EUGENIO CALABI
EDOARDO VESENTINI

Sur les variétés complexes compactes localement symétriques

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 311-317
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__311_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89. 1959. Lille].
Bull. Soc. math. France.
87, 1959, p. 311 à 317.

SUR LES VARIÉTÉS COMPLEXES COMPACTES LOCALEMENT SYMÉTRIQUES;

PAR

EUGENIO CALABI [1] ET EDOARDO VESENTINI.

Cet exposé donne un résumé préliminaire d'un travail en collaboration qui paraîtra prochainement. Son but est d'étudier les déformations des variétés complexes compactes $X = D/\Delta$ qu'on peut obtenir comme quotients d'un domaine borné symétrique D de l'espace $\mathbf{C}^n$ de n variables complexes par un groupe discontinu Δ d'automorphismes. Nous prouverons que, si D est irréductible, de dimension $n > 1$, et s'il appartient à une des quatre grandes classes de la classification de Élie CARTAN (*voir*, par exemple, [1], p. 179-180), alors la structure complexe de X est localement stable. Cette conclusion subsiste même si D est un produit $D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_l$ de l domaines bornés symétriques irréductibles D_i, pourvu que chaque D_i, appartienne à une des quatre grandes classes de la classification de É. CARTAN et que : $\dim_{\mathbf{C}} D_i > 1$ pour $i = 1, \ldots, l$.

Pour les détails et les démonstrations nous renvoyons à notre travail commun.

1. Généralités sur les déformations. — Toutes les variétés considérées ici seront supposées paracompactes. Soit M une variété différentiable (de classe C^∞) connexe, et soit $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ un espace fibré C^∞-différentiable (localement trivial) sur la base M, tel que chaque fibre $V_t = \varpi^{-1}(t)$ $(t \in M)$, soit une variété analytique complexe, de dimension complexe n, connexe, dont la structure complexe soit compatible avec la structure différentiable induite par celle de $\mathcal{V}$.

(1) The research of this author was supported by the United States Air Force, through the Air Force Office of Scientific Researcb of the Air Research and Development Command under Contract n° 49 (638), p. 253.

On dit que la structure complexe de V_t *dépend différentiablement* de $t \in M$ et que l'espace fibré $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ est une famille différentiable de structures complexes si, pour tout point $x \in \mathcal{V}$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ et un homéomorphisme (de classe C^∞) de $\mathcal{U}$ dans $\mathbf{C}^n \times \varpi(\mathcal{U})$, de façon telle que la restriction de cet homéomorphisme à $\mathcal{U} \cap V_t\ (t \in M)$ soit une transformation birégulière (au sens analytique complexe) de $\mathcal{U} \cap V_t$ dans $\mathbf{C}^n \times t$.

La famille $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ est dite *triviale* s'il existe une représentation différentiable (de classe C^∞) : $\mathcal{V} \to V_0 = \varpi^{-1}(0) = (0 \in M)$ qui transforme birégulièrement chaque fibre $V_t = \varpi^{-1}(t) = (t \in M)$, sur la fibre V_0.

Soit Θ le faisceau des germes des champs de vecteurs tangents holomorphes sur une variété complexe, compacte X.

Un théorème fondamental de Frölicher et Nijenhuis ([2] et [8], théorème 6.3, p. 365), affirme que, si $H^1(X, \Theta) = 0$, la structure complexe de X est ocalement stable; c'est-à-dire, pour chaque famille différentiable $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ à fibres compactes, contenant X comme fibre $X = V_0 = \varpi^{-1}(0) = (0 \in M)$, il existe un voisinage U de 0 dans M, tel que la famille $\varpi^{-1}(U)$ soit triviale.

2. Opérateurs différentiels sur une variété complexe. — Soit E une structure fibrée analytique complexe à fibre vectorielle sur une variété complexe compacte X, et soient $\mathbf{A}^{p,q}(E)$ et $A^{p,q}(E)$ respectivement le faisceau des germes des (p, q)-formes différentielles extérieures, (à valeurs complexes et de classe C^∞) à coefficients dans E, et l'espace vectoriel complexe des sections globales de $\mathbf{A}^{p,q}(E)$.

$\mathbf{A}(E) = \Sigma \mathbf{A}^{p,q}(E)$ est un faisceau bigradué sur X. L'opérateur $\bar\partial$ de différentiation extérieure, par rapport aux conjuguées des coordonnées locales complexes, définit un opérateur cobord pour le complexe $\Gamma(\mathbf{A}(E)) = \Sigma A^{p,q}(E)$ des sections globales de $\mathbf{A}(E)$. Il est bien connu, d'après Dolbeault (*voir*, par exemple, [4], p. 116), que la composante de type (p, q), $H^{p,q}(X, \mathbf{E})$, de la $\bar\partial$-cohomologie de $\Gamma(\mathbf{A}(E))$ est isomorphe au groupe de cohomologie : $H^q(X, \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^{(p)})$, où $\mathbf{E}$ et $\mathbf{T}^{(p)}$ dénotent respectivement le faisceau des germes des sections holomorphes de E et le faisceau des germes des sections holomorphes de la structure $T^{(p)}$ fibrée des p-formes holomorphes sur X.

Soit $E^\star$ la structure fibrée duale de E. Lorsqu'on se donne une métrique hermitienne (de classe C^∞) sur les fibres de E, dépendant différentiablement des fibres, on peut définir un isomorphisme de $E \otimes T^{(p)} \otimes \overline{T^{(q)}}$ sur $E^\star \otimes T^{(q)} \otimes \overline{T^{(p)}}$, et par conséquent un isomorphisme de $A^{p,q}(E)$ sur $A^{q,p}(E^\star)$, qui, à chaque forme φ de type (p, q), à coefficients dans E, associe une forme $\varphi^\star$ de type (q, p), à coefficients dans $E^\star$. Lorsqu'on choisit une métrique hermitienne (de classe C^∞) dans la structure tangente à X, on peut définir l'isomorphisme bien connu :

$$\star : \quad E \otimes T^{(p)} \otimes \overline{T^{(q)}} \to E \otimes T^{(n-q)} \otimes \overline{T^{(n-p)}}$$

et par conséquent un isomorphisme de $A^{p,q}(E)$ sur $A^{n-q,n-p}(E)$, qui, à chaque (p, q)-forme φ à coefficients dans E, associe une forme $\star\varphi$ de type $(n\text{-}q, n\text{-}p)$, à coefficients dans la même structure E.

On définit par

$$(\varphi, \psi) = \int_X \varphi \wedge \star\psi^\star \qquad (\star\psi^\star = \star(\psi^\star) = (\star\psi)^\star).$$

Le produit intérieur de deux formes $\varphi, \psi \in A^{p,q}(E)$.

Soient ∂, $\mathfrak{d}$ et $\bar{\mathfrak{d}}$ les opérateurs définis respectivement par les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} (\partial\varphi)^\star = \bar\partial(\varphi^\star), & \mathfrak{d}\varphi = -\star\partial\star\varphi, \\ \bar{\mathfrak{d}}\varphi = -\star\bar\partial\star\varphi & (\varphi \in A^{p,q}(E)). \end{cases}$$

On vérifie que pour chaque $\varphi \in A^{p,q}(E)$, $\psi \in A^{p,q+1}(E)$, $\tau \in A^{p+1,q}(E)$ on a

$$(\bar\partial\varphi, \psi) = (\varphi, \mathfrak{d}\psi), \qquad (\partial\varphi, \tau) = (\varphi, \bar{\mathfrak{d}}\tau).$$

Soit $\{U_i\}$, un recouvrement ouvert fini suffisamment fin de X, et soit $z_i^\alpha = (\alpha = 1, \ldots, n = \dim_{\mathbf{C}} X)$, un système de coordonnées locales complexes dans U_i. Si h_i dénote la représentation locale dans U_i de la métrique hermitienne choisie sur les fibres de E, la forme de type $(1, 0)$.

$$\theta_i = h_i^{-1}\, d' h_i$$

(où d' dénote l'opérateur de différentiation extérieure par rapport aux coordonnées locales complexes z_i^α) définit une forme globale θ à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe de structure de E qui est associé à une connexion dans la structure fibrée principale associée à E. La forme de courbure de cette connexion est donnée par $\bar\partial\,\theta$ ([9]).

Soit :

$$\chi = \sqrt{-1}\,\bar\partial\theta.$$

On démontre que la différenciation covariante D par rapport à la connexion θ est donnée par :

$$D = \partial + \bar\partial$$

Les deux opérateurs :

$$\square' = \bar\partial\mathfrak{d} + \mathfrak{d}\bar\partial, \qquad \square'' = \partial\bar{\mathfrak{d}} + \bar{\mathfrak{d}}\partial$$

sont strictement elliptiques. Puisque X est compacte, les espaces vectoriels complexes $\mathbf{H}'^{p,q}(X, E)$ et $\mathbf{H}''^{p,q}(X, E)$ des formes $\varphi \in A^{p,q}(E)$ telles que :

$$\square'\varphi = 0 \qquad \text{ou, respectivement,} \qquad \square''\varphi = 0$$

ont une dimension finie. On obtient des (1) que :

$$\mathbf{H}''^{p,q}(X, E) \simeq \mathbf{H}'^{q,p}(X, E^{\star}).$$

KODAIRA a démontré que :

$$\mathbf{H}'^{p,q}(X, E) \simeq H^{q}(X, \mathbf{E} \otimes \mathbf{T}^{(p)}).$$

LEMME 1. — *Si la métrique choisie dans (la structure tangente à) X est kählérienne. pour chaque forme $\varphi \in A^{p,q}(E)$, on a*

$$(\varphi, \square' \varphi) - (\varphi, \square'' \varphi) = (e(\chi)\Lambda\varphi - \Lambda e(\chi)\,\varphi, \varphi),$$

où $e(\chi)$ dénote le produit extérieur de χ considérée comme opérateur sur les formes vectorielles extérieures.

On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Si la métrique choisie dans X est kählérienne. pour chaque $\varphi \in \mathbf{H}'^{p,q}(X, E)$, on a :*

$$(\Lambda e(\chi)\,\varphi - e(\chi)\Lambda\varphi, \varphi) = (\varphi, \square''\varphi) = (\partial\varphi, \partial\varphi) + (\bar{\mathfrak{d}}\varphi, \bar{\mathfrak{d}}\varphi) \geqq 0.$$

3. Variétés complexes localement symétriques. — Les domaines bornés symétriques D de l'espace $\mathbf{C}^n$ de n variables complexes ont été classifiés complètement par É. CARTAN. Selon la numérotation de C. L. SIEGEL ([**10**] et [**1**], p. 178-179) on a les types suivants :

Type $\mathrm{I}_{r,s}$. — D est l'ensemble des matrices Z complexes de type $r \times s$ telles que

$$(2) \qquad I_s - {}^tZ.\bar{Z} > 0,$$

où I_s est la matrice unité de $GL(s, \mathbf{C})$. On a : $n = \dim_{\mathbf{C}} D = rs$.

Type II_r. — D est l'ensemble des $r \times r$ matrices complexes *antisymétriques* Z satisfaisant la (2) avec $s = r$. On a $n = \dim_{\mathbf{C}} D = r(r-1)/2$.

Type III_r. — D est l'ensemble des $r \times r$ matrices complexes *symétriques* Z à partie imaginaire définie positive. On a $n = \dim_{\mathbf{C}} D = r(r+1)/2$.

Type IV_n. — D est l'ensemble des $n \times 1$ matrices Z complexes telles que :

$$2({}^tZ.\bar{Z}) < 1 + |{}^tZ.Z|^2 < 2.$$

Pour $n = 2$, D est le produit de deux demi-plans de Poincaré.

Outre ces quatre grandes classes de domaines bornés symétriques, il y a deux types exceptionnels, de dimensions complexes respectives $n = 16$, et $n = 27$, dont les définitions sont plus compliquées que les précédentes et que nous n'indiquerons pas ici.

Les types $I_{1,1}$, II_2, III_1 et IV_1 sont équivalents au demi-plan de Poincaré. On a aussi les équivalences suivantes : $I_{1,3}$ et II_3 ; $I_{2,2}$ et IV_4 ; III_2 et IV_3 ; IV_6 et II_4 ; $I_{r,s}$ et $I_{s,r}$.

D'après un résultat de H. CARTAN, le groupe $\mathfrak{A}(D)$ des automorphismes d'un domaine borné D, muni de la topologie de la convergence compacte, est un groupe de Lie. Les groupes discontinus d'automorphismes de D sont exactement les sous-groupes discrets de $\mathfrak{A}(D)$.

Soit D un domaine borné symétrique *irréductible* appartenant à un des types I-IV et soit Δ un sous-groupe discontinu d'automorphismes de D, tel que :

1° le quotient $X = D/\Delta$ soit compact;

2° l'identité soit le seul élément de Δ ayant des points unis dans D.

D'après un résultat de Kodaira [7], $X = D/\Delta$ est une variété projective non singulière

A l'aide du théorème 2 (ou d'une inégalité de S. NAKANO [9]) on peut démontrer la proposition suivante, qui est le résultat central de cet exposé :

THÉORÈME 3. — *Soit* Θ *le faisceau des germes des champs de vecteurs holomorphes tangents à* $X = D/\Delta$. *On a :*

$$H^q(X, \Theta) = 0,$$

lorsque D est irréductible et

1° $q < r + s - 1$ *pour chaque domaine D de type* $I_{r,s}$;
2° $q < 2r - 3$ » » D » II_r $(r \geq 2)$;
3° $q < r$ » » D » III_r ;
4° $q < n - 1$ » » D » IV_n $(n \geq 3)$.

En particulier sous les hypothèses précédentes, si $n > 1$,

$$H^1(X, \Theta) = 0. \tag{3}$$

Il suit de là, par le théorème de Frölicher-Nijenhuis, le

THÉORÈME 4. — *Si* $n > 1$, *et si D est irréductible, la structure complexe de* $X = D/\Delta$ *est localement stable.*

En vertu du théorème 3 et à l'aide d'une formule de type Künneth (*voir*, par exemple, [3], p. 244), on peut démontrer que :

$$H^1(X, \Theta) = 0 \qquad [\text{et } H^0(X, \Theta) = 0]$$

même si D est un produit $D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_l$ de domaines bornés symétriques *irréductibles* $D_i (i = 1, \ldots, l)$ de type I-IV et de dimensions complexes > 1. Il découle que *le théorème 4 subsiste même pour des domaines bornés symétriques réductibles satisfaisants aux conditions ci-dessus.*

4. Un cas particulier. — Le théorème de Riemann-Roch ([4], p. 154) appliqué à la structure fibrée des vecteurs complexes tangents à $X = D/\Delta$ permet de calculer la somme alternée des dimensions des groupes de cohomologie $H^q(X, \boldsymbol{\Theta})$ non compris dans l'énoncé du théorème 3, mais naturellement il ne peut pas donner en général aucun renseignement sur les dimensions de tous ces groupes.

Il y a seulement un cas où le théorème 3 et le théorème de Riemann-Roch permettent d'achever le calcul des dimensions des groupes $H^q(X, \boldsymbol{\Theta})$. C'est le cas d'un domaine borné symétrique irréductible D de type $\mathrm{I}_{1,s}$; c'est-à-dire le cas où D est la boule ouverte de rayon un de $\mathbf{C}^n$ ($n = \dim_{\mathbf{C}} D = s$). Dans ce cas, en vertu du théorème 3, le seul groupe de cohomologie $H^q(X, \boldsymbol{\Theta})$ qui n'est pas nécessairement zéro est le groupe $H^n(X, \boldsymbol{\Theta})$. Par un résultat de Igusa ([6], théorème 8, p. 676 et [5]) on obtient, à partir du théorème de Riemann-Roch que la dimension de $H^n(X, \boldsymbol{\Theta})$ est complètement déterminée par la mesure invariante $v(X)$ de X dans son revêtement universel D. En effet, la caractéristique

$$\chi(X, \boldsymbol{\Theta}) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \dim H^q(X, \boldsymbol{\Theta})$$

est égale à

$$\chi(X, \boldsymbol{\Theta}) = (-1)^n \frac{n(n+2)n!}{\pi^n} v(X)$$

ou même, en vertu d'une formule de Igusa ([6], p. 676), à

$$\chi(X, \boldsymbol{\Theta}) = \frac{n(n+2)}{n+1} E(X),$$

où $E(X)$ dénote la caractéristique d'Euler-Poincaré de X.

Par conséquent, en vertu du théorème 3,

$$(4) \qquad \dim H^n(X, \boldsymbol{\Theta}) = \frac{n(n+2)n!}{n} v(X) = (-1)^n \frac{n(n+2)}{n+1} E(X).$$

Puisqu'on a l'isomorphisme canonique ([8], (11.9), p. 386)

$$H^q(X, \boldsymbol{\Theta}) \simeq H^{n-q}(X, \mathbf{T}^{(1)} \otimes \mathbf{K},$$

où K dénote la structure linéaire canonique sur X, on obtient de (4) que la dimension de $H^0(X, \mathbf{T}^{(1)} \otimes \mathbf{K})$, c'est-à-dire le « nombre » des formes linéaires holomorphes à coefficients dans K, est donné par :

$$\dim H^0(X, \mathbf{T}^{(1)} \otimes \mathbf{K}) = \frac{n(n+2)n!}{\pi^n} v(X) = (-1)^n \frac{n(n+2)}{n+1} E(X).$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOREL (A.). — *Les fonctions automorphes de plusieurs variables complexes Bull. Soc. math. France*, t. 80, 1952, p. 167-182).

[2] FRÖLICHER (A.) and NIJENHUIS (A.). — *A theorem of stability of complex structures* (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, *t.* 43, 1957, p. 239-241.)

[3] GODEMENT (R.). — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* — Paris, Hermann, 1958, (*Act. scient. et ind.*, 1252).

[4] HIRZEBRUCH (F.) — *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie.* — Berlin, Springer-Verlag, 1956 (*Ergebnisse der Mathematik*, neue Folge, 9).

[5] HIRZEBRUCH (F.). — *Automorphe Formen und der Satz von Riemann-Roch* (*Symposium on algebraic topology*, 1956, Mexico, p. 129-144). — Mexico, Universidad nacional autonoma, 1958.

[6] IGUSA (Jun-Ichi). — *On the structure of a special class of Kähler varieties* (*Amer*, *J. Math.*, t, 76, 1954, p. 669-678).

[7] KODAIRA (K.). — *On Kähler varieties of restricted type* (*Annals Math.*, t. 60, 1954, p. 28 48).

[8] KODAIRA (K.) and SPENCER (D. C.) — *On deformations of complex analytic structures* (*Annals Math.*, t. 67, 1958, p. 328-466).

[9] NAKANO (S.). — *On complex analytic vector bundles* (*J. Math. Soc. Japan*, t. 7, 1955, p. 1-12).

[10] SIEGEL (C. L.). — *Analytic functions of several complex variables.* — Princeton, Institute for advanced Study, 1949 (Notes miméogr.).

[11] YANO (K.) and BOCHNER (S.). — *Curvature and Betti numbers.* — Princeton, Princeton University Press, 1953 (*Annals Math. Studies*, 32).

Eugenio CALABI,
Institute of Technology,
University of Minnesota
Minneapolis 14 (États-Unis).

Edoardo VESENTINI,
Istituto Matematico « Leonida Tonelli »,
Università degli Studi,
Pisa (Italie).