BULLETIN DE LA S. M. F.

ARMAND BOREL
JEAN-PIERRE SERRE

Le théorème de Riemann-Roch

Bulletin de la S. M. F., tome 86 (1958), p. 97-136
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1958__86__97_0>

Bull. Soc. math. France,
86, 1958, p. 97 à 136.

LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

PAR

ARMAND BOREL et JEAN-PIERRE SERRE
(d'après des résultats inédits de A. GROTHENDIECK).

INTRODUCTION.

Ce qui suit constitue les notes d'un séminaire tenu à Princeton en automne 1957 sur les travaux de GROTHENDIECK; les résultats nouveaux qui y figurent sont dus à ce dernier; notre contribution est uniquement de nature rédactionnelle.

Le « théorème de Riemann-Roch » dont il s'agit est valable pour des variétés algébriques (non singulières) sur un corps de caratéristique quelconque; dans le cas classique, où le corps de base est $\mathbf{C}$, ce théorème contient comme cas particulier celui démontré il y a quelques années par HIRZEBRUCH [*cf.* [9] (1)].

La démonstration proprement dite du théorème de Riemann-Roch occupe les paragraphes **7** à **16**, le dernier paragraphe étant consacré à une application. Les paragraphes **1** à **6** contiennent des préliminaires sur les faisceaux algébriques cohérents [*cf.* FAC (1)]. La terminologie suivie est celle de FAC, à une différence près : pour nous conformer à une coutume qui se répand de plus en plus, nous avons appelé « morphismes » les « applications régulières » de FAC.

1. Résultats auxiliaires sur les faisceaux. — (Toutes les variétés considérées ci-après sont des variétés algébriques sur un corps k algébriquement clos de caractéristique quelconque. Sauf mention du contraire, tous les faisceaux considérés sont des faisceaux algébriques cohérents.)

(1) *Voir* la bibliographie, placée à la fin de ce travail.

PROPOSITION 1. — *Soit U un ouvert d'une variété V, soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur V et soit $\mathcal{G}$ un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{F} \mid U$ (restriction de $\mathcal{F}$ à U). Il existe alors un faisceau cohérent $\mathcal{G}' \subset \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{G}' \mid U = \mathcal{G}$.*

(En fait, la démonstration va montrer qu'il existe un *plus grand* faisceau ayant cette propriété.)

Pour tout ouvert $W \subset V$, on définit $\mathcal{G}'_W$ comme l'ensemble des sections de $\mathcal{F}$ sur W qui appartiennent à $\mathcal{G}$ sur $U \cap W$. Tout revient à montrer que le faisceau $\mathcal{G}'$ associé à ce préfaisceau est cohérent. Comme c'est une question locale, on peut supposer que V est une variété affine. Soit A son anneau de coordonnées. Il existe des éléments $f_i \in A$ tels que $U = \cup V_{f_i}$ où $V_{f_i} = U_i$ désigne l'ensemble des points de V où $f_i \neq 0$. Si, dans la définition de $\mathcal{G}'$, on remplace l'ouvert U par l'ouvert U_i, on obtient un faisceau $\mathcal{G}'_i \subset \mathcal{F}$, et il est clair que $\mathcal{G}' = \cap \mathcal{G}'_i$. En vertu de résultats connus sur les faisceaux cohérents (*cf.* FAC, p. 209), il suffit de montrer que les $\mathcal{G}'_i$ sont cohérents. On est donc ramené au cas où V est affine, et où $U = V_f$, $f \in A$. Dans ce cas, le faisceau $\mathcal{F}$ est défini par un module M sur A, et le sous-faisceau $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F} \mid U$ est défini par un sous-module N de $M_f = M \otimes_A A_f$. Soit N' l'image réciproque de N dans M par l'application canonique $M \rightarrow M_f$. Le module N' correspond à un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{F}$, et l'on vérifie immédiatement (en prenant pour W des $V_{f'}$, par exemple) que ce faisceau n'est autre que $\mathcal{G}'$, ce qui achève la démonstration.

LEMME 1. — *Soit U un ouvert d'une variété affine V et soit $\mathcal{F}$ un faisceau (cohérent) sur U. Alors $\mathcal{F}$ est engendré par ses sections (sur U).*

Soit $x \in U$, et soit f une fonction régulière sur V, nulle sur $V - U$ et non nulle en x. On a $V_f \subset U \subset V$. Comme V_f est affine, on sait (FAC) que $\mathcal{F}_x$ est engendré par ses sections sur V_f, et il nous suffit donc de démontrer que ces sections peuvent se prolonger à U, une fois multipliées par une puissance convenable de f. C'est ce qui résulte du lemme général suivant :

LEMME 2. — *Soit X une variété, soit f une fonction régulière sur X, soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X, et soit s une section de $\mathcal{F}$ sur $U = X_f$. Il existe alors un entier $n > 0$ tel que $f^n s$ se prolonge en une section de $\mathcal{F}$ sur X.*

On recouvre X par des ouverts affines X_i en nombre fini. En appliquant à chacun d'eux le lemme 1 de FAC, p. 247 (ou en raisonnant directement comme dans la proposition 1), on voit qu'il existe un entier n et des sections s_i de $\mathcal{F}$ sur les X_i prolongeant $f^n s$ sur $X_i \cap U$. Puisque les $s_i - s_j$ sont nulles sur $X_i \cap X_j \cap U$, il existe un entier m tel que $f^m(s_i - s_j) = 0$ sur $X_i \cap X_j$ (FAC, p. 235, ou raisonnement direct), et m peut être choisi indépendant du couple (i, j). Les $f^m s_i$ définissent alors une section s' de $\mathcal{F}$ sur X qui prolonge bien $f^{n+m} s$.

PROPOSITION 2. — *Si U est un ouvert d'une variété V, tout faisceau $\mathcal{F}$ sur U se prolonge à V.*

Montrons que, si $U \neq V$, on peut prolonger $\mathcal{F}$ à un ouvert $U' \supset U$, avec $U' \neq U$; du fait que toute suite croissante d'ouverts est stationnaire, cela entraînera la proposition. Soit $x \in V - U$, et soit W un ouvert affine contenant x; posons $U' = W \cup U$. On est donc ramené à prolonger à W le faisceau $\mathcal{F} \mid W \cap U$, autrement dit, on est ramené à démontrer la proposition dans le cas particulier où V est affine. Dans ce cas, le lemme 1 montre que $\mathcal{F}$ est engendré par ses sections, c'est-à-dire est de la forme $\mathcal{L}/\mathcal{R}$, où $\mathcal{L}$ est somme directe de faisceaux $\mathcal{O}_U$. Le faisceau $\mathcal{L}$ se prolonge de façon évidente à V, et, d'après la proposition 1, il existe un sous-faisceau $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{L}$ sur V dont la restriction à U est $\mathcal{R}$. Le faisceau $\mathcal{L}/\mathcal{R}'$ est alors le prolongement cherché.

REMARQUE. — Les propositions 1 et 2 correspondent au fait géométrique que toute sous-variété algébrique de U a pour adhérence une sous-variété algébrique de V. Ces propositions ne s'étendent pas *telles quelles* au cas « analytique ». On peut tout au plus espérer (en vertu des résultats de Rothstein) qu'elles sont encore valables si l'on fait certaines restrictions sur les dimensions de $V - U$ et des variétés intervenant dans la décomposition primaire locale du faisceau $\mathcal{F}$.

2. **Applications propres de variétés quasi projectives.** — Une variété X est dite *quasi projective* si elle est isomorphe à une sous-variété localement fermée d'un espace projectif. Elle est dite *projective* si elle est isomorphe à une sous-variété fermée d'un espace projectif. *A partir de maintenant, toutes les variétés considérées seront supposées quasi projectives.*

LEMME 3. — *Soient P un espace projectif, U une variété quelconque, G un sous-ensemble fermé de $P \times U$. La projection de G dans U est fermée.*

C'est la traduction en langage géométrique du fait bien connu qu'un espace projectif est une variété « complète » au sens de Weil. Rappelons rapidement le principe de la démonstration :

La question étant locale par rapport à U, on peut supposer U affine et même U ouvert affine de l'espace k^n. On peut aussi supposer G irréductible. Choisissons alors dans P des coordonnées projectives x_i telles que G rencontre l'ensemble $P_0 \times U$ des points où $x_0 \neq 0$. Si A désigne l'anneau de coordonnées de U, celui de la variété affine $P_0 \times U$ est $A[x_i/x_0] = B_0$; l'ensemble G définit (et est défini par) un idéal premier $\mathfrak{p}$ de B_0. Si $\mathfrak{p}'$ désigne $A \cap \mathfrak{p}$, l'idéal premier $\mathfrak{p}'$ correspond à l'adhérence de la projection G' de G dans U. Un point de cette adhérence est donc un homomorphisme $f: A \to k$ (k désignant le corps de base) qui est nul sur $\mathfrak{p}'$;

ce point est image d'un point de G situé dans $P_0 \times U$ si et seulement si f peut se prolonger en un homomorphisme $g : B_0 \to k$, nul sur $\mathfrak{p}$. Soit alors L le corps des fonctions de G; le corps L contient $A/\mathfrak{p}'$ comme sous-anneau. D'après le théorème d'extension des spécialisations, il existe une valuation v de L, à valeurs dans k, et qui prolonge f. Soit Φ la place associée à cette valuation. Si $v(x_i/x_0) \geqq 0$ pour tout i, la place Φ est finie sur les x_i/x_0, donc induit sur $B_0/\mathfrak{p} \subset L$ un homomorphisme g qui prolonge f. Si $v(x_i/x_0) < 0$ pour un i, on remplace x_0 par celui des x_i tel que $v(x_i/x_0)$ soit le plus petit possible, et l'on est ramené au cas précédent.

Si $f : X \to Y$ est un morphisme, on notera G_f son graphe. Il est trivial que G_f est fermé dans $X \times Y$.

LEMME 4. — *Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux morphismes, X et Y étant des sous-variétés des espaces projectifs P et P'. Supposons que G_f soit fermé dans $P \times Y$ et G_g fermé dans $P' \times Z$. Alors G_{gf} est fermé dans $P \times Z$.*

On a $G_f \subset P \times Y = P \times G_g \subset P \times P' \times Z$, et comme chacun est fermé dans le suivant, on voit que G_f s'identifie à un sous-ensemble fermé de $P \times P' \times Z$. Comme G_{gf} n'est autre que la projection de G_f sur le facteur $P \times Z$, le lemme résulte du lemme 3.

LEMME 5. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme, et soient $X \subset P$, $X \subset P'$ deux plongements de X dans des espaces projectifs. Si G_f est fermé dans $P \times Y$, il l'est dans $P' \times Y$.*

On applique le lemme 4 aux morphismes $X \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$, où i désigne l'application identique. Tout revient à voir que le graphe G_i de i dans $P \times X$ est fermé, ce qui résulte du fait que c'est l'intersection avec $P \times X$ de la diagonale de $P \times P$.

Le lemme 5 justifie la définition suivante :

DÉFINITION. — *Une application $f : X \to Y$ est dite propre si c'est un morphisme, et si son graphe G_f est fermé dans $P \times Y$, où P est un espace projectif contenant X.*

On peut donner une définition des applications propres qui soit analogue à la définition des variétés complètes :

PROPOSITION 3. — *Pour qu'un morphisme $f : X \to Y$ soit propre, il faut et il suffit que, pour toute variété Z, et tout sous-ensemble fermé T de $X \times Z$, l'image de T dans $Y \times Z$ soit fermée.*

Soit P un espace projectif dans lequel X se trouve plongé; puisque G_f est fermé dans $P \times Y$, le produit $G_f \times Z$ est fermé dans $P \times Y \times Z$, et T se trouve donc plongé comme sous-ensemble fermé dans $P \times Y \times Z$.

Appliquant le lemme 3, on voit que la projection de T dans $Y \times Z$ [qui n'est autre que $f \times 1(T)$] est fermée. Inversement, supposons cette propriété vérifiée, et appliquons la à $Z = P$, l'ensemble T étant la diagonale de $X \times X$, plongée dans $X \times P$. L'image de T dans $Y \times Z = Y \times P$ n'est alors pas autre chose que G_f, qui est donc bien fermé,

C.Q.F.D.

PROPOSITION 4. — (i) *L'application identique $i : X \to X$ est propre.*

(ii) *La composée de deux applications propres est propre.*

(iii) *Le produit direct de deux applications propres est propre.*

(iv) *L'image d'un fermé par une application propre est un fermé.*

(v) *Une injection $Y \to X$ est propre si et seulement si Y est fermé dans X.*

(vi) *Tout morphisme d'une variété projective est propre.*

(vii) *Une projection $Y \times Z \to Y$ est propre si et seulement si Z est projective (la variété Y étant supposée non vide).*

Indiquons à titre d'exemple comment on démontre (vii) (les autres assertions étant encore plus faciles à vérifier). Si Z est projective, on applique le critère de la proposition 3; soit donc Z' une variété quelconque et T un sous-ensemble fermé de $Y \times Z \times Z'$; on doit montrer que la projection de T dans $Y \times Z'$ est fermée, ce qui résulte du lemme 3. Réciproquement, si $Y \times Z \to Y$ est propre, la composée $Z \to Y \times Z \to Y$ est propre. Comme cette application a pour image un point, on en déduit aussitôt que Z est projective (en revenant à la définition).

COROLLAIRE 5. — *Pour qu'un morphisme $f : X \to Y$ soit propre, il faut et il suffit qu'on puisse le factoriser en $X \to P \times Y \to Y$, où $X \to P \times Y$ est une injection sur une sous-variété fermée, et $P \times Y \to Y$ est la projection sur le second facteur (P désignant un espace projectif).*

Par définition même d'une application propre cette condition est nécessaire (si l'on prend pour P un espace projectif où se trouve plongé X). Elle est suffisante d'après (ii), (v) et (vii).

PROPOSITION 5. — *Supposons que le corps de base k soit le corps des complexes. Pour qu'un morphisme $f : X \to Y$ soit propre (au sens précédent), il faut et il suffit qu'il soit propre (au sens topologique) quand on munit X et Y de la topologie « usuelle ».*

Supposons que f soit propre au sens algébrique, et soit K un compact de Y (pour la topologie usuelle). Supposons X plongé dans un projectif P. Du fait que P est compact, on a $f^{-1}(K) = G_f \cap (P \times K)$ compact, ce qui montre que f est propre au sens topologique. Supposons inversement cette condition vérifiée, et prouvons que la condition de la proposition 3 est satisfaite : l'image de T dans $Y \times Z$ est fermée pour la topologie usuelle, donc aussi pour la topologie de Zariski (GAGA, proposition 7, p. 12),

C.Q.F.D.

Remarque. — La notion d'application propre s'étend aux variétés « abstraites » (c'est-à-dire non quasi projectives) : il suffit de prendre le critère de la proposition 3 comme définition, *cf.* [4]. Les propositions 4 et 5 restent encore valables (à condition d'énoncer la proposition 4 (vii) en remplaçant « projective » par « complète »). Les démonstrations sont essentiellement les mêmes : au lieu d'utiliser des plongements dans des projectifs, on se sert du fait que toute variété est image par une application propre d'une variété quasi projective (lemme de Chow, *cf.* [4] ou jub. Denjoy).

3. Image d'un faisceau par une application propre. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'une variété Y, et soit $\mathcal{F}$ un faisceau (algébrique cohérent, comme toujours) sur X. On définit, par le procédé classique de Leray, des faisceaux $R^q f(\mathcal{F})$ sur Y en posant

$$R^q f(\mathcal{F})_U = H^q(f^{-1}(U), \mathcal{F}) \quad \text{pour tout ouvert } U \text{ de } Y.$$

Pour $q = 0$, on trouve le faisceau associé au préfaisceau des $H^0(f^{-1}(U), \mathcal{F})$; c'est *l'image directe* du faisceau $\mathcal{F}$. On peut montrer (*cf.* Tohoku) que les $R^q f$ sont les *foncteurs dérivés* du foncteur $\mathcal{F} \to R^0 f(\mathcal{F})$ (lorsque $\mathcal{F}$ parcourt la catégorie de tous les faisceaux sur X, cohérents ou pas).

Exemples. — 1° Si $X \to Y$ est une injection sur une sous-variétés fermée, le faisceau $R^0 f(\mathcal{F})$ n'est autre que le faisceau $\mathcal{F}$ prolongé par 0 en dehors de X, et les faisceaux $R^q f(\mathcal{F})$, $q \geqq 1$, sont nuls [prendre pour U un ouvert affine; on a alors $f^{-1}(U) = U \cap X$ affine, d'où $R^q f(\mathcal{F})_U = 0$].

2° Prenons pour Y un point. Un faisceau sur un point est simplement un groupe (ou un k-espace vectoriel, s'il s'agit de faisceaux algébriques). Les $R^q f(\mathcal{F})$ sont alors simplement les groupes de cohomologie $H^q(X, \mathcal{F})$; on notera que ce ne sont pas nécessairement des espaces vectoriels de dimension finie (autrement dit des faisceaux cohérents sur Y).

3° Supposons que $f : X \to Y$ définisse un isomorphisme birationnel entre les variétés X et Y (supposées projectives et non singulières). Prenons pour $\mathcal{F}$ le faisceau $\mathcal{O}_X$ des anneaux locaux de X ; on voit tout de suite que $R^0 f(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$. Est-il vrai que $R^q f(\mathcal{O}_X) = 0$ pour $q \geqq 1$? On peut en tout cas le vérifier pour les « éclatements », et il serait intéressant de le savoir dans le cas général.

Signalons que la théorie de Leray se laisse transposer sans changements (cf. Tohoku); il y a une suite spectrale aboutissant à $H^*(X, \mathcal{F})$ et de terme $E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f(\mathcal{F}))$. Si l'on applique par exemple cette suite spectrale à l'exemple 3° ci-dessus, on voit que $R^q f(\mathcal{O}_X) = 0$ pour $q \geq 1$ entraîne $H^*(X, \mathcal{O}_X) = H^*(Y, \mathcal{O}_Y)$.

On a vu (exemple 2°) que les $R^q f(\mathcal{F})$ ne sont en général pas des faisceaux cohérents sur Y. Toutefois :

THÉORÈME 1. — *Si $f : X \to Y$ est propre, les $R^q f(\mathcal{F})$, $q > 0$, sont des faisceaux cohérents sur Y, quel que soit le faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X.*

Soit P un espace projectif dans lequel X se trouve plongé, et soit G_f le graphe de f dans $P \times Y$. Par définition d'une application propre, G_f est fermé dans $P \times Y$. Soit $\mathcal{F}'$ le faisceau sur $P \times Y$ obtenu en prolongeant $\mathcal{F}$ par 0 en dehors de $G_f = X$ (*cf.* exemple 2°); si π désigne la projection de $P \times Y$ sur Y, on voit tout de suite que $R^q \pi(\mathcal{F}') = R^q f(\mathcal{F})$. *On est donc ramené à démontrer le théorème* 1 *pour* $\pi : P \times Y \to Y$. De plus, comme la question est locale par rapport à Y, on peut supposer que Y est une variété affine.

Sur P on a un fibré « standard » de dimension 1, soit L, dont les sections sont les formes linéaires (*cf.* FAC, chap. III, § 2); ce fibré définit un fibré sur $X = P \times Y$ qu'on note de la même manière. Le faisceau associé à L^n sur $P \times Y$ sera noté $\mathcal{O}_X(n)$. On a alors :

LEMME 6. — *Tout faisceau algébrique cohérent $\mathcal{F}$ sur $X = P \times Y$, Y affine, est isomorphe à un quotient d'une somme directe de faisceaux $\mathcal{O}_X(n)$.*

Lorsque Y est réduit à un point, c'est le théorème 1 de FAC, p. 247. On va se ramener à ce cas particulier : soit $Y \subset P'$ un plongement de Y dans un espace projectif, et soit $\overline{Y}$ l'adhérence de Y. D'après la proposition 2, le faisceau $\mathcal{F}$ se prolonge en un faisceau $\overline{\mathcal{F}}$ sur $P \times \overline{Y}$. D'autre part, le plongement de $\overline{Y}$ dans P' définit sur $\overline{Y}$ (et donc aussi sur $P \times \overline{Y}$) un fibré L' de dimension 1. Le fibré produit LL' correspond au plongement bien connu de $P \times P'$ dans un projectif P'' (plongement « de Segre », au moyen des produits $x_i y_j$ des coordonnées homogènes des deux projectifs). En appliquant alors à $\overline{\mathcal{F}}$ et à P'' le résultat de FAC cité plus haut, on voit que $\overline{\mathcal{F}}$ est quotient d'une somme directe de faisceaux $\mathcal{O}_{P \times \overline{Y}}(L^n L'^n)$; en restreignant à $P \times Y$, et en tenant compte du fait que P' est *trivial* sur Y, on obtient bien le résultat cherché.

[Bien entendu, on pourrait aussi faire une démonstration directe, calquée sur celle de FAC.]

LEMME 7. — *Les $R^q \pi(\mathcal{O}_X(n))$ sont des faisceaux cohérents sur Y.*

On calcule explicitement les faisceaux $R^q \pi(\mathcal{O}_X(n))$. Si U est un ouvert affine de Y, on a

$$R^q\pi(\mathcal{O}_X(n))_U = H^q(P \times U, \mathcal{O}_X(n)).$$

Si $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ est un recouvrement affine de P, les $U_i \times U$ forment un recouvrement affine $\mathfrak{U}'$ de $P \times U$; tenant compte de ce que $\mathcal{O}_X(n)$ « provient » de P, on voit que le complexe $C(\mathfrak{U}', \mathcal{O}_X(n))$ est isomorphe au produit tensoriel $C(\mathfrak{U}', \mathcal{O}_P(n)) \otimes_k H^0(U, \mathcal{O}_U)$. La formule des coefficients universels montre alors qu'on a

$$H^q(P \times U, \mathcal{O}_X(n)) = H^q(P, \mathcal{O}_P(n)) \otimes_k H^0(U, \mathcal{O}_U).$$

Cette dernière formule signifie que $R^q\pi(\mathcal{O}_X(n))$ est isomorphe au faisceau $\mathcal{O}_Y \otimes_k V^q$, avec $V^q = H^q(P, \mathcal{O}_P(n))$. Comme V^q est un espace vectoriel de dimension finie sur k, c'est bien là un faisceau cohérent sur Y, ce qui démontre le lemme.

[La démonstration précédente s'applique plus généralement à toute projection $\pi : Y \times Z \to Y$, avec Z projective, lorsque le faisceau $\mathcal{F}$ est de la forme $\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}$, avec $\mathcal{G}$ cohérent sur Y, et $\mathcal{H}$ cohérent sur Z. On trouve alors que $R^q\pi(\mathcal{F}) = \mathcal{G} \otimes H^q(Z, \mathcal{H})$. On pourrait considérer, encore plus généralement, le cas d'une application produit $Y \times Z \to Y' \times Z'$, ...]

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1 pour un faisceau $\mathcal{F}$ quelconque sur $X = P \times Y$. On raisonne par récurrence descendante sur l'entier q. Si $q > \dim X$, il est clair que $R^q\pi(\mathcal{F}) = 0$. Supposons donc le théorème démontré pour $q+1$. D'après le lemme 6, il existe une suite exacte $0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{L} \to \mathcal{F} \to 0$, où $\mathcal{L}$ est isomorphe à une somme directe de faisceaux $\mathcal{O}_X(n)$. La suite exacte de cohomologie (ou la suite exacte des foncteurs dérivés) montre qu'on a une suite exacte :

$$R^q\pi(\mathcal{R}) \to R^q\pi(\mathcal{L}) \to R^q\pi(\mathcal{F}) \to R^{q+1}\pi(\mathcal{R}) \to R^{q+1}\pi(\mathcal{L}).$$

Vu l'hypothèse de récurrence et le lemme 7, les faisceaux $R^q\pi(\mathcal{L})$, $R^{q+1}\pi(\mathcal{R})$ et $R^{q+1}\pi(\mathcal{L})$ sont cohérents. Il s'ensuit que $R^q\pi(\mathcal{F})$ admet comme sous-faisceau un faisceau de type fini, le quotient étant cohérent. Un raisonnement immédiat montre alors que $R^q\pi(\mathcal{F})$ est de type fini. Ce résultat, étant démontré pour tout faisceau cohérent, vaut aussi pour $\mathcal{R}$. L'image de $R^q\pi(\mathcal{R})$ dans $R^q\pi(\mathcal{L})$ est alors un faisceau cohérent (FAC, p. 208), et $R^q\pi(\mathcal{F})$ est extension de deux faisceaux cohérents, donc est cohérent (*id.*).

REMARQUES. — 1° Le théorème 1 reste valable si l'on ne suppose plus que X est quasi projective (on se ramène à ce cas en utilisant le lemme de Chow et le « dévissage » des faisceaux cohérents, *cf.* [6]).

2° GRAUERT et REMMERT ont démontré l'analogue analytique du théorème 1 pour la projection $\pi : P \times Y \to Y$. Inutile de préciser que la démonstration est plus difficile !

4. Le groupe $K(X)$ des classes des faisceaux sur une variété X. — Soit X une variété algébrique, et soit $F(X)$ le groupe abélien libre ayant pour base l'ensemble $\mathcal{C}$ des faisceaux (algébriques cohérents, comme toujours) sur X. Un élément de $F(X)$ est donc une combinaison linéaire formelle

$$x = \sum n_i \mathcal{F}_i \qquad (n_i \in \mathbf{Z},\ \mathcal{F}_i \text{ faisceaux cohérents sur } X).$$

On convient, bien entendu, d'identifier deux faisceaux isomorphes [sinon, $F(X)$ ne serait même pas un « ensemble » !].

Soit

$$(E) \qquad 0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

une suite exacte de faisceaux. A cette suite exacte nous ferons correspondre l'élément $Q(E) = \mathcal{F} - \mathcal{F}' - \mathcal{F}''$ de $F(X)$.

DÉFINITION. — *On appelle groupe des classes de faisceaux sur X le groupe quotient de $F(X)$ par le sous-groupe engendré par les $Q(E)$, pour E parcourant toutes les suites exactes à trois termes.*

Ce groupe sera noté $K(X)$ dans ce qui suit. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X, son image canonique dans $K(X)$ sera notée $\gamma_X(\mathcal{F})$, ou $\gamma(\mathcal{F})$, ou simplement $\mathcal{F}$, suivant les risques de confusion. Les $\gamma(\mathcal{F})$ engendrent $K(X)$, et l'application $\mathcal{F} \to \gamma(\mathcal{F})$ est « additive »; autrement dit, si l'on a la suite exacte (E), on a $\gamma(\mathcal{F}) = \gamma(\mathcal{F}') + \gamma(\mathcal{F}'')$. Réciproquement, par définition même de $K(X)$, toute application de l'ensemble des faisceaux dans un groupe abélien G qui est additive peut s'écrire sous la forme $F \to \pi(\gamma(\mathcal{F}))$, où $\pi : K(X) \to G$ est un homomorphisme déterminé de manière unique.

On peut appliquer la construction précédente à bien d'autres situations que celle des faisceaux. Nous aurons besoin, en particulier, du cas des *fibrés à fibre vectorielle* de base X. Soit donc $\mathcal{V}$ l'ensemble de ces fibrés; on définit $F_1(X)$ comme le groupe libre ayant pour base $\mathcal{V}$, et $K_1(X)$ comme le quotient de $F_1(X)$ par les $Q_1(E) = \mathcal{F} - \mathcal{F}' - \mathcal{F}''$, où (E) désigne cette fois une suite exacte d'espaces fibrés. Si X est connexe (ce qu'on supposera), on sait qu'on peut identifier les fibrés à fibre vectorielle avec les faisceaux localement libres sur X; on a donc $\mathcal{V} \subset \mathcal{C}$, et l'injection $\mathcal{V} \to \mathcal{C}$ définit un homomorphisme canonique $\varepsilon : K_1(X) \to K(X)$.

THÉORÈME 2. — *Supposons que X soit une variété quasi projective, irréductible, et non singulière. L'homomorphisme $\varepsilon : K_1(X) \to K(X)$ défini ci-dessus est alors une bijection.*

Nous aurons besoin d'un certain nombre de résultats auxiliaires sur les relations entre $\mathcal{V}$ et $\mathcal{C}$:

LEMME 8. — *Soit $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{L}' \to \mathcal{L} \to 0$ une suite exacte telle que $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L} \in \mathcal{V}$. On a alors $\mathcal{G} \in \mathcal{V}$.*

Si $P \in X$, le module local $\mathcal{L}_P$ est libre sur $\mathcal{O}_P$, donc facteur direct dans $\mathcal{L}'_P$, ce qui montre que $\mathcal{Z}_P$ est un $\mathcal{O}_P$-module projectif, donc libre puisque $\mathcal{O}_P$ est un anneau local. Or, un faisceau algébrique cohérent dont tous les modules ponctuels sont libres est localement libre (*cf.* FAC, p. 242, lignes 10-11 du bas).

Lemme 9. — *Soit $n = \dim X$, et soit $0 \rightarrow \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{L}_p \rightarrow \ldots \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ une suite exacte, avec $\mathcal{L}_i \in \mathcal{V}$. Si $p \geq n - 1$, on a $\mathcal{Z} \in \mathcal{V}$.*

C'est encore une fois une question locale. Soit donc $P \in X$; du fait que l'anneau local $\mathcal{O}_P$ est un anneau local *régulier* de dimension n, le théorème des syzygies s'applique, et montre que $\mathcal{Z}_P$ est $\mathcal{O}_P$-libre, d'où le résultat cherché (noter que l'hypothèse que X est non singulière est utilisée ici de façon essentielle).

Lemme 10. — *Tout $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ est quotient d'un $\mathcal{L} \in \mathcal{V}$.*

Soit $X \subset P$ un plongement projectif de X, et soit $\overline{X}$ son adhérence dans P. D'après la proposition 2, $\mathcal{F}$ se prolonge en un faisceau $\mathcal{F}'$ sur $\overline{X}$. D'après le théorème 1 de FAC, p. 247 (*cf.* aussi lemme 6) le faisceau $\mathcal{F}'$ est quotient d'une somme directe de faisceaux $\mathcal{O}_{\overline{X}}(n)$, donc d'un faisceau localement libre sur $\overline{X}$. Par restriction à X on obtient le résultat cherché.

Corollaire. — *Pour tout $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ il existe une suite exacte :*

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{L}_{n-1} \rightarrow \ldots \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0 \qquad \textit{avec} \quad \mathcal{L}_i \in \mathcal{V}.$$

C'est une conséquence des lemmes 9 et 10. On peut l'énoncer en disant qu'il existe un « complexe » $\mathcal{L}$ de $\mathcal{V}$, acyclique en dimensions ≥ 1, et tel que $H_0(\mathcal{L}) = \mathcal{F}$.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 2. Si $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$, choisissons un complexe acyclique $\mathcal{L}$ de $\mathcal{V}$ tel que $H_0(\mathcal{L}) = \mathcal{F}$. Nous poserons

$$\gamma_1(\mathcal{L}) = \sum (-1)^p \gamma_1(\mathcal{L}_p);$$

c'est un élément de $K_1(X)$; définition analogue pour $\gamma(\mathcal{L}) \in K(X)$. Supposons démontrés les deux lemmes suivants :

Lemme 11. — *$\gamma_1(\mathcal{L})$ ne dépend que de $\mathcal{F}$.*

Lemme 12. — *$\gamma_1(\mathcal{L})$ est une fonction additive de $\mathcal{F}$.*

Posant alors $\eta(\mathcal{F}) = \gamma_1(\mathcal{L})$, on obtient un homomorphisme $\eta : K(X) \rightarrow K_1(X)$. Par définition de $\mathcal{L}$, on a

$$\varepsilon(\gamma_1(\mathcal{L})) = \gamma(\mathcal{L}) = \gamma(\mathcal{F}), \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon \circ \eta = 1.$$

La vérification de $\eta \circ \varepsilon = 1$ est encore plus triviale. Tout revient donc à démontrer les lemmes **11** et **12**.

Démonstration du lemme **11**. — Énonçons d'abord un corollaire du lemme **10** :

Lemme **13**. — *Soient* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C} \in \mathbf{C}$, *et soient* $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *et* $v : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, *avec* u *et* v *surjectifs. Il existe alors* $\mathcal{L} \in \mathcal{V}$ *et* $u' : \mathcal{L} \to \mathcal{C}$, $v' : \mathcal{L} \to \mathcal{A}$ *tels que* $v \circ u' = u \circ v'$ *et que* u' *et* v' *soient surjectifs* :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \xrightarrow{v'} & \mathcal{A} \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{v} & \mathcal{B}. \end{array}$$

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ le sous-faisceau de $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$ formé des éléments ayant même image dans $\mathcal{B}$. Du fait que u et v sont surjectifs, les projections canoniques $(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \to \mathcal{A}$ et $(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ sont surjectives. En appliquant le lemme **10** à $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ on en déduit le résultat cherché.

Soient maintenant $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux résolutions de $\mathcal{F}$, qu'on se propose de comparer. On va montrer qu'il existe une troisième résolution $\mathcal{L}''$ de $\mathcal{F}$ munie d'homomorphismes surjectifs $\mathcal{L}'' \to \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'' \to \mathcal{L}'$ induisant l'identité sur H_0; tout reviendra alors à prouver que $\gamma_1(\mathcal{L}'') = \gamma_1(\mathcal{L})$, par exemple. Or, si l'on note $\mathcal{L}_1$ le noyau de $\mathcal{L}'' \to \mathcal{L}$, on a $\mathcal{L}_1 \in \mathcal{V}$ d'après le lemme **8**, et la suite exacte d'homologie montre que $H_q(\mathcal{L}_1) = 0$ pour tout $q \geqq 0$. On en déduit tout de suite que $\gamma_1(\mathcal{L}_1) = 0$, et comme $\gamma_1(\mathcal{L}'') = \gamma_1(\mathcal{L}) + \gamma_1(\mathcal{L}_1)$, cela donne le résultat cherché. Tout revient donc à démontrer l'existence de la résolution $\mathcal{L}''$, ce qui se fait dimension par dimension (en arrêtant la construction au moyen du lemme **9**), au moyen du lemme suivant :

Lemme **14**. — *Soient*

$$0 \to \mathcal{Z} \to \mathcal{L} \to \mathcal{B} \to 0 \qquad \textit{et} \qquad 0 \to \mathcal{Z}' \to \mathcal{L}' \to \mathcal{B}' \to 0$$

deux suites exactes ($\mathcal{L}$, $\mathcal{L}' \in \mathcal{V}$), *et soit* $\mathcal{B}'' \to \mathcal{B}$, $\mathcal{B}'' \to \mathcal{B}'$ *des applications surjectives. On peut alors compléter* $\mathcal{B}''$ *en une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{Z}'' \to \mathcal{L}'' \to \mathcal{B}'' \to 0 \qquad \textit{avec} \quad \mathcal{L}'' \in \mathcal{V},$$

et trouver des homomorphismes surjectifs

$$\mathcal{Z}'' \to \mathcal{Z}, \qquad \mathcal{Z}'' \to \mathcal{Z}', \qquad \mathcal{L}'' \to \mathcal{L}, \qquad \mathcal{L}'' \to \mathcal{L}'$$

tels que le diagramme ainsi constitué soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{Z} & \to & \mathcal{L} & \to & \mathcal{B} & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{Z}'' & \to & \mathcal{L}'' & \to & \mathcal{B}'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{Z}' & \to & \mathcal{L}' & \to & \mathcal{B}' & \to & 0. \end{array}$$

En appliquant le lemme 13 à $\mathcal{L} \to \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'' \to \mathcal{B}$, on trouve $\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_1 \to \mathcal{B}''$ surjectifs. En appliquant le même lemme à $\mathcal{L}_1 \to \mathcal{B}'' \to \mathcal{B}'$ et $\mathcal{L}' \to \mathcal{B}'$, on trouve $\mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}'$ surjectifs, rendant le diagramme commutatif.

On choisit, d'autre part, $\mathcal{L}_3 \to \mathcal{Z}$ et $\mathcal{L}'_3 \to \mathcal{Z}'$ surjectifs, et l'on pose

$$\mathcal{L}'' = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}'_3 \quad \text{(somme directe)}.$$

On définit $\mathcal{L}'' \to \mathcal{B}''$ comme étant o sur $\mathcal{L}_3$ et $\mathcal{L}'_3$, et égal à $\mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{B}''$ sur $\mathcal{L}_2$; on définit $\mathcal{L}'' \to \mathcal{L}$ comme étant égal à $\mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}_2$, à o sur $\mathcal{L}'_3$, et à $\mathcal{L}_3 \to \mathcal{Z} \to \mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}_3$; définition analogue pour $\mathcal{L}'' \to \mathcal{L}'$. On définit ensuite $\mathcal{Z}''$ comme le noyau de $\mathcal{L}'' \to \mathcal{B}''$ et $\mathcal{Z}'' \to \mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}'' \to \mathcal{Z}'$ comme restrictions des applications de $\mathcal{L}''$. La commutativité du diagramme est alors immédiate; de plus, $\mathcal{Z}''$ contient évidemment $\mathcal{L}_3$ qui s'applique sur $\mathcal{Z}$; *a fortiori*, $\mathcal{Z}'' \to \mathcal{Z}$ est surjectif, et de même pour $\mathcal{Z}'' \to \mathcal{Z}'$, ce qui achève la démonstration du lemme 13, et en même temps celle du lemme 11.

Démonstration du lemme 12. — Soit $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ une suite exacte. On va montrer qu'il existe des résolutions $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}''$ de ces faisceaux formant aussi une suite exacte $0 \to \mathcal{L}' \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}'' \to 0$. L'additivité de $\gamma_1(\mathcal{L})$ sera alors évidente. Pour construire ces résolutions on procède encore dimension par dimension. Tout revient à montrer qu'étant donnée une suite exacte du type ci-dessus, on peut la plonger dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{F}' & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}'' & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{L}' & \to & \mathcal{L} & \to & \mathcal{L}'' & \to & 0, \end{array} \qquad \mathcal{L}',\ \mathcal{L},\ \mathcal{L}'' \in \mathcal{V}$$

où les $\mathcal{L} \to \mathcal{F}$ sont surjectifs.

Pour cela, on choisit d'abord $\mathcal{L}'' \to \mathcal{F}''$ surjectif, et l'on applique le lemme 13 à $\mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ et $\mathcal{L}'' \to \mathcal{F}''$. On en déduit $\mathcal{L}_1 \to \mathcal{F}$ et $\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}''$ surjectifs et rendant le diagramme commutatif. D'autre part, on choisit $\mathcal{L}_2 \to \mathcal{F}'$ surjectif, et l'on pose $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1$ (somme directe). On définit $\mathcal{L} \to \mathcal{F}$ et $\mathcal{L} \to \mathcal{L}''$ de façon évidente, et l'on prend pour $\mathcal{L}'$ le noyau de $\mathcal{L} \to \mathcal{L}''$. On a $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}'$, ce qui montre que $\mathcal{L}'$ s'applique sur $\mathcal{F}'$, et toutes les conditions voulues sont satisfaites.

La démonstration du théorème 2 est donc achevée.

Remarque. — L'hypothèse que X est quasi projective a été utilisée uniquement dans le lemme 10, pour montrer que tout faisceau cohérent sur X est quotient d'un faisceau localement libre. Nous ignorons si ce lemme s'étend aux variétés algébriques « abstraites ».

5. **Opérations sur $K(X)$.** — *a. Structure d'anneau sur $K(X)$.* — Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux (cohérents) sur X. Les $\mathrm{Tor}_p(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ $(p = 0, 1, \ldots)$ sont des faisceaux cohérents sur X (bien entendu, les Tor

sont pris sur le faisceau des anneaux locaux de X). Comme X est non singulière, on a $\mathrm{Tor}_p(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$ lorsque $p > \dim X$, ce qui fait que la somme alternée $\chi(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sum (-1)^p \mathrm{Tor}_p(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est un élément bien défini de $K(X)$. La suite exacte des Tor montre que $\chi(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est bilinéaire en $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, donc se prolonge en une application bilinéaire de $K(X) \times K(X)$ dans $K(X)$; nous noterons $(x, x') \to x.x'$ cette application.

PROPOSITION 6. — *Le produit ci-dessus est commutatif et associatif.*

La commutativité est triviale, chaque Tor étant commutatif. L'associativité peut se déduire de la « formule d'associativité » des Tor (*cf.* Dipl.) : on définit des « Tor simultanés » $\mathrm{Tor}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ et deux suites spectrales aboutissant à $\mathrm{Tor}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ et de termes E_2 égaux respectivement à $\mathrm{Tor}(\mathcal{F}, \mathrm{Tor}(\mathcal{G}, \mathcal{H}))$ et $\mathrm{Tor}(\mathrm{Tor}(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \mathcal{H})$; on utilise le fait que les caractéristiques d'Euler-Poincaré sont invariantes dans une suite spectrale.

On peut donner une démonstration plus simple en utilisant le théorème 2 : on remarque que, lorsque $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{G}$ est localement libre, on a

$$\chi(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \gamma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$$

ce qui rend l'associativité évidente lorsque $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sont localement libres. Comme $K(X)$ est engendré par les $\gamma(\mathcal{F})$, avec $\mathcal{F}$ localement libre, ceci démontre l'associativité.

[Le produit ci-dessus correspond donc au produit tensoriel des fibrés à fibre vectorielle.]

b. Les opérations de puissance extérieure. — Soit E un fibré à fibre vectorielle. Les puissances extérieures $\wedge^p E$ sont des fibrés à fibre vectorielle, dont les classes dans $K(X) = K_1(X)$ seront notées $\lambda^p(E)$. Si l'on a une suite exacte

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0,$$

on définit par un procédé bien connu (thèse de KOSZUL !) une filtration de $\wedge(E)$ dont le gradué associé est $\wedge(E') \otimes \wedge(E'')$. On en déduit la formule suivante :

$$\lambda^p(E) = \sum_{r+s=p} \lambda^r(E').\lambda^s(E'').$$

Cette formule peut s'interpréter comme une formule d'additivité en introduisant la série formelle en t

$$\lambda_t(E) = \sum \lambda^p(E)\, t^p;$$

c'est un élément de $K(X)[[t]]$, commençant par 1. La formule ci-dessus signifie qu'on a

$$\lambda_t(E) = \lambda_t(E')\lambda_t(E'').$$

L'application $E \to \lambda_t(\mathrm{E})$ se prolonge donc en un homomorphisme $x \to \lambda_t$ de $K(X) = K_1(X)$ dans le groupe multiplicatif U des séries formelles

$$1 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots, \qquad \text{avec} \quad a_i \in K(X).$$

Par définition, $\lambda^p(x)$ sera le coefficient de t^p dans $\lambda_t(x)$.

En caractéristique 0, Grothendieck montre que, pour tout faisceau $\mathcal{F}$, $\lambda^p(\mathcal{F})$ est égal à la somme alternée des « Tor alternés » de p faisceaux égaux à $\mathcal{F}$. En caractéristique $\neq 0$ on ne connaît aucune formule analogue.

c. L'opération $f^!$. — Soit $f: Y \to X$ un morphisme. Si E est un fibré à fibre vectorielle de base X, le fibré $f^{-1}(E)$ est un fibré à fibre vectorielle de base Y. Cette opération est additive, donc se prolonge en un homomorphisme $f^! : K(X) \to K(Y)$. En raisonnant sur les fibrés on voit tout de suite que *$f^!$ est un homomorphisme d'anneaux, compatible avec les opération λ^p et qu'on a $(fg)^! = g^! f^!$.*

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X, on peut définir directement $f^!(\mathcal{F})$ comme la somme alternée des $\mathrm{Tor}_p^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{F})$; en effet cette expression est additive en $\mathcal{F}$ (à cause de la suite exacte des Tor), et se réduit à $\mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{F}$ lorsque $\mathcal{F}$ est localement libre.

d. L'opération $f_!$. — Soit encore $f: Y \to X$ un morphisme que nous supposons *propre*. Si $\mathcal{F}$ est cohérent sur Y, on a vu (théorème 1, § 3) que les $R^q f(\mathcal{F})$, $q = 0, 1, \ldots$, sont des faisceaux cohérents sur X, et leur somme alternée est un élément bien défini de $K(X)$. Comme cette somme alternée est additive en $\mathcal{F}$ (suite exacte de cohomologie), on obtient ainsi un homomorphisme (additif) $f_! : K(Y) \to K(X)$. Dans le cas particulier où Y est une sous-variété fermée de X et où f est l'injection canonique $Y \to X$, cette opération se réduit au prolongement par 0 en dehors de Y.

L'application $f_!$ n'est pas compatible avec la multiplication. On a toutefois la formule suivante :

$$f_!(y \cdot f^!(x)) = f_!(y) \cdot x \qquad \text{pour} \quad x \in K(X), \quad y \in K(Y).$$

Il suffit en effet de vérifier cette formule lorsque $y = \gamma_Y(\mathcal{F})$ et $x = \gamma_X(\mathcal{L})$, où $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{L}$) est un faisceau cohérent sur Y (resp. un faisceau localement libre sur X). Dans ce cas, on a même la formule plus précise

$$(\star) \qquad R^q f\big(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f^{-1}(\mathcal{L})\big) = R^q f(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L},$$

où l'on pose

$$f^{-1}(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y.$$

Pour démontrer ($\star$), on remarque d'abord que

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f^{-1}(\mathcal{L}) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}.$$

Revenant à la définition de $R^q f$, on définit un homomorphisme canonique du membre de droite dans celui de gauche; pour montrer que c'est un isomorphisme on peut raisonner localement. On se ramène ainsi au cas où $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$, et dans ce cas notre assertion est triviale.

Si l'on a deux applications propres $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$, et si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur Z, on peut construire une suite spectrale de terme

$$E_2^{p,q} = R^p f(R^q g(\mathcal{F}))$$

qui aboutit aux $R^n(fg)(\mathcal{F})$: c'est un cas particulier de la suite spectrale des foncteurs composés (*cf.* Tohoku). On en déduit la formule

$$(fg)_!(\mathcal{F}) = f_!(g_!(\mathcal{F}))$$

d'où finalement le fait que $(fg)_! = f_! g_!$.

6. Classes de Chern. — Le fait que $K_1(X) = K(X)$ permet d'étendre la définition des classes de Chern aux faisceaux cohérents quelconques.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où le corps de base est le corps des complexes; tout fibré E à fibre vectorielle de base X définit des classes de Chern $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbf{Z})$. Si l'on a une suite exacte

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0,$$

on sait qu'on a $c_p(E) = \sum_{r+s=p} c_r(E').c_s(E'')$.

Comme au paragraphe 5*b*, ceci peut s'interpréter comme une propriété de multiplicativité du polynôme de Chern $c_t(E) = \sum c_p(E)\, t^p$ et permet de définir $c_t(x)$ pour tout $x \in K(X)$. Les $c_p(x)$ sont des éléments homogènes de degré $2p$ de $H^*(X, \mathbf{Z})$.

Dans le cas d'un corps de base quelconque, Grothendieck procède de la même manière, en remplaçant $H^*(X)$ par l'anneau gradué $A(X)$ des *classes de cycles* sur X, pour l'équivalence linéaire (à la Chow). Rappelons seulement qu'un cycle Z sur X, de codimension p [c'est-à-dire élément de degré p de $A(X)$] est dit linéairement équivalent à zéro s'il existe un cycle H sur $X \times D$ (D désignant la droite projective) tel que $Z = H_a - H_b$ pour deux points a, $b \in D$; on convient de noter H_a la projection sur X de $H.(X \times \{a\})$ si celle-ci est propre. Chow et Samuel [2] ont montré que

[2] *Cf.* Chow [5] et Samuel [10]. *Voir* aussi le Séminaire Chevalley [11].

cette relation d'équivalence possède toutes sortes de propriétés raisonnables, et CHOW a montré (non publié) qu'on pouvait aussi construire une théorie des classes de Chern des fibrés à fibre vectorielle ([3]), ces classes étant des éléments de $A(X)$. Noter que, même dans le cas classique, cette définition est en quelque sorte *plus fine* que la définition cohomologique (puisque deux cycles peuvent très bien être homologues sans être linéairement équivalents).

Dans ce qui suit, nous désignerons par $A(X)$ indifféremment cet anneau de classes de cycles ou $H^*(X)$, laissant au lecteur le soin de choisir entre les deux théories.

Noter que, dans tous les cas, si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme (resp. un morphisme propre), on lui associe un homomorphisme $f^* : A(X) \rightarrow A(Y)$ [resp. un homomorphisme $f_* : A(Y) \rightarrow A(X)$]. La formule

$$f_*(y . f^*(x)) = f_*(y) . x$$

est valable.

Toutes les constructions formelles usuelles exposées dans l'ouvrage de HIRZEBRUCH [9] peuvent s'effectuer sur les classes de Chern $c_p(x)$ d'un élément $x \in K(X)$. On peut, par exemple, définir la *classe de Todd* $T(x) \in A(X) \otimes \mathbf{Q}$ de l'élément x : on écrit formellement $c_t(x)$ sous la forme $\prod (1 + a_i t)$, et l'on pose $T(x) = \prod a_i/(1 - e^{-a_i})$. On a

$$T(x + y) = T(x) . T(y).$$

De même, on définit la classe « exponentielle » de Chern, notée $ch(x)$ (qui est aussi un élement de $A(X) \otimes \mathbf{Q}$) en posant

$$ch(x) = rg(x) + \sum (e^{a_i} - 1)$$

où $rg(x)$ est le *rang* de x [c'est l'unique homomorphisme de $K(X)$ dans $\mathbf{Z}$ qui applique un fibré à fibre vectorielle sur sa dimension]. On a

$$ch(x + y) = ch(x) + ch(y) \qquad \text{et} \qquad ch(xy) = ch(x) . ch(y),$$

en vertu des propriétés analogues des fibrés à fibre vectorielle. Bien entendu, on peut calculer $ch(x)$ en fonction de $c_t(x)$ et de $rg(x)$ par des formules « universelles ». Si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme, on a

$$c_p(f^!(x)) = f^*(c_p(x)) \qquad \text{et} \qquad ch(f^!(x)) = f^*(ch(x)) \qquad [x \in K(X)].$$

En effet, ces formules sont bien connues lorsque $x = \gamma(E)$, où E est un fibré à fibre vectorielle de base X, et le cas général s'en déduit par linéarité, en appliquant le théorème 2.

([3]) *Voir* le Mémoire de GROTHENDIECK qui fait suite au présent travail [8].

7. Énoncé du théorème de Riemann-Roch. Premières réductions. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme propre, X et Y étant des variétés quasi projectives, irréductibles, et non singulières. On note $T(X)$ la classe de Todd du fibré tangent à X; c'est un élément de $A(X) \otimes \mathbf{Q}$. Soit maintenant $y \in K(Y)$. On a :

Théorème de Riemann-Roch. — $f_*(ch(y).T(Y)) = ch(f_!(y)).T(X)$.

[Les deux membres sont considérés comme des éléments de $A(X) \otimes \mathbf{Q}$; en ce sens, on peut dire que R-R est une formule « modulo torsion »; Grothendieck a des formules plus précises qui sont sans torsion — c'est-à-dire qui opèrent dans $A(X)$ — mais il ne sait pour l'instant les démontrer qu'en caractéristique zéro.]

Montrons comment le théorème de R-R, sous la forme de Grothendieck, *entraîne la formule de* R. R. Hirzebruch [9] :

On applique R-R à Y projective, X réduite à un point, et y classe d'un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur Y. Du fait que $A(X)$ se réduit à $\mathbf{Z}$ en dimension 0, et est nul en dimensions supérieures, $f_*(u)$, $u \in A(Y)$, est simplement le termes $\varkappa_n(u)$ de degré $n = \dim Y$ dans u. D'autre part, on a $T(X) = 1$, et $f_!(y)$ est la somme alternée des faisceaux $R^q f(\mathcal{F})$; un faisceau sur un point est simplement un espace vectoriel de dimension finie; en particulier, $R^q f(\mathcal{F})$ est l'espace vectoriel $H^q(Y, \mathcal{F})$. Sur X, l'opération $\mathcal{G} \to ch(\mathcal{G})$ consiste simplement à prendre le *rang* d'un faisceau; le membre de droite de R-R devient donc $\sum (-1)^p \dim H^p(Y, \mathcal{F}) = \chi(Y, \mathcal{F})$, et R-R se réduit à la forme de Hirzebruch :

$$\varkappa_n(ch(\mathcal{F}).T(Y)) = \chi(Y, \mathcal{F}).$$

On notera que cette formule est démontrée pour tout faisceau cohérent et non pas seulement pour les fibrés à fibre vectorielle; cette généralité est d'ailleurs illusoire en vertu du caractère linéaire de R-R et du théorème 2.

La démonstration de R-R se fera par réduction aux cas particuliers d'une projection et d'une injection. On utilise pour cela le lemme suivant :

Lemme 15. — *Soient* $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ *des morphismes propres. Soit* $z \in K(Z)$, *et soit* $y = g_!(z)$. *Alors :*

a. Si R-R *est vrai pour* $\{g, z\}$ *et pour* $\{f, y\}$, *il est vrai pour* $\{fg, z\}$.

b. Si R-R *est vrai pour* $\{fg, z\}$ *et pour* $\{f, y\}$ *et si* f_* *est injective*, R-R *est vrai pour* $\{g, z\}$.

Démonstration de *a*. — D'après R-R pour g, on a

$$g_*(ch(z).T(Z)) = ch(y).T(Y).$$

En appliquant f_* aux deux membres, et en tenant compte de $(fg)_* = f_* g_*$, on trouve

$$(fg)_*(ch(z) . T(Z)) = f_*(ch(y) . T(Y)).$$

En appliquant R-R pour $\{f, y\}$, on voit que le deuxième membre est égal à $ch((fg)_!(z) . T(X))$, ce qui démontre bien R-R pour $\{fg, z\}$.

Démonstration de b. — Posons

$$u = g_*(ch(z) . T(Z)) \qquad \text{et} \qquad v = ch(y) . T(Y).$$

On veut prouver que $u = v$. Vu l'hypothèse faite sur f_*, il suffit de prouver que $f_*(u) = f_*(v)$. Or R-R pour $\{fg, z\}$ montre que

$$f_*(u) = ch(x) . T(X), \qquad \text{avec} \quad x = (fg)_!(z) = f_!(y).$$

De même, R-R pour $\{f, y\}$ montre que

$$f_*(v) = ch(x) . T(X),$$

C. Q. F. D.

Soient maintenant Y et Y' deux variétés, et formons leur produit $Y \times Y'$. Les projections $Y \times Y' \rightarrow Y$ et $Y \times Y' \rightarrow Y'$ définissent des homomorphismes $K(Y) \rightarrow K(Y \times Y')$ et $K(Y') \rightarrow K(Y \times Y')$ d'où un homomorphisme $K(Y) \otimes K(Y') \rightarrow K(Y \times Y')$. Par abus de langage, nous noterons encore $y \otimes y'$ l'image dans $K(Y \times Y')$ du produit tensoriel de deux éléments $y \in K(Y)$ et $y' \in K(Y')$.

Lemme 16. — *Soient $f : Y \rightarrow X$ et $f' : Y' \rightarrow X'$ deux morphismes propres, et soient $y \in K(Y)$, $y' \in K(Y')$. Si* R-R *est vrai pour $\{f, y\}$ et pour $\{f', y'\}$, il est vrai pour $\{f \times f', y \otimes y'\}$.*

(On désigne par $f \times f' : Y \times Y' \rightarrow X \times X'$ le produit de f et f'.)

La démonstration consiste en un calcul analogue à celui du lemme 15; on doit utiliser les formules suivantes :

(i) $$(f \times f')_!(y \otimes y') = f_!(y) \otimes f'_!(y');$$

(ii) $$(f \times f')_*(x \otimes x') = f_*(x) \otimes f'_*(x') \qquad [x \in A(Y),\ x' \in A(Y')];$$

(iii) $$ch(y \otimes y') = ch(y) \otimes ch(y').$$

La formule (i) se démontre en prenant $y = \gamma(\mathcal{F})$, $y' = \gamma(\mathcal{F}')$, et en appliquant la formule de Künneth au calcul de $(f \times f')_!(y \otimes y')$; la validité de la formule de Künneth pour les faisceaux cohérents résulte du calcul de la cohomologie par les recouvrements et du théorème d'Eilenberg-Zilber (*cf.* le livre de Godement sur les faisceaux).

La formule (ii) est immédiate, qu'on se place au point de vue classes de cycles (pour l'équivalence linéaire), ou au point de vue cohomologique (dans le cas classique).

La formule (iii) est conséquence de la propriété multiplicative de ch.

[En fait, nous n'utiliserons ce lemme que dans le cas où l'une des variétés X' et Y' est réduite à un point.]

Le lemme 15, joint au corollaire à la proposition 4, montre qu'*il suffit de démontrer* R-R *dans les deux cas suivants* :

a. $Y = X \times P$, avec P espace projectif, et $f : X \times P \to X$ est la projection sur le premier facteur.

b. $f : Y \to X$ est une injection de Y sur une sous-variété fermée de X.

D'après le lemme 16, a résulte de :

a'. L'homomorphisme $K(X) \otimes K(P) \to K(X \times P)$ est surjectif;

a''. R-R est vrai pour l'application de P sur un point (autrement dit, la formule de R-R-Hirzebruch est vraie pour P).

Les deux paragraphes qui suivent sont consacrés à la démonstration de a' et a''. Le cas d'une injection (qui est le plus difficile) sera traité plus loin.

8. Propriétés d'exactitude et d'homotopie pour $K(X)$.

Proposition 7. — *Soient X une variété algébrique (singulière ou non), X' une sous-variété fermée de X, et $U = X - X'$. On a une suite exacte*

$$K(X') \to K(X) \to K(U) \to 0.$$

[L'homomorphisme $K(X') \to K(X)$ est celui qui consiste à prolonger un faisceau sur X' par o en dehors de X'; dans le cas où X et X' sont sans singularités, c'est $i_!$ si $i : X' \to X$ désigne l'injection canonique. Quant à $K(X) \to K(U)$, c'est l'homomorphisme de restriction; dans le cas où X est non singulière, c'est $j^!$ si $j : U \to X$ désigne l'injection canonique.]

Soit $A = K(X)/\mathrm{Im}\,K(X')$. Nous allons définir un homomorphisme de $K(U)$ dans A. Soit pour cela $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur U; d'après la proposition 2, $\mathcal{F}$ se prolonge en un faisceau $\mathcal{G}$ sur X. On va montrer que l'image de $\gamma_X(\mathcal{G})$ dans A ne dépend pas de $\mathcal{G}$, mais seulement de $\mathcal{F}$. Soient, en effet, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ deux prolongement de $\mathcal{F}$. Plongeons $\mathcal{F}$ diagonalement dans $\mathcal{F} \times \mathcal{F} = (\mathcal{G} \times \mathcal{G}') \,|\, U$; d'après la proposition 1, il y a un sous-faisceau $\mathcal{G}''$ de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}'$ dont la restriction à U est $\mathcal{F}$, et tout revient à montrer que

$$\gamma_X(\mathcal{G}'') \equiv \gamma_X(\mathcal{G}') \qquad \text{mod. } \mathrm{Im}\,K(X'),$$

et de même pour $\mathcal{G}'$. Or, puisque $\mathcal{G}'' \subset \mathcal{G} \times \mathcal{G}'$, on a un homomorphisme $f : \mathcal{G}'' \to \mathcal{G}$ qui est bijectif sur U. Soient $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Q}$ le noyau et le conoyau de f; on a

$$\gamma_X(\mathcal{G}'') - \gamma_X(\mathcal{G}) = \gamma_X(\mathcal{N}) - \gamma_X(\mathcal{Q}).$$

D'autre part, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Q}$ sont mis en dehors de X'; si $\mathcal{I}$ désigne le faisceau d'idéaux de X' dans $\mathcal{O}_X$, il existe donc un entier $n > 0$ tel que $\mathcal{J}^n \mathcal{N} = 0$, et de même pour $\mathcal{Q}$ (c'est un énoncé local essentiellement équivalent au « Nullstellensatz », *cf.* jub. Denjoy); on en conclut que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Q}$ admettent des suites de composition dont les quotients successifs sont annulés par $\mathcal{J}$, c'est-à-dire sont cohérents sur X' et l'on a donc

$$\gamma_X(\mathcal{Q}) \equiv \gamma_X(\mathcal{N}) \equiv 0 \qquad \text{mod. } \mathrm{Im}\, K(X').$$

L'indépendance de $\gamma_X(\mathcal{G})$ mod. $\mathrm{Im}\, K(X')$ est donc démontrée, et l'on obtient ainsi un élément $\eta(\mathcal{F}) \in A$ bien déterminé. Si $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ est une suite exacte sur U, on peut prolonger $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ sur X, et $\mathcal{F}'$ en un sous-faisceau $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ (*cf.* proposition 1). Le faisceau $\mathcal{G}'' = \mathcal{G}/\mathcal{G}'$ prolonge $\mathcal{F}''$, ce qui montre que $\eta(\mathcal{F}) = \eta(\mathcal{F}') + \eta(\mathcal{F}'')$. L'opération η, étant additive, définit $\eta : K(U) \to A$. Si l'on note ε l'homomorphisme canonique de A dans $K(U)$ on voit tout de suite que $\eta \circ \varepsilon = 1$ et $\varepsilon \circ \eta = 1$, ce qui achève la démonstration.

Soient maintenant X et Y deux variétés. Notons $p : X \times Y \to X$ la projection canonique. Lorsque X et Y sont *non singulières*, l'homomorphisme $p^! : K(X) \to K(X \times Y)$ est défini (*cf.* § 5, *c* ainsi que § 7). En fait, cet homomorphisme peut se définir *dans le cas général.* Cela provient de ce que $\mathcal{O}_{X \times Y}$ est $\mathcal{O}_X$-plat (c'est-à-dire annulateur de Tor), du fait que c'est un anneau de fractions du produit tensoriel usuel $\mathcal{O}_X \otimes_k \mathcal{O}_Y$. On peut donc poser $p^!(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X \times Y}$ pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, et $p^!(\mathcal{F})$ est additif, donc définit $K(X) \to K(X \times Y)$. Ceci précisé, on a :

Proposition 8. — *Si Y est une droite affine, l'homomorphisme $p^! : K(X) \to K(X \times Y)$ est bijectif.*

Soit a l'origine dans Y, et identifions X à $X \times \{a\} \subset X \times Y$. On a une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{X \times Y} \xrightarrow{t} \mathcal{O}_{X \times Y} \to \mathcal{O}_X \to 0,$$

où t désigne la projection $X \times Y \to Y$, considérée comme fonction sur $X \times Y$. Cette suite exacte montre $\mathrm{Tor}_p^{\mathcal{O}_{X \times Y}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) = 0$ pour $p \geqq 2$, si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur $X \times Y$. On peut donc définir $\pi_a : K(X \times Y) \to K(X)$ en posant

$$\pi_a(\mathcal{F}) = \mathrm{Tor}_0(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) - \mathrm{Tor}_1(\mathcal{O}_X, \mathcal{F});$$

on voit, de plus, que $\pi_a \circ p^! = 1$, ce qui montre déjà que $p^!$ est *injectif.* A partir de maintenant, nous considérerons $K(X)$ comme *plongé* dans $K(X \times Y)$.

Pour démontrer que $K(X) = K(X \times Y)$ nous raisonnerons par récurrence sur $n = \dim X$, et nous utiliserons le diagramme suivant (où X' est fermé dans X, et $U = X - X'$) :

$$\begin{array}{ccccccc}
K(X') & \to & K(X) & \to & K(U) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
K(X' \times Y) & \to & K(X \times Y) & \to & K(U \times Y) & \to & 0.
\end{array}$$

D'après la proposition 7, les lignes de ce diagramme sont exactes. On en conclut que, si $K(X') = K(X' \times Y)$ (ce qui est le cas, en vertu de l'hypothèse de récurrence, si $\dim X' < n$), tout élément de $K(X \times Y)$ dont la restriction à $U \times Y$ est dans $K(U)$ appartient à $K(X)$. Autrement dit, on peut « négliger » les sous-variétés de X de dimension $< n$. En particulier, on peut supposer X *affine*, *non singulière*, *et irréductible* (car le complémentaire de l'ensemble des points singuliers est réunion de variétés irréductibles disjointes). On va se servir du lemme de dévissage suivant :

LEMME 17. — *Soit Z une variété algébrique. Les $\gamma_Z(\mathcal{O}_T)$ engendrent $K(Z)$ lorsque T parcourt l'ensemble des sous-variétés irréductibles de Z.*

On raisonne par récurrence sur $\dim Z$; utilisant la proposition 7, on peut supposer Z irréductible. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur Z; si $\mathcal{F}$ est un faisceau de torsion, il est concentré sur une sous-variété, et l'hypothèse de récurrence montre qu'il est contenu dans le sous-groupe $K'(Z)$ de $K(Z)$ engendré par les $\gamma_Z(\mathcal{O}_T)$. Dans le cas où $\mathcal{F}$ est sans torsion, on le plonge dans $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Z} K$, où K est le corps des fonctions rationnelles sur Z; on a $\mathcal{F} \otimes K = K^n$, et l'on en conclut que $\mathcal{F}$ est isomorphe à $(\mathcal{O}_Z)^n$ modulo un faisceau de torsion; d'où le résultat. (Pour plus de détails, *voir* jub. Denjoy, ou [6].)

En appliquant le lemme 17 au cas qui nous intéresse, on voit qu'il suffit de montrer que $\gamma(\mathcal{O}_T) \in K(X)$ pour toute sous-variété irréductible T de $X \times Y$. Si $\mathrm{proj}_X(T) \neq X$, c'est évident d'après l'hypothèse de récurrence; si $T = X \times Y$, c'est encore plus évident. Il reste donc le cas où $\dim T = n$, et $\mathrm{proj}_X(T)$ est dense dans X. Si A désigne l'anneau de coordonnées de X, T correspond à un idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ dans l'anneau de coordonnées $A[t]$ de $X \times Y$; le fait que la projection de T dans X soit dense signifie que $A \cap \mathfrak{p} = 0$. Soit S l'ensemble des éléments inversibles de A, et soit $K = A_S$ le corps des fractions de A. On a $A[t]_S = K[t]$, et le fait que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ entraîne que $\mathfrak{p}$ soit de la forme $\mathfrak{p}' \cap A[t]$ où $\mathfrak{p}'$ est un idéal premier non nul de $K[t]$. Il existe donc un polynome irréductible $P(t)$, à coefficients dans A si l'on veut, tel que $\mathfrak{p}$ soit l'ensemble des polynômes de $A[t]$ qui sont divisibles par $P(t)$ dans $K[t]$. On a

$$A[t] \supset \mathfrak{p} \supset P(t).A[t] = \mathfrak{q}.$$

Le faisceau $\mathcal{O}_T$ correspond au module $A[t]/\mathfrak{p}$; soit $\mathcal{F}$ le faisceau qui correspond à $A[t]/\mathfrak{q}$. Du fait que $\mathfrak{p}_S = \mathfrak{q}_S$, il existe $a \in S$ tel que $a.(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) = 0$, ce qui montre que $\mathcal{O}_T$ est congru à $\mathcal{F}$ modulo un élément d'un $K(X' \times Y)$, avec $\dim X' < \dim X$. D'autre part, la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{X \times Y} \xrightarrow{P(t)} \mathcal{O}_{X \times Y} \to \mathcal{F} \to 0,$$

montre que $\gamma(\mathcal{F}) = 0$ dans $K(X \times Y)$, d'où

$$\gamma(\mathcal{O}_T) \in \mathrm{Im}\, K(X' \times Y) = \mathrm{Im}\, K(X') \subset K(X),$$

ce qui achève la démonstration.

[REMARQUE (CARTIER). — On peut éviter le recours au lemme de dévissage en appliquant à un module quelconque M sur $A[t]$ le procédé appliqué ici à l'idéal premier $\mathfrak{p}$. On forme $M \otimes_A K = M_S$ qui est un $K[t]$-module. La structure des modules sur les anneaux principaux montre que le groupe des classes de $K[t]$-modules est cyclique infini, engendré par le module $A[t]$. Comme le passage à M_S revient à « négliger » tout ce qui est concentré sur un $X' \times Y$, le résultat s'ensuit.]

COROLLAIRE. — *Si Y est un espace affine k^n, on a*

$$K(X) = K(X \times Y).$$

C'est immédiat, par récurrence sur dim Y.

9. Démonstration du théorème de Riemann-Roch pour $f : X \times P \to X$. — Nous allons d'abord démontrer l'assertion a' de la fin du paragraphe 7 :

PROPOSITION 9. — *Pour toute variété X, et pour tout espace projectif P, l'homorphisme $K(X) \otimes K(P) \to K(X \times P)$ est surjectif.*

On raisonne par récurrence sur $\dim P$. Pour $\dim P = 0$, la proposition est triviale. Soit donc P' un hyperplan de P, et soit $U = P - P'$. On a un diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
K(X) \otimes K(P') & \to & K(X) \otimes K(P) & \to & K(X) \otimes K(U) & \to & 0 \\
\varepsilon_1 \downarrow & & \varepsilon_2 \downarrow & & \varepsilon_3 \downarrow & & \\
K(X \times P') & \to & K(X \times P) & \to & K(X \times U) & \to & 0.
\end{array}$$

Ce diagramme est commutatif : c'est trivial pour le second et le troisième carré, et, pour le premier carré, il faut faire une vérification locale, par exemple avec des ouverts affines. Vu l'hypothèse de récurrence, ε_1 est surjectif. D'autre part, U est un espace affine; le corollaire à la proposition 8 montre donc que $K(U) = \mathbf{Z}$ et que $K(X \times U) = K(X)$, d'où le fait que ε_3 est bijectif. Le lemme des cinq montre alors que ε_2 est surjectif.

C. Q. F. D.

REMARQUE. — La démonstration précédente montre que

$$K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y)$$

est surjectif chaque fois que Y admet une *décomposition cellulaire algébrique* où les cellules sont des *espaces affines*. C'est notamment le cas si Y est une grassmannienne.

Passons maintenant à la vérification de l'assertion a'' :

PROPOSITION 10. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur un espace projectif P*

de dimension r. La formule de R-R-Hirzebruch :

$$\varkappa_r(ch(\mathcal{F}).T(P)) = \chi(P, \mathcal{F})$$

est alors valable.

Soit H un hyperplan, et soit x sa classe dans $A^1(P)$. On sait que le polynôme de Chern de P est $(1+tx)^{r+1}$; on a donc

$$T(P) = x^{r+1}/(1-e^{-x})^{r+1}.$$

D'autre part, on sait que $\mathcal{F}$ correspond à un module gradué M sur $k[X_0, \ldots, X_r]$. D'après le théorème des syzygies de Hilbert, M admet une résolution finie par des modules libres gradués; il s'ensuit que $\mathcal{F}$ est égal [dans $K(X)$] à une combinaison linéaire des faisceaux $\mathcal{O}(n)$ définis dans FAC, p. 246, et il suffit de vérifier la formule de R-R-Hirzebruch pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}(n)$. Ce faisceau n'est pas autre chose que le faisceau associé au diviseur nH; on en déduit $ch(\mathcal{F}) = e^{nx}$. D'autre part un calcul direct montre que $\chi(P, \mathcal{F})$ est égal à $\binom{n+r}{r}$ (*cf.* FAC, p. 275), et nous sommes donc ramenés à démontrer la formule :

$$(\star) \qquad \varkappa_r[e^{nx}.x^{r+1}/(1-e^{-x})^{r+1}] = \binom{n+r}{r}.$$

Il y a intérêt à écrire cette formule en terme de résidus :

$$(\star\star) \qquad \mathrm{Res}[e^{nx}\,dx/(1-e^{-x})^{r+1}] = \binom{n+r}{r}.$$

En prenant comme nouvelle variable $y = 1 - e^{-x}$, on voit que le premier membre est égal à

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(dy.y^{-r-1}.(1-y)^{-n-1}) &= \varkappa_r((1-y)^{-n-1})\\ &= (-1)^r\binom{-n-1}{r} = \binom{n+r}{r},\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Puisque nous avons vérifié a' et a'', nous pouvons énoncer :

Corollaire. — *R-R est vrai pour la projection $X \times P \to X$.*

Remarque. — Le fait que $K(P)$ est engendré par les $\mathcal{O}(n)$ peut aussi se voir, sans utiliser le théorème des syzygies, au moyen de la décomposition cellulaire de P. On obtient également la structure complète de $K(P)$: si l'on désigne par α la classe dans $K(P)$ de $\mathcal{O}_H$, les éléments $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^r$ forment une *base* de $K(P)$ et $\alpha^{r+1} = 0$. Les $\mathcal{O}(n)$ sont égaux à $(1-\alpha)^{-n}$ comme le montre la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_H \to 0.$$

10. Remarques générales sur l'injection d'une sous-variété. — *a.* NOTATIONS. — Avant de poursuivre la démonstration de *R-R* nous discuterons ici la résolution locale du faisceau d'anneaux locaux d'une sous-variété et en tirerons quelques conséquences. Certaines ne seront du reste utilisées que dans des cas particuliers mais elles sont intéressantes en soi et le cas général n'est pas plus difficile que les cas particuliers nécessaires dans la suite.

Y est une sous-variété (non-singulière bien entendu) de X, i l'injection de Y dans X, p la codimension de Y dans X, E le fibré normal à Y, et $\mathcal{J}(Y)$ le faisceau des idéaux locaux de Y. On a donc la suite exacte

$$(1) \qquad 0 \to \mathcal{J}(Y) \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{r} \mathcal{O}_Y \to 0,$$

où r est la restriction.

Enfin, F^* est le dual d'un fibré vectoriel F, et $[Z]$ est le fibré associé à un diviseur Z. On rappelle que $c([Z]) = 1 + Z$.

b. PARAMÈTRES LOCAUX. FIBRÉ NORMAL. — Soit $a \in Y$. Il existe un ouvert affine $U \subset X$ contenant a et des fonctions $f_1, \ldots, f_p$ régulières dans U, formant un système de paramètres locaux ou « uniformisants » pour Y. Cela signifie que $Y \cap U$ est définie par les équations $f_1 = \ldots = f_p = 0$, que $df_1, \ldots, df_p$ sont linéairement indépendantes en tout point de $Y \cap U$, que les f_i forment une base de l'idéal $\mathcal{J}(Y)_b$ de Y dans $\mathcal{O}_{b,X}$ ($b \in Y \cap U$) et enfin que cet idéal est « parfait », c'est-à-dire que l'annulateur de f_i dans $\mathcal{O}_{b,X}/(f_1, \ldots, f_{i-1})$ est nul ($1 \leqq i \leqq p$; $f_0 = 0$).

En tout point $b \in Y \cap U$, les df_i forment une base de E^*_b. Par ailleurs $\mathcal{J}(Y)/\mathcal{J}(Y)^2$ est un faisceau concentré sur Y, annulé par $\mathcal{J}(Y)$, donc est un faisceau de $\mathcal{O}_Y$-modules. Il est immédiat que $f \to df$ est un homomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-modules de $\mathcal{J}(Y)/\mathcal{J}(Y)^2$ dans le faisceau $\mathcal{O}_Y(E^*)$ des germes de sections de E^*. En utilisant des paramètres locaux, on voit que :

l'application $D : \mathcal{J}(Y)/\mathcal{J}(Y)^2 \to \mathcal{O}_Y(E^*)$ définie par $f \to df$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_Y$ modules.

c. RÉSOLUTION LOCALE DE $\mathcal{O}_Y$ SUR $\mathcal{O}_X$. — Soient V un espace vectoriel sur k de dimension p, $e_1, \ldots, e_p$ une base de V et $\mathfrak{M}_i = \mathcal{O}_X \otimes_k \Lambda^i V$. On munit la somme directe $\mathfrak{M}$ des $\mathfrak{M}_i$ de la différentielle d définie par

$$d(f \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}) = \sum_j (-1)^j f.f_{i_j} \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{i_j} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \quad (^4).$$

Alors la suite

$$(2) \qquad 0 \to \mathfrak{M}_p \xrightarrow{d} \mathfrak{M}_{p-1} \to \ldots \to \mathfrak{M}_1 \xrightarrow{d} \mathcal{O}_X \xrightarrow{r} \mathcal{O}_Y \to 0$$

est exacte en tout point de U, et $\mathfrak{M}$ est donc, dans U, une résolution

---

(4) Comme d'habitude, le signe ^ indique que le symbole au-dessus duquel il se trouve doit être omis.

projective de $\mathcal{O}_Y$ sur $\mathcal{O}_X$. L'exactitude de (2) en un point $b \in U \cap Y$ est un résultat bien connu (*cf.* par exemple Dipl., proposition 4.3, p. 151, en tenant compte du fait que $\mathcal{O}_{b,Y} = \mathcal{O}_{b,X}/(f_1, \ldots, f_p))$. Pour $b \in U$, $b \notin Y$, on a $\mathcal{O}_{b,Y} = 0$ et l'exactitude de (2) est un exercice élémentaire laissé au lecteur.

Remarque. — Si Y est un diviseur, (1) n'est qu'une autre manière d'écrire la suite exacte de faisceaux (qui est valable sur tout X)

$$(3) \qquad 0 \to \mathcal{O}_X([Y]^{-1}) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0,$$

où f est la multiplication par une équation locale de Y. Cette suite exacte montre donc que $\gamma(Y) = 1 - [Y]^{-1}$.

Proposition 11. — *Soient $Y_1, \ldots, Y_m$ des sous-variétés non singulières de X telles que Y_i coupe transversalement*

$$Y_{i-1} \cap \ldots \cap Y_1 \qquad (i = 2, \ldots, m).$$

Alors

$$\gamma(Y_1 \cap \ldots \cap Y_m) = \prod_i \gamma(Y_i).$$

Une récurrence évidente sur m montre qu'il suffit de considérer le cas de deux sous-variétés Y, Z se coupant transversalement.

Par définition $\gamma(Y).\gamma(Z)$ est la somme alternée des $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Z)$. Il est clair que ces faisceaux et le faisceau $\mathcal{O}_{Y \cap Z}$ sont égaux (et nuls) en tout point non contenu dans $Y \cap Z$, ce qui en particulier établit notre assertion si $Y \cap Z = \emptyset$.

Soit $a \in Y \cap Z$. Puisque Y et Z se coupent transversalement, on peut trouver un ouvert affine U contenant a, des fonctions $f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q$ régulières dans U telles que les f_i (resp. les g_j, resp. les f_i et les g_j) forment un système de paramètres uniformisants pour Y (resp. Z, resp. $Y \cap Z$). Pour calculer les $\mathrm{Tor}_i(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Z)$ on résout $\mathcal{O}_Y$ à l'aide de (2). On doit donc déterminer l'homologie du complexe

$$0 \to \mathfrak{M}_n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \to \ldots \to \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z$$

qui peut aussi s'écrire

$$0 \to \mathcal{O}_Z \otimes_k \Lambda^p V \to \ldots \to \mathcal{O}_Z \otimes_k V \to \mathcal{O}_Z,$$

muni de la même différentielle que plus haut, les f_i étant considérés comme éléments de $\mathcal{O}_Z$. Puisque $\mathcal{O}_{a,Z} = \mathcal{O}_{a,X}/(g_1, \ldots, g_q)$, les f_i y engendrent aussi un idéal parfait; donc ce complexe est acyclique, (*cf.* *c*) et son $0^{\text{ième}}$ groupe d'homologie est $\mathcal{O}_{a,Z}/(f_1, \ldots, f_p)$, c'est-à-dire $\mathcal{O}_{a,Y\cap Z}$. On a donc

$$\mathrm{Tor}_0 = \mathcal{O}_{Y \cap Z} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tor}_i = 0 \qquad (i \geqq 1),$$

ce qui termine la démonstration.

Corollaire. — *Soit Y une section hyperplane non singulière de X et soit k la dimension de X. Alors* $(1-[Y])^{k+1}=0$.

On prend des sections hyperplanes $Y_1, \ldots, Y_{k+1}$ non singulières dont l'intersection est vide et telles que Y_i coupe transversalement $Y_{i-1}\cap\ldots\cap Y_1$ $(i=2, \ldots, k+1)$. Comme $[Y_i]=[Y]$, la proposition 11 et la remarque qui la précède montrent que $(1-[Y]^{-1})^{k+1}=0$, d'où le corollaire, puisque $[Y]$ est inversible dans $K(X)$.

d. Nous utiliserons, ici et plus loin, la remarque suivante; soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ deux faisceaux d'algèbres sur X. Alors la somme directe des $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ admet canoniquement une structure de faisceau d'algèbres graduées (par i). Si $\mathcal{F}$ admet dans U une résolution $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{O}_X$ qui est un faisceau d'algèbres graduées, alors le produit induit dans l'homologie de $\mathcal{L}\otimes\mathcal{G}$ par les produits dans $\mathcal{L}$ et $\mathcal{G}$ coïncide dans U avec l'accouplement précité des Tor_i. [Détails laissés au lecteur, *cf.* Dipl., chap. IX, pour des considérations analogues et plus générales. Cela se déduit du résultat classique sur les applications d'un complexe acyclique (Dipl., proposition 11, p. 76).]

Proposition 12. — *On a* $i^! i_!(y)=y.\lambda_{-1}(E^*)$ *pour tout* $y\in K(Y)$. *En particulier* $i^!\gamma(Y)=\lambda_{-1}(E^*)$.

Par linéarité et le théorème 2, on peut se borner à démontrer la proposition 12 lorsque $y=\mathcal{F}$ est un faisceau localement libre. Par définition, $i^! i_!(\mathcal{F})$ est la somme alternée des $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y)$ et puisque $\mathcal{F}$ et les $\lambda^i E^*$ sont localement libres, $\mathcal{F}.\lambda_{-1}E^*$ est la somme alternée des $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\lambda^i E^*$. Vu b, il suffit donc, pour établir la proposition 12, de montrer que

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y)=\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{I}(Y)/\mathcal{I}(Y)^2 \tag{4}$$

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y)=\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\lambda^i\big(\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y)\big). \tag{5}$$

[Dans (5) λ^i est la $i^{\text{ième}}$ puissance extérieure d'un faisceau qui est localement libre vu (4).]

Sauf mention expresse du contraire, les Tor et $\otimes$ sont pris sur $\mathcal{O}_X$. La suite exacte des Tor, appliquée à (1), donne la suite exacte

$$0\to \mathrm{Tor}_1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y)\to \mathcal{I}(Y)\otimes\mathcal{F}\xrightarrow{g}\mathcal{F}$$

où g est définie par $g(u\otimes v)=u.v$. Puisque $\mathcal{I}(Y)$ annule $\mathcal{F}$, g a une image nulle, donc

$$\mathrm{Tor}_1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y)=\mathcal{I}(Y)\otimes\mathcal{F}.$$

Mais, comme $\mathcal{F}$ est un faisceau sur Y, il est annulé par $\mathcal{I}(Y)$, donc l'image de $\mathcal{I}(Y)^2\otimes\mathcal{F}$ dans $\mathcal{I}(Y)\otimes\mathcal{F}$ est nulle, et $\mathcal{I}(Y)\otimes\mathcal{F}$ s'identifie à $\mathcal{I}(Y)/\mathcal{I}(Y)^2\otimes\mathcal{F}$. Enfin, comme dans ce produit les deux faisceaux sont sur $\mathcal{O}_Y$, leur $\otimes$ sur $\mathcal{O}_X$ s'identifie à leur produit tensoriel sur $\mathcal{O}_Y$, ce qui termine la démonstration de (4).

Dans les notations de b, les $\mathrm{Tor}_i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y)$ sont, dans U, les groupes d'homologie du complexe

$$0 \rightarrow \mathfrak{M}_p \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{M}_{p-1} \otimes \mathcal{F} \rightarrow \ldots \rightarrow \mathcal{F},$$

qui peut aussi s'écrire

$$(6) \qquad 0 \rightarrow \mathcal{F} \otimes_k \Lambda^p V \rightarrow \mathcal{F} \otimes_k \Lambda^{p-1} V \rightarrow \ldots \rightarrow \mathcal{F},$$

muni de la différentielle nulle sur $\mathcal{F}$ qui prolonge d. Les f_i étant des sections locales de $\mathcal{J}(Y)$ et ce dernier annulant $\mathcal{F}$, il s'ensuit que dans (6) la différentielle est identiquement nulle, donc

$$\mathrm{Tor}_i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y) = \mathcal{F} \otimes_k \Lambda^i V = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y \otimes_k \Lambda^i V \qquad (i \geqq 0).$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$, cette formule montre que

$$\mathrm{Tor}_1(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y \otimes_k V,$$

d'où un isomorphisme (pour l'instant local, défini à l'aide des paramètres f_i) des deux membres de (5). Mais $\mathfrak{M}$, envisagé comme produit tensoriel d'algèbres de $\mathcal{O}_Y$ et de Λ V, est visiblement une algèbre différentielle graduée, la remarque faite au début de d s'applique et montre qu'en fait cet isomorphisme est intrinsèque (en particulier ne dépend pas du système de paramètres locaux choisi) et est valable sur X.

e. Cas particulier du diviseur. — Dans ce cas, on peut utiliser la résolution (3) qui est globale. Les $\mathrm{Tor}_i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y)$ sont donc les groupes d'homologie du complexe

$$\ldots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{O}_Y([Y]^{-1}) \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{F},$$

où f est la multiplication par une équation locale; puisque $\mathcal{F}$ est annulé par $\mathcal{J}(Y)$, l'homomorphisme f a une image nulle, ce qui entraîne

$$\mathrm{Tor}_i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y) = 0 \quad (i \geqq 2), \qquad \mathrm{Tor}_1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y) = [Y]^{-1}.\mathcal{F},$$
$$\mathrm{Tor}_0(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y) = \mathcal{F}.$$

En comparant avec la proposition 12, on voit que la restriction de $[Y]^{-1}$ à Y et E^* définissent le même élément de $K(Y)$. En fait on a

Proposition 13. — *On suppose que* codim $Y = 1$ *et l'on note L la restriction de* $[Y]$ *à* Y. *Alors* :

a. $L = E$,
b. $\gamma(Y) = 1 - [Y]^{-1}$,
c. $i^! i_!(y) = y.(1 - L^*)$.

L'assertion c a été démontrée ci-dessus, et b l'a été dans la remarque du paragraphe 10 b. Il reste à établir a.

Soit (U_i) un recouvrement de U tel que, dans U_i, Y soit défini par une équation $f_i = 0$, la différentielle df_i étant non nulle en tout point de $Y \cap U_i$, et soit $f_{ij} = f_i/f_j$ dans $U_i \cap U_j$. On sait que $[Y]$ est défini par le système $\{f_{ij}\}$ de fonctions de transition. D'autre part, on peut dans U_i identifier E^* au produit $U_i \times k$ en appliquant df_i sur la section unité. Or sur $Y \cap U_i \cap U_j$, on a $df_i = f_{ij} . df_j$, (puisque $f_j = 0$ sur Y), donc on peut définir E^* par le système de fonctions de transition $\{f_{ij}{}^{-1}\}$, ce qui démontre a.

11. Démonstration de R-R dans un cas particulier de l'injection. — Vu les résultats des paragraphes 7 et 9, il nous reste à établir R-R pour une injection. Dans les notations du paragraphe $10a$, la formule à démontrer équivaut alors à

$$(1) \qquad ch\, i_! y = i_*(ch y . T(E)^{-1}) \qquad [y \in K(Y)].$$

En effet, E est le quotient de la restriction à Y du fibré tangent à X par le fibré tangent à Y, donc $i^* T(X) = T(Y) . T(E)$, d'où

$$i_*(ch y . T(E)^{-1}) = i_*(ch y . T(Y) . i^*(T(X))^{-1}),$$
$$i_*(ch y . T(E)^{-1}) = i_*(ch y . T(Y)) . T(X)^{-1},$$

donc (1) donne R-R si l'on multiplie les deux membres par $T(X)$.

Pour établir (1), Grothendieck traite tout d'abord le cas où Y est un diviseur et où $y \in i^!(K(X))$, puis s'y ramène en faisant éclater X le long de Y. Ce premier cas particulier est traité ci-dessous, le cas général de l'injection le sera dans le paragraphe 13, où l'on admettra quelques propriétés de l'éclatement qui seront démontrées dans les paragraphes 14, 15, 16.

On utilisera sans autre commentaire les formules

$$(2) \qquad \begin{cases} f_!(y . f^!(x)) = f_!(y) . x, \\ f_*(y . f^*(x)) = f_*(y) . x, \end{cases}$$

dont la première a été démontrée au paragraphe $5c$ et la deuxième mentionnée au paragraphe 6 (auquel nous renvoyons pour les notations).

Proposition 14. — *L'égalité* (1) *du paragraphe* 10 *est vraie si* $\operatorname{codim}_X Y = 1$ *et si* $y = i^!(x)$ $(x \in K(X))$.

En utilisant (2) et la proposition 13, on obtient

$$ch(i_! i^!(x) = ch(x . i_!(1)) = ch(x . (1 - [Y]^{-1})).$$

Puisque $x \to ch x$ est un homomorphisme d'anneaux et que $c([Y]) = 1 + Y$, cela entraîne

$$ch(i_!y) = chx.ch(1 - [Y]^{-1}) = chx.(1 - e^{-Y}).$$

Le deuxième membre de (1) est

$$\begin{aligned} i_*(ch(i^!x).T(L)^{-1}) &= i_*(i^*(chx).i^*(T([Y])^{-1}) \\ &= chx.T([Y])^{-1}.i_*(1) = chx.T([Y])^{-1}.Y \end{aligned}$$

et (1) résulte alors de $T([Y]) = Y/(1 - e^{-Y})$.

COROLLAIRE 1. — R-R *est vrai si* $X = Y \times P$, *où* P *est un espace projectif, i étant l'application* $a \to (a, p_0)$, *où* p_0 *est un point fixé de* P.

L'application i est le produit de l'identité sur Y et de l'injection d'un point dans P. Vu le lemme 16, il suffit de démontrer R-R dans ce dernier cas. Si Y est un point, alors $K(Y) = \mathbf{Z}$, et il suffit de considérer le cas où $y = 1$. Comme $1 \in i^!(P)$, notre assertion résulte de la proposition 14 si $\dim P = 1$. Raisonnant par récurrence, on peut la supposer vraie pour l'injection $u : Y \to H$ de Y dans un hyperplan de P; vu le lemme 15a, il suffit de montrer que R-R est vrai pour $u_!(1)$ et l'injection $v : H \to P$; cela, à son tour, se déduit de la proposition 14 si l'on sait que $u_!(1) \in v^!(K(P))$. Or, soient Z un deuxième hyperplan et D une droite de H telle que $Y = D \cap Z \cap H$. On a (proposition 11) : $\gamma_H(Y) = \gamma_H(D) \cdot \gamma_H(H \cap Z)$. D'après la proposition 13b, $\gamma_H(H \cap Z) = 1 - [H \cap Z]^{-1}$; comme $[H \cap Z]$ s'identifie à la restriction de $[H]$ à H, la proposition 13 c montre alors que

$$u_!(1) = \gamma_H(Y) = v^! v_!(\gamma_H(D)) = v^!(\gamma_P(D)).$$

COROLLAIRE 2. — *Si l'égalité* (1) *du paragraphe* 10 *est vraie lorsque* $2.\dim Y \leqq \dim X - 2$, *elle est vraie en général.*

Il suffit de composer i avec une injection $X \to X \times P$, où P est de grande dimension, et d'appliquer le corollaire 1 et le lemme 15b.

12. Éclatement le long d'une sous-variété. — *a.* NOTATIONS. — X' sera la variété obtenue par éclatement de X le long de Y, f la projection de X' sur X, g sa restriction à $Y' = f^{-1}(Y)$, et j l'injection de Y' dans X'. On a donc le diagramme commutatif

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j} & X' \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{i} & X. \end{array}$$

Comme précédemment, E est le fibré normal à Y dans X, et $p = \operatorname{codim}_X Y$. On écrira quelquefois E' pour l'image réciproque de E. On verra que f est un isomorphisme en dehors de Y', que g est la projection dans une fibration de fibre l'espace projectif P_{p-1} à $p-1$ dimensions, que $\operatorname{codim}_{X'} Y' = 1$, et que E' contient la restriction de $[Y']$ à Y', qui sera notée L. Enfin on pose $F = E'/L$. C'est un fibré vectoriel de rang $p-1$.

b. Définition de X' par cartes locales. — Au-dessus d'un ouvert affine U ne rencontrant pas Y, on prend U lui-même comme carte locale. Supposons maintenant que $U \cap Y \neq \emptyset$ et que Y admette dans U des paramètres uniformisants $f_i (1 \leq i \leq p)$. Soient t_i des coordonnées homogènes dans P_{p-1}. Alors $f^{-1}(U)$ est la sous-variété de $P_{p-1} \times U$ définie par

$$U' = f^{-1}(U) = \{(t, u) \mid t_i f_j(u) - t_j f_i(u) = 0\}$$

(les t_i étant les coordonnées homogènes de t) et f est la projection sur le deuxième facteur. Il est évident que f est un morphisme, qui est un isomorphisme en dehors de $f^{-1}(Y \cap U)$, et que si $u \in Y$, $f^{-1}(u) = P_{p-1}$. La variété U' est réunion des ouverts affines U'_i où U'_i est l'ensemble des points (t, u) pour lesquels $t_i \neq 0$. Si l'on pose $f'_j = f_j \circ f$, l'équation locale de Y' dans U'_i est $f'_i = 0$, et df'_i est une base de la fibre de L en chaque point de U'_i (*cf.* démonstration de la proposition 13).

Les différentielles df_i sont linéairement indépendantes en tout point de $Y \cap U$ et sur $Y \cap U$ on identifiera E^* à $U \times k^p$ en appliquant $df_1, \ldots, df_p$ sur la base canonique de k^p. Soit $b = (t_1, \ldots, t_p) \in g^{-1}(a)$, $(a \in Y \cap U)$, et supposons que $t_i \neq 0$. Les équations dans $P \times U$ du plan tangent à Y' en b sont $df_j = (t_j/t_i)\, df_i$; il s'ensuit que f applique l'espace normal à Y' en b bijectivement sur la droite $t_1 X_1 + \ldots + t_p X_p$, où (X_i) est la base duale de (df_j), d'où une bijection μ_U de $g^{-1}(a)$ sur le projectif associé à E_a, et une inclusion de L dans E', obtenue en associant à la fibre L_b de L la droite de E'_b qui s'applique sur $t_1 X_1 + \ldots + t_p X_p$ dans l'identification canonique de E'_b à E_a.

Soit V un deuxième ouvert affine de X rencontrant Y, dans lequel Y a les paramètres locaux $g_1, \ldots, g_p$. Soit P' un espace projectif de coordonnées homogènes $s_1, \ldots, s_p$. Alors

$$V' = f^{-1}(V) = \{(s, v) \mid s_i g_j(v) - s_j g_i(v) = 0\}$$

et l'on aura comme précédemment une application canonique μ_V de $g^{-1}(a)$ sur le projectif de E_a. Cela conduit à définir le changement de cartes dans $U' \times V'$ par la règle : $(t, u) = (s, v)$ si ou bien $u = v (u \notin Y)$, ou bien

$$u = v (u \in Y) \qquad \text{et} \qquad \mu_U(t) = \mu_V(s).$$

Il faut voir que cette correspondance est un isomorphisme. Or soit $c \in U \cap V$. Comme les (f_i) et les (g_i) sont deux systèmes de paramètres locaux pour Y, il existe des éléments $a_{ij} \in \mathcal{O}_{c,X}$ formant une matrice inversible dans $\mathcal{O}_{c,X}$

tels que

$$f_i = \sum_j a_{ij} g_j,$$

ce qui entraîne aussi $df_i = \sum_j a_{ij}\, dg_j$ sur Y. Au voisinage d'un point $c' \in f^{-1}(c)$, la correspondance précédente est alors définie par $(s, v) \rightarrow (t, u)$, avec $v = u$ et $t_i = \sum a_{ij}(u) s_j$. On vérifie que

$$f_i t_j - f_j t_i = \sum_{m,n} a_{im} a_{jn} (g_m s_n - g_n s_m)$$

et il s'ensuit aisément que la correspondance envisagée est un isomorphisme.

c. Plongement projectif de X'. — On considère un plongement de X dans un projectif P_N de dimension N, coordonnées homogènes (z_i). Soit $\varphi_i (1 \leqq i \leqq s)$ une base de l'idéal de Y formée de polynômes homogènes, et soit m un entier $\geqq$ maximum des degrés des φ_i. Soit $(h_1, \ldots, h_M)$ une base de l'espace vectoriel sur k des formes de degré m en les z_i qui s'annulent sur Y. On peut donc prendre comme h_i tous les produits de la forme $\varphi_j . \mu$ $(1 \leqq j \leqq s)$, μ parcourant les monômes en les z_i dont le degré est égal à $m - \deg(\varphi_j)$. On en tire immédiatement :

(i) Etant donné $x \in X - Y$, il existe un j pour lequel $h_j(x) \neq 0$. Etant donné $y \in Y$, il existe une forme g de degré m et une partie à p éléments, soit I, de $[0, M]$ telle que les h_i/g $(i \in I)$ forment dans un ouvert affine convenable contenant y un système de paramètres locaux pour Y, et que les $h_i/g \in \mathcal{O}_{y,X}$ pour $i = 0, \ldots, M$.

Les h_i sont les sections du fibré H^m, où H est le fibré associé à une section hyperplane de X. On note h'_i les sections correspondantes du fibré image réciproque, et l'on considère à la manière usuelle « l'application » $h : x' \rightarrow (h'_0(x'), \ldots, h'_M(x'))$ de X' dans P_M définie par cet espace de sections. *A priori*, ce n'est pas une application à proprement parler puisqu'elle n'est pas définie aux points où tous les h'_i s'annulent. Cependant, nous voulons montrer que :

(ii) h est un morphisme;

(iii) si u', $v' \in Y'$ ont la même image dans Y et sont distincts, alors $h(u') \neq h(v')$.

Pour prouver (ii) il suffit de faire voir qu'étant donné $x' \in X'$, il existe un indice k tel que $h'_i / h'_k \in \mathcal{O}_{x',X'}$ $(0 \leqq i \leqq M)$, car les $h'_i(x')/h'_k(x')$ seront alors les coordonnées de $h(x')$ et l'un de ces quotients au moins est $\neq 0$. Vu (i) l'existence de h'_i est évidente si $x' \notin Y'$. Soit maintenant $x' \in Y'$. On peut appliquer la deuxième assertion de (i) et pour simplifier les notations nous supposons que les $f_i = h_i/g$ ($i = 1, \ldots, p$) forment un système de paramètres locaux; soient $t_1, \ldots, t_p$ les coordonnées homogènes de x' dans P (notations du début de b), et supposons que $t_k \neq 0$. Alors $f'_k = 0$ est une équation locale de Y', donc les h'_j/g' sont tous divisibles par f'_k dans $\mathcal{O}_{x', X'}$ et ainsi h est un morphisme en x'. On voit aussi que la $i^{\text{ième}}$ coordonnée homogène de $h(x')$ est t_i/t_k ($1 \leq i \leq p$), ce qui entraîne évidemment (iii).

Cela étant, on considère l'application Ψ de X' dans $X \times P_M$ définie par $\Psi(x') = (f(x'), (x'))$. Vu (ii) et (iii), Ψ est un morphisme bijectif, et il est clair que Ψ est un isomorphisme en dehors de Y'. A l'aide de la normalisation projective et du Main Theorem de Zariski, on en déduit alors que X' est quasi projective.

13. Fin de la démonstration de R-R.

Lemme 18. — *Soit G un fibré vectoriel de rang k sur une variété X. Alors*

$$ch(\lambda_{-1} G) = c_k(G^*)\, T(G^*)^{-1}.$$

Ecrivons la classe de Chern $c(G)$ de G sous la forme

$$c(G) = \prod_1^k (1 + a_i).$$

Alors (*cf.* [9])

$$c(G^*) = \prod (1 - a_i),$$

$$c(\lambda^s G) = \prod_{i_1 < \ldots < i_s} (1 + a_{i_1} + \ldots + a_{i_s}),$$

d'où

$$c_k(G^*) = (-1)^k a_1 \ldots a_k,$$

$$ch(\lambda_{-1} G) = \prod (1 - e^{a_i}),$$

donc

$$ch(\lambda_{-1} G) = T(G^*)^{-1} c_k(G^*).$$

Lemme 19. — *Dans les notations du paragraphe* 12*a on a* :

(a) $\quad f_*(1) = 1$, *donc $f_* f^*$ est l'identité*;

(b) $\quad g_*(c_{p-1}(F)) = 1$,

(c) $\quad f^! i_!(y) = j_!(g^!(y) . \lambda_{-1} F^*) \qquad [y \in K(Y)]$.

(d) $\quad \lambda_{-1} F^* \equiv 0$ *modulo* $(1 - L^*)$ $\quad$ *si* $\; p \geq \dim Y + 2$.

Ce lemme sera démontré dans les paragraphes 14, 15, 16.

PROPOSITION 15. — R-R *est vrai pour une injection.*

Il faut (*cf.* § 11) établir l'égalité

$$(1) \qquad ch\, i_!(y) = i_*(ch\, y \,.\, T(E)^{-1}),$$

et il suffit de le faire dans le cas où $p \geq \dim Y + 2$ (corollaire 2 à la proposition 15). Dans ce cas, $g^!(y).\lambda_{-1}F^* \equiv 0\ (1 - L^*)$ d'après le lemme 19d, donc fait partie de l'image de $K(X')$ par $j^!$ (proposition 13) et (proposition 14) on peut appliquer R-R à $g^!(y).\lambda_{-1}F^*$ et j. Cela donne

$$(2) \qquad ch\, j_!(g^! y \,.\, \lambda_{-1}F^*) = j_*(ch(g^! y \,.\, \lambda_{-1}F^*) \,.\, T(L)^{-1}).$$

Pour en déduire (1), il suffit évidemment de faire voir que

$$(3) \qquad f_*(ch\, j_!(g^! y \,.\, \lambda_{-1}F^*)) = ch\, i_! y,$$

$$(4) \qquad f_* j_*(ch(g^! y \,.\, \lambda_{-1}F^*) \,.\, T(L)^{-1}) = i_*(ch\, y \,.\, T(E)^{-1}).$$

Le lemme 19c montre que le premier membre de (3) est égal à

$$f_*(ch\, f^! i_! y) = f_* f^*(ch\, i_! y),$$

donc au deuxième membre de (3) vu le lemme 19a.

Puisque ch est multiplicatif, on a

$$ch(g^! y \,.\, \lambda_{-1}F^*) = ch\, g^! y \,.\, ch\, \lambda_{-1}F^* = g^*(ch\, y) \,.\, ch\, \lambda_{-1}F^*,$$

donc (lemme 18)

$$ch(g^! y \,.\, \lambda_{-1}F^*) = g^*(ch\, y)\, c_{p-1}(F) \,.\, T(F)^{-1}.$$

Par ailleurs, $E'/L = F$, donc

$$g^*(T(E)) = T(E') = T(F) \,.\, T(L),$$

d'où

$$ch(g^! y \,.\, \lambda_{-1}F^*) \,.\, T(L)^{-1} = c_{p-1}(F) \,.\, g^*(ch\, y \,.\, T(E)^{-1}).$$

Vu (2) (§ 11) et le lemme 19b, l'image par g_* du deuxième membre est égale à $ch\, y \,.\, T(E)^{-1}$ et l'égalité (4) résulte alors de ce que $f_* j_* = i_* g_*$.

14. Démonstration du lemme 19a, b. — L'application f est un isomorphisme en dehors de Y', donc est de degré local 1, donc applique un cycle fondamental sur un cycle fondamental, d'où 19a.

L'application g_* diminue le degré (qui est la codimension géométrique) de $p - 1$, et correspond à l'intégration sur la fibre. Par ailleurs, la restriction de L à une fibre P_{p-1} de g peut s'envisager comme $k^p - \{0\}$, fibré principal de groupe k^*, base P_{p-1}. On sait que la première classe de Chern de ce dernier fibré est l'opposé de la classe d'un hyperplan. Si l'on pose $-u = c_1(L)$, cela entraîne que

$$g_*(u^{p-1}) = 1$$

tandis qu'on a évidemment $g_*(u^i) = 0 \, (0 \leqq i < p-1)$ pour des raisons de dimension.

Puisque $E'/L = F$, on a

$$c(E') = c(F)(1-u),$$

$$c(F) = g^*(c(E)).(1+u+u^2+\ldots),$$

$$c_{p-1}(F) = u^{p-1} + g^*(c_1(E)).u^{p-2} + \ldots + g^*(c_{p-1}(E)),$$

$$g_*(c_{p-1}(F)) = g_*(u^{p-1}) + c_1(E)g_*(u^{p-2}) + \ldots + c_{p-1}(E)g_*(1),$$

d'où

$$g_*(c_{p-1}(F)) = 1.$$

15. **Démonstration du lemme 19*c*.** — Dans ce paragraphe, on écrira $\mathcal{J}$ pour $\mathcal{J}(Y)$, et $\mathcal{J}'$ pour $\mathcal{J}(Y')$. Comme on l'a remarqué au paragraphe **10***b*, $\mathcal{J}'/\mathcal{J}'^2$ (resp. $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$) est le faisceau des germes de sections de L^* (resp. E^*), par conséquent $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}$ est le faisceau des germes de sections de $g^!(E^*) = E'^*$.

En faisant correspondre à un élément $u \in \mathcal{J}_x$ l'élément $u \circ f$ de $\mathcal{J}'_{x'}(f(x') = x)$, on définit de façon évidente un homomorphisme surjectif de $\mathcal{O}_{Y'}$-modules $\mu : \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'} \to \mathcal{J}'/\mathcal{J}'^2$. Cela montre à nouveau que E'^* s'envoie sur L^*, donc que L s'injecte dans E'; le noyau de μ est le faisceau $\mathcal{O}_{Y'}(F^*)$ des germes de sections de F^*, comme on le vérifie aisément; en fait cette vérification est superflue car on sait que le noyau de μ est localement libre (*voir* lemme **8**, § **4**) et correspond par conséquent à un sous-fibré N de E'^* tel que $E'^*/N = L^*$, et représente donc nécessairement le même élément que F^* dans $K(Y')$. On a donc la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{Y'}(F^*) \to \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'} \xrightarrow{\mu} \mathcal{J}'/\mathcal{J}'^2 \to 0. \tag{1}$$

Par linéarité et le théorème **2**, il suffit de prouver le lemme **19***c* lorsque $y = \mathcal{G}$ est un faisceau localement libre. Dans ce cas $g^!(y) = \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}$ est localement libre sur $\mathcal{O}_{Y'}$ et $g^!(y).\lambda_{-1}F^*$ est la somme alternée des

$$\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{O}_{Y'}(\lambda^i F^*) = \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}(\lambda^i F^*).$$

Par ailleurs, $f^! i_!(y)$ est la somme alternée des $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{X'})$; il nous suffira donc de montrer

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{X'}) = \lambda^i \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{X'}) \qquad (i \geqq 1), \tag{2}$$

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{O}_{Y'}(F^*), \tag{3}$$

$$\mathrm{Tor}_j^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathrm{Tor}_j^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{X'}) \qquad (j \geqq 1). \tag{4}$$

Les égalités (2) et (3) correspondent au cas particulier de **19***c* où $y=1$; leur démonstration va être analogue à celle de la proposition **12** (§ **10**). On établira tout d'abord (2) et aussi que $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{X'})$ est annulé par $\mathcal{J}'$, donc s'identifie à un faisceau sur Y'.

Il est clair que les deux membres de (2) sont nuls dans un ouvert ne rencontrant pas Y'. Pour établir (2) au voisinage d'un point $b' \in Y'$, nous reprenons les notations du paragraphe **10***c* et du paragraphe **12***b*. On doit donc calculer l'homologie du complexe.

$$0 \to \mathcal{M}_p \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'} \to \ldots \to \mathcal{O}_{X'}$$

qui peut aussi s'écrire

$$0 \to \mathcal{O}_{X'} \otimes_k \Lambda^p V \to \ldots \to \mathcal{O}_{X'}.$$

Supposons que b' soit dans l'ouvert U'_j où $t_j \neq 0$. Il est clair que ce complexe de faisceaux est isomorphe au complexe

$$0 \to \mathcal{O}_{X'} \otimes_k \Lambda^p V' \to \ldots \to \mathcal{O}_{X'},$$

où V' a une base (e'_i) et où la différentielle est caractérisée par

$$d(1 \otimes e'_j) = f_j \otimes 1, \qquad d(1 \otimes e'_i) = (f_i - t_i f_j / t_j) \otimes 1,$$

et par le fait qu'elle se prolonge en une différentielle d'algèbre. Dans ce nouveau complexe il est immédiat que les cycles de degré extérieur s forment $\mathcal{O}_{X'} \otimes_k \Lambda^s(e'_1, \ldots, \hat{e}'_j, \ldots, e'_p)$ et que les bords de degré extérieur s forment l'idéal

$$f_j . \mathcal{O}_{X'} \otimes_k \Lambda^s(e'_1, \ldots, \hat{e}'_j, \ldots, e'_p).$$

Par conséquent

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{X'}) \cong \mathcal{O}_{Y'} \otimes_k \Lambda^i(e'_1, \ldots, \hat{e}'_j, \ldots, e'_p),$$

ce qui montre que les Tor_i sont des faisceaux sur Y' et, compte tenu de la remarque initiale dans le paragraphe **10***d*, donne aussi (2).

Démonstration de (3). — La suite exacte des Tor, appliquée à

$$0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0,$$

donne la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{X'}) \to \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'} \xrightarrow{g} \mathcal{O}_{X'}.$$

Il est clair que si $b = f(b')$, alors $\mathcal{J}'_{b'} = \mathcal{J}_b . \mathcal{O}_{b', X'}$, donc l'image de g est $\mathcal{J}'$ et l'on obtient la suite exacte

$$(5) \qquad 0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{X'}) \to \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'} \to \mathcal{J}' \to 0.$$

Puisque $\mathrm{Tor}_1(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{X'})$ est un faisceau sur Y', on peut écrire

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{X'}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{Y'} = \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{X'}) \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{O}_{Y'} = \mathrm{Tor}_1(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{X'}).$$

D'autre part, $\mathcal{J}'$ s'identifie à $\mathcal{O}_{X'}([Y']^{-1})$ et est localement libre, donc $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{J}', \mathcal{O}_{Y'}) = 0$ et la suite exacte des Tor, appliquée à (5), donne la suite exacte

$$(6) \qquad 0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{X'}) \to \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{Y'} \xrightarrow{g} \mathcal{J}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{Y'} \to 0.$$

Il est immédiat que l'image canonique de $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{Y'}$ (resp. $\mathcal{J}'^2 \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{Y'}$) dans $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{Y'}$ (resp. $\mathcal{J}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{Y'}$) est nulle, d'où des isomorphismes canoniques

$$\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{Y'} = \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{Y'} = \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'},$$
$$\mathcal{J}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{Y'} = \mathcal{J}'/\mathcal{J}'^2 \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{Y'} = \mathcal{J}'/\mathcal{J}'^2,$$

qui transforment g en l'homomorphisme μ de la suite (1). L'égalité (2) résulte donc de (1) et (6).

L'égalité (4) se déduit alors d'une formule d'associativité des Tor (*cf.* Dipl., p. 345). On considère $T(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{O}_{X'}$ comme foncteur en $\mathcal{G}$, $\mathcal{O}_{X'}$. Pour calculer ses foncteurs dérivés gauches $L_i T$, on a deux suites spectrales, de termes E_2 respectifs

$$E_2^{ij} = \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_Y}(\mathrm{Tor}_j^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_Y), \mathcal{G})$$
$$E_2'^{ji} = \mathrm{Tor}_j^{\mathcal{O}_X}(\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, \mathcal{O}_Y), \mathcal{O}_{X'}).$$

Il en résulte évidemment $E_2^{ij} = E_2'^{ji} = 0$ si $i > 0$, donc que

$$E_2^{0j} = E_2'^{j0} = L_j T(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{X'});$$

comme E_2^{0j} et $E_2'^{j0}$ sont respectivement égaux au 2^e^ et au 1^er^ membre de (4), cette égalité est démontrée.

16. Démonstration du lemme 19*d*.

Lemme 20. — *Soit G un fibré vectoriel ample de rang $q+k$ sur Y, ($q = \dim Y$; $k \geq 0$). Alors G contient un sous-fibré trivial de rang k.*

« G ample » signifie qu'en chaque point y la fibre G_y est engendrée par des sections. Il existe alors un espace vectoriel V sur k de sections, de dimension finie, tel que l'application $r_y : V \to G_y$ qui associe à chaque section sa valeur en y soit surjective pour tout $y \in Y$. (Si Y n'est pas complète, prendre un recouvrement par des ouverts affines dans lesquels cela est vrai, puis en extraire un recouvrement fini par « quasi-compacité ».) On a donc une suite exacte

$$0 \to N_y \to V \to E_y \to 0$$

pour tout $y \in Y$, où $\operatorname{codim}_V N_y = q + k$. Les N_y forment un sous-fibré vectoriel N' du fibré trivial $V \times Y$, d'après le lemme 8 du paragraphe 4. L'injection des N_y dans V définit alors un morphisme $u : N \to V$. Comme $\dim V = q + \dim N_y$, l'adhérence de $\operatorname{Im} u$ est de $\operatorname{codim} \geqq k$. Comme $\operatorname{Im} u$ est une réunion de sous-espaces vectoriels, $\overline{\operatorname{Im} u}$ est une variété homogène; par conséquent, il existe un sous-espace W de dimension k dont l'intersection avec $\overline{\operatorname{Im} u}$ se réduit à zéro. On a ainsi $W \cap N_y = (0)$ pour tout $y \in Y$, donc W définit le sous-fibré cherché. (Pour cette démonstration, *voir* ATIYAH, [1].)

LEMME 21. — *Soit G un fibré vectoriel de rang $p = q + k$ sur Y, ($q = \dim Y$). Alors $\lambda^s(G - k) = 0$ pour $s \geqq q + 1$.*

Soit h le fibré associé à une section hyperplane de Y. On a (corollaire à la proposition 11, § 10)

$$(1 - h)^{q+1} = 0,$$

donc $h = 1 + u$, avec $u^{q+1} = 0$, d'où

$$h^n = \sum_{0 \leqq i \leqq q} \binom{n}{i} u^i.$$

Il s'ensuit que

$$\lambda_t(Gh^n - k) = \prod_1^q \lambda_t(Gu^i)^{\binom{n}{i}} \cdot (1 - t)^{-k}$$

et le lecteur se fera un plaisir d'en déduire que $\lambda^s(Gh^n - k)$ est de la forme

$$\lambda^s(Gh^n - k) = \sum_1^{m_s} B_{s,i} P_{s,i}(n),$$

où $B_{s,i} \in K(Y)$, et où $P_{s,i}(n)$ est un polynôme à coefficients rationnels qui pour tout $n > 0$ assez grand prend une valeur entière. On sait alors (HILBERT) que $P_{s,i}$ est combinaison linéaire à coefficients entiers des polynômes

$$\binom{X}{j} = X(X - 1) \ldots (X - j + 1)/j!$$

donc finalement

$$\lambda^s(Gh^n - k) = \sum_0^{n_s} A_{s,i} \binom{n}{i} \qquad [A_{s,i} \in K(Y)]. \tag{1}$$

Pour $n > n_0$, le fibré Gh^n est ample (FAC), donc (lemme 20) contient un fibré trivial de rang k, et $Gh^n - k$ s'identifie à un fibré de rang q; sa $s^{\text{ième}}$ puissance extérieure est alors évidemment nulle pour $s \geqq q + 1$. Vu (1), il nous suffira de montrer que si le polynôme

$$P(n) = \sum_{0}^{m} A_i \binom{n}{i} \qquad [A_i \in K(Y)]$$

est nul pour $n > n_0$, alors tous les A_i sont nuls. Pour cela on procède par récurrence sur m, et l'on considère la différence première

$$\Delta P(n) = P(n+1) - P(n) = \sum_{1}^{m} A_i \binom{n}{i-1}$$

$$\Delta P(n) = \sum_{0}^{m-1} A_{j+1} \binom{n}{j}.$$

Comme $\Delta P(n) = 0$ pour $n > n_0$ les $A_i (1 \leqq i \leqq m)$ sont nuls par hypothèse de récurrence, d'où aussi évidemment $A_0 = 0$.

LEMME 22. — *Soient G et L des fibrés vectoriels sur Y, de rangs respectifs p et 1. Alors*

(a) $$\lambda^p(G-1) = (-1)^p \lambda_{-1}(G),$$

(b) $$\lambda_t G(1-L) \equiv 1 \textit{ modulo } (1-L),$$

donc si $G_1 \equiv G_2$ $(1-L)$, $(G_1, G_2 \in K(Y))$, alors $\lambda^i G_1 \equiv \lambda^i G_2$ $(1-L)$ pour tout $i \geqq 1$.

a. On a

$$\lambda_t(G-1) = \lambda_t(G)/\lambda_t(1) = \lambda_t(G).(1+t)^{-1},$$
$$= \lambda_t(G)(1 - t + t^2 - t^3 + \ldots)$$

et il suffit de comparer les coefficients de t^p.

b. On a

$$\lambda^i(G.L) = L^i.\lambda^i G, \qquad \text{donc} \quad \lambda^i(G.L) \equiv \lambda^i(G) \text{ modulo } (1-L)$$

ou encore $\lambda_t(GL) \equiv \lambda_t(G)$ $(1-L)$ ce qui donne *b*.

DÉMONSTRATION DU LEMME 19*d*. — D'après le lemme 22, on a

$$(-1)^{p-1} \lambda_{-1} F^\star = \lambda^{p-1}(F^\star - 1).$$

Mais $E'^\star / F^\star = L^\star$, donc $F^\star - 1 \equiv E'^\star - 2$ modulo $(1-L^\star)$, d'où (lemme 22)

$$\lambda_{-1} F^\star \equiv \lambda^{p-1}(E'^\star - 2) \quad \operatorname{mod}(1-L^\star),$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\lambda_{-1} F^\star \equiv g^!(\lambda^{p-1}(E'^\star - 2)) \quad \operatorname{mod}(1-L^\star).$$

Il suffit donc de faire voir que $\lambda^{p-1}(E^{\star}-2)=0$ si $p \geqq \dim Y+2$, ce qui résulte du lemme 21.

17. Une application de R-R. — L'application suivante (signalée par HIRZEBRUCH) concerne « l'intégration sur la fibre » dans un fibré algébrique. On se place dans le cas classique, c'est-à-dire $k=\mathbf{C}$.

PROPOSITION 16. — *Soit (E, B, F, g) un fibré algébrique où E, B, F sont projectives, irréductibles, non singulières, et soit ξ le fibré tangent le long des fibres. Alors*

$$g_{*}(T(\xi))=To(F).1.$$

[Ici $To(X)$ désigne le genre de Todd de X.]

Le fibré tangent à E est extension de ξ par le fibré induit du fibré tangent à B, donc

$$T(X)=g^{\star}(T(B)).T(\xi),$$

d'où

$$g_{*}(T(X))=T(B).g_{*}(T(\xi)).$$

Appliquons R-R à g et au fibré 1 sur X. On a donc

$$g_{*}(T(X))=ch\, g_{!}(1).T(B),$$

donc, vu ce qui précède,

$$g_{*}(T(\xi))=ch\, g_{!}(1).$$

Il nous faut calculer $g_{!}(1)$. Soit U un ouvert affine de B au-dessus duquel le fibré est trivial. On a par Künneth (*cf.* démonstration du lemme 16)

$$H^{q}(U\times F, \mathcal{O}_{X})=\sum_{i+j=q} H^{i}(U, \mathcal{O}_{U})\otimes H^{j}(F, \mathcal{O}_{F}).$$

Comme U est affine, $H^{i}(U, \mathcal{O}_{U})=0$ pour $i>0$ et H^{0} s'identifie aux fonctions régulières dans U. D'autre part, dans un fibré algébrique, le groupe structural G est connexe (par hypothèse), donc opère trivialement sur $H^{j}(F, \mathcal{O}_{F})$, composante de type $(0, j)$ de $H^{j}(F, \mathbf{C})$ ([5]). Il en résulte

$$g_{!}(1)=\mathcal{O}_{B}\otimes\left(\sum_{q}(-1)^{q}H^{q}(F, \mathcal{O}_{F})\right).$$

Ainsi $g_{!}(1)$ est somme alternée de fibrés triviaux, donc $g_{!}(1)$ n'a qu'une composante en degré 0, qui est la somme alternée des $\dim H^{q}(F, \mathcal{O}_{F})$, ce qui démontre la proposition.

([5]) Nous ignorons si le fait que G opère trivialement sur les $H^{j}(F, \mathcal{O}_{F})$ reste vrai en caractéristique $p>0$. C'est pourquoi nous avons dû supposer que $k=\mathbf{C}$.

REMARQUE. — Cette proposition signifie que la suite multiplicative qui définit la classe de Todd est « strictement multiplicative » pour les fibrés algébriques dans la terminologie de Borel-Hirzebruch [2]. Il en résulte en particulier que $To(E) = To(B).To(F)$. Dans [2], ce caractère de stricte multiplicativité est démontré dans le cas presque complexe, différentiable, lorsque la fibre est un G/T ou un espace apparenté.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ATIYAH (M. F.). — *Vector bundles over an elliptic curve* (*Proc. London math. Soc.*, t. 7, 1957, p. 414-452).

[2] BOREL (A.) et HIRZEBRUCH (F.). — *Characteristic classes and homogeneous spaces*, II (*Amer. J. Math.* à paraître).

[3] CARTAN (H.) et EILENBERG (S.). — *Homological algebra*, Princeton, Princeton University Press, 1956 (*Princeton Math. Series*, n° 19) (*cité* « Dipl. »).

[4] CHEVALLEY (C.). — *La notion de correspondance propre en géométrie algébrique* (*Séminaire Bourbaki*, t. 10, 1957-1958, n° 152).

[5] CHOW (W. L.). — *On equivalence classes of cycles in an algebraic variety* (*Ann. Math.*, t. 64, 1956, p. 450-479).

[6] GROTHENDIECK (A.). — *Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents* (*Séminaire H. Cartan*, t. 9, 1956-1957, n° 2).

[7] GROTHENDIECK (A.). — *Sur quelques points d'algèbre homologique* (*Tohoku math. J.*, t. 9, 1957, p. 119-221) (*cité* « Tohoku »).

[8] GROTHENDIECK (A.). — *Bull. Soc. math. France*, t. 80, 1958, p. 137-154.

[9] HIRZEBRUCH (F.). — *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Berlin, Springer, 1956 (*Ergebnisse der Mathematik*, neue Folge, Heft 9).

[10] SAMUEL (P.). — *Rational equivalence of arbitrary cycles* (*Amer. J. Math.*, t. 78, 1956, p. 383-400).

[11] Séminaire CHEVALLEY : *Anneaux de Chow et applications*, t. 2, 1958.

[12] SERRE (J.-P.). — *Faisceaux algébriques cohérents* (*Ann. Math.*, t. 61, 1955, p. 197-278) (*cité* « FAC »).

[13] SERRE (J.-P.). — *Géométrie algébrique et géométrie analytique* (*Ann. Inst. Fourier*, *Grenoble*, t. 6, 1955-1956. p. 1-42) (*cité* « GAGA »).

[14] SERRE (J.-P.). — *Sur la cohomologie des variétés algébriques* (*J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 36, 1957, p. 1-16) (*cité* « jub. Denjoy »).

(Manuscrit reçu le 9 mai 1958.)

Armand BOREL,
Institute for Advanced Study,
Princeton, N.-J. (États-Unis).

Jean-Pierre SERRE,
Collège de France,
Paris