ et $g \in G$,

$$d_1(c \otimes g) = \delta c \otimes g.$$

E^2 est alors le module d'homologie de E^1 pour l'opérateur d_1 .

Remarquons directement que, lorsqu'on se borne à un module G de degré 2 (ce qui permet la construction d'opérations d'ordre 2), la définition de f_3 est triviale, puisque f_1 et f_2 abaissent respectivement le degré (en G) de 1 et de 2; on aura donc alors trivialement

$$f_1 f_2 = f_2 f_1 = 0.$$

D'une manière générale, s'il existe une application f_3 vérifiant la relation ci-dessus, on pourra (dans la construction du n° 1.4) remplacer le représentant $h \in E^2$ de l'élément $x \in E^3$ par un autre représentant $h + d_2 y$, avec $y \in E^2 = H \otimes G$. Par définition, $d'_3 \bar{h}$ sera alors remplacé par

$$f_2 \bar{h} - f_1 a_1 + f_2 f_1 \bar{y} - f_1 b_1,$$

où $\bar{y}$ désigne un représentant (dans $C \otimes G$) de y (ce qui entraîne que $f_1 \bar{y}$ est un représentant de $d_2 y$) et où b_1 est défini par $\partial b_1 = f_1 f_1 \bar{y}$.

Mais en vertu de la définition (paragraphe 1.3) de f_2 , et parce que $\bar{y} \in Z \otimes G$, $f_1 f_1 \bar{y} = -\partial f_2 \bar{y}$, et l'on peut donc prendre $b_1 = -f_2 \bar{y}$. La différence entre la nouvelle valeur $d'_3(\bar{h} + f_1 \bar{y})$ et $d'_3 \bar{h}$ est donc $f_2 f_1 \bar{y} + f_1 f_2 \bar{y}$, c'est-à-dire $\partial f_3 \bar{y}$.

Il en résulte donc que la classe modulo $d_2(E_2)$ de $d'_3 \bar{h}$ ne dépend que de l'élément x de E^3 , et est indépendante des choix qui ont été faits (pour $h \in E^2$, pour $\bar{h}$ et pour a_1).

D'autre part, cette classe appartient au noyau de d_2 , ce qui signifie que

$$f_1 d'_3 \bar{h} \in \partial C \otimes G.$$

En effet :

$$\begin{aligned} f_1 d'_3 \bar{h} &= f_1 f_2 \bar{h} - f_1 f_1 a_1 = f_1 f_2 \bar{h} + f_2 \partial a_1 + \partial f_2 a_1 \\ &= f_1 f_2 \bar{h} + f_2 f_1 \bar{h} + \partial f_2 a_1 \quad (\text{d'après la définition de } a_1), \\ &= -\partial f_3 \bar{h} + \partial f_2 a_1 \quad (\text{d'après la définition de } f_3, \text{ ci-dessus}). \end{aligned}$$

1.6. L'opérateur différentiel d_3 . — La classe (modulo $d_2(E_2)$) de $d'_3 \bar{h}$ définit donc un élément de E^3 , ne dépendant que de x , et qui sera désigné par $d_3 x$.

Pour établir que d_3 est de carré nul (ce qui permettra de le considérer comme un opérateur différentiel dans E^3), il faudra supposer qu'il existe une application f_4 de $C \otimes G$ en lui-même, telle que

$$f_1 f_3 + f_2 f_2 + f_3 f_1 + \partial f_4 + f_4 \partial = 0.$$

Alors, en appliquant d'_3 à $d'_3 \bar{h}$ (ce qui a un sens, puisque nous avons

vu (n° 1.5) que $f_1 d'_3 \bar{h} = \partial(f_2 a_1 - f_3 \bar{h}) \in \partial C \otimes G$, on trouve

$$\begin{aligned} d'_3 d'_3 \bar{h} &= f_2 f_2 \bar{h} - f_2 f_1 a_1 + f_1 f_3 \bar{h} - f_1 f_2 a_1 \\ &= f_2 f_2 \bar{h} + f_1 f_3 \bar{h} + f_3 \partial a_1 + \partial f_3 a_1 \\ &= f_2 f_2 \bar{h} + f_1 f_3 \bar{h} + f_3 f_1 \bar{h} + \partial f_3 a_1 \\ &= -\partial f_4 \bar{h} + \partial f_3 a_1 \in \partial C \otimes G. \end{aligned}$$

Comme nous l'avons déjà fait remarquer plus haut, si $G = G_0 + G_1 + G_2$, les hypothèses concernant f_3 et f_4 sont évidemment inutiles et d_3 pourra alors toujours s'interpréter comme un opérateur différentiel dans E_3 ; d_3 abaisse de 2 le degré (en G).

Nous reviendrons plus loin (§ 4) sur la construction d'opérateurs différentiels d_i pour $i > 3$, ce qui fournira une description d'opérations cohomologiques d'ordre supérieur, mais nous examinerons d'abord le cas des opérations de deuxième ordre, qui correspondent à l'opérateur d_3 , qui est défini ci-dessus.

B. OPÉRATIONS COHOMOLOGIQUES DU SECOND ORDRE.

1.7. Opérations correspondant à une relation. — Supposons donnée une relation (homogène du second degré) dans l'algèbre T des τ_v , considérés dans le n° 1.1.

Nous nous bornerons ici au cas des relations qui sont valables dans un espace X quelconque. Ces relations pourront être par exemple :

$$Sq^2 Sq^2 + Sq^3 Sq^1 = 0$$

conduisant à une opération qui a été étudiée par J. ADEM ⁽⁴⁾ lorsque les τ_v sont des Sq , ou encore, en prenant pour opérateurs des cup-produits par deux classes quelconques de cohomologie, la relation

$$(\cup x) \cup y - (-1)^{pq} (\cup y) \cup x = 0$$

équivalent à $xy - (-1)^{pq} yx = 0$, x et y étant des classes de cohomologie de dimensions respectives p et q . Cette dernière relation sera étudiée avec plus de détails plus loin (n° 1.8), où nous verrons qu'elle définit le « triple produit » de Massey ⁽⁵⁾. Écrivons

$$\sum_v \tau_{f_v} \tau_{s_v} = 0$$

⁽⁴⁾ ADEM (J.), *The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology* (Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 38, 1952, p. 720-726).

⁽⁵⁾ UEHARA (H.) and MASSEY (W. S.), *The Jacobi identity for Whitehead products* (Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz), Princeton, Princeton University Press, 1957, p. 361-377.

pour la relation donnée; supposons que cette relation résulte (par passage au quotient) d'une relation entre les $\bar{\tau}$ correspondants

$$\sum_v \bar{\tau}_{r_v} \bar{\tau}_{s_v} = \delta f'_2 + f'_2 \delta$$

où f'_2 désigne un endomorphisme du L -module C ⁽⁶⁾.

Nous construirons maintenant un L -module $G = G_0 + G_1 + G_2$ conduisant à un opérateur d_3 qui sera interprété comme l'opération du second ordre cherchée. Conservant les notations des numéros précédents, nous prenons des générateurs $g_0; g_1^1, g_1^2, \dots, g_1^r, \dots; g_2$ et nous posons

$$\begin{aligned} G_0 &= L \otimes g_0, \\ G_1 &= L \otimes g_1^1 + L \otimes g_1^2 + \dots + L \otimes g_1^r + \dots, \\ G_2 &= L \otimes g_2, \end{aligned}$$

et nous définissons $\theta : G \rightarrow \bar{T} \otimes G$ par

$$\begin{aligned} \theta(g_0) &= 0, \\ \theta(g_1^r) &= \bar{\tau}_{s_v} \otimes g_0, \\ \theta(g_2) &= \sum_v \bar{\tau}_{r_v} \otimes g_1^r. \end{aligned}$$

(G_0 sera aussi identifié au corps L des coefficients).

Si $h \in H$ appartient au noyau des opérations cohomologiques de premier ordre τ_r , l'élément $h \otimes g_2$ appartient au noyau de d_2 . Comme il n'y a pas d'éléments de degré plus grand que 2, on peut identifier $h \otimes g_2$ à un élément x de E^3 , et considérer $d_3 x$, élément de E^3 , de degré 0. Cet élément de E^3 est un élément de $E^2 = H \otimes G_0$ (qu'on identifie à H), pris modulo $d_2(E^2)$, c'est-à-dire (ici) modulo une somme $\sum_v \tau_{s_v}(H)$.

Je donnerai ici quelques détails sur l'application de cette méthode à la construction d'opérations cohomologiques du second ordre déjà connues.

1.8. Le triple produit de Massey. — Soient x et y deux classes de cohomologie de dimensions respectives p et q de l'espace X ; désignons par $\bar{x}$ et $\bar{y}$ des cocycles appartenant respectivement aux classes x et y . Les opérations τ_v et $\bar{\tau}_v$ sont respectivement le cup-produit par x et y , ou par $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

(⁶) Ainsi qu'il a été remarqué plus haut pour f_2 , si l'on se borne aux opérations du second ordre, il suffit même de supposer que les éléments $\bar{\tau}$ de $\bar{T}$, ainsi que f'_2 , opèrent sur Z (et pas nécessairement sur tout C).

A la relation

$$xy - (-1)^{pq} yx = 0 \quad (\text{dans l'algèbre } T),$$

correspond la relation

$$\overline{xy} - (-1)^{pq} \overline{yx} = (-1)^{p+q+1} \delta(\overline{x} \cup_1 \overline{y}) \quad (\text{dans l'algèbre } \overline{T}),$$

qui signifie qu'on pourra prendre pour opération f'_2 (telle qu'elle est définie dans le n° 1.7) le cup-produit par $(-1)^{p+q+1}(\overline{x} \cup_1 \overline{y})$.

Alors on posera comme ci-dessus (en sous-entendant le signe du cup-produit)

$$\begin{aligned} \theta(g_2) &= (-1)^p \overline{y} \otimes g_1 - (-1)^q \overline{x} \otimes g'_1, \\ \theta(g_1) &= (-1)^{pq} \overline{x} \otimes g_0, \\ \theta(g'_1) &= \overline{y} \otimes g_0, \\ \theta(g_0) &= 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que pour $c \in C$ et de dimension γ ,

$$\begin{aligned} f_1 f_1(c \otimes g_2) &= (-1)^{p+q+pq} c \overline{yx} - (-1)^{p+q} c \overline{xy} \\ &= (-1)^{p+q+1} c(\overline{xy} - (-1)^{pq} \overline{yx}) \\ &= c \delta(\overline{x} \cup_1 \overline{y}) \\ &= (-1)^\gamma [\delta(c(\overline{x} \cup_1 \overline{y})) - \delta c(\overline{x} \cup_1 \overline{y})], \end{aligned}$$

ce qui signifie qu'on prendra pour f_2 opérant sur $c \otimes g_2$ et de parité γ le produit, multiplié par $(-1)^{\gamma+1}$, par $(\overline{x} \cup_1 \overline{y})$.

Si $h \in H$ de degré n annule x et y , c'est-à-dire s'il existe a et $b \in C$ tels que

$$\overline{h} \overline{x} = \delta a, \quad \overline{h} \overline{y} = \delta b,$$

on aura

$$\begin{aligned} f_1(\overline{h} \otimes g_2) &= (-1)^n ((-1)^p h y \otimes g_1 - (-1)^q h x \otimes g'_1) \\ &= (-1)^n \delta((-1)^p b \otimes g_1 - (-1)^q a \otimes g'_1), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$d'_3(\overline{h} \otimes g_2) = (-1)^{n+1} \overline{h}(\overline{x} \cup_1 \overline{y}) + (-1)^{p+q+pq} b \overline{x} + (-1)^{p+q-1} a \overline{y}.$$

En calculant le premier terme de cette expression au moyen d'une formule que j'ai donnée antérieurement ⁽⁷⁾, on retrouve (au signe près) une expression habituelle du triple produit de Massey ⁽⁵⁾.

En effet,

$$\overline{h}(\overline{x} \cup_1 \overline{y}) = \overline{h} \overline{x} \cup_1 \overline{y} + (-1)^{q+pq} (\overline{h} \cup_1 \overline{y}) \overline{x};$$

d'où

$$\begin{aligned} d'_3 \overline{h} &= (-1)^{n+1} \delta a \cup_1 \overline{y} + (-1)^{n+q+pq} (\overline{h} \cup_1 \overline{y}) \overline{x} \\ &\quad + (-1)^{p+q+pq} b \overline{x} + (-1)^{p+q+1} a \overline{y}. \end{aligned}$$

⁽⁷⁾ HIRSCH (Guy), *Quelques propriétés des produits de Steenrod* (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 241, 1955, p. 923-925).

Posons

$$\bar{y} \bar{h} = \delta b'.$$

On a alors

$$\delta(b - (-1)^{nq} b') = \bar{h} \bar{y} - (-1)^{nq} \bar{y} \bar{h} = (-1)^{n+q+1} \delta(\bar{h} \cup_1 \bar{y}),$$

d'après la formule exprimant le cobord du produit cup-1; ceci signifie qu'en remplaçant $(\bar{h} \cup_1 \bar{y}) \bar{x}$ par $(b - (-1)^{nq} b') \bar{x}$, on conserve la valeur de $d'_3 \bar{h}$ à un élément de l'idéal engendré par $\bar{x}$ près, c'est-à-dire qu'on a toujours une détermination de $d'_3 \bar{h}$.

On peut donc écrire

$$d'_3 \bar{h} = (-1)^{n+1} \delta a \cup_1 \bar{y} + (-1)^{p+q+pq} b' \bar{x} + (-1)^{p+q+1} a \bar{y}.$$

Comme on a aussi (en calculant le cobord de $a \cup_1 \bar{y}$)

$$\delta a \cup_1 \bar{y} = \delta(a \cup_1 \bar{y} - (-1)^{p+q+n}(a \bar{y} - (-1)^{nq+pq+q} \bar{y} a),$$

la classe $d'_3 \bar{h}$ est aussi la classe de

$$(-1)^{p+q+pq+nq}(b' \bar{x} - (-1)^q \bar{y} a)$$

qui est bien un représentant de $(-1)^{p+q+pq+nq} \langle y, h, x \rangle$.

1.9. Le cup-produit fonctionnel. — Le cas du cup-produit fonctionnel ou, plus généralement, d'une opération cohomologique fonctionnelle se présente d'une manière très simple, parce que les opérations cohomologiques commutent avec l'homomorphisme induit dans les anneaux de cochaînes.

Soit Φ une application d'un espace X_1 en un espace X . Nous prendrons pour C la somme directe $C^*(X) + C^*(X_1)$, et nous désignerons par $\Phi^\#$ l'application de $C^*(X)$ en $C^*(X_1)$.

Nous désignerons par H la somme $H^*(X) + H^*(X_1)$.

Soit Ψ une opération cohomologique dans X , induite par une opération $\bar{\Psi}$ dans $C^*(X)$; désignons par $\bar{\Psi}_\Phi$ l'opération telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} C^*(X) & \xrightarrow{\bar{\Psi}} & C^*(X) \\ \Phi^\# \downarrow & & \downarrow \Phi^\# \\ C^*(X_1) & \xrightarrow{\bar{\Psi}_\Phi} & C^*(X_1) \end{array}$$

On supposera que $\Phi^\#$ et $\bar{\Psi}$ sont nulles dans $C^*(X_1)$, et $\bar{\Psi}_\Phi$ est nulle dans $C^*(X)$; Φ^* et Ψ sont nulles dans $H^*(X_1)$, Ψ_Φ est nulle dans $H^*(X)$.

[Par exemple, dans le cas du cup-produit fonctionnel, si $\overline{\Psi}$ est le cup-produit (dans $C^*(X)$) par un cocycle x , $\overline{\Psi}_\Phi$ sera le cup-produit (dans $C^*(X_1)$) par $\Phi^\#(x)$].

La relation entre les opérations s'écrit donc

$$\Phi^\# \overline{\Psi} - \overline{\Psi}_\Phi \Phi^\# = 0.$$

Par la méthode décrite plus haut, on posera encore

$$G = G_0 + G_1 + G_2,$$

avec $G_0 = L \otimes g_0$, $G_1 = L \otimes g_1 + L \otimes g'_1$, $G_2 = L \otimes g_2$ et

$$\begin{aligned} \theta(g_2) &= \Phi^\# \otimes g_1 - \overline{\Psi} \otimes g'_1, \\ \theta(g_1) &= \overline{\Psi}_\Phi \otimes g_0, \quad \theta(g'_1) = \Phi^\# \otimes g_0. \end{aligned}$$

On pourra prendre ici $f_2 = 0$.

Si donc $h \otimes g_2 \in H \otimes G_2$ appartient au noyau de d_2 , ce qui signifie que h appartient au noyau de Φ^* et de Ψ , il existe des cochaînes a et b telles que

$$\Phi^\#(\overline{h}) = \delta a, \quad \overline{\Psi}(\overline{h}) = \delta b$$

et (en prenant $f_2 = 0$) on a

$$d'_3(\overline{h} \otimes g_2) = \overline{\Psi}_\Phi(a) - \Phi^\#(b),$$

qui est bien, par exemple, un représentant du cup-produit fonctionnel par x , lorsque Ψ est le produit par une classe de cohomologie x . Comme a et b sont connus à des cocycles quelconques près, la classe de $d'_3(\overline{h} \otimes g_2)$ est connue modulo $d_2(H \otimes G_1)$, c'est-à-dire modulo la somme de $\Phi^*(H^*(X))$ et de $\Psi_\Phi(H^*(X_1))$, pour la dimension convenable; dans le cas du cup-produit fonctionnel par x , le deuxième terme est l'idéal engendré par $\Phi^*(x)$.

Le cas de l'opération d'Adem se traite comme celui du triple produit, en utilisant pour la définition de f_2 l'expression donnée par Adem dans l'article cité plus haut.

1.10. Remarque concernant f_2 . — Il résulte de la relation vérifiée par f_2 (n° 1.3) que, si l'application f_2 existe, elle n'est en général pas unique. En effet, si f_2'' est une opération quelconque telle que $f_2'' \delta + \delta f_2'' = 0$ (condition que remplit notamment l'opération f_1), $f_2 + f_2''$ vérifie aussi la relation du n° 1.3. Il serait encore possible de construire une opération analogue à d_3 , en faisant usage de f_2 défini seulement à une opération du premier ordre près, mais cette opération (qui ne ferait plus correspondre, à un élément de E^3 , un élément unique de E^3 , mais seulement une classe modulo l'action d'opérations de premier ordre (sur l'élément donné)) serait peu satisfaisante : d'une part, la description des opérations d'ordre supérieur à 2 deviendrait alors plus difficile, puisque l'opération du second ordre ne coïnciderait plus avec l'opérateur différentiel d_3 ; et, d'autre part, ni le cup-

produit fonctionnel, ni les opérations d'Adem, ni le triple produit de Massey n'apparaîtraient comme des cas particuliers d'une opération de cette espèce, tandis qu'ils sont obtenus, comme nous venons de le voir, en choisissant une application f_2 bien déterminée.

Il conviendrait donc de montrer à partir de chaque relation telle que celle du n° 1.7 comment on peut déterminer d'une manière univoque une opération f_2 vérifiant la relation du n° 1.3. Nous verrons plus loin (§ 4) une méthode permettant de se passer de cette vérification, en construisant directement un opérateur différentiel auquel est associée une suite spectrale; par définition, l'opération de deuxième ordre sera alors l'opérateur différentiel d_3 .

On peut remarquer qu'une opération unique f_2 n'existe probablement pas lorsque la relation (n° 1.7) est une relation valable dans un certain espace X , mais pas dans tout espace quelconque. Un exemple en est fourni ⁽⁸⁾ par une relation telle que $xy - uv = 0$, $x, y, u, v \in H^*(X)$. Soit alors $h \in H^n(X)$ tel que $hx = hu = 0$ et posons $\overline{xy} - \overline{uv} = \delta c$, $\overline{hx} = \delta a$, $\overline{hu} = \delta b$ (le trait désignant des cocycles représentant la classe de cohomologie correspondante).

$(-1)^n \overline{h}c - a\overline{y} + b\overline{v}$ est un cocycle dont la classe est définie non seulement modulo l'idéal engendré par y plus l'idéal engendré par v (ce qui correspondrait à un élément de E^3 , d'après la construction faite plus haut), mais encore modulo l'idéal engendré par h (parce qu'il n'y a pas de choix unique de la cochaîne c).

On pourrait espérer montrer qu'un choix bien déterminé peut être associé à chaque relation telle que celle du n° 1.7, lorsque cette relation est valable quel que soit l'espace X ; mais, sauf dans le cas du triple produit, nous ne pourrions pas l'établir ici.

2. Cohomologie des espaces fibrés.

Je considère ici le cas d'un espace Y fibré en fibres F au-dessus de l'espace de base X (supposé connexe par arcs). Dans ce qui va suivre, nous considérerons les algèbres de cohomologie à coefficients dans le corps commutatif L ; nous supposerons que $\pi_1(X)$ opère trivialement dans $H^*(F)$, et nous supposerons que $H^*(F)$ possède une base finie pour chaque dimension.

Certaines de ces hypothèses ne sont pas essentielles, mais elles seront admises ici afin de simplifier l'exposé et les notations.

Dans ce qui va suivre, il sera uniquement question de cochaînes et de cohomologie. L'indice inférieur désignera une filtration, et non pas des groupes de chaînes ou des groupes d'homologie.

(8) Cet exemple a été traité dans mon article : HIRSCH (Guy), *Certaines opérations homologiques et la cohomologie des espaces fibrés* (Colloque de Topologie algébrique, Louvain, 1956, Liège, Georges Thone; Paris, Masson, 1957; p. 167-190. Voir en particulier n° 4.6, p. 177).

2.1. Les complexes $C^*(B) \otimes H^*(F)$. — On peut construire ⁽⁹⁾ un monomorphisme u de $C^*(X) \otimes H^*(F)$ dans $C^*(Y)$, et $u(C^*(X) \otimes H^*(F))$ est un sous-complexe (stable pour δ). Ceci revient à dire qu'on peut munir $C^*(X) \otimes H^*(F)$ d'un opérateur différentiel Δ (correspondant par u à l'opérateur cobord du sous-complexe de Y).

On aura pour $c \in C^*(X)$ et $t \in H^*(F)$,

$$u(c \otimes t) = u(c \otimes 1) \cup u(1 \otimes t),$$

et

$$u(c \otimes 1) = p^\# c$$

où p désigne la projection de Y sur X . La restriction à une fibre quelconque de $u(1 \otimes t)$ est un cocycle appartenant à la classe t de $H^*(F)$.

J'écrirai dorénavant C pour $C^*(X)$, H pour $H^*(X)$. On peut filtrer $H^*(F)$ par

$$H_0(F) \subset H_1(F) \subset \dots \subset H_i(F) \subset \dots, \quad \bigcup_i H_i(F) = H^*(F);$$

cette filtration satisfait les conditions :

1° $u(C \otimes H_i(F))$ est un sous-complexe V'_i (stable pour δ).

2° $\delta u(1 \otimes H_i(F)) \subset V'_{i-1}$.

[Ceci entraîne

$$H_0(F) \subset i^* H^*(Y)$$

où i désigne l'inclusion de F dans Y .]

J'écrirai V' pour $\bigcup_i V'_i$.

[Nous poserons $H_i(F) = V'_i = 0$ pour $i < 0$].

On démontre ⁽⁹⁾ qu'il est possible de construire u de manière à remplir ces conditions et de manière que la cohomologie du sous-complexe V' soit isomorphe à celle de Y .

On démontre qu'on peut par exemple imposer la condition

$$H_i(F) \supset H^i(F)$$

(l'indice supérieur désignant ici, comme d'habitude, la dimension). Alors $H^p(V'_i)$ est isomorphe à $H^p(V') = H^p(Y)$ pour $p < i$.

Au point de vue de leur cohomologie, on peut donc considérer la suite des V'_i comme une « approximation » de l'espace fibré Y .

Il est en général possible de construire des monomorphismes u différents, satisfaisant aux conditions ci-dessus; et les filtrations correspondantes

⁽⁹⁾ Une esquisse de la démonstration a paru dans mon article : HIRSCH (Guy), *Sur les groupes d'homologie des espaces fibrés* (Bull. Soc. math. Belgique, t. 6, 1953, p. 79-96). Voir aussi (dans le cadre de la théorie singulière cubique de J. P. SERRE) un article de W. H. COCKROFT (Transactions American Math. Soc., 91, 1959, p. 505-524).

de $H^*(F)$, ainsi que les opérateurs différentiels Δ n'ont donc pas de caractère intrinsèque. Nous verrons dans le § 3 que cette liberté dans le choix présente certains avantages, permettant d'adapter la construction à des situations données. Dans certains cas, d'ailleurs, on peut choisir une filtration de $H^*(F)$, conduisant à des constructions canoniques; nous en verrons deux exemples ci-dessous. L'une d'entre elles correspond à la filtration (banale) par la dimension de la fibre; nous verrons plus loin (n° 2.3) que la suite spectrale des opérateurs différentiels correspondants Δ coïncide avec la suite spectrale « classique » qui décrit la cohomologie de l'espace fibré V . Les résultats énoncés ci-dessous (n° 2.2) sont donc valables, en particulier, pour cette suite spectrale classique.

Chaque complexe $V'_i = u(C \otimes H_i(F))$ est filtré (par l'indice i); on peut donc décrire sa cohomologie par une suite spectrale. Le terme E_{i+2} est le terme stable (E_∞) de cette suite spectrale.

Nous désignerons par G le module gradué associé à la filtration de $H^*(F)$ et poserons

$$G_i = H_i(F)/H_{i-1}(F).$$

Observons que, si $u(C \otimes H_{i-1}(F)) = V'_{i-1}$ a déjà été défini, et si l'on étend u à $(C \otimes H_i(F))$ pour obtenir V'_i , on définit ainsi (par passage au quotient) une application de

$$C \otimes H_i(F)/H_{i-1}(F) = C \otimes G_i \quad \text{sur} \quad V'_i/V'_{i-1}.$$

Il existe différentes applications u qui correspondent à une même application de $C \otimes G$ sur le module gradué associé à la filtration de V . [On les obtient en écrivant H_i comme somme directe de $H_{i-1}(F)$ et de G_i et en faisant varier l'image par u de $1 \otimes g_i$, pour $g_i \in G_i$, dans une même classe de restes modulo V'_{i-1} .] Ces diverses applications u munissent $C \otimes H_i(F)$

(ou $C \otimes \sum_i G_i$) de différents opérateurs différentiels Δ ; mais tous ces opérateurs ainsi définis donnent des groupes d'homologie isomorphes, et (pour chaque V'_i) des suites spectrales isomorphes. La suite spectrale de ces opérateurs est donc associée à l'application (induite par u) de $1 \otimes G$ sur le module gradué associé à la filtration de V .

Nous désignerons par $E_j^{*k}(V'_i)$ le terme formé des éléments de degré k (en G) dans le terme E_j de la suite spectrale associée au complexe V'_i . Dans

ce qui va suivre, nous désignerons par $\sum E_j^{*i}$ la somme directe $\sum_{k=0}^i E_j^{*k}$.

2.2. Une généralisation de la « suite exacte de Gysin ». — Lorsque la fibre F est une sphère (homologique) à n dimensions, on peut décrire la

cohomologie de l'espace fibré Y au moyen de la « suite exacte de Gysin » ⁽¹⁰⁾, que l'on peut représenter par un triangle exact

$$\begin{array}{ccc} & H^*(X) & \\ d \swarrow & & \nwarrow \Psi^* \\ H^*(X) & \xrightarrow{p^*} & H^*(Y) \end{array}$$

où p désigne la projection, d le produit par la classe caractéristique (à $n+1$ dimensions), et où Ψ peut par exemple être décrit de la manière suivante : Ψ induit un isomorphisme Ψ^* de $H^*(Y)/p^*H^*(X)$ sur l'annulateur [dans $H^*(X)$] de la classe caractéristique; l'inverse de cet isomorphisme Ψ^* est le cup-produit fonctionnel par la classe caractéristique.

On peut encore écrire ce triangle exact sous la forme

$$\begin{array}{ccc} & H^*(X) \otimes H^n(F) & \\ d \swarrow & & \nwarrow \Psi^* \\ H^*(X) \otimes H^0(F) & \xrightarrow{p^*} & H^*(Y) \end{array}$$

(en modifiant légèrement et d'une façon évidente l'interprétation de p^* , Ψ et d).

Comme la classe fondamentale de $H^n(F)$ est transgressive, on peut filtrer $H^*(F)$ conformément aux conditions imposées dans le numéro précédent, en posant

$$H^0(F) = H_0(F), H^n(F) = H_1(F)/H_0(F).$$

Le triangle exact peut alors s'écrire en utilisant les termes de la suite spectrale qui donne la cohomologie de Y . (La notation coïnciderait avec celle de la suite spectrale classique si la dimension de F était égale à 1).

$$\begin{array}{ccc} & E_2^{*+1} & \\ d_2 \swarrow & & \nwarrow \Psi^* \\ E_2^{*+0} & \xrightarrow{p^*} & E_3 \end{array}$$

Lorsque la fibre F n'est pas une sphère homologique, le triangle exact ci-dessus reste valable pour le sous-complexe V'_1 (dans lequel, comme pour un espace fibré en sphères, la cohomologie de la fibre est de filtration 1). Pour le sous-complexe V'_i , défini au numéro précédent, on a un triangle exact analogue

$$\begin{array}{ccc} & E_{i+1}^{*+i}(V'_i) & \\ d_{i+1} \swarrow & & \nwarrow \Psi^* \\ \sum E_{i+1}^{*+i-1}(V'_i) & \xrightarrow{\Phi} & E_{i+2}(V'_i) \end{array}$$

⁽¹⁰⁾ Voir par exemple : SPANIER (E.), *Homology theory of fiber bundles* (Proc. Intern. Congress Math., Cambridge, Mass, 1950). Providence, American mathematical Society, 1952, p. 390-396.

d_{i+1} est l'opérateur de la suite spectrale; Φ est l'application naturelle dans E_{i+2}^{*k} , pour chaque $k < i$, de E_{i+1}^{*k} , modulo l'image de d_{i+1} (parce que $k < i$, ces éléments appartiennent au noyau de d_{i+1} , qui abaisse le degré de i); Ψ induit l'inverse de l'isomorphisme naturel sur E_{i+2}^{*i} du noyau de d_{i+1} dans E_{i+1}^{*i} (qui ne contient pas d'images par d_{i+1} , puisque i est le degré le plus élevé dans V'_i). Ψ peut aussi être décrit au moyen d'opérations cohomologiques fonctionnelles (liées au choix du monomorphisme u), mais cette description peut être omise ici.

Dans V'_i , E_{i+2} est le terme stable E_∞ , qui décrit la cohomologie de V'_i et par conséquent, jusqu'à une certaine dimension, celle de l'espace fibré Y .

Dans ce triangle exact, le terme supérieur $E_{i+1}^{*i}(V'_i)$ se calcule assez facilement, puisque i est le degré le plus élevé; $E_{i+1}^{*i}(V'_i)$ est donc le noyau de d_i dans le noyau de $d_{i-1} \dots$, dans le noyau de d_2 , dans

$$E_2^{*i}(V'_i) = H^*(X) \otimes G.$$

L'autre terme $\sum E_{i+1}^{*i-1}(V'_i)$ se déduira de $E_{i+1}(V'_{i-1})$, qui figure (comme E_∞) dans le triangle exact de V'_{i-1} . On a en effet une suite exacte

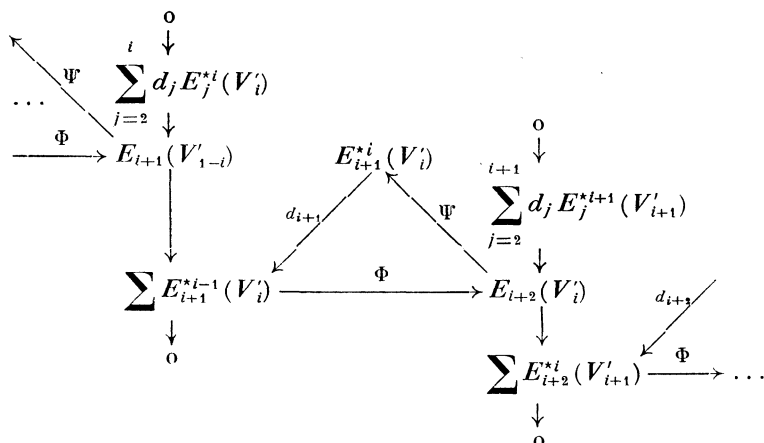
$$0 \rightarrow \sum_{j=2}^i d_j E_j^{*i}(V'_i) \rightarrow E_{i+1}(V'_{i-1}) \rightarrow \sum E_{i+1}^{*i-1}(V'_i) \rightarrow 0$$

qui indique quels sont les éléments non nuls dans V'_{i-1} qui s'annulent lorsqu'on plonge V'_{i-1} dans V'_i .

On peut donc représenter par le diagramme suivant (où les triangles et les suites verticales sont exacts) les renseignements apportés par les suites spectrales des sous-complexes V'_i .

$$\begin{array}{ccccc}
 & E_2^{*1}(V'_1) & & 0 & \\
 & \swarrow d_1 & \searrow \Psi & \downarrow d_2 E_2^{*2}(V'_2) & \\
 E_2^{*0}(V'_1) & \xrightarrow{\Phi} & E_3(V'_1) & & \\
 & \downarrow & & & \\
 & \sum E_3^{*1}(V'_2) & \xrightarrow{\Phi} & E_4(V'_2) & \\
 & \downarrow 0 & & \downarrow & \\
 & & & \sum E_4^{*2}(V'_3) & \xrightarrow{\Phi} \dots \\
 & & & \downarrow 0 & \\
 & & & &
 \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} E_3^{*2}(V'_2) & \xrightarrow{\Psi} & \sum_{j=2}^3 d_j E_j^{*3}(V'_3) \\ \swarrow d_1 & & \downarrow \\ \sum E_3^{*1}(V'_2) & \xrightarrow{\Phi} & E_4(V'_2) \end{array}$



2.3. La graduation au moyen de la dimension de F . — On peut adopter, pour filtration de $H^*(F)$, la filtration associée à la graduation usuelle de $H^*(F)$; $H_i(F)$ comprendra donc les combinaisons linéaires de classes de cohomologie dont la dimension ne dépasse pas i . Dans ce numéro, nous utiliserons exclusivement cette filtration banale de $H^*(F)$.

Dans ce cas, il résulte des résultats rappelés au n° 2.1 qu'un élément de $C^*(Y)$, dont le cobord appartient (pour un choix déterminé du monomorphisme u) au sous-complexe V' est lui-même, à un cobord près, un élément de V' .

Ceci entraîne que, si u est choisi sur $C \otimes H_{i-1}(F)$, u induit une application bien déterminée de $1 \otimes H^i(F)$ dans $C^*(Y)$ modulo $V'_{i-1} + \delta C^*(Y)$ (le signe $+$ désignant ici la somme des groupes, et pas une somme directe). Pour la détermination de l'opérateur différentiel Δ dans $C \otimes H^*(F)$, on peut négliger le terme $\delta C^*(Y)$ (qui entraîne simplement une autre immersion de $C \otimes H^*(F)$ dans $C^*(Y)$, mais n'affecte pas l'ensemble des opérateurs Δ possibles).

Pour chaque valeur de i , la cohomologie (et même la suite spectrale) de $C \otimes \sum_{j=0}^i H^j(F)$ ont un caractère intrinsèque.

Une première conséquence en est que (pour i fixe) la réunion V_i de tous les sous-complexes V'_i correspondant à tous les monomorphismes u vérifiant les conditions du n° 2.1 [avec la filtration de $H^*(F)$ considérée dans ce numéro 2.3] est un sous-complexe canonique de Y , et a la même cohomologie (et la même suite spectrale) que chacun des V'_i . Le diagramme du n° 2.2, où les V'_i sont remplacés par les V_i , a donc maintenant un caractère canonique et est relatif à la suite (canonique) de sous-complexes

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_i \subset \dots, \quad V = \bigcup_i V_i.$$

Tous les Δ admissibles [pour cette filtration de $H^*(F)$] dans $C \otimes H^*(F)$ correspondent exactement à tous les monomorphismes u induisant pour chaque i une certaine application déterminée de $H^i(F)$ dans V_i/V'_{i-1} ; δu est, pour chaque i , un monomorphisme (bien déterminé) de $H_i(F)$ dans la cohomologie de V_{i-1} ou V'_{i-1} .

La suite des complexes V_i ou V'_i part donc du complexe canonique V_0 , isomorphe à $C^*(X)$ et muni de son opérateur différentiel canonique, puis V_1 [ou encore, la structure de complexe sur $C^*(X) \otimes (H^0(F) + H^1(F))$] est ensuite défini par l'application de $H^2(F)$ dans

$$H^*(V_1) = H^*(V'_1), \quad \dots,$$

et V_i est défini par l'application de $H^i(F)$ dans

$$H^*(V_{i-1}) = H^*(V'_{i-1}),$$

et ainsi de suite. (On remarquera l'analogie avec une décomposition de Postnikov. Observons aussi que les résultats de ce n° 2.3 restent valables si l'on désigne par $H^i(F)$ non plus le groupe de cohomologie de F pour la dimension i , mais le $i^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie non trivial de dimension non nulle).

2.4. Le cas $F = K(\pi, n)$. — Lorsque la fibre est un complexe d'Eilenberg-MacLane, il est possible de définir dans $H^*(F)$ une filtration canonique et une suite de sous-complexes canoniques V_i , différentes de celles qui correspondent à la filtration banale décrite au n° 2.3. Par rapport à celles-ci, elles présentent l'avantage (comme nous le verrons ci-dessous) de donner beaucoup plus rapidement l'homologie de l'espace fibré jusqu'à une dimension donnée, et d'éliminer ainsi un grand nombre d'extensions de groupes qui ne sont pas essentielles, mais qui apparaissent dans la suite spectrale classique.

Nous poserons encore $H_0(F) = H^0(F)$.

$H_1(F)$ sera l'espace vectoriel engendré par les générateurs g'' de l'algèbre de cohomologie de F ; comme on le sait, ces éléments s'obtiennent en faisant opérer l'algèbre de Steenrod sur la classe fondamentale ξ de F . Il en résulte que tous ces éléments sont transgressifs (puisque les opérations de l'algèbre de Steenrod commutent avec la transgression), ce qui justifie la filtration qui leur est attribuée. De plus, si l'élément g'' est obtenu en faisant opérer sur la classe fondamentale ξ une certaine opération de l'algèbre de Steenrod, la transgression de g'' s'obtiendra en faisant opérer la même opération sur la transgression k^{n+1} de la classe fondamentale. u définit une application (bien déterminée) de la classe fondamentale ξ de $H^*(F)$ dans $C^*(Y)$ modulo $(p^*C^*(X) + \delta C^*(Y))$; il en est alors de même sur $H_1(F)$.

Plus généralement, $H_i(F)$ sera l'espace vectoriel engendré par les produits de i générateurs (au plus) de l'algèbre $H^*(F)$. Leur filtration se justifie par la remarque suivante : si $u(g')$ et $u(g'')$ sont dans $C^*(Y)$ les images respec-

tives, par le monomorphisme u , de g' et $g'' \in H^*(F)$, on peut définir u sur le produit $g'g''$ en posant

$$u(g'g'') = u(g')u(g'') - u(g') \cup_1 \partial u(g'').$$

Nous avons vu que, sur $H_1(F)$, u définit un monomorphisme dans $C^*(Y)/V'_0$ [en posant $V'_0 = p^*C^*(X)$]. La construction de $u(g'g'')$ donnée ci-dessus n'est pas univoque, mais elle est bien définie modulo V'_{i-1} (si i désigne la somme des filtrations de g' et g''). Il en résulte que tous les complexes V'_i et tous les opérateurs différentiels Δ , construits de cette façon, donneront naissance aux mêmes suites spectrales, qui sont donc attachées à l'espace fibré Y (et pas aux différents choix du monomorphisme u).

Jusqu'à la dimension $(i+1)n-1$ inclusivement, le sous-complexe V'_i a même cohomologie que l'espace fibré Y [parce que tous les éléments de $H^p(F)$, avec $p < (i+1)n$, appartiennent à $H_i(F)$ par construction]. On voit par exemple que $H^p(Y)$, pour $p < 2n$, s'obtient au moyen d'une seule extension de groupe [celui-ci étant $H^*(X)$]. Ce résultat se déduit immédiatement de la considération du triangle exact du sous-complexe V'_1 .

La construction explicite de la suite spectrale montre que d_3 coïncide avec l'opération d_3 que nous avons définie dans le § 1. En particulier, si l'on connaît les opérations de 2^e ordre, telles que nous les avons définies, dans l'espace de base X , on peut calculer effectivement (en considérant les triangles exacts de V'_1 et V'_2) la cohomologie de l'espace fibré Y jusqu'à la dimension $3n-1$, avec deux extensions de groupe. Ceci justifie la manière dont nous avons défini ici les opérations de 2^e ordre.

3. Construction du triple produit.

3.1. Le modèle associé au triple produit. — Considérons, dans un espace X , trois éléments $x, y, h \in H^*(X)$ et supposons $hx = hy = 0$.

Pour ne pas allonger cet exposé, je supposerai ici $x \neq y$, car le cas particulier où $x = y$ exige un traitement différent.

Soient p et q , les dimensions respectives de x et y .

Construisons, avec X pour espace de base, un espace fibré Y ayant pour fibre le produit de deux espaces d'Eilenberg-MacLane

$$K(L, p-1) \times K(L, q-1)$$

(où L désigne, comme il a été dit plus haut, le corps des coefficients); les classes fondamentales g' et g'' de ces deux espaces d'Eilenberg-MacLane ayant respectivement x et y pour transgression.

$H^*(F)$ sera filtré de la manière suivante : $H_0(F) = H^0(F)$; $H_1(F)$ est le L -module engendré par g' et g'' [et par $H^0(F)$]; $H_2(F)$ est le L -module obtenu en ajoutant $g'g''$ aux générateurs de $H_1(F)$; pour $i > 2$, $H_i(F)$ est défini d'une manière arbitraire, compatible avec les conditions énumérées

au n° 2.1. (On voit aisément qu'il est possible de construire de pareilles filtrations.)

Nous définirons alors le triple produit $\langle x, h, y \rangle$ comme l'effet de l'opérateur différentiel d_3 (dans la suite spectrale décrivant la cohomologie de l'espace fibré Y) sur $h \otimes g'g''$, élément de E_2 considéré comme élément de E_3 [ce qui est légitime, puisque $d_2(E_2)$ ne contient pas d'éléments ayant la même dimension].

On vérifie facilement que cette définition coïncide avec celle qui a été donnée au n° 1.8 et, par conséquent, avec la définition habituelle du triple produit. La suite spectrale correspondant à l'opérateur cobord de l'espace fibré est aussi celle de l'opérateur différentiel $\Delta = \delta + f_1 + f_2 + \dots$ qui opère dans $C^*(X) \otimes G$, où G désigne le groupe gradué associé à la filtration de $H^*(F)$.

On voit que cette définition nouvelle permet de se passer de la description, faisant appel aux cochaînes, qui a été donnée dans le § 1 et n'exige pas la vérification de l'existence de l'opération f_2 (nos 1.3 et 1.10), qui résultera implicitement de la construction du modèle (espace fibré) qui a été donnée.

On peut espérer fournir une méthode analogue (par la construction de modèles adéquats) pour prouver l'existence des opérations du second ordre étudiées dans le § 1. Cette étude ne sera pas entreprise ici, mais je donnerai, dans la dernière section, une description d'opérations d'ordre supérieur à 2, par une méthode inspirée directement de l'étude de la cohomologie d'un espace fibré, ayant pour fibre un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane.

4. Construction d'opérations d'ordre supérieur.

4.1. L'opérateur différentiel Δ . — Nous conserverons ici les notations du chapitre 1, et nous montrerons comment on peut construire un opérateur différentiel Δ dont la suite spectrale fournit des « opérations d'ordre supérieur ».

Soit Δ un opérateur différentiel, opérant dans le L -module $C \otimes G$ (gradué par le degré de G), et défini par

$$\Delta = \delta + f_1 + f_2 + \dots,$$

où f_i abaisse de i le degré (en G).

Les f_i vérifieront des relations analogues à celles qui ont été décrites dans les nos 1.3 (pour f_2), 1.5 (pour f_3) et 1.6 (pour f_4); ces relations sont obtenues en exprimant que Δ est de carré nul.

Les opérateurs différentiels successifs d_i de la suite spectrale exprimant l'homologie de $C \otimes G$ pour l'opérateur différentiel Δ (et la filtration associée à la graduation de G) peuvent être décrits de la manière suivante : on vérifie d'abord, par un calcul immédiat, que l'opération que nous avons appelée d_2 (n° 1.2) est bien l'opérateur d_2 de cette suite spectrale; supposons alors

établi que les opérateurs d_j , déjà construits pour $j = 2, \dots, i$, s'obtiennent par passage au quotient, à partir d'opérateurs d'_j ($j = 2, \dots, i$), où l'on a posé $d'_2 = f_1$ et où d'_3 est défini (comme au n° 1.4) sur les éléments de $Z \otimes G$ dont l'image par $d'_2 = f_1$ appartient à $\delta C \otimes G$ et où, plus généralement, d'_j est défini sur les éléments de $Z \otimes G$ dont l'image par d'_{j-1} appartient à $\delta C \otimes G$.

Il est alors possible de définir $d'_{i+1}(\bar{h} \otimes g)$, pour $\bar{h} \in Z$ et $g \in G$, lorsqu'il existe des $a_{j-1} \in C \otimes G$, avec

$$d'_j(\bar{h} \otimes g) = \delta a_{j-1}$$

pour $j = 2, \dots, i$. On posera

$$d'_{i+1}(\bar{h} \otimes g) = f_i \bar{h} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j f_j a_{i-j},$$

en accord avec la définition déjà donnée (n° 1.4) pour d'_i .

Si $d'_{i+1}(\bar{h} \otimes g)$ appartient à $d'_i(Z \otimes G)$ (ce qui signifierait, par passage au quotient, que l'élément de E_{i+1} correspondant à $\bar{h} \otimes g$ appartient au noyau de d_{i+1}), on peut (puisque les a_j sont seulement définis à $Z \otimes G$ près) choisir les a_j tels que $d'_{i+1}(\bar{h} \otimes g)$ appartienne à $\delta C \otimes G$ (pour ce nouveau choix des a_j); il sera donc possible de trouver $a_i \in C \otimes G$ avec

$$d'_{i+1}(\bar{h} \otimes g) = \delta a_i,$$

ce qui permet alors de définir l'opérateur suivant d'_{i+2} (et, par passage au quotient, d_{i+2}) lorsque l'élément correspondant à $\bar{h} \otimes g$ appartient au noyau de d_{i+1} . Un calcul direct montre que ces opérateurs coïncident avec les opérateurs d_i de la suite spectrale de Δ .

Ce procédé permet de définir par exemple un « quadruple produit » associé à un triple d'éléments $x, y, z \in H$ et à un élément $h \in H$ ⁽¹¹⁾. On l'obtiendra par l'opérateur d_4 appliqué à $h \otimes g_3$, $h \in H$ et $g_3 \in G_3$, où g_3 est un produit de trois éléments g, g' et $g'' \in G_1$; on pose encore

$$G_0 = L, \quad \theta(g) = x \otimes g_0, \quad \theta(g') = y \otimes g_0, \quad \theta(g'') = z \otimes g_0;$$

G_2 est engendré par les produits de deux générateurs de G_1 , et θ opère sur les produits comme une dérivation. On supposera que $h \otimes g_3$ appartient au

⁽¹¹⁾ Ce « quadruple produit » ne coïncide pas avec celui que j'ai proposé antérieurement (*Colloque de Topologie algébrique*, Louvain, 1956). Alors que la définition que je donnais en 1956 du « n -uple produit » faisait intervenir n classes de cohomologie dans un ordre linéaire, je crois qu'il est préférable de considérer $n-1$ classes d'une part, et une $n^{\text{ième}}$ classe de l'autre; c'est en effet sous cette dernière forme que se présente l'opérateur d_n dans un espace fibré dont la fibre est un espace d'Eilenberg-MacLane.

noyau de d_2 et de d_3 ; cela exige que les produits hx , hy et hz soient nuls ainsi que les « triples produits » $\langle x, h, y \rangle$, $\langle y, h, z \rangle$ et $\langle z, h, x \rangle$, avec une certaine condition supplémentaire (signifiant que ces trois triples produits peuvent être simultanément des cobords) qui s'exprime le plus facilement par la condition $d_3(h \otimes g_3) = 0$.

On peut donner une description explicite de ce quadruple produit au moyen des cochaines et de produits cup-1, mais je ne le ferai pas ici, car cette expression n'a pas la simplicité ni la symétrie visible de l'expression habituelle du triple produit. D'une manière analogue à ce qui a été fait au § 3 pour le triple produit, on peut aussi définir le quadruple produit directement (et sans introduire explicitement les cochaines), en construisant au-dessus de l'espace donné un espace fibré dont la fibre est un produit de trois espaces d'Eilenberg-MacLane, la transgression de leurs classes fondamentales étant respectivement x , y et z .

