BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN CERF

Groupes d'automorphismes et groupes de difféomorphismes des variétés compactes de dimension 3

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 319-329

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__319_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89. 1959. Lille].
Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 319 à 329.

GROUPES D'AUTOMORPHISMES ET GROUPES DE DIFFÉOMORPHISMES DES VARIÉTÉS COMPACTES DE DIMENSION 3;

PAR

JEAN CERF
(Lille).

INTRODUCTION. — Le principal résultat de cet exposé est le corollaire du théorème 5, qu'on peut énoncer ainsi :

Soit F une variété compacte de dimension 3, *le groupe G des automorphismes de F et le groupe H des difféomorphismes de F sont homotopiquement équivalents.*

L'exposé comprend trois parties. La première partie est relative à une situation assez générale, celle d'une « paire topologique » (A, B). On donne dans ce cas une condition suffisante d'équivalence homotopique de A et B, condition qui s'exprime essentiellement en termes de « n-locale connection de B dans A ».

La seconde partie est relative à une situation plus particulière : « paire homogène » (A, B), où $A = G/G_0$ et $B = H/H_0$ sont des espaces homogènes de groupes (G, H) formant une paire topologique. On donne dans ce cas une condition suffisante (qui est essentiellement le « relèvement des petits cubes ») pour que, si la condition de n-locale connexion de B dans A est vérifiée quel que soit n pour deux des paires d'espaces (G, H), (G_0, H_0), (A, B), elle le soit pour la troisième. En vue d'applications ultérieures, on donne un critère de relèvement des petits cubes plus fort que celui qui sera effectivement utilisé ici.

Dans la troisième partie, on associe une paire de groupes à toute variété compacte, et une paire homogène à toute « décomposition régulière » d'une telle variété. Grâce à des résultats de la théorie des variétés de dimension 3

(CAIRNS, MOÏSE, BING, SMALE) on montre, en partant de cas particuliers simples, et en s'élevant par étapes (grâce à la deuxième partie), jusqu'au cas général, que la paire homogène associée à toute décomposition régulière d'une variété compacte de dimension 3 vérifie la condition suffisante d'équivalence homotopique énoncée dans la première partie, et qu'il en est de même de la paire de groupes associée à une telle variété.

1. Paires topologiques. Une condition suffisante d'équivalence homotopique dans le cas d'une paire métrisable.

1.1. DÉFINITION. — Une *paire topologique* est un couple (A, B) d'espace topologique muni d'une *injection* continue : $B \to A$ (autrement dit, B s'identifie à une partie de A, munie d'une topologie *plus forte* que celle induite par A).

NOTATIONS. — Pour tout entier $n \geqq 0$, on note $\Sigma_n(A)$ l'espace des n-cubes singuliers de A, muni de la topologie C^0 (i. e., la topologie de la convergence compacte). On note $\dot{\Sigma}_n(A)$ l'espace des applications continues du bord $\dot{I}^n$ de I^n dans A, muni de la topologie C^0. Notations analogues : $\Sigma_n(B)$, $\dot{\Sigma}_n(B)$. Pour tout n, on a un *homéomorphisme canonique*

$$\Sigma_{n+1}(A) \approx \Sigma_1(\Sigma_n(A)). \tag{1}$$

On note $\Sigma_n(A, B)$ la partie de $\Sigma_n(A)$ formée des cubes dont le bord est un élément de $\dot{\Sigma}_n(B)$; la topologie sur $\Sigma_n(A, B)$ est la borne supérieure de celle induite par $\Sigma_n(A)$ et de la topologie image réciproque de celle de $\dot{\Sigma}_n(B)$ par l'application canonique $\Sigma_n(A, B) \to \dot{\Sigma}_n(B)$. Pour tout n, le couple $(\Sigma_n(A, B), \Sigma_n(B))$ est une paire topologique, et l'on a un homéomorphisme canonique

$$\Sigma_{n+1}(A, B) \approx \Sigma_1(\Sigma_n(A, B), \Sigma_n(B)). \tag{2}$$

1.2. **Equivalence homotopique.** — Soit (A, B) une paire topologique, on dira que A et B sont *homotopiquement équivalents* si l'homomorphisme canonique

$$\pi_0(B) \to \pi_0(A)$$

est bijectif, ainsi que l'homomorphisme canonique

$$\pi_n(B; b) \to \pi_n(A; b)$$

pour tout $b \in B$ et pour tout $n \geqq 1$.

Pour que A et B soient homotopiquement équivalents, il faut et il suffit que, pour tout entier $n \geqq 0$, et tout $a \in \Sigma_n(A, B)$, il existe un élément α de $\Sigma_{n+1}(A)$ dont a soit une face, et dont toutes les autres n-faces soient des éléments de $\Sigma_n(B)$. Il suffit pour cela que pour tout entier $n \geqq 0$, la condition suivante soit satisfaite :

($\mathcal{E}_n$) *Pour tout* $a \in \Sigma_n(A, B)$, *il existe* $\alpha \in \Sigma_1(\Sigma_n(A, B)$, *tel que* α *ait pour origine* a, *et que la restriction de* α *à* $]0, 1]$ *soit une application continue de* $]0, 1]$ *dans* $\Sigma_n(B)$.

1.3. Définition. — Soit (A, B) une paire topologique; soit $a \in A$; soit n un entier $\geqq 0$. On dit que *B est n-localement connexe dans A en a*, si pour tout voisinage U de a dans A, il existe un voisinage V de a dans A tel que (si l'on munit $U \cap B$ et $V \cap B$ de la topologie forte) tout élement de $\dot{\Sigma}_{n+1}(V \cap B)$ est bord d'un élément de $\Sigma_{n+1}(U \cap B)$.

On utilise l'abréviation n-l. c. (si $B = A$, on retrouve la n-locale connexion classique). Si B est n-l. c. dans A pour tout $a \in A$, on dit que *B est n-l. c. dans A*.

1.4. Condition suffisante d'équivalence dans le cas d'une paire métrisable. — Une paire topologique (A, B) est dite *métrisable* si A et B le sont. Noter que tous les espaces $\Sigma_n(A)$, $\Sigma_n(A, B)$, etc. sont alors métrisables.

Théorème 1. — *Soit* (A, B) *une paire métrisable. Si :*

1° *B est dense dans A.*

2° *Soit B est n-localement connexe dans A pour tout entier $n \geqq 0$.*

3° *$\Sigma_n(B)$ est n'-localement connexe pour tout couple (n, n') d'entiers $\geqq 0$.*

Alors A et B sont homotopiquement équivalents.

Schéma de la démonstration.

Lemme 1. — Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ une paire métrisable. Si $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{A}$ et 0-l. c. dans $\mathcal{A}$, alors pour tout $a \in \mathcal{A}$, il existe un chemin continu d'origine a dans $\mathcal{A}$, dont la restriction à $]0, 1]$ soit à valeurs dans B, et soit B-continue.

Lemme 2. — Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ une paire métrisable.

1° Si $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{A}$ et 0-l. c. dans $\mathcal{A}$, $\Sigma_1(\mathcal{B})$ est dense dans $\Sigma_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

2° Soit n un entier $\geqq 0$, si $\mathcal{B}$ est n-l. c. dans $\mathcal{A}$ et $(n+1)$-l. c. dans $\mathcal{A}$, et si $\mathcal{B}$ est n-l. c., alors $\Sigma_1(\mathcal{B})$ est n-l. c. dans $\Sigma_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Démonstration du théorème 1 a partir des lemmes 1 et 2. — On montre que, pour tout entier $n \geqq 0$, la paire (A, B) vérifie la condition $(\mathcal{E}_n)$ de 1.2. D'après le lemme 1, il suffit pour cela de montrer que pour tout entier $n \geqq 0$, $\Sigma_n(B)$ est dense et 0-l. c. dans $\Sigma_n(A, B)$. En fait, on montre ceci *: pour tout couple* (n, n') d'entiers $\geqq 0$, $\Sigma_n(B)$ est dense et n'-l. c. dans $\Sigma_n(A, B)$; on le montre par récurrence sur n; d'après les hypothèses 1° et 2° du théorème 1, c'est vrai pour $n = 0$. Supposons que ce soit vrai pour un certain $n \geq 0$. c'est alors vrai aussi pour $(n+1)$ d'après l'hypothèse 3° du théorème 1, le lemme 2, et les formules (1) et (2) de 1.1.

2. Paires homogènes : critère de relèvement des petits cubes; applications.

2.1 Soient G un groupe topologique, H un sous-groupe de G muni d'une topologie (compatible avec sa structure de groupe) plus fine que celle induite par G. On dit alors que (G, H) est une *paire de groupes topologiques*. Soit G_0 un sous-groupe de G, et soit H_0 le groupe $H \cap G_0$ muni de la topologie induite par H; on dit que (G_0, H_0) est une *sous-paire* de (G, H). Soit A (resp. B) l'espace homogène des classes à gauche G/G_0 (resp. H/H_0); il y a une application canonique de B dans A qui fait de (A, B) une paire topologique; on dit que (A, B) est la *paire homogène* $(G, H)/(G_0, H_0)$. Dans la suite, on supposera en outre toujours que G_0 *est fermé dans* G, alors H_0 est fermé dans H, et si G et H sont métrisables, A et B le sont aussi.

On note p la projection canonique de G sur A ; on note e l'élément neutre commun de G, H, G_0, H_0, ainsi que l'élément $p(e)$ commun à A et B. On montre sans difficulté le :

Lemme 1. — Soit $(A, B) = (G, H)/(G_0, H_0)$ une paire homogène; on suppose H dense dans G. Soit n un entier ≥ 0; si B est n-l. c. dans A en e, alors B est n-l. c. dans A.

Lemme 2. — Soit $(A, B) = (G, H)/(G_0, H_0)$ une paire homogène. On note $\Omega_n(A)$ le sous-espace de $\Sigma_n(A)$ formé des n-cubes singuliers qui envoient l'origine O de I^n en e; notations analogues : $\dot{\Omega}_n(A)$, $\Omega_n(B)$, $\Omega_n(A, B)$, etc. Supposons H_0 dense dans G_0. Alors quel que soit l'entier $n \geq 0$, pour que B soit n-l. c. dans A en e, il suffit que, pour tout voisinage U de e dans A, il existe un voisinage V de e dans A tel que (si l'on munit $U \cap B$ et $V \cap B$ de la topologie forte) tout élément de $\dot{\Omega}_{n+1}(V \cap B)$ soit bord d'un élément de $\Omega_{n+1}(U \cap B)$.

Remarque. — Dans le cas général d'une paire topologique (A, B), soit e un point arbitraire de B. Si B *est* 0-*l. c. dans* A *en* e, alors *pour tout entier* $n \geq 1$, la condition du lemme 2 suffit à assurer la n-locale-connexion de B dans A en e.

2.2. Soit (A, B) une paire homogène. Soit n un entier ≥ 0. A l'application p est canoniquement associée une application $p_n : \Sigma_n(H) \to \Sigma_n(B)$; cette application est continue. Notons encore e l'élément de $\Sigma_n(B)$ canoniquement défini par e ; $\overset{-1}{p}_n(\{e\})$ n'est autre que $\Sigma_n(H_0)$, de sorte qu'on a une application continue :

(3) $$\Sigma_n(H)/\Sigma_n(H_0) \to \Sigma_n(B).$$

En général, l'application (3) n'est ni surjective, ni ouverte; si (A, B, p) est un fibré de Serre, (3) est *surjectif*. Si (H, B, p) est un fibré localement trivial, alors (3) est un *homéomorphisme*; en outre $\Sigma_n(H)$ est fibré *localement trivial* sur $\Sigma_n(B)$.

2.3. Soit toujours (A, B) une paire homogène. On note H' l'espace H muni de la topologie faible. Pour tout entier $n \geqq 0$, on note $\Sigma'_n(H)$ l'espace $\Sigma_n(H)$ muni de la topologie faible, i. e. induite par $\Sigma_n(H')$. Définitions analogues pour : H'_0, B', $\Sigma'_n(H_0)$, $\Sigma'_n(B)$. On a un homéomorphisme canonique

$$\Sigma'_1(\Sigma_n(H)) \approx \Sigma'_{n+1}(H) \tag{4}$$

et l'analogue relatif à B.

On a une application canonique continue

$$\Sigma'_n(H)/\Sigma'_n(H_0) \to \Sigma'_n(B). \tag{3'}$$

Au point de vue ensembliste, (3') coïncide avec (3), de sorte que si (H, B, p) est un fibré de Serre, (3') est surjective. Mais, même si (H, B, p) est localement trivial (3') n'est pas nécessairement ouverte.

Définition. — Si l'application (3') est ouverte, on dit que (A, B) *vérifie en e le relèvement des petits n-cubes.*

[La condition « (A, B) vérifie en e le relèvement des petits n-cubes » peut donc s'expliciter comme suit : Soit $\mathcal{U}$ un voisinage arbitraire de e dans H', il existe un voisinage U de e dans B' tel que, si l'on munit $\mathcal{U}$ et U de la topologie forte, tout élément de $\Sigma_n(U)$ soit l'image par (3) d'au moins un élément de $\Sigma_n(\mathcal{U})$.]

Si (H, B, p) est un fibré localement trivial, et si (A, B) vérifie en e le relèvement des petits n-cubes, alors l'application (3') est un *homéomorphisme*.

On montre immédiatement le :

Lemme. — Soit $(A, B) = (G, H)/(G_0, H_0)$ une paire homogène. Si H_0 est dense dans G_0, alors

$$H'/H'_0 \approx B'.$$

2.4. Soit (A, B) une paire topologique.

Définition. — Soit $a \in A$. On dit que B est *presque localement connexe par arcs dans A en a* si, pour tout voisinage U de a dans A, il existe un voisinage V de a dans A tel que tout couple (b, b') de points de $V \cap B$ puisse être joint par un chemin β de $U \cap B$ continu pour la topologie faible et « presque continu » pour la topologie forte au sens suivant : il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que β soit continu sur $[0, \theta[$ et sur $[\theta, 1]$.

On utilise l'abréviation p. l. c. a. Il est clair que la condition p. l. c. a. est plus faible que la condition o-l. c. [1]. Les propriétés suivantes sont immédiates :

2.4.1. Soit n un entier $\geqq 0$. Si B est p. l. c. a. dans A en a, alors $\Sigma_n(B)$ p. l. c. a. dans $\Sigma_n(A)$ au point de $\Sigma_n(A)$ canoniquement défini par a.

2.4.2. Dans le cas d'une paire de groupes (G, H), dans la condition p. l. c. a. on peut remplacer « $\theta \in [0, 1]$ » par « $\theta = 1$. »

2.5. Théorème 2. — *Soit* $(A, B) = (G, H)/(G_0, H_0)$ *une paire homogène; supposons* :

1° (H, B, p) *fibré localement trivial.*

2° H_0 *dense dans* G_0.

3° H_0 *p. l. c. a. dans* G_0 *en* e.

Alors, pour tout entier $n \geqq 0$, (A, B) *vérifie en* e *le relèvement des petits* n*-cubes*,

Indications sur la démonstration. — On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$, cela résulte du lemme 2.3. Pour le passage de $(n-1)$ à n, on pose $\Sigma_{n-1}(B) = \mathcal{B}$, $\Sigma'_{n-1}(B) = \mathcal{B}'$, $\Sigma_{n-1}(H) = \mathcal{H}$, etc. d'après l'hypothèse de récurrence, et compte tenu de (2.2), on a $\mathcal{B}' \approx \mathcal{H}'/\mathcal{H}'_0$. La paire homogène $(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = (\mathcal{H}', \mathcal{H})/(\mathcal{H}'_0, \mathcal{H}_0)$ vérifie compte tenu de 2.4.1 les hypothèses du :

Lemme. — Soit $(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = (\mathcal{H}', \mathcal{H})/(\mathcal{H}'_0, \mathcal{H}_0)$ une paire homogène telle que $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}$ coïncident au point de vue ensembliste; si $(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ vérifie les conditions 1° et 3° du théorème 2, alors $(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ vérifie en e la condition de relèvement des petits 1-cubes.

Le théorème résulte alors immédiatement de la formule (4) de 2.3. La démonstration du lemme se fait en utillsant la condition p. l. c. a. sous la forme 2.4.2.

2.6. Lemme « de suite exacte ». — Soit $(A, B) = (G, H)/(G_0, H_0)$ une paire homogène.

Supposons, pour tout entier $n \geqq 0$, que (A, B) vérifie en e la condition de relèvement des petits n-cubes et que H_0 soit n-l. c. dans G_0 en e.

Alors, il y a équivalence entre la propriété : H est n-l. c. dans G en e pour tout entier $n \geqq 0$, et la propriété analogue relative à (A, B).

---

[1] Dans toute la suite, on pourrait se borner à faire intervenir la notion de o-l. c. L'intérêt de la notion de p. l. c. a. est le suivant : le groupe des difféomorphismes de la boule B_n est, quel que soit l'entier n, p. l. c. a. dans celui de ses automorphismes. Alors qu'il résulte facilement de Milnor [4] que pour $n = 6$ ces groupes *ne vérifient pas* la condition o-l. c.

INDICATIONS SUR LA DÉMONSTRATION. — On commence par montrer que si (A, B) vérifie en e le relèvement des petits n-cubes, alors on peut en plus se donner d'avance le relèvement sur une face, pourvu qu'il soit assez « petit ». On exprime la condition n-l. c. en e sous la forme donnée par le lemme 2 de 2.1. La démonstration suit alors pas à pas celle de la suite exacte classique d'homotopie pour les espaces fibrés au sens de Serre.

Compte tenu du lemme de suite exacte, le théorème 2 admet le :

COROLLAIRE. — *Soit $(A, B)=(G, H)/(G_0, H_0)$ une paire homogène. Supposons :*

1° *(H, B, p) fibré localement trivial.*

2° *H_0 dense dans G_0.*

3° *H_0 n-l. c. dans G_0 en e pour tout entier $n \geqq 0$.*

Alors il y a équivalence entre la propriété : H est n-l. c. dans G en e pour tout entier $n \geqq 0$, et la propriété analogue relative à (A, B).

3. Application à la comparaison des groupes d'homotopie du groupe des automorphismes et du groupe des difféomorphismes d'une variété compacte de dimension 3.

3.1. Par *variété* (sous-entendu; de classe C^∞) de dimension n, on entend objet de la catégorie locale dont la catégorie des modèles est celle des ouverts du cube I^n, les morphismes de ces modèles étant les applications de classe C^∞. Une *sous-variété* de dimension $m \leqq n$ d'une variété F de dimension n, est une partie E de F telle que, pour tout $x \in E$, il existe une carte locale de F au voisinage de x, dans laquelle les équations et inéquations locales de E soient celles d'un « sous-modèle de dimension m » du modèle de la carte.

EXEMPLES de variétés au sens ci-dessus : les variétés à bord au sens habituel, les cubes; le produit de deux variétés est muni naturellement d'une structure de variété.

DÉFINITION 1. — Soit F une variété de dimension n. On dit que F est *différentiablement étoilée*, si F est difféomorphe à une sous-variété de R^n étoilée par rapport à un de ses points intérieurs. Exemples : I^n, $B_{n-1} \times I$, etc.; le produit de deux variétés différentiablement étoilées est différentiablement étoilé.

DÉFINITION 2. — Soit F une variété de dimension n. Soient F_i et F_j deux sous-variétés *fermées* de F. On dit que F_i et F_j définissent une *décomposition régulière* de F, si :

a. $F = F_i \cup F_j$.

b. $F_i \cup F_j$ est une sous-variété de dimension $(n-1)$ de F.

DÉFINITION 3. — Soit F une variété de dimension n. On dit que F est *de hauteur* 1 si F est différentiablement étoilée. On dit que F est de hauteur $\leqq p$ s'il existe une décomposition régulière (F_i, F_j) de F telle que F_i et F_j soient de hauteur $\leqq (p-1)$.

LEMME. — *Toute variété compacte de dimension* 3 *est de hauteur finie.*

(La démonstration consiste à montrer l'existence d'un « diagramme de Heegard différentiable ».)

3.2. Paire homogène associée à une décomposition régulière. — Soit F une variété compacte, soit (F_i, F_j) une décomposition régulière de F; on note $F_i \cup F_j = E$.

On note G le groupe des automorphismes (continus) de F qui induisent l'identité sur le bord $\dot{F}$ de F. On note G_0 le sous-groupe de G, formé des automorphismes qui induisent, en plus, l'identité sur E. On munit G et G_0 de la topologie C^0, qui en fait des groupes topologiques; G_0 est fermé dans G.

On note H le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de F qui sont tangents d'ordre infini à l'identité en tout point de $\dot{F}$. On note $H \cap G_0 = H_0$. On munit H et H_0 de la topologie C^∞, plus fine que la topologie C^0, qui en fait des groupes topologiques.

On note A (resp. B) l'espace homogène de classes à gauche G/G_0 (resp. H/H_0). (A, B) est une paire homogène métrisable; (H, B, p) est un fibré localement trivial (*cf.* [3]). En plus on a le :

LEMME. — Soit $(A, B) = (G, H)/(G_0, H_0)$ la paire homogène associée à une décomposition régulière (F_i, F_j) d'une variété compacte F. Soit G_i le groupe analogue à G et relatif à F_i; soient de même G_j, H_i, H_j. Soit n un entier $\geqq 0$; si H_i et H_j sont n-l. c. dans G_i et G_j respectivement en leur élément neutre, alors H_0 est n-l. c. dans G_0 en e.

INDICATIONS SUR LA DÉMONSTRATION. — Le groupe produit $H_i \times H_j$ s'identifie à un sous-groupe de H_0 : celui formé par des difféomorphismes qui sont tangents à l'identité en tout point de E. Il est démontré dans [3] que pour tout $h \in H_0$, il existe une isotopie γ de F associée à H qui a pour effet de ramener h dans $H_i \times H_j$, et que cette isotopie peut en plus être choisie fonction continue de h sur tout compact $K \subset H_0$. Il faut montrer que cette isotopie peut, en plus, être choisie arbitrairement petite au sens C^0 (et cela uniformément pour $h \in K$).

3.3. Rappel de résultats de la théorie des variétés de dimension 3.

THÉORÈME 3 (MOÏSE-BING, CAIRNS). — *Soit F une variété compacte de dimension* 3; *soit (F_i, F_j) ude décomposition régulière de F, soit G, H, etc., comme ci-dessus.*

1° *H est dense dans G, H_0 est dense dans G_0.*

2° *B' (i. e. B muni de la topologie faible) s'identifie canoniquement à un ouvert de l'espace, muni de la topologie C^0, des plongements : $E \to F$ qui sont tangents d'ordre infini à l'application identique en tout point du bord* $\dot{E}$ de E.

3° *A s'identifie canoniquement à un ouvert de l'espace* $\mathrm{Pl}^0(E, F)$ *(muni de la topologie C^0) des « bons » (« tame ») homéomorphismes de E dans F qui induisent l'identité sur $\dot{E}$.*

INDICATIONS SUR LA DÉMONSTRATION. — Le (1°) résulte de la conjonction des théorèmes d'approximation de CAIRNS (*cf.* [2]) et de MOÏSE (*cf.* [5], théorème 2) et BING (*cf.* [1], théorème 3). Le (2°) et le (3°) n'ont jamais à ma connaissance été énoncés, mais leur démonstration est une simple adaptation de celle du lemme 4 de MOÏSE [5].

COROLLAIRE. — *Avec les notations du théorème 3, soit V un voisinage tubulaire de E dans F, difféomorphé à $E \times [-1, +1]$; soit $V_i = E \times [0, 1]$ et $V_j = E \times [-1, 0]$; alors l'espace $\tilde{B}$ (analogue à B, associé à la décomposition régulière (V_i, V_j) de V) est localement isomorphe à B.*

[C'est une conséquence immédiate du (2°) du théorème 3.]

THÉORÈME 4 (SMALE [6]) :

1° *Dans le cas où F est la boule B_3, $\pi_i(H)$ est nul pour tout $i \geqq 0$.*

2° *Dans le cas où F est la sphère S_3, soit H^+ le sous-groupe de H formé des difféomorphismes concervant l'orientation. Alors les homomorphismes canoniques :*

$$\pi_i(SO(4)) \to \pi_i(H^+)$$

sont bijectifs pour tout $i \geqq 0$.

Du théorème 4 on déduit sans difficulté le :

COROLLAIRE. — *Dans le cas où F est une variété compacte, différentiablement étoilée, de dimension* 3 :

1° *$\pi_i(H)$ est nul pour tout $i \geqq 0$.*

2° *H est n-*l. c. *dans G en e pour tout entier $n \geqq 0$.*

3.4 Le théorème principal et quelques conséquences.

THÉORÈME 5. — *Soit F une variété compacte de dimension* 3, *soit (F_i, F_j) une décomposition régulière de F, soient F, G, H, G_0, H_0, A, B, comme en* (3.2).

1° *H est n-*l. c. *dans G en e, pour tout entier $n \geqq 0$.*

2° *B est n-*l. c. *dans A en e, pour tout entier $n \geqq 0$.*

Corollaire 1. — *Les hypothèses et les notations étant celles du théorème* 5, *G et H sont homotopiquement équivalents.*

Démonstration du corollaire 1. — La condition 1° du théorème 1 est satisfaite d'après le 1° du théorème 3; le 2° du théorème 1 est satisfait d'après le 1° du théorème 5 et le lemme 2.1; enfin le 3° du théorème 1 est satisfait d'après le même lemme 2.1, et la contractilité locale des groupes de difféomorphismes (*cf.* [3]).

Corollaire 2. — *Dans les hypothèses du théorème* 5, *on suppose en plus F orientable, on note G^+ et H^+ les sous-groupes respectifs de G et H formé des automorphismes conservant l'orientation. Alors G^+ et H^+ sont homotopiquement équivalents.*

Corollaire 3. — *Dans le cas où F est la sphère S_3, les homomorphismes canoniques :*

$$\pi_i(SO(4)) \to \pi_i(\mathrm{G}^+)$$

sont bijectifs pour tout $i \geqq 0$.

[Le corollaire 3 résulte immédiatement du (2°) du théorème 4 et du corollaire 2.]

Compte tenu du (3°) du théorème 3, on peut encore énoncer le :

Corollaire 4. — *L'application canonique $G \to \mathrm{Pl}^0(E, F)$ définit une quasi-fibration au sens de* Dold et Thom (²).

Schéma de la démonstration du théorème 5. — Du lemme 3.2, du (1°) du théorème 3, et du corollaire 2.6 on déduit le :

Lemme 0. — Soient F, F_i, F_j comme dans l'énoncé du théorème 3, soit H_i et H_j les groupes définis dans l'énoncé du lemme 3.2. Si pour tout entier $n \geqq 0$, H_i et H_j sont n-l. c. dans G_i et G_j respectivement en leur élément neutre, alors il y a équivalence entre : H est n-l. c. dans G en e pour tout entier $n \geqq 0$, et la propriété analogue relative au couple (A, B).

Ceci posé, on démontre le théorème 5 successivement dans les cas suivants :

a. $F = E \times [-1, +1]$, (où E est une variété compacte, différentiablement étoilée), $F_i = E \times [0, 1]$, $F_j = E \times [-1, 0]$.

[On utilise le 2° du corollaire du théorème 4, puis le lemme 0.]

b. F, F_i et F_j sont définis comme au (*a*), mais $E = S_1 \times [0, 1]$.

[On considère une décomposition régulière de F en deux cubes à laquelle sont associés des espaces A et B, compte tenu du corollaire du théorème 3,

(²) En fait, on peut même montrer qu'elle définit une fibration de Serre.

il résulte du (a) que B est n-l. c. dans A pour tout $n \geqq 0$, donc d'après le (a) et lemme 0, H est n-l. c. dans G en e pour tout $n \geqq 0$, ; la même propriété a donc lieu pour (A, B) d'après le lemme 0.]

c. F, F_i, et F_j sont définis comme au (a), mais E est une variété compacte de hauteur arbitraire.

[On procède par récurrence sur la hauteur de E, ce qui est possible d'après le lemme 3.1. Si E est de longueur l, on est dans le cas (a). La démonstration de récurrence est analogue à la démonstration du cas (b); elle utilise les cas (a) et (b).]

d. Cas général.

[On procède par récurrence sur la hauteur de F, ce qui est encore possible d'après 3.1. Si F est de hauteur 1, on est dans le cas (a). La démonstration de récurrence est analogue à celle du cas (c), elle utilise le cas (c).]

BIBLIOGRAPHIE

[1] BING (R. H.). — *Locally tame sets are tame* (*Ann. Math.*, t. 59, 1954, p. 145-158).
[2] CAIRNS (S.). — *Homeorphisms between topological manifolds and analytic manifolds* (*Ann. Math.*, t. 41, 1940, p. 796-808).
[3] CERF (J.). *Topologie de certains espaces de plongements* (à paraître).
[4] MILNOR (J.). — *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere* (*Ann. Math.*, t. 64, 1956, p. 399-405).
[5] MOISE 5E. E.). — *Affine structure in 3-manifolds*, V. (*Ann. Math.*, t. 56, 1952, p. 96-114).
[6] SMALE (S.). — *On diffeomorphisms of the 3-sphere* (à paraître).

Jean CERF,
Chargé de Cours
à la Faculté des Sciences de Lille.
23 *bis*, rue Denfert-Rochereau,
Boulogne-sur-Seine (Seine).