BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES-LOUIS LIONS

Quelques résultats d'existence dans des équations aux dérivées partielles non linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 245-273
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__245_0>

Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 245 à 273.

QUELQUES RÉSULTATS D'EXISTENCE DANS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES;

PAR

JACQUES-LOUIS LIONS
(Nancy).

Introduction. — On va considérer dans cet article un certain nombre d'équations aux dérivées partielles d'évolution, non linéaires, l'exemple le plus important étant celui des équations de Navier-Stokes, étudiées au paragraphe 2.

On va se préoccuper de résultats d'existence ; on n'étudie pas les problèmes d'unicité correspondant aux équations considérées (*cf.* déjà G. PRODI [19] et LIONS-PRODI [18]).

Comme il est classique, les théorèmes d'existence reposent sur des évaluations *a priori*; comme il est fondamental d'obtenir, à l'aide de ces évaluations, des familles *compactes* de fonctions, il faut obtenir des évaluations sur les dérivées en x (variables d'espace) et en t (variables de temps), ou les accroissements différentiels en x et en t.

L'obtention de majorations *a priori* pour les dérivées en x est classique; l'exemple le plus important dans l'ordre d'idées qui nous occupe est donné, pour les équations de Navier-Stokes, par LERAY [12], [13], [14].

On va obtenir ici des évaluations *a priori* pour *les dérivées d'ordre fractionnaire* ($<1/4$) en t (méthode résumée, pour les équations de Navier-Stokes, dans LIONS [15]).

On donne au paragraphe 1 les résultats généraux dans ce sens ; ils utilisent *essentiellement* la transformation de Fourier, ce qui est peut-être inhabituel en matière de problèmes non linéaires.

Des majorations *a priori* du paragraphe 1, on déduit divers théorèmes d'existence de solutions faibles, ceci dans les paragraphes 2 et 3.

Au paragraphe 2, on considère les équations de Navier-Stokes. On complète, dans une certaine mesure, les travaux fondamentaux de LERAY, *loco citato*. Sur un ouvert Ω quelconque de R^n, la dimension n étant ≤ 4, on montre l'existence d'une solution des équations de Navier-Stokes, solution

« faible », appartenant à une classe *plus petite* que la classe des solutions turbulentes de Leray.

Des solutions plus faibles, mais en dimension quelconque, ont été construites par HOPF [7].

Des solutions plus fortes, mais *locales* en t, ont été construites en dimension 3, par KISELEV et LADYZENSKAYA [10], et en dimension 2 par LADYZENSKAYA [11], cette fois globalement en t. Il y a *unicité* dans la classe de solutions considérée par KISELEV et LADYZENSKAYA.

La question de l'unicité des solutions que nous construisons n'est pas résolue en dimension 3 et 4; elle l'est en dimension 2 : on montre même (*cf.* LIONS-PRODI *loco citato*) qu'en dimension 2, il y a unicité des solutions turbulentes de Leray.

Le paragraphe 3 étudie deux exemples différents des équations de Navier-Stokes; on peut varier les exemples à l'infini.

La démonstration des théorèmes d'existence utilise :

a. les majorations *a priori* des dérivées d'ordre fractionnaire;

b. des critères de compacité;

c. la méthode de Faedo-Galerkine (*cf.* S. FAEDO [4], et aussi J. W. GREEN [6]) utilisée dans les problèmes de Navier-Stokes par E. HOPF [7], et depuis par de nombreux auteurs.

Des applications différentes de l'estimation des dérivées fractionnaires ont été données dans LIONS [19], et [17], pages 34-42.

I. — Évaluation de dérivées fractionnaires par rapport au temps.

1. Notations. — Tous les espaces vectoriels topologiques considérés seront des espaces sur le corps R des réels. Si X et Y sont deux espaces (vectoriels topologiques localement convexes), $X \subset Y$ signifie que X est contenu dans Y avec une topologie plus fine.

On donne deux espaces de Hilbert, V et H, avec $V \subset H$; l'espace V est dense dans H *ou non*. Si $f, g \in H$, (f, g) désigne leur produit scalaire dans H, et $|f| = (f, f)^{1/2}$; si $u, v \in V$, $(((u, v)))$ désigne leur produit scalaire dans V et

$$|||u||| = (((u, u)))^{\frac{1}{2}}.$$

On désigne par t une variable réelle (le temps). Si X est un espace de Banach, on désigne par $L^p(a, b; X)$ l'espaces des (classes de) fonctions de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable à valeurs dans X (*cf.* BOURBAKI [1]; on pose

$$\| u \|_{L^p(a, b; X)} = \left(\int_a^b \| u(t) \|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

où $\| u \|_X$ désigne la norme dans X.

On utilisera la transformation de Fourier en t. Formellement, si u est une fonction donnée à valeurs dans X, $\mathcal{F}\, u = \hat{u}$ désigne sa transformée de Fourier, donnée par

$$\hat{u}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2\pi i t \tau)\, u(t)\, dt,$$

intégrale prise dans E. Ceci a un sens précis pour les distributions tempérées à valeurs dans X (*cf.* L. Schwartz [20], [21]). Si, en particulier, $u \in L^1(-\infty, +\infty\,;\, X)$, alors $\mathcal{F} u = \hat{u}$ est bornée et

$$\| \hat{u}(\tau) \|_X \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \| u(t) \|_X\, dt.$$

Si l'on prend $X = H$ (espace de Hilbert) et si $u \in L^2(-\infty, +\infty; H)$, alors $\hat{u} \in L^2(-\infty, +\infty; H)$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | \hat{u}(\tau) |^2\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} | u(t) |^2\, dt.$$

Si $u \in L^2(-\infty, +\infty; H)$ et si sa transformée de Fourier vérifie

$$(1.1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma}\, |\hat{u}(\tau)|^2\, d\tau < \infty.$$

on dira que *la dérivée en t d'ordre* γ (γ, nombre réel quelconque) *de u est dans* $L^2(-\infty, +\infty; H)$.

Si u est à support (en t) limité à gauche, alors la dérivée d'ordre γ en t est classiquement définie par

$$(1.2) \qquad D^\gamma u = Y_{-\gamma} \star u,$$

avec les notations de Schwartz ([20], t. 2, p. 30). (Il s'agit ici d'un produit de composition en t, entre une distribution scalaire et une distribution à valeurs dans E; *cf.* Schwartz [2].) On a

$$(1.3) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} | D^\gamma u |^2\, dt = (2\pi)^{2\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma}\, |\hat{u}(\tau)|^2\, d\tau.$$

2. Évaluations a priori (I). — Pour chaque $t \in R$, on donne une forme $(m+1)$-linéaire

$$u_1, \ldots, u_m, v \to b(t;\, u_1\, u_2, \ldots, u_m, v)$$

sur l'espace V. On supposera que

$$(2.1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } u_i,\, v \in V, \text{ la fonction } t \to b(t;\, u_1, \ldots, u_m, v) \\ \quad \text{est continue sur } R. \end{array} \right.$$

Puis

$$(2.2)\quad \begin{cases} \text{Il existe un espace de Banach } E, \text{ avec } V \subset E, \text{ tel que} \\ \qquad |b(t;\, u_1,\, \ldots,\, u_m,\, v)| \leqq \beta \,\|u_1\|_E \ldots \|u_m\|_E \,|||v|||, \\ \text{où } \beta \text{ est une constante, et où } \|w\|_E \text{ designe la norme dans } E. \end{cases}$$

Nous allons démontrer le

THÉORÈME 2.1. — *On donne une fonction*

$$u \in L^2(-\infty, +\infty;\, V) \cap L^m(-\infty, +\infty;\, E),$$

nulle pour $t < 0$ *(p. p.). On pose :*

$$(2.3)\qquad J_u = \int_0^\infty |||u(t)|||^2\, dt, \qquad K_u = \int_0^\infty \|u(t)\|_E^m\, dt.$$

On suppose que, pour tout $v \in V$,

$$(2.4)\quad D_t(u(t), v) + b(t;\, u(t),\, u(t),\, \ldots,\, u(t),\, v) = (((f(t), v))) + (u_0, v)\,\delta,$$

où $D_t = d/dt$ *est calculé au sens des distributions sur* R, *où* δ *est la masse de Dirac à l'origine, où* f *est donnée, dans* $L^2(-\infty, +\infty;\, V)$, *nulle pour* $t < 0$ *et où* u_0 *est donné dans* H. *Si les hypothèses* (2.1) *et* (2.2) *ont lieu, alors quel que soit* γ *avec*

$$(2.5)\qquad 0 < \gamma < 1/4,$$

la dérivée $D^\gamma u$ *est dans* $L^2(-\infty, +\infty;\, H)$, *et l'on a*

$$(2.6)\quad \int |D^\gamma u|^2\, dt \leqq c(\gamma)\left(J_u + (K_u + |u_0|)\, J_u^{1/2} + \int |||f(t)|||^2\, dt\right),$$

où $c(\gamma)$ *est une constante dépendant de* γ.

DÉMONSTRATION.

1° Comme la forme linéaire $v \to b(t;\, u_1,\, \ldots,\, u_m,\, v)$ est continue sur V, on a

$$b(t;\, u_1,\, \ldots,\, u_m,\, v) = (((g(u_1,\, \ldots,\, u_m),\, v))),$$

où

$$g(u_1,\, \ldots,\, u_m) \in V,$$

et, d'après (2.2),

$$|||g(u_1,\, \ldots,\, u_m)||| \leqq \beta\, \|u_1\|_E \ldots \|u_m\|_E.$$

Si, par conséquent, on pose

$$h(t) = g(u(t),\, \ldots,\, u(t)),$$

il vient

$$b(t;\, u(t), \ldots, u(t), v) = (((h(t), v))), \tag{2.7}$$

avec

$$|||\, h(t)\, ||| \leq \beta \|\, u(t)\, \|_E^m. \tag{2.8}$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |||\, h(t)\, |||\, dt \leq \beta K_u. \tag{2.9}$$

2° L'équation (2.4) peut maintenant s'écrire

$$D_t(u(t), v) = (((f(t), v))) + (u_0, v)\,\delta - (((h(t), v))), \tag{2.10}$$

et, par transformation de Fourier en t,

$$2\pi i\tau\,(\hat{u}(\tau), v) = (((\hat{f}(\tau), v))) + (u_0, v) - (((\hat{h}(\tau), v))).$$

On prend, dans cette équation, $v = \hat{u}(\tau)$, ce qui a un sens presque partout en τ. On en déduit

$$2\pi|\tau| \,.\, |\hat{u}(\tau)|^2 \leq |||\hat{f}(\tau)||| \,.\, |||\hat{u}(\tau)||| + |u_0| \,.\, |\hat{u}(\tau)| + |||\hat{h}(\tau)||| \,.\, |||\hat{u}(\tau)|||,$$

et comme, d'après (2.9),

$$|||\hat{h}(\tau)||| \leq \beta K_u,$$

on en tire

$$|\tau| \,.\, \hat{u}(\tau)|^2 \leq c_1(K_u + |u_0|)\, |||\hat{u}(\tau)||| + c_1 |||\hat{f}(\tau)||| \,.\, |||\hat{u}(\tau)||| \quad (^1). \tag{2.11}$$

3° Le théorème résulte maintenant de (2.11). En effet, soit γ donné avec (2.5); on choisit (ce qui est loisible) β avec $1/2 < \beta < 1$ et

$$|\tau|^{2\gamma} \leq c_2(1 + |\tau|)(1 + |\tau|^\beta)^{-1}.$$

Alors

$$\int |\tau|^{2\gamma}|\hat{u}(\tau)|^2\, d\tau$$
$$\leq c_2 \int (1 + |\tau|^\beta)^{-1} |\hat{u}(\tau)|^2\, d\tau + c_2 \int (1 + |\tau|^\beta)^{-1} |\tau| \,.\, |\hat{u}(\tau)|^2\, d\tau$$

et en utilisant (2.11) et CAUCHY-SCHWARTZ

$$\int |\tau|^{2\gamma}|\hat{u}(\tau)|^2\, d\tau \leq c_3\left(\int (|||\hat{u}(\tau)|||^2 + |||\hat{f}(\tau)|||^2)\, d\tau\right)$$
$$+ c_3(K_u + u_0)\left(\int |||\hat{u}(\tau)|||^2\, d\tau\right)^{1/2}\left(\int (1 + |\tau|^\beta)^{-2}\, d\tau\right)^{1/2}$$

et comme $2\beta > 1$, on en déduit (2.6).

---

(1) Les c_i désignent des constantes diverses.

3. Évaluations a priori (II). — On remplace dans ce numéro l'hypothèse (2.2) par l'hypothèse moins restrictive suivante :

$$(3.1)\quad \begin{cases} \text{Pour tout } T, \text{ il existe une constante } \beta_T \text{ (dépendant de } T\text{) telle que} \\ |b(t;u_1,\ldots,u_m,v)| \leqq \beta_T \| u_1 \|_E \ldots \| u_m \|_E ||| v ||| \qquad \text{pour} \quad t \leqq T. \end{cases}$$

On va démontrer le

THÉORÈME 3.1. — *On donne une fonction u, nulle (p.p.) pour $t < 0$, et avec*

$$(3.2)\qquad u \in L^2(0,T;V) \cap L^m(0,T;E) \quad \textit{pour tout } T \textit{ fini.}$$

On pose

$$(3.3)\qquad J_u(T) = \int_0^T ||| u(t) |||^2\, dt, \qquad K_u(T) = \int_0^T \| u(t) \|_E^m\, dt.$$

On suppose que pour tout $v \in V$, (2.4) a lieu, avec u_0 donné dans H et $f \in L^2(0,T;V)$ pour tout T fini. On suppose que (2.1 et (3.1) ont lieu. Dans ces conditions, si q est une fonction donnée quelconque de t, une fois continûment différentiable, nulle pour $t > T$, alors

$$D^\gamma(qu) \in L^2(-\infty, +\infty; H) \qquad (0 < \gamma < 1/4)$$

et

$$(3.4)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |D^\gamma(qu)|^2\, dt$$
$$\leqq c(\gamma, q)\left(J_u(T) + (K_u(T) + |u_0|\, J_u(T)^{1/2} + \int_0^T ||| f(t) |||^2\, dt \right).$$

DÉMONSTRATION. — Posons $qu = w$. Alors

$$D_t(w(t), v) = q\,(((f(t), v))) + q(0)\,(u_0, v)\,\delta$$
$$- qb(t; u(t), \ldots, u(t), v) + q'\,(u(t), v).$$

On pose

$$q(t)\,(((f(t), v))) + q'(t)\,(u(t), v) = (((f_1(t), v))),$$

ce qui définit $f_1 \in L^2(-\infty, +\infty; V)$, avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ||| f_1(t) |||^2\, dt \leqq c_4 \int_0^T (||| f(t) |||^2 + ||| u(t) |||^2\, dt,$$

Ensuite

$$q(t)\, b(t; u(t), \ldots, u(t), v) = (((h_1(t), v))),$$

où

$$h_1(t) = q(t)\, g(u(t), \ldots, u(t))$$

et, par conséquent,

$$\int |||\, h_1(t)\, |||\, dt \leqq c_5 \int_0^T \|\, u(t)\, \|_E^m\, dt.$$

On peut maintenant écrire

$$(3.5) \qquad D_t(w(t),\, v) = (((f_1(t),\, v))) + (q(0)u_0,\, v)\,\delta - (((h_1(t),\, v))).$$

Ceci est une équation analogue à (2.10), avec des hypothèses identiques. On peut donc appliquer (2.6), d'où le résultat.

4. Variante. — Il est évidemment possible de varier de multiple façons les hypothèses dans les évaluations qui précèdent. Voici un exemple qui nous sera utile (§ 3). On suppose, pour fixer les idées, que $m = 3$. Et l'on fait l'hypothèse

$$(4.1) \qquad |\, b(t;\, u_1,\, u_2,\, u_3,\, v)\,| \leqq \beta_T \|\, u_1\, \|_E \|\, u_2\, \|_E\, |||\, u_3\, |||\, .\, |||\, v\, ||| \qquad (t \leqq T).$$

On donne une fonction u, nulle pour $t < 0$, et vérifiant

$$(4.2) \qquad u \in L^2(0,\, T;\, V) \cap L^4(0,\, T;\, E) \qquad \text{pour tout } T \text{ fini},$$

et vérifiant (2.4).

Alors

$$b(t;\, u(t),\, u(t),\, u(t),\, v) = (((h(t),\, v))),$$

avec

$$|||\, h(t)\, ||| \leqq \beta_T \|\, u(t)\, \|_E^2\, |||\, u(t)\, |||,$$

d'où il résulte que, la fonction q étant définie comme au n° 3,

$$\int |\, q(t)\, |\, .\, |||\, h(t)\, |||\, dt \leqq c_6 \left(\int_0^T \|\, u(t)\, \|_E^4\, dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T |||\, u(t)\, |||^2\, dt \right)^{1/2}.$$

On a alors un résultat analogue à celui du théorème 3.1, $K_u(T)$ étant seulement remplacé dans (3.4) par

$$\tilde{K}_u(T) = \left(\int_0^T \|\, u(t)\, \|_E^4\, dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T |||\, u(t)\, |||^2\, dt \right)^{1/2}.$$

II. Équations de Navier-Stokes.

1. Notations. — On désigne par Ω un ouvert de R^n, connexe. Il ne sera *jamais* fait l'hypothèse de régularité sur la frontière de Ω.

On désigne par $H^1(\Omega)$ l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega)$, dont les dérivées distributions $D_i u$ ($D_i = \partial/\partial x_i$) sont dans $L^2(\Omega)$; toutes les fonctions sont supposées à valeurs réelles. On pose

$$\| u \|_{H_1(\Omega)} = \left(\| u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \| D_i u \|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2},$$

ce qui munit $H^1(\Omega)$ d'une structure hilbertienne. Comme d'ordinaire, si $f, g \in L^2(\Omega)$

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx.$$

On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω, et par $H^1_0(\Omega)$ l'adhérence dans $H^1(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$. Les fonctions de $H^1_0(\Omega)$ sont « nulles » au bord de Ω (pour le sens précis à donner à cette assertion, *cf.* DENY-LIONS [3] et M. BRELOT [2]).

Espace H. — On désigne par H l'espace produit $(L^2(\Omega))^n$. Donc un élément f de H peut s'écrire :

$$f = (f_1, \ldots, f_n), \qquad f_i \in L^2(\Omega).$$

Si $f, g \in H$, on pose

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} (f_i, g_i)_{L^2(\Omega)}$$

On considère de même l'espace produit $(H^1(\Omega))^n$.

Espace V. — C'est l'adhérence dans $H^1(\Omega^1))^n$ [ou, ce qui revient au même, dans $(H^1_0(\Omega))^n$] de l'espace des fonctions $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$, où

$$\psi_i \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{pour tout } i, \tag{1.1}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \psi_i = 0 \qquad (\text{ou : } \operatorname{div} \psi = 0). \tag{1.2}$$

La norme sur V est celle induite par $(H^1(\Omega))^n$, donc

$$|||u||| = \left(\sum_{i=1}^{n} \| u_i \|^2_{H^1(\Omega)} \right)^{1/2}. \tag{1.3}$$

Pour u, v dans V, on posera

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^{n} (D_i u, D_i v) = \sum_{i,j} (D_i u_j, D_i v_j)_{L^2(\Omega)} \tag{1.4}$$

et

$$\| u \| = ((u, u))^{1/2}. \tag{1.5}$$

On définit ainsi une *norme* sur V, mais qui n'est pas forcément équivalente à $||| u |||$. Voici un cas où ces deux normes sont équivalentes. On dit que Ω est *d'épaisseur bornée dans une direction* s'il existe une direction L telle que la projection de Ω sur L soit bornée. Alors : *si Ω est un ouvert d'épaisseur bornée dans une direction, les normes $\| u \|$ et $||| u |||$ sont équivalentes sur V.*

Notons que l'espace V n'est évidemment pas dense dans H, puisque tout élément v de l'adhérence $\overline{V}$ de V dans H vérifie : $\operatorname{div} v = 0$.

Nous utiliserons aussi l'espace $H^{-1}(\Omega)$, dual de $H_0^1(\Omega)$; c'est l'espace des distributions sur Ω qui peuvent s'écrire

$$T = f_0 + \sum D_i f_i, \qquad f_0, f_i \in L^2(\Omega).$$

Forme trilinéaire $b(u, v, w)$. — Si $u = (u_i)$, $v = (v_i)$, $w = (w_i)$, où les u_i, ... sont des fonctions données sur Ω, on pose (formellement tout d'abord)

$$b(u, v, w) = \sum_{i,k} \int_\Omega u_k (D_k v_i) w_i \, dx. \tag{1.6}$$

On définit ainsi une forme trilinéaire continue sur l'espace

$$\mathbf{L}^4 \times V \times \mathbf{L}^4,$$

où nous posons

$$\mathbf{L}^4 = (L^4(\Omega))^n.$$

Lemme 1.1. — *Si la dimension n est ≤ 4, la forme trilinéaire* (1.6) *est continue sur l'espace produit $V \times V \times V$.*

En effet, si la dimension est ≤ 4, il résulte des théorèmes de Sobolev [22] que $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, donc que $V \subset \mathbf{L}^4$, d'où le résultat.

Lemme 1.2. — *Si $n \leq 4$, pour tout u, v, w dans V, on a*

$$b(u, v, w) + b(u, w, v) = 0. \tag{1.7}$$

En effet, cette relation est évidente, par intégration par parties, si u, v, w vérifient (1.1) et (1.2), et l'on passe de là au cas général par prolongement.

2. Équations de Navier-Stokes. Théorème d'existence.

PROBLÈME 2.1. — On cherche une fonction u ayant les propriétés suivantes

$$(2.1)\qquad \begin{cases} u \text{ est à valeurs dans } V, \text{ nulle (p. p.) pour } t < 0, \text{ et} \\ u \in L^2(0, T; V) \text{ pour tout } T \text{ fini;} \end{cases}$$

$$(2.2)\qquad \int_0^\infty \{-(u(t), \Phi'(t)) + \nu((u(t), \Phi(t))) + b(u(t), u(t), \Phi(t))\}\, dt$$
$$= \int_0^\infty (f(t), \Phi(t))\, dt + (u_0, \Phi(0)) \quad (^2)$$

pour toute fonction Φ telle que

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \Phi \text{ est continue à support compact dans } [0, \infty[, \text{ à valeurs dans } V, \\ \Phi' = D_t\Phi \text{ étant dans } L^2(0, \infty; H), \end{cases}$$

et où dans (2.2), la fonction f est donnée, avec $f \in L^2(0, T; H)$ pour tout T fini, et où u_0 est donné dans $\overline{V}$ = adhérence de V dans H.

Le nombre ν est donné > 0.

On suppose désormais la dimension $n \leq 4$. Alors, les c_i désignant des constantes diverses, d'après les inégalités de Sobolev

$$|b(u(t), u(t), \Phi(t))| \leq c_1 |||u(t)|||^2 |||\Phi(t)|||$$

de sorte que $b(u(t), u(t), \Phi(t))$ est sommable, et les expressions intervenant dans (2.2) ont bien un sens.

Interprétation du problème 2.1. — On va démontrer que le problème 2.1 *équivaut à la recherche de u avec* (2.1) *et*

$$(2.4)\qquad -\nu\Delta u + \frac{\partial}{\partial t}u + \sum_k u_k D_k u = f + u_0 \otimes \delta + \operatorname{grad}_x p,$$

où

$$\Delta = \Delta_x = D_1^2 + \ldots + D_n^2,$$

p est une distribution sur l'ouvert $\Omega \times R_t$, nulle pour $t < 0$, et où $\operatorname{grad}_x p = S = (S_1, \ldots, S_n)$, avec

$$S_i = D_i p, \qquad D_i = \partial/\partial x_i.$$

En effet, supposons d'abord que (2.4) ait lieu, avec (2.1). Soit Φ une fonction de $\mathcal{D}(\Omega \times R_t)^n$; alors

$$-\langle \Delta u, \Phi \rangle = \int_0^\infty ((u(t), \Phi(t)))\, dt,$$

(²) On peut aussi bien, dans le premier membre de (2.2), remplacer $b(u(t), u(t), \Phi(t))$ par $-b(u(t), \Phi(t), u(t))$.

le crochet désignant la dualité entre l'espace $\mathcal{D}'(\Omega\times R_t)^n$ des n-uples de distributions sur $\Omega\times R_t$ et l'espace $\mathcal{D}(\Omega\times R_t)^n$. De même,

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial t}u,\, \Phi\right\rangle = -\int_0^\infty u(t),\, \Phi'(t))\, dt,$$

donc

$$(2.5)\qquad \int_0^\infty \{-(u(t),\, \Phi'(t)) + \nu((u(t),\, \Phi(t)))\}\, dt + \left\langle\sum_k u_k D_k u,\, \Phi\right\rangle$$
$$= \int_0^\infty (f(t),\, \Phi(t))\, dt + (u_0,\, \Phi(\mathrm{o})),$$

si Φ est dans $\mathcal{D}(\Omega\times R_t)^n$, avec

$$\mathrm{div}_x\Phi = \mathrm{o}$$

(puisque dans ces conditions, $\langle \mathrm{grad}_x p,\, \Phi\rangle = \mathrm{o}$).

On note maintenant que $u_k D_k u_j$, est localement sommable, de sorte que $\sum_k \langle u_k D_k u,\, \Phi\rangle$ a un sens et vaut $\int b(u(t),\, u(t),\, \Phi(t))\, dt$. Par conséquent (2.2) a lieu, pour toute fonction Φ vérifiant

$$\mathrm{div}_x\Phi = \mathrm{o} \qquad \text{et} \qquad \Phi\in\mathcal{D}(\Omega\times R_t)^n.$$

On en déduit, par prolongement, que (2.2) a également lieu pour tout Φ vérifiant (2.3).

Réciproquement, soit u solution du problème 2.1. On introduit la distribution de $\mathcal{D}'(\Omega\times R_t)^n$ définie par

$$(2.6)\qquad T = \frac{\partial}{\partial t}u - \nu\Delta u + \sum u_k D_k u - f - u_0\otimes\delta;$$

cette distribution vérifie alors, en particulier,

$$\langle T,\, \Phi\rangle = \mathrm{o}$$

pour tout Φ dans $\mathcal{D}(\Omega\times R_t)^n$ avec $\mathrm{div}_x\Phi = \mathrm{o}$, de sorte $T = \mathrm{grad}_x p$, p étant une distribution sur $\Omega\times R_t$, d'où l'assertion.

Par conséquent, le problème 2.1 équivaut à (2.4), la fonction u vérifiant (2.1), donc étant à valeurs dans V, c'est-à-dire vérifiant

$$(2.7)\qquad \mathrm{div}_x u(x,\, t) = \mathrm{o} \quad \text{p. p.}$$

et

$$(2.8)\qquad \text{« } u(x,\, t) = \mathrm{o} \text{ »} \quad \text{dans un sens faible } (cf.\ \text{n}^\circ\ 1)$$
$$\text{pour } x\in \text{frontière de } \Omega \quad ([3]).$$

([3]) Si $\Omega = R^n$, (2.8) est une condition de croissance à l'infini; le problème correspondant est le problème de Cauchy.

Par conséquent le problème 2.1 est bien le problème de Navier-Stokes, dans un sens faible; on a fait passer la donnée de Cauchy u_0 au deuxième membre, selon la méthode de SOBOLEV [23], SCHWARTZ [20].

Selon LERAY, *loco citato*, les solutions du problème 2.1 sont appelées *solutions turbulentes* des équations de Navier-Stokes

Voici maintenant les théorèmes que nous démontrerons dans les numéros suivants.

THÉORÈME 2.1. — *Si la dimension $n \leqq 4$, il existe une solution du problème* 2.1. *En outre, on peut trouver une solution u vérifiant*

$$u \in L^\infty(0, T; H) \quad \text{pour tout } T \text{ fini} \tag{2.9}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Pour toute fonction } q \text{, une fois continûment différentiable, nulle}\\ \quad \text{pour } t \text{ assez grand, et tout } \gamma \text{ avec } 0 < \gamma < 1/4,\\ \qquad\qquad D_t^\gamma(qu) \in L^2(0, \infty; H).\end{array}\right. \tag{2.10}$$

On peut apporter, pour certains ouverts Ω, le complément suivant au théorème 2.1 :

THÉORÈME. — 2.2. — *On suppose que Ω est d'épaisseur bornée dans une direction. On suppose également que f est donnée dans $L^2(0, \infty; H)$, et que $n \leqq 4$. Il existe alors une solution du problème* 2.1, *vérifiant* (2.9) *et*

$$u \in L^2(0, \infty; V), \tag{2.11}$$

$$D^\gamma u \in L^2(0, \infty; H), \qquad \gamma \text{ fixé quelconque avec } 0 < \gamma < 1/4. \tag{2.12}$$

Le problème de l'unicité. — En dimension 2, on peut démontrer (*cf.* LIONS-PRODI [18]) *l'unicité* de la solution du problème 2.1 vérifiant (2.9).

Nous n'avons pas pu résoudre le problème analogue en dimension 3 et 4.

3. Solutions approchées. — On va utiliser, exactement comme dans HOPF [7], la méthode de Faedo-Galerkine. Les résultats de ce numéro sont explicités pour la commodité du lecteur; ils sont contenus dans HOPF, *loco citato*.

Soit $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m, \ldots$, une base de V formée d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)^n$; par conséquent

$$\psi_j = (\psi_{j1}, \psi_{j2}, \ldots, \psi_{jn}), \qquad \psi_{jk} \in \mathcal{D}(\Omega),$$

avec $\operatorname{div} \psi = 0$.

Comme u_0 est donné dans l'adhérence $\overline{V}$ de V dans H, il existe des nombres réels α_{im} tels que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} \psi_i \to u_0 \quad \text{dans } H, \text{ lorsque } m \to \infty. \tag{3.1}$$

Soit $g_{im}(t)$ les fonctions de t, définies dans un intervalle $(0, T_m)$, T_m dépendant *a priori* de m, par le système différentiel non linéaire que voici : on pose d'abord

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\,\psi_i, \tag{3.2}$$

puis on considère le système

$$\left\{ \begin{array}{l} (u'_m(t), \psi_j) + \nu((u_m(t), \psi_j)) + b(u_m(t), u_m(t), \psi_j) = (f(t), \psi_j) \\ \qquad\qquad\qquad (j = 1, \ldots, m) \end{array} \right. \tag{3.3}$$

(où $u'_m = du_m/dt$), avec

$$g_{im}(0) = \alpha_{im}. \tag{3.4}$$

On multiplie maintenant (3.3) par $g_{jm}(t)$, et l'on somme en j, de 1 à m ; comme $b(u, u, u) = 0$, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu\,\|u_m(t)\|^2 = (f(t), u_m(t)). \tag{3.5}$$

On en déduit d'abord que

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)| \leq |f(t)|,$$

d'où

$$|u_m(t)| \leq |u_m(0)| + \int_0^t |f(\sigma)|\,d\sigma; \tag{3.6}$$

or

$$u_m(0) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}\psi_i,$$

donc d'après (3.1) demeure dans un ensemble borné de H, et par conséquent il résulte de (3.6) que

(3.7) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } T \text{ fini, il existe } c_1(T) \text{ tel que} \\ \qquad\qquad |u_m(t)| \leq c_1(T), \\ \text{pour } 0 \leq t \leq T, \text{ et pour tout } m. \end{array} \right.$

Ceci démontre que $T_m = \infty$ pour tout m.

On intègre maintenant (3.5 de 0 à t :

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \nu\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^2\,d\sigma \leq \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 + \int_0^t |f(\sigma)|.|u_m(\sigma)|\,d\sigma. \tag{3.8}$$

Il y a lieu ici de distinguer deux cas.

Premier cas : Hypothèses du théorème 2.1. — Alors $\| u \|$ n'est pas équivalente en général à $||| u |||$. Mais de (3.7) et (3.8) on déduit que

$$\int_0^T \| u_m(t) \|^2 dt \leqq c_2(T),$$

ce qui, en tenant à nouveau compte de (3.7), implique

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } T \text{ fini, il existe } c_3(T) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_0^T ||| u_m(t) |||^2 dt \leqq c_3(T). \end{array} \right.$$

Deuxième cas : Hypothèses du théorème 2.2. — Dans ce cas il existe une constante k (ne dépendant que de Ω) telle que pour tout u dans V, on ait $|u| \leqq k \| u \|$. On déduit alors de (3.8)

$$\nu \int_0^t \| u_m(\sigma) \|^2 d\sigma \leqq \frac{1}{2} | u_m(0) |^2 + k \int_0^t | f(0) | . \| u_m(\sigma) \| d\sigma,$$

d'où l'on déduit :

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une constante } c_4 \text{ telle que} \\ \displaystyle\int_0^\infty \| u_m(t) \|^2 dt \leqq c_4 \left(| u_0 |^2 + \int_0^\infty | f(t) |^2 dt \right). \end{array} \right.$$

4. Estimation des dérivées fractionnaires. — Prolongeons u_m par 0 pour tout $t < 0$; désignons encore par u_m la fonction ainsi prolongée. On peut alors écrire

$$(4.1) \quad \begin{aligned} &D_t(u_m, \psi_j) + b(u_m, u_m, \psi_j) \\ &\quad = (f(t), \psi_j) - \nu((u_m(t), \psi_j)) + (u_m(0), \psi_j)\, \delta. \end{aligned}$$

Plaçons-nous d'abord dans les hypothèses du théorème 2.2. On est alors dans les conditons d'application du théorème 2.1 (§ 1); on prend, en effet, $E = V$ et l'on utilise (3.10); la relation (4.1) n'a lieu que pour $\psi_j (j = 1, \ldots, m)$, mais comme u_m *prend ses valeurs dans l'espace engendré par* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$, le raisonnement du paragraphe 1 est valable : on peut prendre $v = \hat{u}(\tau)$ p. p. Par conséquent :

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } 0 < \gamma < 1/4, \text{ il existe } c_5(\gamma) \text{ telle que} \\ \displaystyle\int | D^\gamma u_m |^2 dt \leqq c_5(\gamma) \quad \text{pour tout } m \quad (^4). \end{array} \right.$$

---

(4) De façon plus précise, on a pour u_m une inégalité analogue à (2.6) (§ 1), avec

$$J_{u_m} = K_{u_m} = \int_0^\infty \| u_m(t) \|^2 dt \sim \int_0^\infty ||| u_m(t) |||^2 dt.$$

Plaçons-nous maintenant dans les hypothèses du théorème 2.1; on peut alors appliquer le théorème 3.1 (§ 1); on obtient cette fois :

(4.3) $\left\{\begin{array}{l}\text{Pour } 0 \leqq \gamma < 1/4, \text{ et } q \text{ une fois continûment différentiable, nulle pour } t \text{ assez grand,} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |D^{\gamma}(qu_m)|^2\,dt \leqq c(\gamma, q).\end{array}\right.$

5. **Démonstration du théorème** 2.1. — Soit d'abord q fixée dans l'espace $\mathcal{D}^1_-(R)$ des fonctions une fois continûment différentiables de t, de support limité à droite; pour fixer les idées, supposons que q est nulle pour $t > T$.

D'après (4.3), $D^{\gamma}(qu_m)$ demeure dans un ensemble borné de $L^2(-\infty, +\infty; H)$, et, d'après (3.9), qu_m demeure dans un ensemble borné de $L^2(-\infty, +\infty; V)$. Par conséquent (*cf.* L. Gårding [5], p. 59 et L. Hörmander [8], p. 201) on peut extraire une suite qu_{m_i} convergente dans $L^2(K \times (0, T))^n$ *fort* pour tout compact K de $\overline{\Omega}$.

Nous choisissons $q = q_T$ telle que $0 \leqq q_T(t) \leqq 1$, avec $q_T = 1$ pour $t \leqq T - 1$, et $q_T = 0$ pour $t \geqq T$. On peut extraire de la suite u_m une suite u_μ ayant les propriétés suivantes :

(5.1) $u_\mu \to u$ dans $L^\infty(0, T; H)$ faible, pour tout T fini;

(5.2) $u_\mu \to u$ dans $L^2(0, T; V)$ faible, pour tout T fini;

(5.3) $\left\{ u_\mu \to u \right.$ dans $L^2(K \times (0, T))^n$ *fort*, pour T fini et pour tout K compact de $\overline{\Omega}$;

(5.4) $\left\{ D^{\gamma}(q_T u_m) \to D^{\gamma}(q_T u) \right.$ dans $L^2(-\infty, +\infty; H)$ faible, pour tout T.

Naturellement

$$u_\mu(0) = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_{i\mu} \psi_i \to u_0 \quad \text{dans } H. \tag{5.5}$$

On va vérifier que u est solution du problème 2.1.

On multiplie (3.3) par $\varphi_j(t)$, $\varphi_j \in \mathcal{D}^1_-(R)$, et l'on somme en j de 1 à p ($p \leqq m$). On pose

$$\Phi(t) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(t)\, \psi_j; \tag{5.6}$$

on déduit de (3.3) (utilisé pour $m = \mu \geqq p$), après sommation et intégration par parties en t :

$$(5.7) \quad \int_0^\infty \{ -(u_\mu(t), \Phi'(t)) + \nu((u_\mu(t), \Phi(t))) \} \, dt + \int_0^\infty b(u_\mu(t), u_\mu(t), \Phi(t)) \, dt = \int_0^\infty (f(t), \Phi(t)) \, dt + (u(0), \Phi(0)).$$

Faisons tendre maintenant μ vers l'infini et admettons un instant le

LEMME 5.1. — *Lorsque* $\mu \to \infty$

$$(5.8) \quad \int_0^\infty b(u_\mu(t), u_\mu(t), \Phi(t)) \, dt \to \int_0^\infty b(u(t), u(t), \Phi(t)) \, dt.$$

Comme il résulte aussitôt de (5.2) que

$$\int_0^\infty (u_\mu(t), \Phi'(t)) \, dt \to \int_0^\infty (u(t), \Phi'(t)) \, dt$$

et que

$$\int_0^\infty ((u_\mu(t), \Phi(t))) \, dt \to \int_0^\infty ((u(t), \Phi(t))) \, dt,$$

on voit que (5.7) implique :

$$(5.9) \quad \int_0^\infty \{ -(u(t), \Phi'(t)) + \nu((u(t, \Phi(t))) + b(u(t), u(t), \Phi(t)) \} \, dt = \int_0^\infty (f(t), \Phi(t)) \, dt + (u_0, \Phi(0)),$$

et ceci pour tout Φ de la forme (5.6).

Par un raisonnement de densité immédiat, on en déduit que (5.9) a lieu pour tout Φ vérifiant (2.3) ([5]).

Il résulte de (5.1) que (2.9) a lieu.

Reste à vérifier (2.10); soit q donnée quelconque dans $\mathcal{D}^1_-(R)$; alors $qu = qq_T u$ pour T assez grand; d'après (5.4), $D^\gamma(q_T u)$ est dans $L^2(-\infty, +\infty; H)$ d'où résulte (*cf.* par exemple L. HÖRMANDER et J. L. LIONS [9]) que $D^\gamma(qu)$ est dans $L^2(-\infty, +\infty; H)$.

([5]) Le premier membre de (5.9) dépend continûment de Φ pour la topologie suivante : $\Phi_m(t) \to \Phi(t)$ dans V, uniformément en t, les Φ_m et Φ ayant leur support dans un compact fixe, et $\Phi'_m \to \Phi'$ dans $L^2(0, \infty; H)$. Or si Φ est donnée avec (2.3), il est classique de construire une suite Φ_m formée de fonctions de la forme (5.6) et convergent vers Φ au sens précédent.

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.1. — Remplaçant $b(u_\mu(t), u_\mu(t), \Phi(t))$ par sa valeur, il faut vérifier que

$$(5.10) \qquad \int_{\Omega\times R_t} u_{\mu k}(x, t)\,(D_k u_{\mu i}(x, t))\,\Phi_i(x, t)\,dx\,dt \\ \to \int_{\Omega\times R_t} u_k(x, t)\,(D_k u_i(x, t))\,\Phi_i(x, t)\,dx\,dt.$$

Or les fonctions, $\psi_{jk}[\psi_j = (\psi_{jk})]$ sont à support compact dans Ω et comme p est fixé, les fonctions Φ_i sont donc à support compact en x et t; soit $K\times(0, T)$ un compact contenant ce support. Or

$$u_{\mu k} \to u_k \quad \text{dans } L^2(K\times(0, T)) \text{ fort,}$$

et

$$D_k u_{\mu i} \to D_k u_i \quad \text{dans } L^2(K\times(0, T)) \text{ faible;}$$

comme ψ_i est continue en x et t, cela suffit pour montrer (5.10). Ceci démontre le lemme 5.1, et achève la démonstration du théorème 2.1.

6. Démonstration du théorème 2.2. — Cette fois, grâce à (3.10) et (4.2), on extrait de u_m une suite u_μ qui vérifie (5.1) et (5.3) sans changement, mais (5.2) et (5.4) étant respectivement remplacés par

$$(6.1) \qquad u_\mu \to u \quad \text{dans } L^2(0, \infty; V) \text{ faible,}$$

$$(6.2) \qquad D^\gamma u_\mu \to D^\gamma u \quad \text{dans } L^2(-\infty, +\infty; H) \text{ faible,}$$

Le théorème 2.2 en résulte par un raisonnement en tous points analogues au précédent.

7. Remarque. — On peut résoudre, par les mêmes méthodes, un problème aux limites différent. Supposons que $\Omega \subset R^n (n \leqq 4)$ a une frontière Γ qui est une variété une fois continûment différentiable de dimension $n-1$. On considère dans $(H^1(\Omega))^n$ l'espace V_1, adhérence des fonctions $\psi = (\psi_i)$, avec ψ_i une fois continûment différentiable dans $\overline{\Omega}$, $\operatorname{div}\psi = 0$, et

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i \cos(n, x_i) = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

$\cos(n, x_i)$ étant le $i^{\text{ième}}$ cosinus directeur de la normale extérieure n à Γ.

Comme Ω a une frontière régulière, il résulte de SOBOLEV [22] que $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$; alors

$$b(u, v, w) + b(u, w, v) = 0 \quad \text{pour tout } u, v, w \in V_1,$$

puisque cette propriété est vraie sur un ensemble dense. On a alors des résultats analogues aux précédents, V étant remplacé par V_1.

8. Équations de Navier-Stokes perturbées. — Désignons par $H^2(\Omega)$ l'espace des fonctions (réelles) $u \in L^2(\Omega)$, avec

$$D^p u \in L^2(\Omega), \qquad |p| \leqq 2,$$

muni de la norme hilbertienne

$$\| u \|_{H^2(\Omega)} = \left(\sum_{|p| \leqq 2} \| D^p u \|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

On désigne par $H_0^2(\Omega)$ l'adhérence dans $H^2(\Omega)$ de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$, et l'*on définit* W comme adhérence dans $H_0^2(\Omega)^n$ des fonctions $\psi = (\psi_i)$, avec $\psi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\operatorname{div} \psi = 0$.

On considère le problème suivant :

PROBLÈME 8.1. — On cherche une fonction u ayant les propriétés suivantes :

$$u \in L^2(0, T; W) \quad \text{pour tout } T \text{ fini,} \tag{8.1}$$

$$u \in L^\infty(0, T; H) \quad \text{pour tout } T \text{ fini,} \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \{ &-(u(t), \Phi'(t)) + \nu u((t), \Phi(t))) + \varepsilon(\Delta u(t), \Delta\Phi(t)) \\ &+ b(u(t), u(t), \Phi(t)) \} \, dt \\ = \int_0^\infty &(f(t), \Phi(t)) \, dt + (u_0, \Phi(0)) \end{aligned} \tag{8.3}$$

pour tout Φ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \text{ est continue à valeurs dans } W, \text{ nulle pour } t \text{ assez grand,} \\ \quad \text{avec } \Phi' \in L^2(0, \infty; H). \end{array} \right. \tag{8.4}$$

Dans (8.3), la fonction f est donnée avec $f \in L^2(0, T; H)$ pour tout T fini et u_0 est donné dans $\overline{V} =$ adhérence de V dans H.

Enfin ε est un nombre > 0 donné.

THÉORÈME 8.1. — *Si la dimension n est $\leqq 4$, le problème* 8.1 *admet une solution unique. En outre,*

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\gamma(qu) \in L^2(-\infty, +\infty; H) \quad \text{pour } 0 < \gamma < 1/4, \\ \text{et } q \text{ une fois continûment différentiable, nulle pour } t \text{ assez grand.} \end{array} \right. \tag{8.5}$$

Si Ω est d'épaisseur bornée dans une direction, alors u est dans l'espace

$$L^2(-\infty, +\infty; W) \quad \text{et} \quad D^\gamma(u) \in L^2(-\infty, +\infty; H) \qquad (0 < \gamma < 1/4).$$

La démonstration de l'existence se fait par les mêmes méthodes que précédemment. Nous n'y revenons pas. Signalons seulement que, par utilisation des inégalités de SOBOLEV [22], *on peut montrer l'existence d'une solution si la dimension n est* $\leqq 10$.

L'unicité peut être démontrée (si $n \leqq 4$) par la méthode de LIONS-PRODI [18].

Interprétons le problème résolu : il est équivalent à la recherche d'une fonction u, mesurable a valeurs dans W, nulle pour $t < 0$, vérifiant (8.1), (8.2) et

$$(8.6) \qquad -\nu\Delta u + \frac{\partial}{\partial t} u + \varepsilon\Delta^2 u + \sum u_k D_k u = f + u_0 \otimes \delta + \operatorname{grad}_x p.$$

REMARQUE 8.1. — On est passé de (2.4) à (8.6) en ajoutant la « perturbation » $\varepsilon\Delta^2 u$. On peut plus généralement ajouter au premier membre de (2.4) le terme

$$(-1)^m \varepsilon \Delta^m u,$$

remplaçant ainsi (2.4) par

$$(8.7) \qquad -\nu\Delta u + \frac{\partial}{\partial t} u + (-1)^m \varepsilon\Delta^m u + \sum u_k D_k u = f + u_0 \otimes \delta + \operatorname{grad}_x p;$$

on cherche alors u dans $L^2(0, T; W_m)$, où W_m est l'adhérence dans $H_0^m(\Omega)^n$ des fonctions

$$\psi = (\psi_i), \qquad \psi_i \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \operatorname{div}\psi = 0,$$

et $H_0^m(\Omega)$ étant construit comme $H_0^2(\Omega)$, mais en prenant toutes les dérivées d'ordre $\leqq m$ (au lieu de 2).

On démontre alors :

1° *l'existence* d'une solution si $n \leqq 2(3m-1)$;
2° *l'unicité* de la solution si $n \leqq 2m$.

Nous ignorons si ce décalage entre l'existence et l'unicité est indispensable ou non, i. e. s'il n'y a pas ou s'il y a unicité pour les dimensions n telles que

$$2m < n \leqq 2(3m-1).$$

REMARQUE 8.2. — Supposons $n \leqq 4$ et appelons u_ε *la* solution du problème 8.1. Un problème important serait de connaître le « nombre » de valeurs d'adhérence de la famille u_ε dans l'espace E des fonctions $w \in L^2(0, T; V)$ et $L^\infty(0, T; H)$ pour tout T fini, lorsque $\varepsilon \to 0$. Ce problème est résolu si $n = 2$: dans ce cas, on montre que $u_\varepsilon \to u$ *dans l'espace E faible*, u *étant la solution des équations de Navier-Stockes.*

III. Autres applications.

1. Exemple 1. — Sur un ouvert Ω de R^n, on considère l'espace $H^2(\Omega)$ des fonctions (toujours à valeurs réelles) u, telles que $D^p u \in L^2(\Omega)$ pour tout $|p|\leqq 2$; on le munit de la norme

$$|||u||| = \Big(\sum_{|p|\leqq 2} \|D^p u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{1/2}.$$

On désigne par $H_0^2(\Omega)$ l'adhérence dans $H^2(\Omega)$ du sous-espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact.

On prendra dans la suite :

$$H = L^2(\Omega), \qquad V = H_0^2(\Omega).$$

On supposera que Ω est borné, de sorte que sur V, la norme

$$\Big(\sum_{|p|=2} \|D^p u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{1/2}$$

est équivalente à $|||u|||$.

Pour chaque $t\in R$, on donne une forme $u, v \to a(t;\, u, v)$, bilinéaire continue sur $V\times V$; on suppose que, pour tout $u, v\in V$, la fonction $t\to a(t;\, u, v)$ est continue sur R, et que

$$a(t;\, v, v) \geqq \alpha\, |||v|||^2 \qquad (\alpha > 0,\ v\in V), \tag{1.1}$$

et

$$|a(t;\, u, v)| \leqq c_1\, |||u|||.|||v|||. \tag{1.2}$$

Notation. — On posera

$$Q_T = \Omega \times]0, T[, \qquad Q_\infty = Q.$$

Problème 1.1. — On suppose la dimension $n\leqq 6$. On cherche une fonction u ayant les propriétés suivantes :

$$u\in L^2(0, \infty;\, V), \qquad u\in L^\infty(0, T;\, H) \quad \text{pour tout } T \text{ fini}, \tag{1.3}$$

$$u\in L^4(Q), \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}\int_D^\infty \{a(t;\, u(t), \Phi(t)) - (u(t), \Phi'(t))\}\, dt \\ - \frac{1}{3}\int_Q u(x, t)^3 \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi(x, t)\, dx\, dt + \int_Q u(x, t)^3\, \Phi(x, t)\, dx\, dt \\ = \int_0^\infty (f(t), \Phi(t))\, dt + (u_0, \Phi(0)),\end{aligned} \tag{1.5}$$

où f est donnée dans $L^2(0, \infty;\, H)$, u_0 est donné dans H, et (1.5) ayant lieu pour toute fonction Φ avec

$$\left\{\begin{array}{l}\Phi \text{ est continue valeurs dans } V, \text{ nulle pour } t \text{ assez grand,} \\ \text{et } \Phi'\in L^2(0, \infty;\, H).\end{array}\right. \tag{1.6}$$

Vérifions que les intégrales dans (1.5) ont un sens. Il résulte de (1.6) et de Sobolev [22] que la fonction $t \rightarrow D_1\Phi(.,t)$ est continue (et nulle pour t assez grand) à valeurs dans $L^p(\Omega)$, $p \leqq q_1$, $1/q_1 = 1/2 - 1/n$; toujours d'après Sobolev, $t \rightarrow u(.,t)$ est de carré sommable à valeurs dans $L^q(\Omega)$, $q \leqq q_2$, $1/q_2 = 1/2 - 2/n$. Alors $uD_1\Phi$ sera de carré sommable à valeurs dans $L^2(\Omega)$ si

$$1/q_1 + 1/q_2 \leqq 1/2,$$

donc pour $n \leqq 6$. Par conséquent, $uD_1\Phi$ est dans $L^2(Q)$, et comme par (1.4), $u^2 \in L^2(Q)$, on voit que $\int_Q u^3(D_1\Phi)\,dx\,dt$ a un sens.

A fortiori en est-il de même pour $\int_Q u^3\Phi\,dx\,dt$

Interprétation du problème. — Supposons que

$$a(t;\,u,\,v) = \sum \int_\Omega a_{pq}(x,t)\,D^p u\,D^q v\,dx. \qquad |p|,\,|q| \leqq 2,$$

où $a_{pq}(.,t)$ est dans $L^\infty(\Omega)$, la fonction $t \rightarrow a_{pq}(.,t)$ étant continue de R_t dans $L^\infty(\Omega)$ muni de la topologie faible de dual de $L^1(\Omega)$. Posons

$$A(x,t,D_x) = \sum_{|p|,|q| \leqq 2} (-1)^{|q|}\,D^q(a_{pq}(x,t)\,D^p).$$

Dans ces conditions, le problème 1.1 équivaut à la recherche d'une fonction u, définie sur $\Omega \times R_t$, nulle pour $t < 0$, vérifiant (1.3), (1.4) et

$$A(x,t,D_x)\,u + D_t u + u^2 D_1 u + u^3 = f + u_0 \otimes \delta.$$

La vérification de ce résultat se fait comme au paragraphe 2, n° 2.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.1. — *On suppose que* Ω *est un ouvert borné de* R^n, *avec* $n \leqq 6$. *On suppose que* (1.1) *et* (1.2) *ont lieu. Dans ces conditions, il existe* u *solution du problème* 1.1 ([6]).

La méthode de démonstration est identique à celle des théorèmes 2.1 et 2.2 (§ 2); nous insisterons seulement dans ce qui suit sur les points où apparaissent des différences.

([6]) On montre l'unicité de la solution pour $n \leqq 3$. On utilise à cet effet la méthode de Lions-Prodi [18] et des inégalités de Gagliardo et Nirenberg (cf. E. Gagliardo, *Ricerche di Matematica*, vol. VIII, 1959, p. 24-51 et L. Nirenberg, *Cours de Pise*, 1958); de façon précise, on utilise l'inégalité

$$\| u \|_{L^{18/5}(\Omega)} \leqq C\,|\,u\,|^{2/3}\,|\,D^2 u\,|^{1/3} \quad \text{en dimension 3.}$$

Notons que l'hypothèse « Ω borné » n'est pas essentielle (comme au § 2).

On prend une base $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m, \ldots$ de V, avec $\psi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$; soit $g_{im}(t)$ la solution définie dans un intervalle $(0, T_m)$ dépendant *a priori* de m du système différentiel non linéaire suivant : si

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\psi_i,$$

alors

$$(1.7)\quad \begin{aligned}&(u'_m(t), \psi_j) + a(t; u_m(t), \psi_j) + (u_m(t)^2 D_1 u_m(t), \psi_j) + (u_m(t)^3, \psi_j)\\ &= (f(t), \psi_j) \qquad (j = 1, \ldots, m),\end{aligned}$$

avec

$$(1.8)\qquad g_{im}(0) = \alpha_{im}, \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}\psi_i \to u_0 \quad \text{dans } H.$$

On multiplie (1.7) par $g_{jm}(t)$, on somme en j ; il vient

$$(1.9)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + a(t; u_m(t), u_m(t)) + (u_m(t)^2 D_1(u_m(t)), u_m(t))\\ &+ \int_\Omega u_m(x, t)^4\, dx = (f(t), u_m(t)).\end{aligned}\right.$$

Comme on le vérifie facilement :

$$(u_m(t)^2 D_1 u_m(t), u_m(t)) = 0,$$

de sorte que (1.9) se réduit à

$$(1.10)\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + a(t; u_m(t), u_m(t)) + \int_\Omega u_m(x, t)^4\, dx = (f(t), u_m(t)).$$

On en déduit, comme au paragraphe 2, n° 3, que

$$|u_m(t)| \leq |u_m(0)| + \int_0^t |f(\sigma)|\, d\sigma,$$

ce qui démontre que $T_m = \infty$, et

$$(1.11)\quad \left\{\begin{aligned}&\text{Pour tout } T \text{ fini, il existe une constante } c(T) \text{ telle que}\\ &\qquad |u_m(t)| \leq c(T) \qquad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T.\end{aligned}\right.$$

On intègre maintenant (1.10) de 0 à t ; en utilisant (1.1), on en déduit

$$(1.12)\qquad \int_0^\infty |||u_m(t)|||^2\, dt \leq c_2,$$

puis

$$(1.13)\qquad \iint_Q u_m(x, t)^4\, dx\, dt \leq c_3.$$

Passons maintenant à l'estimation des dérivées fractionnaires en t. On utilise le paragraphe 1, n° 4. On prend $E = L^4(\Omega)$, et

$$b(t;\, u_1,\, u_2,\, u_3,\, v) = (u_1 u_2 D_1(u_3),\, v) + (u_1 u_2 u_3,\, v) \quad (^7).$$

On a

$$|(u_1 u_2 (D_1 u_3),\, v)| \leq \| u_1 \|_{L^4(\Omega)} \| u_2 \|_{L^4(\Omega)} \| D_1 u_3 \|_{L^p(\Omega)} \| v \|_{L^q(\Omega)},$$

si $1/2 + 1/p + 1/q = 1$.

Or, d'après Sobolev [22], si $u \in V = H_0^2(\Omega)$, on a

$$D_1 u \in L^p(\Omega)$$

pour $p \leq q_1$, $1/q_1 = 1/2 - 1/n$, et

$$u \in L^q(\Omega)$$

pour $q \leq q_2$, $1/q_2 = 1/2 - 2/n$.

Par conséquent, on aura :

$$|(u_1 u_2 D_1 u_3,\, v)| \leq k_1 \| u_1 \|_{L^4(\Omega)} \| u_2 \|_{L^4(\Omega)} ||| u_3 ||| . ||| v |||$$

(les k_i désignant des constantes) si $1/2 + 1/q_1 + 1/q_2 \leq 1$, donc si $n \leq 6$.

Si $n \leq 6$, on a *a fortiori*

$$|(u_1 u_2 u_3,\, v)| \leq k_2 \| u_1 \|_{L^4(\Omega)} \| u_2 \|_{L^4(\Omega)} ||| u_3 ||| . ||| v |||,$$

de sorte que

$$(1.14) \quad |b(t;\, u_1,\, u_2,\, u_3,\, v)| \leq \beta \| u_1 \|_{L^4(\Omega)} \| u_2 \|_{L^4(\Omega)} ||| u_3 ||| . ||| v |||$$

On est donc dans les conditions d'application du résultat du paragraphe 1, n° 4 (⁸). En tenant compte de (1.12) et (1.13) on en déduit (on a un résultat global, il est inutile de multiplier par q) :

(1.15) Pour $0 < \gamma < 1/4$, $D^\gamma u_m$ demeure dans un ensemble borné de $L^2(-\infty, +\infty;\, H)$.

On en déduit, comme au paragraphe 2, qu'on peut extraire de la suite u_m une suite u_μ ayant les propriétés suivantes :

(1.16) $u_\mu \to u$ dans $L^2(0, \infty;\, V)$ faible,

(1.17) $u_\mu \to u$ dans $L^\infty(0, T;\, H)$ faible, pour tout T fini,

(1.18) $u_\mu \to u$ dans $L^4(Q)$ faible,

(1.19) $u_\mu \to u$ dans $L^2(0, T;\, H)$ *fort* pour tout T fini (il est cette fois inutile de prendre un compact de $\overline{\Omega}$ puisque Ω est borné).

(⁷) De sorte que $b(t;\, u_1,\, u_2,\, u_3,\, v)$ est en fait indépendante de t.

(⁸) Même remarque qu'au paragraphe 2, n° 4; u_m est à valeurs dans l'espace engendré par $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$.

De l'inégalité

$$\int_{Q_T} |u_\mu(x, t) - u(x, t)|^3 \, dx \, dt \leqq \left(\int_{Q_T} |u_\mu - u|^2 \, dx \, dt\right)^{1/2} \left(\int_{Q_T} |u_\mu - u|^4 \, dx \, dt\right)^{1/2}$$

et de (1.18) et (1.19) il résulte que :

(1.20) $$u_\mu \to u \quad \text{dans } L^3(Q_T) \text{ } fort, \text{ pour tout } T \text{ fini.}$$

On achève maintenant la démonstration du théorème comme au paragraphe 2, n° 5. On déduit de (1.7) que

$$\int_0^\infty \{-(u_\mu(t), \Phi'(t)) + a(t; u_\mu(t), \Phi(t))\} \, dt - \frac{1}{3}\int_Q u_\mu(x, t)^3 D_1 \Phi(x, t) \, dx \, dt + \int_Q u_\mu(x, t)^3 \Phi(x, t) \, dx \, dt = \int_0^\infty (f(t), \Phi(t)) \, dt + (u_\mu(0), \Phi(0)),$$

pour tout Φ de la forme

$$\Phi = \sum_{j=1}^{1} \varphi_j(t) \psi_j \qquad (p \leqq \mu),$$

et l'on passe à la limite. Le théorème suit.

On note qu'on a construit une solution du problème 1.1 vérifiant, en outre,

(1.21) $$D^\gamma u \in L^2(-\infty, +\infty; H) \qquad (0 < \gamma < 1/4).$$

2. **Exemple 2.** — Comme au numéro précédent, nous prenons $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^2(\Omega)$, Ω étant un ouvert borné de R^n.

Notons que, si $u \in V$, alors d'après Sobolev, $D_i u$ est dans l'espace $L^{q_1}(\Omega)$, avec $1/q_1 = 1/2 - 1/n$ [si $n \geqq 3$; sinon le résultat obtenu est *meilleur* : $D_i u$ est alors dans $L^p(\Omega)$ pour tout p fini; le cas le plus défavorable est toujours obtenu pour la dimension la plus grande]. Ensuite, toujours d'après Sobolev :

$$u \in L^{q_2}(\Omega), \qquad 1/q_2 = 1/q_1 - 1/n$$

(ou un résultat meilleur selon la dimension). Il en résulte que, pour u et v dans V, la fonction $u^2(D_1 u)v$ est dans $L^r(\Omega)$, avec $1/r = 3/q_2 + 1/q_1$, et $r \geqq 1$ (i. e. la fonction est sommable) si $n \leqq 7$. Donc, si la dimension n est $\leqq 7$, pour tout u et v dans V,

$$|(u^2 D_1 u, v)| \leqq c_1 |||u|||^3 \, |||v|||.$$

On va considérer le problème suivant :

PROBLÈME 2.1. — On suppose la dimension $n \leqq 7$. On cherche une fonction u ayant les propriétés suivantes : elle est à valeurs dans V, mesurable, nulle pour $t < 0$, avec

$$u \in L^\infty(0, T; V) \quad \text{pour tout } T \text{ fini,} \tag{2.1}$$

$$\int_0^\infty \{-(\Delta u(t), \Delta \Phi'(t)) + (u(t)^2 D_1 u(t), \Phi(t))\}\, dt = \int_0^\infty (f(t), \Phi(t))\, dt + (\Delta u_0, \Delta \Phi(0)), \tag{2.2}$$

et ceci pour toute fonction Φ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \text{ est continue à valeurs dans } V, \text{ à support compact, avec} \\ \qquad\qquad \Phi' \in L^2(0, \infty; V). \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Dans (2.2), u_0 est donné dans V, et $f \in L^2(0, T; H)$ pour tout T fini. Comme

$$|(u(t)^2 D_1 u(t), \Phi(t))| \leqq c_1 |||u(t)|||^3 \, |||\Phi(t)|||,$$

et qu'on suppose que u vérifie (2.1), les intégrales écrites ont un sens.

Interprétation du problème. — Le problème 2.1 équivaut à la recherche de u, vérifiant (2.1) et

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta^2 u + u^2 \frac{\partial}{\partial x_1} u = f + \Delta u_0 \otimes \delta. \tag{2.4}$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. — *On suppose que la dimension $n \leqq 7$, et que Ω est borné. Alors il existe une solution du problème* 2.1, *qui vérifie en outre*

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\gamma(qu) \in L^2(-\infty, +\infty; V), \qquad \text{pour} \quad 0 < \gamma < 1/4, \\ \text{et } q \text{ une fois continûment différentiable, nulle pour tout } t > T_q \text{ (9)}. \end{array} \right. \tag{2.5}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — Soit $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m, \ldots$ une base de V telle que $\psi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour tout j. Alors, pour tout m fini, les $\Delta\psi_1, \ldots, \Delta\psi_m$ sont linéairement indépendants [car si les λ_i sont des constantes telles que

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Delta\psi_i = 0,$$

il en résulte, puisque $\sum \lambda_i \psi_i \in H_0^1(\Omega)$, que $\sum \lambda_i \psi_i = 0$, donc $\lambda_i = 0$ pour tout i].

(9) On démontre l'unicité de la solution par la méthode de LIONS-PRODI [18].

Soit $g_{im}(t)$, définie par le système différentiel non linéaire suivant [définie *a priori* dans un intervalle $(0, T_m)$] : d'abord

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\psi_i,$$

puis

$$(2.6) \quad \begin{cases} (\Delta u'_m(t), \Delta\psi_j) + (u_m(t)^2 D_1 u_m(t), \psi_j) = (f(t), \psi_j) \\ (j = 1, \ldots, m), \end{cases}$$

avec

$$(2.7) \quad g_{im}(0) = \alpha_{im}, \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}\psi_i \to u_0 \quad \text{dans } V \text{ lorsque } m \to \infty.$$

On multiplie (2.6) par $g_{jm}(t)$, on somme en j; comme

$$(u_m(t)^2 D_1(u_m(t)), u_m(t)) = 0,$$

on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta u_m(t)|^2 = (f(t), u_m(t)),$$

d'où

$$\frac{d}{dt}|\Delta u_m(t)| \leqq k|f(t)|$$

(comme Ω est borné, $|u| \leqq k |||u|||$, et $|\Delta u|$ est équivalente à $|||u|||$ sur V). Donc

$$|\Delta u_m(t)| \leqq |\Delta u_m(0)| + k\int_0^t |f(\sigma)|\,d\sigma,$$

ce qui montre que $T_m = \infty$, et

$$(2.8) \quad |||u_m(t)||| \leqq c_1(T), \qquad t \in [0, T] \quad \text{pour tout } T \text{ fini.}$$

Évaluons maintenant les dérivées fractionnaires. On raisonne directement. Appelons encore u_m la prolongée de u_m par 0 pour $t > 0$, et posons

$$v_m = q u_m,$$

où q est donnée une fois continûment différentiable, à support limité à droite $[q \in \mathcal{D}^1_-(\mathrm{R})]$. On a

$$D_t(\Delta v_m, \Delta\psi_j) = q(f, \psi_j) + q(0)(\Delta u_m(0), \Delta\psi_j)\delta$$
$$+ q'(\Delta u_m, \Delta\psi_j) - q(u_m(t)^2 D_1 u_m(t), \psi_j).$$

Mais

$$q(u_m(t)^2 D_1 u_m(t), v) = (((h_m(t), v))) \qquad (v \in V),$$

avec

$$|||h_m(t)||| \leqq \text{Cte} \quad (\text{dépendant de } q),$$

d'après (2.8). Comme h_m est à support compact, $|||h_m(t)|||$ est sommable, et le raisonnement habituel donne

$$(2.9)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |||D^{\gamma}(qu_m)|||^2\,dt \leq c(\gamma, q) \qquad (0 < \gamma < 1/4).$$

D'après le raisonnement de GÅRDING [5] déjà utilisé, on peut alors extraire de la suite u_m une suite u_μ ayant les propriétés suivantes :

(2.10) $u_\mu \to u$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ *fort*, pour tout T fini,

(2.11) $u_\mu \to u$ dans $L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$ faible, pour tout T fini.

On déduit de (2.10) et de SOBOLEV [22] que $u_\mu^2 \to u^2$ dans $L^1(0, T; L^r(\Omega))$ fort pour tout T fini, $r \leq q_1/2$, $1/q_1 = 1/2 - 1/n$, et $u_\mu \to u$ dans $L^\infty(0, T; L^s(\Omega))$ faible pour $s \leq q_2$, $1/q_2 = 1/2 - 2/n$.

Par conséquent, $u_\mu \to u$ dans $L^1(Q_T)$ *fort* pour tout T fini, si

$$2/q_1 + 1/q_2 \leq 1, \qquad \text{i. e. si} \quad n \leq 8.$$

Comme on a supposé que $n \leq 7$, on voit donc que

(2.12) $u_\mu^3 \to u^3$ dans $L^1(Q_T)$ fort pour tout T fini.

La démonstration du théorème s'achève facilement. On multiplie (2.6) par $\varphi_j(t)$, $\varphi_j \in \mathcal{D}_-^1(R)$; on utilise (2.6) pour $m = \mu$ et l'on pose

$$(2.13)\qquad \Phi(t) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(t)\,\psi_j \qquad (p \leq \mu).$$

On en déduit

$$\int_0^\infty \{-(\Delta u_\mu(t), \Delta \Phi'(t)) - 1/3\,(u_\mu(t)^3, D_1\Phi(t))\}\,dt$$
$$= \int_0^\infty (f(t), \Phi(t))\,dt + (\Delta u_\mu(0), \Delta\Phi(0)),$$

et en faisant $\mu \to \infty$,

$$(2.14)\qquad \int_0^\infty \{-(\Delta u(t), \Delta \Phi'(t)) - 1/3\,(u(t)^3, D_1\Phi(t))\}\,dt$$
$$= \int_0^\infty (f(t), \Phi(t))\,dt + (\Delta u_0, \Delta\Phi(0)),$$

pour tout Φ de la forme (2.13).

On peut intégrer par parties en x_1 dans (2.14); on en déduit que u vérifie (2.2) pour tout Φ de la forme (2.13).

Il en résulte, par un raisonnement de densité facile, que (2.2) a lieu pour tout Φ vérifiant (2.3), ce qui achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bourbaki (Nicolas). — *Intégration*, chap. I-IV. Paris, Hermann, 1952 (*Act. scient. et ind.*, 1175; *Éléments de Mathématiques*, 13).

[2] Brelot (Marcel). — *Étude et extensions du principe de Dirichlet* (*Ann. Inst. Fourier Grenoble*, t. 5, 1953-1954, p. 371-419).

[3] Deny (Jacques) et Lions (Jacques-Louis). — *Les espaces du type de Beppo Levi* (*Ann. Inst. Fourier Grenoble*, t. 5, 1953-1954, p. 305-370).

[4] Faedo (Sandro). — *Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione* (*Ann. Scuola norm. sup. Pisa*, 3e série, t. 3, 1949, p. 1-41).

[5] Gårding (Lars). — *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations* (*Math. Scand.*, t. 1, 1953, p. 55-72).

[6] Green (John W.). — *An expansion method for parabolic partial differential equations* (*J. Res. nat. Bur. Stand.*, t. 51, 1953, p. 127-132).

[7] Hopf (Eberhard). — *Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen* (*Math. Nachr.*, t. 4, 1951, p. 213-231).

[8] Hörmander (Lars). — *On the theory of general partial differential operators* (*Acta Math.*, t. 94, 1955, p. 161-248).

[9] Hörmander (Lars) et Lions (Jacques-Louis). — *Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet* (*Math. Scand.*, t. 4, 1956, p. 259-270).

[10] Kiselev (A. A.) et Ladyzenskaya (O. A.). — *Sur l'existence et l'unicité de la solution du problème non stationnaire, pour un liquide visqueux incompressible* (*Izvestia Akad. Nauk. S. S. S. R.*, t. 21, 1957, p. 655-680).

[11] Ladyzenskaya (O. A.). — *Solution globale du problème aux limites pour l'équation de Navier-Stokes en deux variables d'espace* (*Dokl. Akad. Nauk* , t. 123, 1958, p. 427-429).

[12] Leray (Jean). — *Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique* (*J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 12, 1933, p. 1-82).

[13] Leray (Jean). — *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois* (*J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 13, 1934, p. 331-418).

[14] Leray (Jean). — *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace* (*Acta Math.*, t. 63, 1934, p. 193-248).

[15] Lions (Jacques-Louis). — *Sur l'existence de solutions des équations de Navier-Stokes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 2847-2850).

[16] Lions (Jacques-Louis). — *Sur certains problèmes mixtes quasi linéaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 246, 1958, p. 1644-1647 et 1796-1799).

[17] Lions (Jacques-Louis). — *Problemi misti nel senso di Hadamard, classici e generalizzati* (*Rend. Sem. Mat. e Fisico di Milano*, t. 28, 1959, p. 3-47).

[18] Lions (Jacques-Louis) et Prodi (Giovanni). — *Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension* 2 (*C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 3519-3521).

[19] PRODI (Giovanni). — *Un teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes* (*Annali di Mat. pura ed appl.*, t. 48, 1959, p. 173-182).

[20] SCHWARTZ (Laurent). — *Théorie des distributions*, t. 1, 2e éd, Paris, Hermann, 1957; t. 2, Paris, Hermann, 1951 (*Act. scient. et ind.*, 1091, 1245 et 1122; *Publ. Inst. math. Univ. Strasbourg*, 9 et 10).

[21] SCHWARTZ (Laurent). — *Théorie des distributions à valeurs vectorielles* (*Ann. Inst. Fourier Grenoble*, t. 7, 1957, p. 1-141 et t. 8, 1958, p. 1-209).

[22] SOBOLEV (S. L.). — *Sur un théorème d'analyse fonctionnelle* [*Mat. Sbornik* (*Recueil mathématique*), t. 4 (46), 1938, p. 471-497].

[23] SOBOLEV (S. L.). — *Méthodes nouvelles à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales* [*Mat. Sbornik* (Recueil mathématique), t. 1 (43), 1936, p. 39-71].

(Manuscrit reçu le 16 septembre 1959.)

Jacques-Louis LIONS,
Institut de Mathématiques,
2 rue de la Craffe,
Nancy (Meurthe-et-Moselle).