BULLETIN DE LA S. M. F.

J. FRANK ADAMS

Exposé sur les travaux de C. T. C. Wall sur l'algèbre de cobordisme Ω

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 281-284
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__281_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89. 1959. Lille].
Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 281 à 284.

EXPOSÉ SUR LES TRAVAUX DE C. T. C. WALL SUR L'ALGÈBRE DE COBORDISME Ω;

PAR

J. FRANK ADAMS
(Cambridge).

Ce rapport est consacré à l'exposé des travaux de C.T.C. WALL de Trinity College, Cambridge.

Soient Ω et N les algèbres de cobordisme introduites par R. THOM. Soit $r: \Omega \rightarrow N$ l'homomorphisme naturel. On a alors le lemme suivant :

LEMME 1. — La suite $\Omega \xrightarrow{2} \Omega \xrightarrow{r} N$ est exacte.

On doit ce résultat à ROKHLIN : DOLD a donné une démonstration géométrique. De ce lemme, WALL a déduit le théorème suivant :

THÉORÈME (de C.T.C. WALL).

1) : L'algèbre Ω ne contient pas d'éléments d'ordre 4.

2) : Si M est une variété orientable, dont les nombres de Stiefel et de Pontrjagin sont nuls, alors $\{M\} = 0$ dans Ω.

3) : Il existe une sous-algèbre W de N contenant $r(\Omega)$ et un homomorphisme $\partial' : W \rightarrow \Omega$ tels que le triangle suivant est exact :

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[rr, "2"] & & \Omega \arrow[dl, "r"] \\ & W \arrow[ul, "\partial'"] & \end{tikzcd}$$

La proposition (2) confirme une conjecture de R. THOM.

La démonstration de WALL repose sur la construction géométrique suivante. Soit M une variété, pas nécessairement orientable, mais dont la première classe de Stiefel-Whitney $W_1(M)$ appartient à l'image de l'homomorphisme

$$H^1(M;\, Z) \rightarrow H^1(M;\, Z_2).$$

Nous pouvons donc représenter $W_1(M)$ par une application $f: M \rightarrow S^1$. Nous pouvons remplacer f par une application $g: M \rightarrow S^1$ telle que $g^{-1}(O)$ soit une sous-variété de M de codimension 1. Nous poserons $V = g^{-1}(O)$.

Soit U un voisinage suffisamment petit de O dans S^1 ; alors, par définition de g, $g^{-1}(U)$ est orientable, et V est donc orientable.

LEMME 2. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété V puisse être obtenue par la construction ci-dessus est que $2\{V\} = 0$ dans Ω.

DÉMONSTRATION. — Si V peut être obtenue de cette façon, nous pouvons couper M le long de V pour obtenir une variété M' qui est orientable et a $2V$ pour bord; la réciproque étant vraie également.

Nous définissons alors W comme le sous-ensemble de N consistant en classes $\{M\}$, M ayant la propriété mentionnée plus haut. Comme l'ensemble des variétés M possibles est fermé pour les opérations de produit et de réunion disjointe, W est une sous-algèbre de N.

LEMME 3. — En posant $\partial\{M\} = \{V\}$, on définit une dérivation $\partial : W \rightarrow N$ telle que :

$$\operatorname{Im} \partial \subset r(\Omega) \subset \operatorname{Ker} \partial \subset W \subset N.$$

DÉMONSTRATION. — (i) Nous devons montrer que la règle $\partial\{M\} = \{V\}$ fournit une fonction bien définie $\partial : W \rightarrow N$. Il suffit de montrer que les nombres de Stiefel de M déterminent ceux de V. Soit W_a un monôme engendré par des classes de Stiefel; on a alors :

$$\langle W_a(V),\ V \rangle = \langle i^* W_a(M),\ V \rangle$$

(parce que l'espace normal à V dans M est trivial)

$$= \langle W_a(M),\ i_* V \rangle$$
$$= \langle W_a(M),\ W_1(M) \cap \mathrm{M} \rangle$$

(parce que V est dual de $W_1(M)$)

$$= \langle W_a W_1(M),\ M \rangle$$

(ii) Il est alors possible de vérifier que ∂ est une dérivation en calculant les nombres de Stiefel de $\partial(xy)$ et de $(\partial x)y + x(\partial y)$ en fonction de ceux de x et y.

(iii) Nous savons déjà que $\operatorname{Im} \partial \subset r(\Omega)$; il faut montrer que $r(\Omega) \subset \operatorname{Ker} \partial$. Mais si la variété initiale M est orientable, $W_1(M) = 0$ et nous pouvons choisir l'application $g: M \rightarrow S^1$ telle que $g^{-1}(O)$ soit vide.

LEMME 4. — L'algèbre W est une algèbre de polynômes (sur Z_2) avec les générateurs suivants :

(i) Variétés V_{2i-1} de Dold pour $i \neq 2^j$. (Ces variétés sont orientables et d'ordre 2 dans Ω).

(ii) Variétés M_{2i} qui correspondent aux V_{2i-1} suivant le lemme 2.

(iii) Espaces projectifs complexes $P_{2^n}(C)$ (pour $n \geqq 1$).

La démonstration de ce lemme est assez laborieuse et sera seulement esquissée.

Premièrement, il est clair que les variétés citées appartiennent à W. En second lieu, on peut prouver qu'elles engendrent une sous-algèbre de polynômes de N. En fait, on peut établir, par le calcul, que :

$$S_{2i}[M_{2i}] = 1;$$

on peut aussi montrer que :

$$\{P_n(C)\} = \{P_n(R)\}^2 \qquad (\text{dans } N)$$

en calculant leurs nombres de Stiefel.

Ensuite, on devra disposer d'un moyen de montrer que des variétés n'appartiennent pas à W.

Si M est une variété du type considéré plus haut, alors :

$$W_1^2(M) = \beta_2 W_1(M) = 0.$$

Soit W un polynôme en les classes de Stiefel-Whitney divisible par W_1^2. On a $\langle W(M), M \rangle = 0$. Il faut compter le nombre de conditions indépendantes sur M qu'on obtient ainsi. Chacun de ces polynômes W correspond à un élément h de $H^*(M(O_k), Z_2)$, (disons $= H_k$) pour k assez grand. Ces éléments h constituent un sous-groupe qui est même un sous-module (disons S_k) sur l'algèbre de Steenrod A. WALL démontre que S_∞ est un facteur direct de H_∞ ; le nombre de générateurs A-libres de S_∞ fournit donc le nombre cherché des conditions indépendantes. Ceci prouve que la sous-algèbre de polynômes trouvée ci-dessus coïncide avec W elle-même.

LEMME 5. — $\operatorname{Ker} \partial / \operatorname{Im} \partial$ est une algèbre de polynômes (sur Z_2) avec des générateurs de dimensions $4i$. On a : $r(\Omega) = \operatorname{Ker} \partial$. Si c est un élément de Ω dont tous les nombres de Pontrjagin sont nuls, alors $rc \in \operatorname{Im} \partial$.

DÉMONSTRATION.

(i) W et les valeurs de ∂ sur les générateurs de W étant inconnues, un calcul élémentaire donne $\operatorname{Ker} \partial / \operatorname{Im} \partial$.

(ii) Soit $P(p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots)$ un polynôme en les classes de Pontrjagin. L'homomorphisme $Z \to Z_2$ des coefficients envoie P en un certain polynôme $Q = Q(W_1, W_2, \ldots, W_i, \ldots)$ en les classes de Stiefel-Whitney. Le polynôme Q donne un nombre de Stiefel-Whitney $\langle Q(M), M \rangle$ défini sur des variétés qui ne sont pas nécessairement orientables; mais si M est orientable, alors $\langle Q(M), M\rangle$ est la valeur de $\langle P(M), M\rangle$ réduit modulo 2. En particulier, ce nombre de Stiefel-Whitney s'annule sur $\operatorname{Im}\partial$. Il détermine donc une fonction linéaire définie sur $\operatorname{Ker}\partial/\operatorname{Im}\partial$.

Mais, d'autre part, les valeurs mod 2 des nombres de Pontrjagin d'une variété orientable peuvent être choisies arbitrairement. Il en résulte que le rang de $(r(\Omega)/\operatorname{Im}\partial)_m$ est au moins égal au nombre des nombres de Pontrjagin dont on dispose. Mais celui-ci est exactement le rang de $(\operatorname{Ker}\partial/\operatorname{Im}\partial)_m$, ce qui entraîne $r(\Omega) = \operatorname{Ker}\partial$, et les fonctions linéaires mentionnées ci-dessus suffisent donc pour distinguer tous les éléments de $\operatorname{Ker}\partial/\operatorname{Im}\partial$.

Démonstration du théorème.

(1) Soit c un élément de Ω_m, d'ordre 2^α, avec α maximal. Supposons $\alpha > 1$. Comme c est un élément de torsion, ses nombres de Pontrjagin sont nuls, et $rc \in \operatorname{Im}\partial$. Il existe donc une classe c' d'ordre 2 telle que: $rc = rc'$. Comme $\alpha > 1$, $c - c'$ a le même ordre que c, c'est à dire 2^α.

En vertu du lemme 1, parce que $r(c - c') = 0$, on a : $c - c' = 2c''$; l'élément c'' serait d'ordre $2^{\alpha+1}$, en contradiction avec l'hypothèse. Ceci démontre (1).

(2) Soit c un élément de Ω dont les nombres de Stiefel sont nuls. Alors $c \in \operatorname{Ker} r$, ce qui entraîne $c = 2c'$ d'après le lemme 1. En vertu d'un résultat de Milnor, Ω n'a pas de torsion impaire. D'après la première partie (1) du théorème, c a pour ordre 0 ou ∞. Si les nombres de Pontrjagin de c sont aussi nuls, alors $c = 0$; ceci démontre (2).

(3) Dans la construction originale, les nombres de Stiefel de V étaient déterminés par ceux de M, et ses nombres de Pontrjagin sont nuls, parce que $2\{V\} = 0$ dans Ω. Nous savons maintenant que ceci détermine la classe de V dans Ω; nous pouvons poser $\partial'\{M\} = \{V\}$. L'exactitude du triangle résulte immédiatement de ce qui a été exposé plus haut.

Ceci achève la démonstration du théorème de Wall.

J. Frank Adams
Trinity Hall
Cambridge (Grande-Bretagne)