BULLETIN DE LA S. M. F.

J.FRANK ADAMS

Théorie de l'homotopie stable

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 277-280
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__277_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89. 1959. Lille].
Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 277 à 280.

THÉORIE DE L'HOMOTOPIE STABLE;

PAR

J. Frank ADAMS
(Cambridge).

Il y a quelques temps déjà, je fus contraint de me rendre compte qu'il existait une parenté entre la théorie de l'homotopie stable et l'algèbre homologique. Il est tentant d'essayer de développer une théorie dans laquelle cette parenté apparaisse de la manière la plus simple possible. Voici quelques idées pour un tel essai.

Le théorème qui suit est le premier théorème qui fait apparaître cette parenté. Soient X, Y des $C-W$ complexes finis, on peut alors définir les groupes

$$\Pi_m^S(X,\ Y) = \lim_{n\to\infty} \text{appl}(S^{m+n}X,\ S^n Y)$$

qu'on appelle les « track groups » stables.

Si p est un nombre premier, on peut aussi définir

$$\text{Ext}_A(H^*(Y;\ Z_p),\ H^*(X;\ Z_p))$$

où A désigne l'algèbre de Steenrod mod p. Le théorème affirme qu'il existe une suite spectrale

$$\text{Ext}_A(H^*(Y;\ Z_p),\ H^*(X;\ Z_p)) \quad\Rightarrow\quad {}_p\Pi_*^S(X,\ Y)$$

où ${}_p\Pi$ désigne le quotient de Π par les éléments d'ordre fini premier à p.

Nons ne savons presque rien sur le calcul des différentielles de cette suite spectrale. Si nous analysons cette question, nous sommes conduit à la situation suivante : soit $F\to E\to B$ un fibré (principal) dont la base et la fibre sont des espaces de Eilenberg-MacLane, ou des produits de tels espaces; alors, pour les dimensions stables, nous avons une suite exacte

$$\to H^*(F)\xrightarrow{\tau} H^*(B)\to H^*(E)\to H^*(F)\xrightarrow{\tau} H^*(B)\to$$

(à coefficients dans Z_p). De la connaissance de τ on déduit celle de la structure additive de $H^*(E)$, mais on ne peut déterminer ainsi la structure de A-module de $H^*(E)$. De plus, chaque élément e de $H^*(F)$ détermine une opération cohomologique de seconde espèce Φ; on pourrait utiliser e comme exemple universel en suivant les travaux de SERRE sur les opérations de première espèce. Mais le fait d'expliciter nos problèmes en termes d'opération, au lieu d'éléments e, nous donne la possibilité d'essayer nos formules sur des espaces simples.

Une théorie satisfaisante doit remplir deux conditions :

1° elle doit donner de façon convenable la suite spectrale;

2° le même mécanisme doit aussi s'appliquer aux opérations d'espèce supérieure.

Commençons par définir une catégorie stable.

Un *objet* X est une suite de $C-W$-complexes X_n, satisfaisant aux propriétés suivantes :

(i) X_n a un seul sommet, et a des cellules de dimension r seulement si $n \leqq r \leqq 2n-2$.

(ii) le squelette $(X_n)^{2n-3}$ est la suspension réduite SX_{n-1}.

Un *morphisme* $f : X \rightarrow Y$ est une suite d'applications cellulaires $f_n : X_n \rightarrow Y_n$, telles que :

(iii) $f_n \mid (X_n)^{2n-3} = Sf_{n-1}$.

Une homotopie est une suite d'applications cellulaires $h_n : (I \times X_n)^{2n-2} \rightarrow Y_n$, commutant avec S de manière évidente.

Pour faire de cette catégorie une catégorie abélienne, on définit $X \vee Y$ par $(X \vee Y)_n = X_n \vee Y_n$, et on construit des applications

$$\Delta : X \rightarrow X \vee X$$

de type $(1,1)$; ce qui peut être fait par récurrence sur n en utilisant le plongement de $X_n \vee X_n$ dans $X_n \times X_n$.

La suspension d'un objet se définit facilement par

$$(SX)_n = (X_{n+1})^{2n-2}.$$

On peut définir alors les « track groups »

$$\Pi_r(X, Y) = \mathrm{appl}(S^r X, Y)$$

La cohomologie $H^*(X)$ d'un objet X de la catégorie se définit de façon triviale. Nous nous restreindrons aux objets dont la cohomologie est de type fini dans chaque dimension.

Nous avons donc maintenant la catégorie stable C, la catégorie M des A-modules, et un foncteur H^* de C à M; notre théorie doit maintenant montrer comment les constructions d'algèbre homologique dans M peuvent se remonter dans C.

Considérons la suite spectrale. Nous prenons un objet Y_0 et une résolution

$$H^*(Y_0) \xleftarrow{\varepsilon} C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} C_2 \leftarrow \dots$$

de $H^*(Y_0)$ par des modules gradués libres et localement de type fini C_i. Pour chaque C_i notre catégorie contient des objets de Eilenberg-Mac-Lane E_i possédant les propriétés suivantes :

(i) $H^*(E_i) \cong C_i$

(ii) $H^* : \mathrm{appl}(X, E_i) \to \mathrm{Hom}_A(H^*(E_i), H^*(X))$
est un isomorphisme; et on peut ainsi trouver une application $f_0 : Y_0 \to C_0$ qui induit ε.

Nous essaierons ensuite de réaliser le module $\mathrm{Ker}\,\varepsilon$, et nous ferons maintenant en sorte qu'à chaque application $f : X \to Y_0$ de notre catégorie soit associé un troisième objet Z, qui nous donne des suites exactes de modules de cohomologie, et de « track groups ». Posons

$$Z_n = (TX_n \cup_{f_n} Y_n)^{2n-2}$$

où TX_n désigne le cône de base X_n, ce que nous écrirons

$$Z = TX \cup_f Y.$$

On peut, en particulier, définir $Y_1 = TY_0 \cup_{f_0} E_0$, et on a $H^*(Y_1) \cong \mathrm{Ker}\,\varepsilon$; l'application $d_1 : C_1 \to \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ peut être induite par une application $f_1 : Y_1 \to E_1$; on peut former $Y_2 = TY_1 \cup_{f_1} E_1$, et on poursuit par récurrence.

Cette construction est naturelle. En effet, supposons donnée une application $g_0 : Y_0 \to Y'_0$, et un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
H^*(Y_0) & \xleftarrow{\varepsilon} & C_0 & \xleftarrow{d_1} & C_1 & \leftarrow & \dots \\
\uparrow g_0^* & & \uparrow \mu_0 & & \uparrow \mu_1 & & \\
H^*(Y'_0) & \xleftarrow{\varepsilon'} & C'_0 & \xleftarrow{d'_1} & C'_1 & \leftarrow & \dots
\end{array}$$

Il existe alors un diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
Y_0 & \xrightarrow{f_0} & E_0 \\
\downarrow g_0 & & \downarrow \\
Y'_0 & \xrightarrow{f'_0} & E'_0
\end{array}$$

commutatif à une homotopie près; et on peut construire

$$g_1 : TY_0 \cup_{f_0} E_0 \to TY'_0 \cup_{f'_0} E'_0,$$

ce qui donne $g_1 : Y_1 \to Y'_1$, et on continue par récurrence.

De cette réalisation géométrique d'une résolution, on peut déduire assez de suites exactes de « track groups » $\Pi_r(X, Y_i)$, etc., pour construire la suite spectrale désirée.

Passons maintenant aux opérations. On peut effectuer la construction précédente sans partir d'un espace Y_0 et d'une résolution. Prenons des objets de Eilenberg-MacLane $E_0, E_1, \ldots, E_r$, une application $f_1 : E_0 \to E_1$ et formons $Y_1 = TE_0 \cup_{f_1} E_1$. On peut continuer par récurrence, et trouver une suite spectrale qui converge vers appl (X, Y_r).

Les groupes du premier terme $\mathcal{E}_1$ de cette suite spectrale sont

$$\mathrm{Hom}(H^*(E_i), H^*(X)).$$

$H^*(E_i)$ est libre, et a, disons, n_i générateurs; ainsi la donnée d'un élément de $\mathrm{Hom}(H^*(E_i), H^*(X)$ est équivalente à celle d'un n_i-uple d'éléments de $H^*(X)$. Les différentielles d_1 donnent les opérations primaires, celle qui agit sur les n_i-uples et associe à chacun d'eux un n_{i+1}-uple. Les différentielles d_2 sont définies sur les noyaux des opérations de première espèce, et prennent leurs valeurs dans les conoyaux de celles-ci; elles donnent ainsi les opérations de seconde espèce. De même, les différentielles d_i donnent les opérations de $i^{\text{ième}}$ espèce. De cette façon, on peut définir les opérations par le même procédé qui sert à construire la suite spectrale.

J. Frank ADAMS,
Trinity Hall,
Cambridge (Grande-Bretagne).